תורת ההסתברות

מרחב מדגם ומאורעות

הגדרה: מרחב מדגם של ניסוי מסוים הוא קבוצת כל התוצאות האפשריות, הנקודות של הניסוי.

סימון: מסמנים מרחב מדגם ע"י Ω

דוגמה: 1) אם הניסוי הוא הטלת קוביה, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

2) אם הניסוי הוא מירוץ של 7 סוסים,

$\Omega = \{(1,2,3,4,5,6\ 7)$ כל $7!$ התמורות של $\}$

הגדרה: כל תת קבוצה $\Omega \supseteq E$ נקראת מאורע
אם נקודה השייכת ל E התקבלה בניסוי, אומרים שהתמודד
E התרחש

דוגמה: בדוגמה שלעיל

$$E = \{(3,a,b,c,d,e,f) \mid a,b,c,d,e,f \text{ שונים } \in \{1,2,4,5,6,7\}\}$$

או בדיבור $E = \{$כל התוצאות שמתחילות ב 3$\}$ הוא המאורע שסוס 3 ניצח במירוץ.

הערה: בהינתן מרחב מדגם Ω, Ω ו-$\emptyset$ מאורעות שלו.

פעולות על מאורעות:

על מאורעות ניתן להפעיל את כל הפעולות שניתן להפעיל על קבוצות - חיתוך, איחוד, משלים, ...

הגדרה: יהיו $E,F \subseteq \Omega$. אם $E \cap F = \emptyset$ אז אומרים שהמאורעות זרים.

אקסיומות ההסתברות

ניתן להגדיר את המושג הסתברות בתור שכיחות יחסית. כלומר אם נסמן ב-$n(E)$ את מס' הפעמים שהתרחש המאורע E ב-n חזרות, אזי ההסתברות היא:

$$\boxed{P(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}}$$

אך כפי שבעז יוגדר היטב אנו צריכים מספר אקסיומות:

הגדרה: קבוצות $A_1, \dots, A_n$ המקיימות שלכל $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ נקראות זרות בזוגות

אקסיומות (אקסיומות ההסתברות):

1) $0 \le P(E) \le 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) לכל $E_1, E_2, \ldots$ מאורעות זרים בזוגות, מתקיים

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

הסבר ל-3: אם $E_1, E_2, \ldots$ מאורעות זרים בזוגות, אזי ההסתברות שאחד מהם יתרחש שווה לסכום ההסתברויות שכל אחד מהם יתרחש בנפרד

1. משפט: $P(\emptyset) = 0$

דוגמה 1) אם מבצעים ניסוי של הטלת מטבע, $\Omega = \{H, T\}$

$$P(\{H\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{2}$$

2) אם מבצעים ניסוי של הטלת קוביה, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$P(\text{מספר זוגי}) = P(\{2,4,6\}) \underset{\uparrow}{=} P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) =$$

אקסיומה 3

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

טענות בסיסיות

2. טענה: $P(E^c)=1-P(E)$

3. טענה: אם $E\subseteq F$ אזי $P(E)\leq P(F)$

4. טענה: $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

טענה (עקרון ההכלה וההפרדה):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\sum_{i_1<\dots i_m}P\left(A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_m}\right)$$

1 יהיו n מאורעות של Ω:

$E_1 = \Omega$

$E_2, \dots, E_n = \emptyset$

אכן זרים בזוגות: $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, וכן $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$

מתקיים $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

לכן לפי אקסיומה 3:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{P(\Omega)} = \cancel{P(\Omega)} + (n-1) \cdot P(\emptyset)$$

$$\downarrow$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$\blacksquare$

2. ידוע E ו- E^c מאורעות זרים, וכן $E \cup E^c = \Omega$

לפי אקסיומות 2 ו-3:

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

לכן

$$P(E) = 1 - P(E^c)$$

$\blacksquare$

3. נסמן את F כאיחוד של המאורעות הזרים:

$$F = E \cup (F/E)$$

לכן לפי אקסיומה 3:

$$P(F) = P(E) + P(F/E)$$

וכן ידוע הטווח של פונק' ההסתברות הוא $[0,1]$ לכן

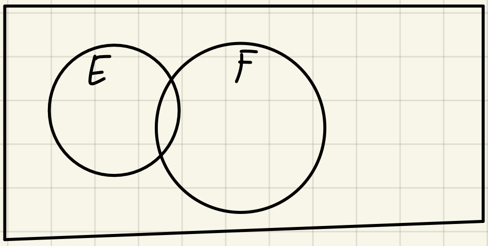
$P(F/E) \geq 0$ כלומר

$$P(F) \geq P(E)$$

$\blacksquare$

4. נציג את $E\cup F$ בתור איחוד קבוצות זרות:

$$E\cup F = E\cup(E^c\cap F)$$



לכן לפי אקסיומה 3:

$$P(E\cup F) = P(E\cup(E^c\cap F)) = P(E)+P(E^c\cap F) \quad (*)$$

אבל:

$$F = (E\cap F)\cup(E^c\cap F)$$

ו-$E\cap F$ ו-$E^c\cap F$ קבוצות זרות לכן לפי אקסיומה 3:

$$P(F) = P(E\cap F)+P(E^c\cap F)$$

$$\downarrow$$

$$P(E^c\cap F) = P(F)-P(E\cap F)$$

נציב ב $(*)$

$$P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

$\blacksquare$