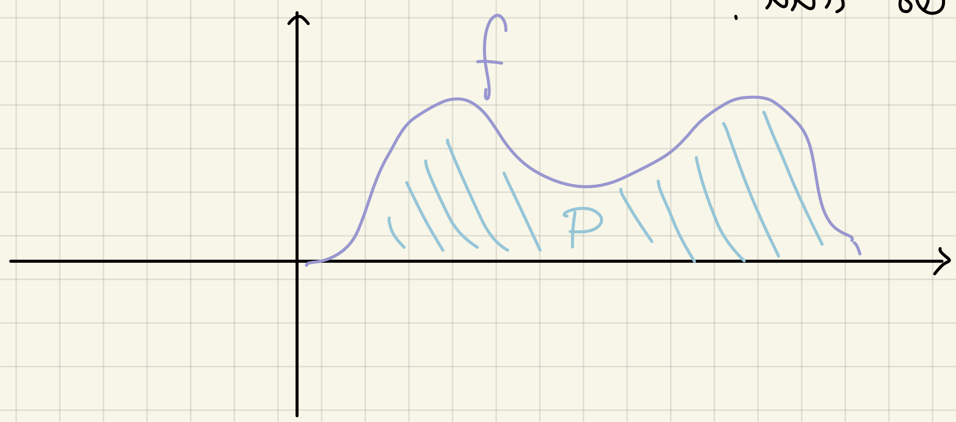
משתנה מקרי רציף

קבוצת הערכים של X היא לא בת מניה

<u>הגדרה:</u> בהינתן משתנה מקרי $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ופונקציה $f_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

המקיימת $P(X\in(a,b))=\int_a^b f_X(t)dt$ לכל קטע $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$.

מ"מ כזה יקרא משתנה מקרי רציף והפונק' f_X תיקרא פונקציית צפיפות ההסתברות של המ"מ.



נירמול: $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt = 1$$

תוחלת: $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt$$

שונות: $$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)dt$$

הצטברות:

$$F_X(S) = P(X \leq S) = \int_{-\infty}^{S} f_X(t)\,dt$$

הקשר בין הצפיפות להצטברות:

$$f_X(t) = \frac{dF_X}{dt}$$

צפיפות אחידה

<u>הגדרה:</u> נאמר ש X הוא משתנה מקרי אחיד בקטע $[a,b]$

אם פונק' הצפיפות שלו נתונה ע"י

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , t \in [a,b] \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

ונסמן $X \sim U(a,b)$

תוחלת:

$$E(X) = \frac{1}{2}(a+b)$$

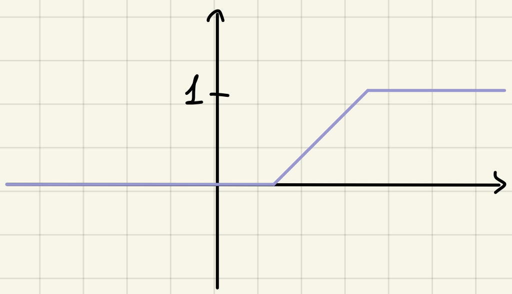
שונות:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2$$

הצטברות:

$$F_X(S) = P(X \leq S) = \begin{cases} 0 & , S < a \\ \frac{S-a}{b-a} & , a \leq S \leq b \\ 1 & , b < S \end{cases}$$



משתנה מקרי מעריכי

הגדרה: משתנה מקרי שפונק' הצפיפות שלו נתונה ע"י $f_X(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ $(t\geq 0)$ נקרא משתנה מקרי מעריכי ומסמנים $X\sim Exp(\lambda)$

תוחלת:

$$E(X)=\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{\lambda}$$

שונות:

$$Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

הצטברותי:

$$F_X(t)=1-e^{-\lambda t}$$

חציון:

$$F(S)=\frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$1-e^{-\lambda S}=\frac{1}{2}$$

$$e^{-\lambda S}=\frac{1}{2}$$

$$S=\frac{1}{\lambda}\ln 2$$

ריבוי משתנים

$$P(X\in(x,x+dx),\ Y\in(y,y+dy))=f_{XY}\,dxdy$$

נירמול:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}\,dxdy=1$$

שוליות:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

תוחלת:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)\,dxdy$$

טרנספורמציה של משתנה מקרי

נניח מ"מ X עם צפיפות $f_X(t)$. כעת נניח $Y=h(X)$ כאשר $h: \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ הפיכה. אזי

$$f_Y(h(t))=f_X(t)\cdot\frac{1}{|h'(t)|}$$

ומכאן

$$f_Y(t)=f_X(h^{-1}(t))\cdot\frac{1}{|h'(h^{-1}(t))|}$$

דוגמה:

$X\sim Exp(\lambda)$ $\Leftarrow$ $f_X(t)=\lambda e^{-\lambda t}$

$Y=aX$ $\quad(a>0)$

$h(t)=at$

$h^{-1}(t)=\frac{1}{a}t$ $\qquad h'(t)=a \Rightarrow f_Y(t)=\frac{1}{a}\lambda e^{-\frac{\lambda}{a}t}$

$X\sim Exp(\lambda) \quad \Rightarrow Y=aX\sim Exp\left(\frac{\lambda}{a}\right)$ <u>מסקנה</u>

התפלגות נורמלית

<u>הגדרה:</u> פונקציית הצפיפות של התפלגות נורמלית בעלת תוחלת μ ושונות σ^2 היא

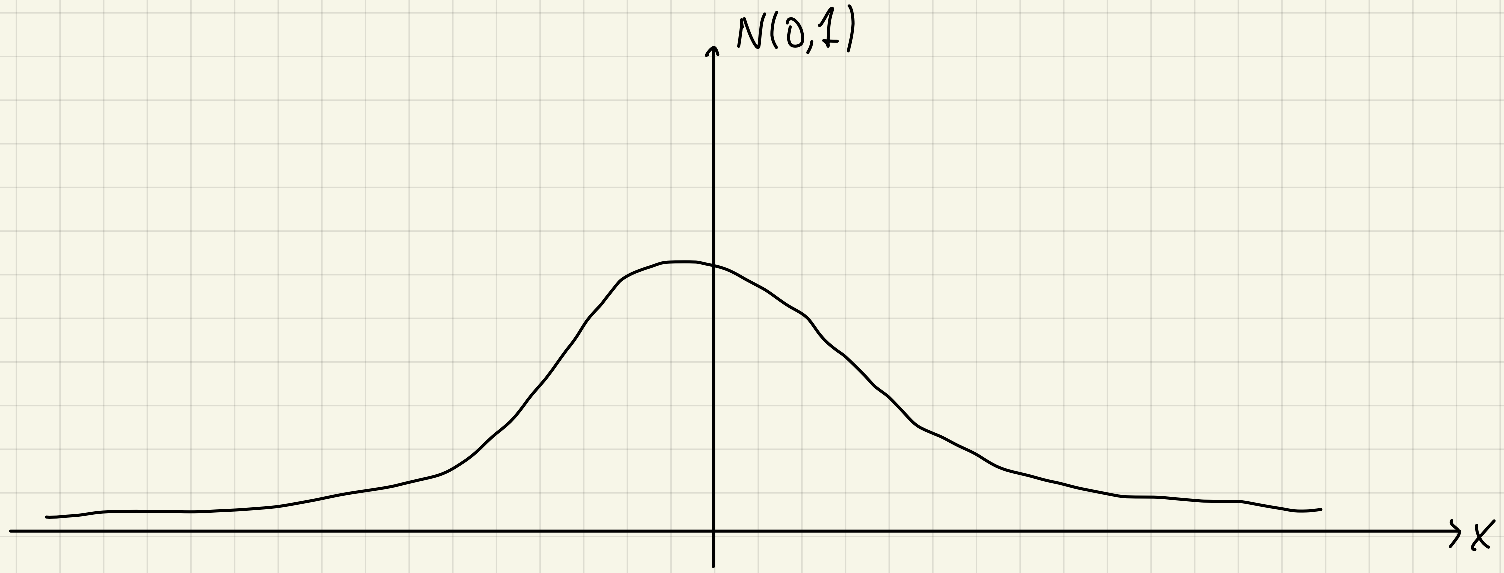
$$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

זו פונק' סימטרית סביב התוחלת, ובעלת שתי נק' פיתול במרחק סט"ת תקן אחת מן הממוצע כלומר בנקודות $\mu\pm\sigma$. את העובדה שמ"מ X הוא בעל התפלגות כזו מסמנים

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)$$

<u>הגדרה:</u> ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית היא $X\sim N(0,1)$ ויוצגו

$$f_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$$



טענה: יהי $Z\sim N(0,1)$, $X=\mu+\sigma Z$. אזי

$$X\sim N(\mu,S^2)$$

מומנטים

הגדרה: המומנט ה n-י של מ"מ הוא $E(X^n)$

פונק' יוצרת מומנטים: היא פונק' המוגדרת להיות $M_X(t)=E(e^{tX})$

וניתן לגזור ממנה מומנטים כי $E(X^n)=M_X^{(n)}(t)$

דוגמה: עבור $X\sim N(\mu,S^2)$, $M_X(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}S^2t^2}$

משפט: אם $M_X(t)=M_Y(t)$ אזי $f_X(t)=f_Y(t)$

ומסנים $X\longrightarrow Y$

משפט הגבול המרכזי

1. משפט (משפט) הגבול המרכזי: תהי $X_1,\dots,X_n$ סדרת מ"מ ב"ת הנגזרים מאותה התפלגות עם תוחלת μ ושונות S^2

נגדיר $\bar{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$. אזי בגבול $n\to\infty$ מתקיים

$$\frac{\bar{X}_n-\mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow Z\sim N(0,1)$$

כלומר
$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{S^2}{n}\right)$$

<u>הערות:</u>

1) ממוצע עבור n גדול מתפלג נורמלית

2) הוא זוכר את התוחלת μ

3) השונות הולכת וקטנה, בגבול $n\to\infty$, $Var(\bar{X}_n)\to 0$

4) כל יתר הפרטים חוץ מ μ ו S^2 נמחקים.

<u>המחשה:</u> $X\sim U(1,6)$ בדיד

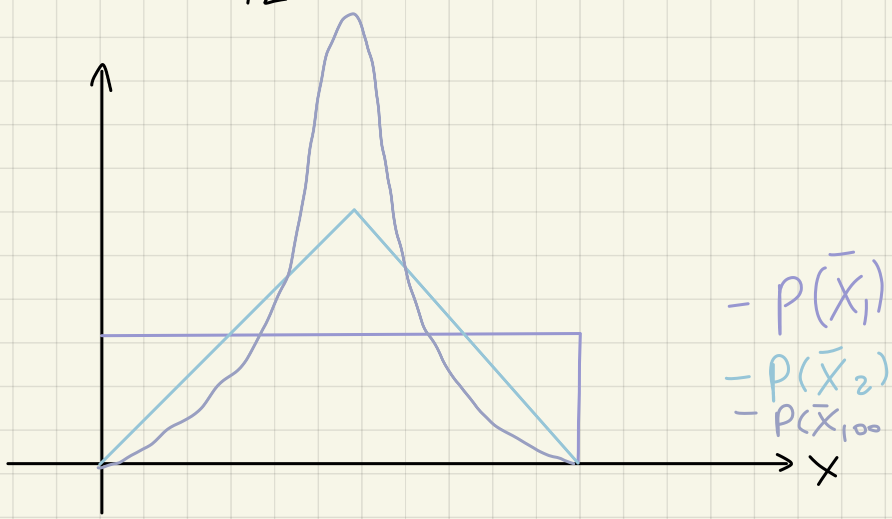
$E(X)=\mu=3.5$ $\quad Var(X)=S^2=\frac{35}{12}$

$\bar{X}_1=X_1$

$\bar{X}_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$

$\vdots$

$\bar{X}_n=\frac{X_1+\dots+X_n}{n}$



שיטות קירוב

2. משפט (אי-שוויון מרקוב): X מ"מ חיובי עם תוחלת $E(X)$
אז לכל $a>0$ מתקיים $P(X\geq aE(X))\leq\frac{1}{a}$

3. משפט (אי-שוויון צ'בישב): מ"מ X עם תוחלת μ ושונות S^2
מתקיים $P(|X-\mu|\geq k\cdot S)\leq\frac{1}{k^2}$

דוגמה: נאמר שציוני הסטודנטים מתפלגים עם ממוצע 85 וסטיית
תקן 5. מה ההסתברות שמישהו קיבל 70 ומטה.
זה 3 סטיות תקן, לכן לפי צ'בישב
$P(|X-85|\geq 3S)\leq\frac{1}{9}$

חוקי המספרים הגדולים

הגדרה: סדרת מ"מ Y_n מתכנסת בהסתברות לקבוע μ אם
לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}P(|Y_n-\mu|<\varepsilon)=1$
כלומר, עבור $n\to\infty$, $P(Y_n=\mu)\to 1$
סימנים $Y_n\xrightarrow{P}\mu$

4. משפט (החוק החלש של המספרים הגדולים): יהי $X_1,X_2,\dots$
סדרת מ"מ בלתי מתואמים עם תוחלת μ ושונות S^2 אז
$\overline{X}_n=\frac{1}{n}(X_1+\dots+X_n)\xrightarrow{P}\mu$

משפט (החוק החזק של המספרים הגדולים): יהיו $X_1, X_2, \ldots$

סדרת מ"מ בלתי תלויים עם תוחלת μ ושונות σ^2 אזי

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \xrightarrow{a.a} \mu$$

דוגמה: נאמר שציוני הסטודנטים מתפלגים נורמלית: $X \sim N(85,25)$

מה ההסתברות שפני קיבל 70 ומטה

נעביר ל- $Z \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-85}{5}$$

$$X \le 70 \Longrightarrow Z \le \frac{70-85}{5} = -3$$

$$\downarrow$$

$$P = 0.0015$$

הערה: בהתפלגות רחבת זנב, יהיו מומנטים מתבדרים.

בזנב מעריכי,

$\gamma = 1, \quad E(X), Var(X) \to \infty$

$\gamma = 2, \quad E(X), Var(X) \to \infty$

$\gamma = 3, \quad E(X) \to \mu, \quad Var(X) \to \infty$

$\gamma = 4, \quad E(X) = \mu \quad Var(X) = \sigma^2$

1. נוכיח רק עבור $\mu=0,\ \sigma^2=1$

צ"ל $\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(0,\frac{1}{n}\right)$

נסתכל על $\sqrt{n}\bar{X}_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{\sqrt{n}}$

$$M_{\sqrt{n}\bar{X}_n}(t) = E\left(e^{\sqrt{n}\bar{X}_n t}\right) = E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}(X_1+\dots+X_n)}\right) =$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{X_i\cdot\frac{t}{\sqrt{n}}}\right) \underset{\text{בת"ל}}{=} \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{X_i\cdot\frac{t}{\sqrt{n}}}\right) = \left[E\left(e^{X\cdot\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)\right]^n =$$

$$= \left[M_X\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n \underset{\text{תוחלת 0 שונות 1}}{=} \left(1+\frac{t^2}{2n}+\dots\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2/2}{n}\right)^n = e^{\frac{t^2}{2}} =$$

$$= M_Z(t)$$

לכן

$$\sqrt{n}\bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z\sim(0,1)$$

$$\Longrightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} N\left(0,\frac{1}{n}\right) \quad \blacksquare$$

2.

$$E(X) = \underbrace{E(X \mid X < aE(X)) \cdot P(X < aE(X))}_{\geq 0} + E(X \mid X \geq aE(X)) P(X \geq aE(X))$$

לכן

$$E(X) \geq \underbrace{E(X \mid X \geq aE(X))}_{\geq aE(X)} P(X \geq aE(X))$$

כלומר

$$E(X) \geq aE(X) P(X \geq aE(X))$$

$$P(X \geq aE(X)) \leq \frac{1}{a}$$

$Y = |X - \mu|$ $\quad$ |NO| .3

$$Y^2 = (X-\mu)^2$$

$$E(Y^2) = E[(X-\mu)^2] = Var(X) = S^2$$

$$P(|X-\mu| \geq kS) = P[(X-\mu)^2 \geq k^2 S^2] = P[Y^2 \geq k^2 E(Y^2)] \leq \frac{1}{k^2}$$

4.

$P(|\bar{X}_n-\mu|\geq \varepsilon) = P\left(|\bar{X}_n-\mu| \geq \frac{\varepsilon}{S_n}\cdot S_n\right) \leq$ ← צ'בישב

כאשר S_n סטיית התקן של $\bar{X}_n$

$$\leq \frac{S_n^2}{\varepsilon^2}$$

בלתי מתואמים

$$S_n^2 = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\, n\cdot S^2 =$$

$$= \frac{S^2}{n}$$

$$P(|\bar{X}_n-\mu|\geq \varepsilon) \leq \frac{S^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$