מרתון מבני נתונים (קדם תקופת מבחנים)

נכתב ע"י צבי מינץ

ניתוח סיבוכיות

```
void Stage1(int n) {
    for(int i=0; i<n; i++) { System.out.println("Operation"); }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n - 1 \in O(n)$$

```
void Stage2(int complexity) {
    for(int i=0; i<complexity; i++) { System.out.println("Operation"); }
}
```

$$T(complexity) = \sum_{i=0}^{complexity-1} 1 = complexity - 1 \in O(complexity)$$

```
void Stage3(int n) {
    for(int i=n; i>0; i--) { System.out.println("Operation"); }
}
```

זהה ל-Stage1 ולכן:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n - 1 \in O(n)$$

```
void Stage4(int n) {
    for(int i=0; i<n; i++) {
        for(int j=0; j<n; j++) {
            // Basic Operation 1
            // Basic Operation 1
        }
    }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 2 = \sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot (n-1) = 2 \cdot (n-1) \cdot (n-1) \le 2n^2 \overset{c=2,n_0=1}{\in} O(n^2)$$

```
void Stage5(int n) {
    for(int i=n; i>0; i--) {
        for(int j=0; j<n; j++) {
            // Basic Operation 1
        }
    }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} 2 = \sum_{i=0}^{n-1} 2 \cdot (n-1) = 2 \cdot (n-1) \cdot (n-1) \le 2n^2 \overset{c=2,n_0=1}{\in} O(n^2)$$

```
void Stage4dot1(int n) {
   for(int i=0; i<n; i++) {
      for(int j=0; j<i; j++) {
         // Basic Operation 1
      }
   }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} i = 0+1+2+\cdots+(n-1) = 1\cdot S_{[0,n-1]} = (n-1)\cdot\frac{1+n-1}{2}$$

$$\leq \frac{n^2}{2} \in O(n^2)$$

או לחלופין ניתן לראות ישר (הגיון) כי: (הסבר בתרגול)

$$T(n) = 1\cdot(0+1+2+\cdots+n-1) = 1\cdot S_{[0,n-1]} = (n-1)\cdot\frac{1+n-1}{2} \leq \frac{n^2}{2} \in O(n^2)$$

```
int f(int i) { return i + 1; }
void Stage6(int n) {
   for(int i=0; i<n; i=f(i)) { System.out.println("Operation"); }
}
```

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n-1 \in O(n)$$

```
int g(int i) { return i * 2; }
void Stage7(int n) {
   for(int i=0; i<n; i=g(i)) { System.out.println("Operation"); }
}
```

$$\infty$$

```
void Stage8(int n) {
   for(int i=1; i<n; i=g(i)) { System.out.println("Operation"); }
}
```

נשים לב כי בכל איטרציה מבצעים פעולה אחת, נשים לב כי אם נעקוב אחרי i, אז הערכים שהוא מקבל הינם $i=1, i=2, i=4 \ldots$ עד לתנאי העצירה ש- $i=n$
בגלל שאנחנו מחשבים חסם עליון, נניח כי $n=2^k$ עבור $k\in\mathbb{Z}^+$ ולכן נקבל כי $k=\log_2(n)$, מכיוון שבכל איטרציה מבצעים פעולה אחת, נקבל כי הסיבוכיות היא:

$$T(n) = 1\cdot\log_2 n \in O(logn)$$

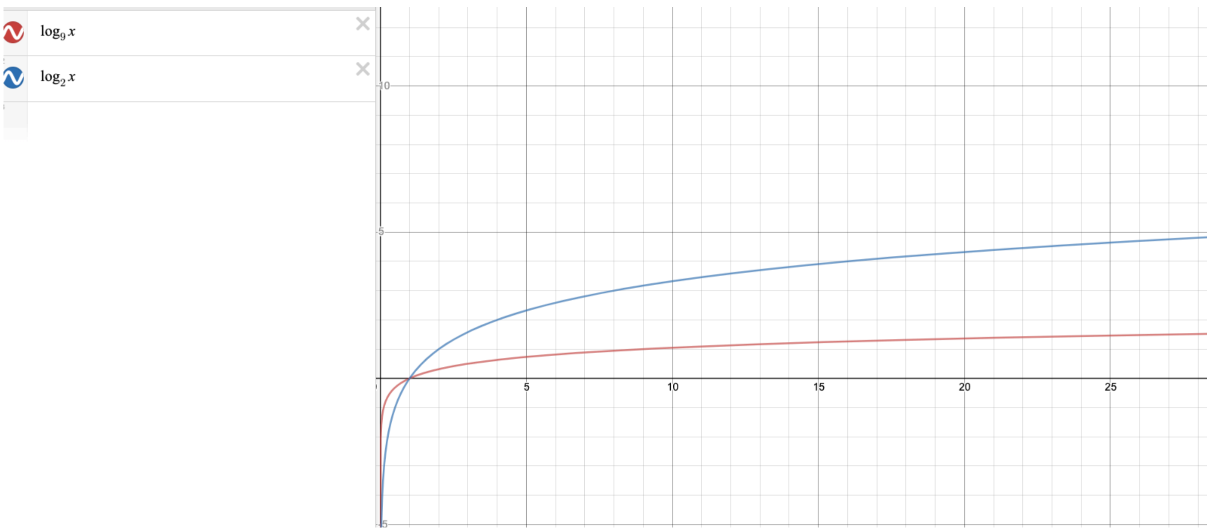
```
int g2(int i) { return i * 2020; }
void Stage8dot1(int n) {
   for(int i=1; i<n; i=g2(i)) {
      for(int zvi = 0; zvi < 2021; zvi++) System.out.println("Operation");
   }
}
```

נשים לב כי בכל איטרציה מצבעים פעולה אחת, נשים לב כי אם נעקוב אחרי i, אז הערכים שהוא מקבל הינם $i = 1, i = 2020, \dots$ עד לתנאי העצירה ש- $i = n$
בגלל שאנחנו מחשבים חסם עליון, נניח כי $n = 2020^k$ עבור $k \in \mathbb{Z}^+$ ולכן נקבל כי $k = \log_{2020}(n)$, מכיוון שבכל איטרציה מבצעים 2021 פעולות, נקבל כי הסיבוכיות היא:
$$T(n) = 2021 \cdot \log_{2020} n \in O(logn)$$

```
int k(int i) { return i * (int)(
      // Note: [0,1)*8 + 1 -> [0,8) + 1 -> [1,9)
      Math.random()*8 + 2); }
void Stage9(int n) {
   for(int i=1; i<n; i=k(i)) { System.out.println("Operation"); }
}
```

נשים לב כי בכל איטרציה מצבעים פעולה אחת, נשים לב כי אם נעקוב אחרי i, אז הערכים שהוא מקבל הינם כפולה של האיטרציה הקודמת במספר בין 2 ל-9 כולל, עד לתנאי העצירה ש- $i = n$

בגלל שאנחנו מחשבים חסם עליון, נניח כי $n = 2^k$ עבור $k \in \mathbb{Z}^+$ ולכן נקבל כי $k = \log_2(n)$, מכיוון שבכל איטרציה מבצעים פעולה אחת, נקבל כי הסיבוכיות היא:
$$T(n) = 1 \cdot \log_2 n \in O(logn)$$
עבור המקרה הטוב ביותר, נשים לב כי i יכול לקפוץ בקפיצות של 9, ולכן כמות האיטרציות לכל הפחות הינה $\log_9 n$ ולכן:
$$\log_2 n \geq T(n) \geq \log_9 n$$



```
int p(int i) {  return (int) Math.pow(i,2); }
void Stage10(int n) {
   for(int i=5; i<n; i=p(i)) { System.out.println("Operation"); }
}
```

$$5^{2^k} \leq n \Rightarrow \mathrm{k} \leq \log_2 \log_5(n)$$

```
void Stage11(int n) {
   // for(int i=0; i<n; i++) {
   for(int i=1; i<=n; i*=2) {
      for(int j=0; j<n; j++) {
         // Basic Operation
      }
   }
}
```

$$T(n) = n \cdot \log_2 n$$

```
void Stage12(int n) {
   // for(int i=0; i<n; i++) {
   for(int i=1; i<=n; i*=2) {
      for(int j=0; j<i; j++) {
         // Basic Operation
      }
   }
}
```

נשים לב כי i מקבל ערכים $n, \ldots ,1,2,4$, לפיכך, נגדיר משתנה k שירוץ מ-0 עד $log\ n$, נגדיר את i להיות 2^k ונקבל:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{logn}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{k=0}^{logn}\sum_{j=1}^{2^k} 1 = \sum_{k=0}^{logn} 2^k = 2^{\log n+1} - 1 = 2 \cdot 2^{logn} - 1 = 2n - 1 = \Theta(n)$$

עד עכשיו:

```
// [V]: for(int x=1; x < n; x*=3)
// [V]: for(int x=n; x > 1; i/=3)
// [V]: for(int x=2; x < n; x = Math.pow(x,3))
// [V]: for(int x=n; x > 2; x = Math.pow(x,1/3))
```

```
void Stage13(int n) {
   int x = 1;
   while (x < n) {
      x = x * 3;
   }
}
```

$$T(n) = \log_3 n \in O(logn)$$

אוניברסיטת אריאל בשומרון

```
void Stage14 (int n){
   int x = n; // Only change this
   while (x > 1) {
      x = x / 3; // Same
   }
}
```

$$T(n) = \log_3 n \in O(logn)$$

```
void Stage15(int n){
   int x = 2; // Inf if n > 1
   while (x < n) {
      x = x * x * x;
   }
}
```

$$\infty$$

```
void Stage16(int n){
   int x = 2; // This changed
   while (x < n) {
      x = x * x * x;
   }
}
```

$$2^{3^k} \leq n \Rightarrow \mathrm{k} \leq \log_3 \log_2(n)$$

```
void Stage17(int n){
   double x = n; // Only change this
   while (x > 2) {
      x = Math.pow(x,1/3);
   }
}
```

$$2^{3^k} \leq n \Rightarrow \mathrm{k} \leq \log_3 \log_2(n)$$

המרות:

```
for(forInit; Expression; forUpdate) { Statement }
```

```
forInit;
while(Expression) {
   Statement
   forUpdate;
}
```

ולכן:

```
// Stage13: for(int x=1; x < n; x*=3)
// Stage14: for(int x=n; x > 2; i/=3)
// Stage15: for(int x=1; x < n; x = Math.pow(x,3))
```

```
// Stage16: for(int x=2; x < n; x = Math.pow(x,3))
// Stage17: for(int x=n; x > 2; x = Math.pow(x,1/3))
```

```
void Stage18(int n) {
   for(int i=2; Math.pow(2,i) < n; i++) {}
}
```

$$2^{i} \leq n \Rightarrow \mathrm{i} \leq \log_2(n)$$