# Домашна работа 1 по СЕМ

## Софтуерно Инженерство

Надежда Росенова Фражцева

I група ФН: 62 391 17.11.2021г.

**Зад. 1** Да се докажат формулите:

а) $\mathbb{P}$(настъпва само едно от събитията $A$ и $B$) $=$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

б) За произволни събития $A_1, A_2, \dots, A_n$ е в сила формулата:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j \cup A_k) + \dots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

---

Р-е:

а) Нека $C = \{$настъпва само едно от $A$ и $B\}$

Разбивам $\Omega$ на пълна група от събития:

- $C$ $\rightarrow$ само едно
- $A \cap B$ $\rightarrow$ и двете
- $\bar{A} \cap \bar{B}$ $\rightarrow$ нито едно

$C \cap (A \cap B) = \emptyset$

$C \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \emptyset$

$(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \emptyset$

$C \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \Omega$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - (1 - \underbrace{\mathbb{P}(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}})}_{\mathbb{P}(A \cup B) \text{ от Де Морган}}) =$$

$$= \cancel{1} - \mathbb{P}(A \cap B) - \cancel{1} + \mathbb{P}(A \cup B) =$$

$$= -\mathbb{P}(A \cap B) + \overbrace{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)} =$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) \quad \blacksquare$$

б) Ще го докажем, чрез индукция.

За $n=2$: $\quad \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$

(принцип на включването и изключването)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2)$$

Индукционна хипотеза:

Нека твърдението е вярно за $k > 2$.

Ще докажем, че е вярно и за $n = k+1$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cup B_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{k+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cap B_{k+1}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}(B_{k+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} (B_i \cap B_{k+1})\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{i,j=1}^{k} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) + \ldots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_k) + \mathbb{P}(B_{k+1}) -$$

$$- \left( \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i \cap B_{k+1}) - \sum_{i,j=1}^{k} \mathbb{P}(B_i \cap B_j \cap B_{k+1}) + \ldots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{k+1}) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{i,j=1}^{k+1} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) + \ldots + (-1)^{k+2} \mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_{k+1})$$

, което удовлетворява ф-лата за $k+1$.

По този начин доказахме верността на принципа за включването и изключването. Сега нека положим $B_i = \overline{A_i}$, $i = \overline{1,n}$ и от де Морган следва:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_j}) = \binom{n}{2} - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j)$$

$\ldots$ и т.н.

Заместваме във ф-лата за включ. и изключ. и получаваме:

$$1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \left[\binom{n}{2} - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j)\right] + \ldots + (-1)^{n+1}\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \underbrace{(1-1)^n}_{0} \quad \blacksquare$$

**Зад.2** Книга от 120стр. има 6 фигури.
Равномерна вероятност всяка фигура да се намира на всяка страница.
$\mathbb{P}$(сл. избрана стр. да има поне 3 фигури) = ?

---

Р-е: Нека $A_i$ = {на сл.избр. стр. има $i$-фигури} за $i=\overline{0,6}$

$A_i \in Bin(6, 1/120)$

$A_i: \ i \longmapsto p_i = \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A=i) = \binom{6}{i} p^i (1-p)^{6-i}$

$\mathbb{P}(A \geq 3) = ?$

$\mathbb{P}(A \geq 3) = \sum_{i=3}^{6} \mathbb{P}(A=i) \approx 0{,}0000113585$

---

**Зад.3** Нека $\underline{n}$ и $\underline{r}$ са ест. числа. Да се намери броя на целите неотрицателни решения на у-ето $x_1 + \dots + x_r = n$.

---

Р-е: Нека $x_1, \dots, x_r$ са цели, неотр. р-я на у-ето.

Нека имаме:

$\underline{n}$-орка от: $x_1$ елемента от I-ви тип
$x_2$ елемента от II-ри тип
и т.н.

Тогава имаме взаимно еднозначно съответствие м/у извадките от $n$ елемента от множество с $r$-елемента с повторения и множеството от цели неотрицателни р-я на у-ето.

$\Rightarrow$ Отг. е: $\binom{r+n-1}{n}$

Зад.4 15 изпитни билета по 2 въпроса.
Студент знае 25 въпроса.
$\mathbb{P}$(да вземе изпита) = ?
взет изпит <=> да отговори на 2-та въпроса в 1 билет
/ на 1 въпрос от един билет
+ на посочен въпрос от друг билет

---

Р-е:

Нека $H_i$ = {на I-ви билет има $i$-въпроса, които знае}
A = {взима изпита}

$\mathbb{P}(A|H_0) = 0$

$\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{24}{28}$ → остават от тези, които знае
→ остават от всички въпроси

$\mathbb{P}(A|H_2) = 1$

$\mathbb{P}(H_0) = \binom{5}{2} / \binom{30}{2} = \frac{20}{30.29}$ — $\binom{5}{2}$ → от 5-те, които не знае, избираме 2

$\binom{30}{2}$ → от всички избираме 2

$\mathbb{P}(H_1) = 25.5 / \binom{30}{2} = \frac{250}{30.29}$ — 25.5 → 25 знае × 5 не знае

$\mathbb{P}(H_2) = \binom{25}{2} / \binom{30}{2} = \frac{25.24}{30.29} = \frac{600}{30.29}$ — $\binom{25}{2}$ → от 25-те, които знае, избираме 2

=> от ф-лата за пълна вероятност получаваме:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i) =$$

$$= \mathbb{P}(A|H_0) \cdot \mathbb{P}(H_0) + \mathbb{P}(A|H_1) \cdot \mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2) \cdot \mathbb{P}(H_2) =$$

$$= 0 + \frac{24}{28} \cdot \frac{250}{30.29} + 1 \cdot \frac{600}{30.29} = \frac{6000}{24360} + \frac{600}{870}^{(28)} = \frac{22800}{24360} \approx$$

$$\approx 0{,}93596059$$

Зад.5 Хвърлят се 5 бели и 5 червени зара. Каква е вероятността сумата от точките в/у белите минус сумата от точките в/у червените да е:

а) 0

б) 1

---

Р-е:

$X_i = \{$брой точки при хвърляне на $i$-тия зар$\}$

$\mathbb{P}(X_i = k) = p_{i,k} = 1/6$

$Y = \{$сбор от белите$\}$

$Z = \{$сбор от червените$\}$

$$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i \qquad Z = \sum_{i=6}^{10} X_i$$

$\Rightarrow$ $Y$ и $Z$ са еднакво разпределени и с пораждаща ф-я $h_Y(s) = h_Z(s) = \mathbb{E}s^Y = \mathbb{E}s^{\sum_{i=1}^{5} X_i} =$

$$= \prod_{i=1}^{6} \mathbb{E}s^{X_i} = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} s^i\right)^5$$

$$\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Z=k) = \frac{h_Y^{(k)}(0)}{k!}$$ $\rightarrow$ коефициента пред $x^k$ в развитието на $h_Y(x)$

а) $$\mathbb{P}(Y=Z) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=5}^{30}\{Y=Z=j\}\right) = \sum_{j=5}^{30}\mathbb{P}(Y=j)\,\mathbb{P}(Z=j) = \sum_{j=5}^{30}(\mathbb{P}(Y=j))^2 =$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{j=5}^{30}\left(\sum_{\substack{k=0\\ l\geq 0\\ 6k+l=j}}^{5}(-1)^k\binom{6}{k}\binom{5+l}{5}\right)^2 \approx 0{,}072$$

б) $\mathbb{P}(Y-Z=1) = \sum_{j=5}^{30} \mathbb{P}(Y=j+1, Z=j) = \sum_{j=5}^{30} \mathbb{P}(Y=j+1)\,\mathbb{P}(Z=j) =$

$$= \frac{1}{6^5} \sum_{j=5}^{30} \left( \sum_{\substack{k=0 \\ l\geq 0 \\ 6k+l=j+1}}^{5} (-1)^k \binom{6}{k} \binom{5+l}{5} \right) \cdot \left( \sum_{\substack{k=0 \\ s\geq 0 \\ 6r+s=j}}^{5} (-1)^r \binom{6}{r} \binom{5+s}{5} \right) \approx$$

$$\approx 0{,}071$$

---

Зад. 6 Напишете интуитивно обяснение на „Законът за Големите Числа". Посочете приложения на този закон.

Нека първо кажем какво е сходимост по вероятност: казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, ако за $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0$.

Сега ще дадем формалната дефиниция на ЗГЧ:
Нека $(X_i)_{i=1}^{n}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини с $\mathbb{E}X_i$ че $\mathbb{E}|X_i| < \infty$, като $i=\overline{1,n}$. Тогава:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_i$$

Интуитивно обяснение:

Теорема, описваща резултата, който ще получим, ако повтаряме един и същ експеримент много на брой пъти. Концентрира се стабилността на статистическите средни.
Според тази теорема, средната стойност на резултатите, получени от голям брой опити, трябва да е близко до очакваната стойност на един опит и е с тенденцията да се приближава до очакваната стойност с извършване-то на повече опити.

Приложения:

- казино
- хазарт
- лотария
- Монте Карло алгоритми

Зад. 7 Напишете интуитивно обяснение на „Централна Гранична Теорема". Посочете някои свойства и приложение на „нормалното разпределение".

Формалната Централна Гранична Теорема гласи:
Нека $(X_i)_{i=1}^{n}$ е редица от независими и еднакво разпределени случайни величини със средно $EX_1 = \mu$ и дисперсия $DX_1 = \sigma^2 < \infty$. Тогава е вярно следното:

$$Z_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma} E_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} Z \sim N(0,1),$$

където $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$.

Като $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{d} X$, ако за $\forall x \in C_F\, x$, $\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$.

Интуитивно обяснение:

Централната Гранична теорема ни позволява да използваме нормалното разпределение като приближение в случаите, когато не знаем истинското разпределение. Центрираме и нормираме частичните суми на разглежданата редица.
Тази теорема измерва каква е грешката в закона за големите числа. Тоест ние знаем, че $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{п.с.} \mu$ и скалираме грешката по $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и виждаме, че се държи като нормално разпределение.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ако $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, като $EX = \mu$, $DX = \sigma^2$

Свойства на нормалното разпределение:

- $\underbrace{N(\mu_1, \sigma_1^2) + N(\mu_2, \sigma_2^2)}_{\text{независими}} = N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- $N(\mu, \sigma^2) + c = N(\mu + c, \sigma^2)$, като $c$ е константа
- $cN(\mu, \sigma^2) = N(c\mu, c^2\sigma^2)$

Ако $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ $X$ е нормално стандартно разпр.
Нормалното разпределение е симетрично и има камбановидна форма.

Приложение:

В случаите, когато разпределението на данните от дадена извадка се приближава до нормалното разпределение, свойствата на нормалното разпределение може да се използват за решаване на различни задачи. При решаването на практически задачи е удобно да се използва статистическа таблица, в която са дадени лицата под кривата на стандартното нормално разпределение.

- контрол на качеството при производството
- при наблюдение на отделни процеси в биологията, физиката, химията