קומבינטוריקה

תורת המנייה

כלל המכפלה

1. <u>משפט (כלל המכפלה):</u> נניח שעורכים שני ניסויים, א ו־ב. אם ניסוי א יכול להניב אחת מ־m תוצאות אפשריות, וגם בעקבות כל תוצאה שמתקבלת בניסוי א קיימות n תוצאות אפשריות בניסוי ב, אז לניסוי המורכב משניהם $m\cdot n$ תוצאות אפשריות.

<u>דוגמה:</u> מתוך קבוצה של 10 נשים, שלכל אחת 3 ילדים בוחרים אמא אחת ועוד מילדיה. כמה תוצאות אפשריות יש לבחירה?

$$\boxed{10\cdot 3=30}$$

<u>הערה:</u> ניתן להרחיב את הכלל לכל N ניסויים.

תמורות

את האותיות a,b,c ניתן לסדר ב־6 אופנים: abc, acb, bac, bca, cab, cba. כל סידור מכונה תמורה (פרמוטציה)

<u>לפי כלל המכפלה, עבור n עצמים יש $n!$ תמורות</u>

<u>דוגמה:</u> 9 ילדים חובטים בכדור, בזה אחר זה. כמה סדרי חבטה שונים ייתכנו? יש $9!=362{,}880$

כאשר יש עצמים זהים, כמות התמורות השונות של n עצמים:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!,\dots n_r!}$$

צירופים

כמות הדרכים לבחור קבוצה של r עצמים מתוך n:

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)$$

אבל כמות הקבוצות השונות היא

$$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!} = \boxed{\frac{n!}{(n-r)!\,r!}}$$

<u>סימון:</u> אנו מגדירים את הסימן $\binom{n}{r}$ לכל $0 \le r \le n$ ע"י $\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r}$, ואומרים ש $\binom{n}{r}$ הוא מספר הצרופים האופשריים של r עצמים מתוך n עצמים, כלומר מספר הקבוצות האופשריות.

2. <u>תכונות:</u>

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n}{r-1}$$

3. <u>משפט (נוסחת הבינום):</u>

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

עקרון ההכלה וההדחה

משפט (נוסחת ההכלה וההדחה):

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right|$$

ו. נרשום את תוצאות הניסוי כך:

$$\begin{matrix} (1,1), & (1,2), & \dots, & (1,n) \\ (2,1), & (2,2), & \dots, & (2,n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m,1), & (m,2), & \dots, & (m,n) \end{matrix}$$

יש $m \cdot n$ תוצאות.

$\blacksquare$

2. נניח שיש קבוצה של n עצמים, ונבחר עצם A מתוכה.

כמות הקבוצות מגודל r שניתן לבנות המכילות את A הינו $\binom{n-1}{r-1}$

וכמות הקבוצות מגודל r שניתן לבנות בלי A הינו $\binom{n}{r-1}$

אבל ידוע שסכום שתי הכמויות הללו הוא $\binom{n}{r}$, כמות הקבוצות מגודל r שניתן לבנות. כנדרש

$\blacksquare$

3. נתבונן בביטוי $(x+y)^n = (x+y)(x+y)(x+y)\cdots$

נשים לב שבביטוי יהיו 2^n מחוברים, שכל אחד מהם מכיל n גורמים. יפוס שלכל $0 \le k \le n$ מופיע הביטוי $x^k y^{n-k}$ בלפחות אחד מ 2^n המחוברים. מכוון שאין הבדל מאיזה גורם במכפלה לקחנו את ה x-ים, אלא רק כמה פעמים, ומכוון שכל ה x-ים "זהים" תודות לאסוציאטיביות חילופיות וקיבוציות של כפל ב $\mathbb{R}$, כמות הפעמים שמופיע הביטוי $x^k y^{n-k}$ שקולה למספר הצירופים האפשריים של k x-ים מתוך n, כלומר $\binom{n}{k}$. לכן

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\blacksquare$