Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2020/2021

Тема № СИ21-П-7

13.06.2021 Изготвила: Надежда Росенова Францева

София Ф. No. 62 391

Група 1

Оценка :……………………………..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задача) на проекта 3

2. Решение на Задачата. 4

2.1. Теоретична част 4

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му 8

2.3. Графики (включително от анимация) 9

2.4. Коментари към получените с MatLab резултати 11

1. Тема (задание) на проекта

Учебен проект по "Диференциални уравнения и приложения"
спец. Софтуерно инженерство,
2 курс, летен семесътр, уч. год. 2020-2021

Име..,
Ф.No..........., група ....

Тема СИ21-П-7. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със следната смесена задача

$$\left|\begin{array}{l} u_t = \frac{1}{10}u_{xx}, \;\; t > 0, \; 0 < x < 30, \\[2ex] u|_{t=0} = \begin{cases} 50(x-20)^3\cos^3\frac{\pi x}{20}, & x \in [10,20] \\ 0, & x \in [0,10) \cup (20,30], \end{cases} \\[2ex] u|_{x=0} = 0, \;\; u|_{x=30} = 0, \;\; t \geq 0. \end{array}\right.$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Направете на MATLAB анимация на изменението на температурата в пръта за $t \in [0,10]$, като използвате 41-та частична сума на реда за $u(x,t)$. Начертайте с червен цвят в един прозорец една под друга графиките в началния, крайния и един междинен момент от направената анимация, като означете коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на Задачата.

2.1. Теоретична част

Ще използваме метода на Фурие:

Търсим решения от вида $u(x,t)=X(x)T(t)$.

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$$

$$u_t(x,t)=X(x)T'(t)$$
$$u_{xx}(x,t)=X''(x)T(t)$$

От условието $u_t=\frac{1}{10}u_{xx} \Rightarrow X(x)T'(t)=\frac{1}{10}X''(x)T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)}\cdot 10=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

$-\lambda$ - произволна const

Получаваме следните диференциални у-ия:

$$\left|\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ T'(t)+\frac{1}{10}\lambda T(t)=0 \end{array}\right.$$

Използваме граничните условия:

$$u|_{x=0}=X(0)T(t)=0,\ t\geq 0 \Rightarrow X(0)=0$$
$$u|_{x=30}=X(30)T(t)=0,\ t\geq 0 \Rightarrow X(30)=0$$

За $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\left|\begin{array}{l} X''(x)+\lambda X(x)=0,\ 0\leq x\leq 30 \\ X(0)=0 \\ X(30)=0 \end{array}\right.$$

Ще търсим нетривиални решения на уравнението.

Характеристичният му полином е $P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0$
$\Rightarrow \alpha^2 = -\lambda$

Нека разгледаме и 3-те възможни случая:

I сл. $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow ФСР := \{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\}$

$\Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$

$X(30) = C_1 e^{30\sqrt{-\lambda}} - C_1 e^{-30\sqrt{-\lambda}} = 0$

$C_1 (\underbrace{e^{30\sqrt{-\lambda}} - e^{-30\sqrt{-\lambda}}}_{=0}) = 0$

0 само при $\lambda = 0$, но ние сме взели $\lambda < 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X(x) \equiv 0$ – тривиално нулево решение

II сл. $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0 \Rightarrow ФСР := \{1, x\}$

$\Rightarrow X(x) = C_1 + C_2 x$

$\left.\begin{matrix} X(0) = C_1 = 0 \\ X(30) = 30C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X(x) \equiv 0$ – тривиално нулево решение

III сл. $\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C} \Rightarrow ФСР: \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$

$\Rightarrow X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0) = C_1 = 0$

$X(30) = C_2 \sin(30\sqrt{\lambda}) = 0$

$\Rightarrow$ имаме следните 2 подслучая:

а) $C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ – тривиално нулево решение

б) $\sin(30\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow 30\sqrt{\lambda} = k\pi$ за $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{30}\right)^2}_{\text{собствени стойности}}, k \in \mathbb{N}$

$\sin\left(\frac{k\pi x}{30}\right)$ – собствени функции

$\Rightarrow X(x) = C_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{30}\right)$

Това са всички решения на задачата на Щурм–Лиувил.

Решаваме уравнението за $T(t)$ при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_k'(t) + \frac{1}{10}\lambda_k T_k(t) = 0$$

$$T_k'(t) = -\frac{1}{10}\lambda_k T_k(t)$$

$T_k(t) = 0$ е решение

Нека $T_k(t) \neq 0$

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = -\frac{1}{10}\lambda_k T_k(t)$$

$$\frac{dT_k(t)}{T_k(t)} = -\frac{1}{10}\lambda_k\, dt$$

Интегрираме:

$$\underbrace{\int \frac{dT_k(t)}{T_k(t)}}_{} = -\int \frac{1}{10}\lambda_k\, dt$$

$$\ln|T_k(t)| = -\frac{1}{10}\lambda_k t + C_0$$

$$T_k(t)_1 = e^{C_0} . e^{\left(-1/10\, \lambda_k t\right)} \quad и \quad T_k(t)_2 = 0$$

$\Rightarrow T_k(t) = C . e^{\left(-\frac{1}{10}\left(\frac{k\pi}{30}\right)^2 t\right)}$, където C е произволна const

$\Rightarrow T_k(t) = A_k e^{\left(-\frac{1}{10}\left(\frac{k\pi}{30}\right)^2 t\right)}$, където A_k е произволна const

$\Rightarrow$ Така получаваме за решението на дадената зад.:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi x}{30}\right) A_k e^{\left(-\frac{1}{10}\left(\frac{k\pi}{30}\right)^2 t\right)}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{30}\right) = \varphi(x)$$

$\Rightarrow A_k = \frac{2}{30} \int_0^{30} \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{30}\right) dx$, където:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 50(x-20)^3 \cos^3 \frac{\pi x}{20}, & x \in [10, 20] \\ 0, & x \in [0, 10) \cup (20, 30] \end{cases}$$

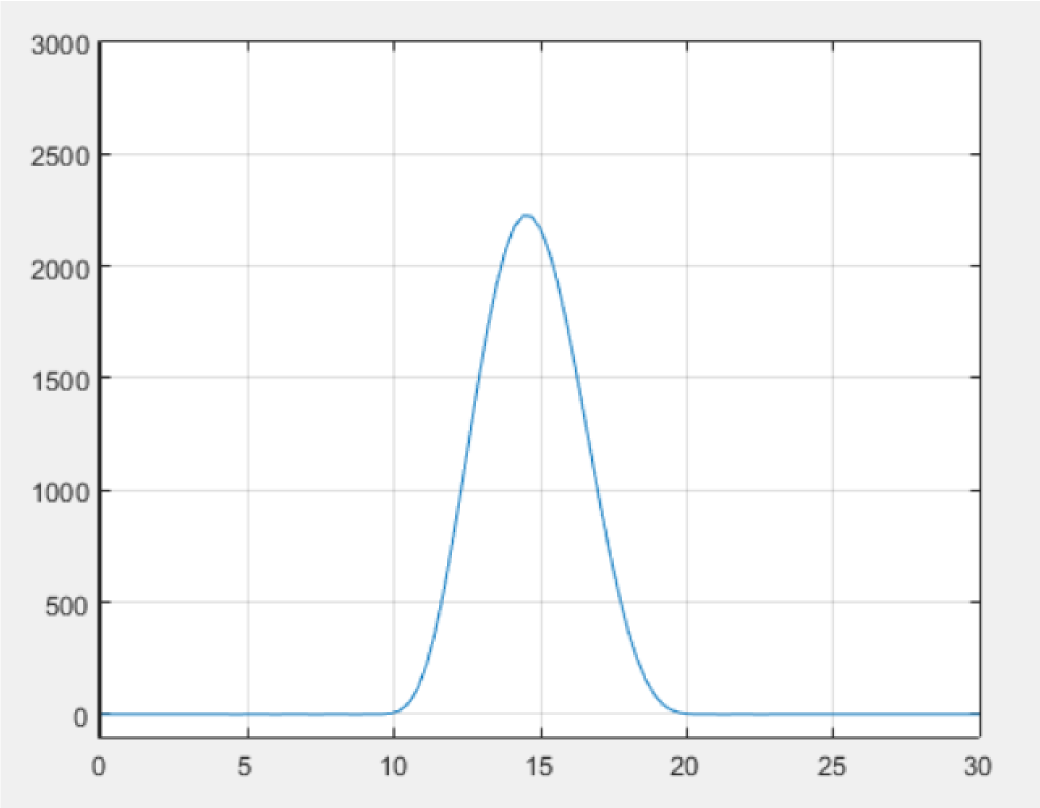
2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му

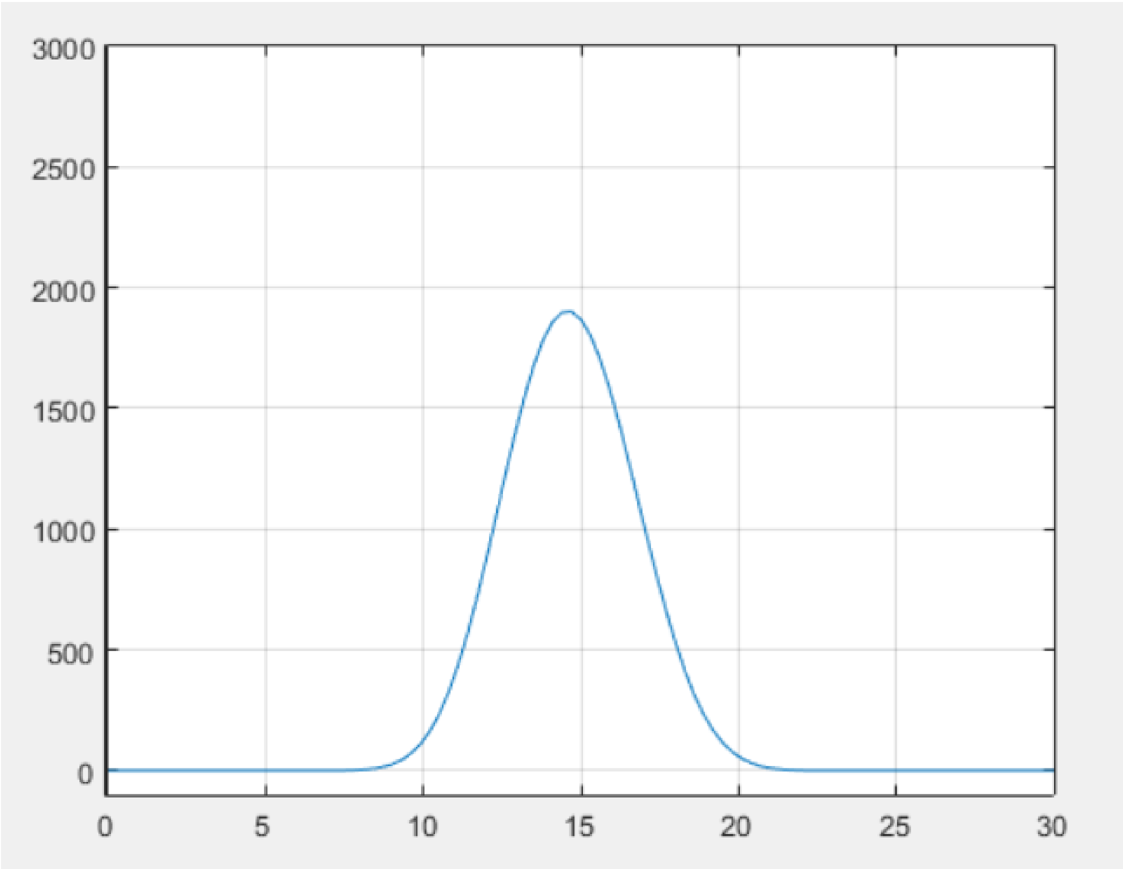
```
function tema07
% Въвеждаме необходимите параметри:
clf;
clc;
a=1/sqrt(10);
L=30;
tmax=10;
x=0:L/100:L;
t=0:tmax/100:tmax;
% Декларираме функцията phi(x):
function y=phi(x)
    for i=1:length(x)
        if x(i)>=10 && x(i)<=20
           y(i)=50*(x(i)-20)^3*(cos((pi*x(i))/20))^3;
        else
           y(i)=0;
        end
    end
end
% Декларираме функцията u(x,t):
function y=u(x,t)
y=0;
K=41;
% Изчисляваме 41-та частична сума на реда за u(x,t):
    for k=1:K
        Xk=sin((k*pi*x)/L);
        Ak=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
        Tk=Ak*exp(-(a*k*pi/L)^2*t);
        y=y+Xk*Tk;
    end
end
% Генерират се графиките за анимацията:
for n=1:length(t)
    plot(x,u(x,t(n)))
    axis([-3,L,-100,3000])
    grid on
    M(n)=getframe;
end
movie(M,1)
% Чартае в един прозорец графиките от анимацията в моментите t1=0, t2=5, t3=10 :
subplot(3,1,1)
plot(x,u(x,0),'r','LineWidth',2)
title('При t=0')
axis([-3,L,-100,3000])
grid on
subplot(3,1,2)
plot(x,u(x,5),'r','LineWidth',2)
title('При t=5')
axis([-3,L,-100,3000])
grid on
subplot(3,1,3)
plot(x,u(x,10),'r','LineWidth',2)
title('При t=10')
axis([-3,L,-100,3000])
grid on
end
```

Резултати в командния прозорец:
В командния прозорец не се получават никакви резултати, тъй като задачата ми изисква само да се направи анимация и три допълнителни графики.

2.3. Графики (включително от анимация)

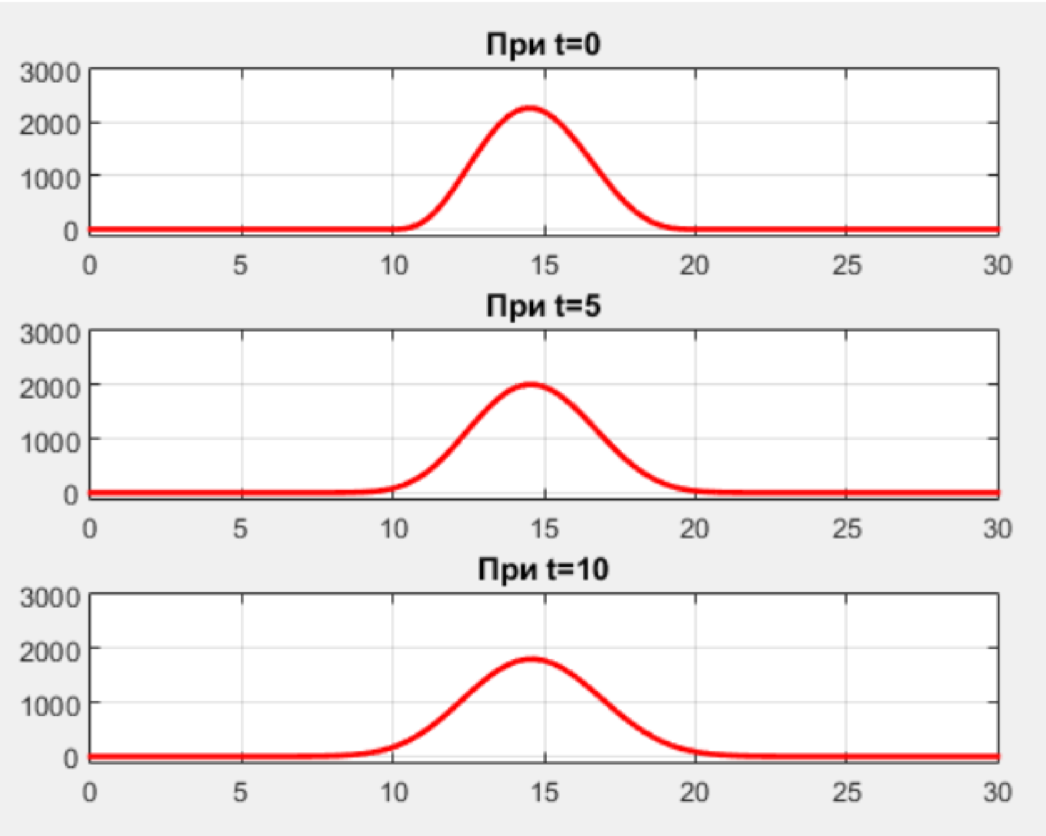
Графики от анимацията:



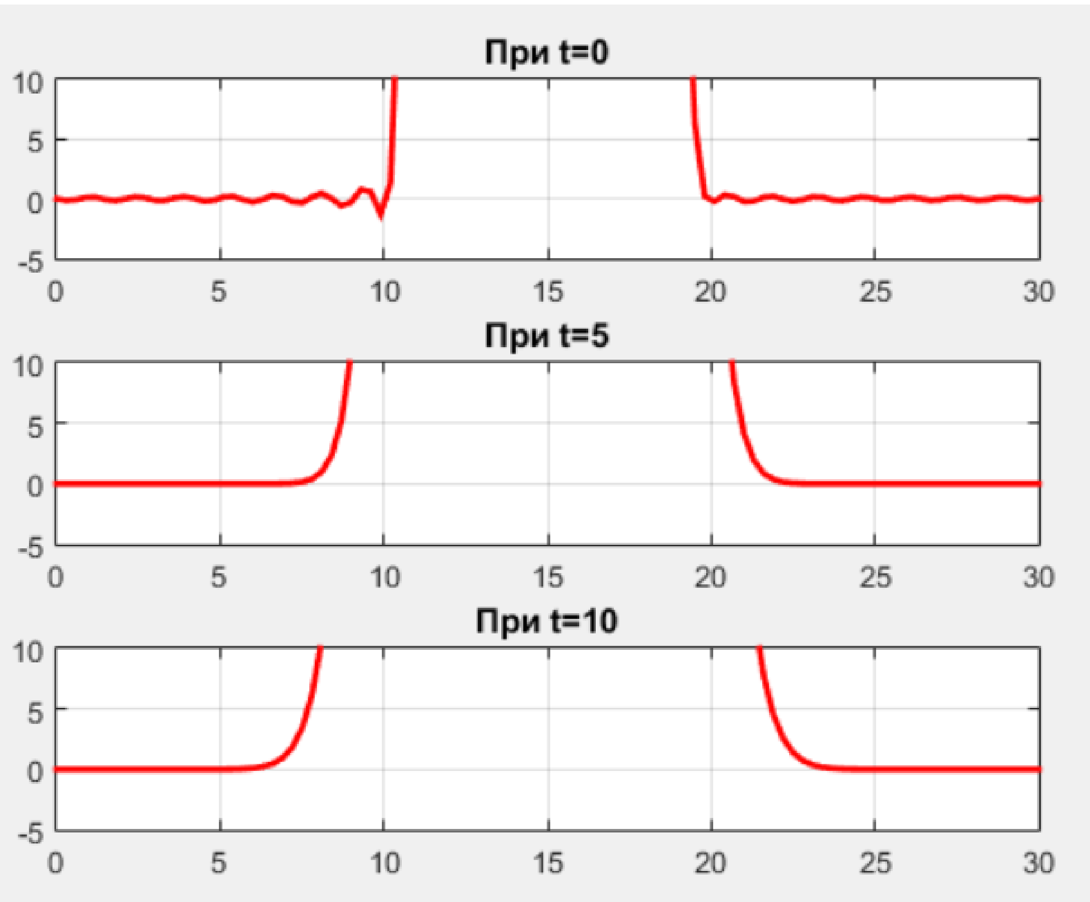


Графики в моментите t1=0, t2=5 , t3=10 :

за axis([0,L,-100,3000]) :



за axis([0,L,-5,10]) :



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати

От анимацията се вижда как се изменя температурата на хомогенния прът и се вижда, че левият и десният край на пръта са винаги в нулата и не се променят с течение на времето.

От допълнителните графики се вижда температурата на пръта в дадените три момента:

t1=0 – началния момент от направената анимация,

t2=5 – избран междинен момент,

t3=10 – краен момент

при прозорец от -100 до 3000 и при прозорец от -5 до 10, като последният прозорец е избран с цел да се види по-ясно какво се случва в краищата на пръта.