Домашна работа 2 по СЕМ

Софтуерно Инженерство

Надежда Росенова Фражиева

I група ФН: 62391 09.12.2021г.

Зад. 1 Случайна величина $Z=(X,Y)$ има плътност

$$f(x,y)=\begin{cases} c(1+xy), & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Намерете:

а) c

б) EXY, $D(X-Y)$

Р-е: а) Нека $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<x<y<1\}$. От свойството $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ намираме:

$$1=\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D c(1+xy)\,dx\,dy=$$

$$=c\int_0^1\left(\int_x^1(1+xy)\,dy\right)dx=c\int_0^1\left(y+\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=x}^{1}dx=$$

$$=c\int_0^1\left(1-\frac{x+x^3}{2}\right)dx=\frac{5c}{8} \Rightarrow c=\frac{8}{5}$$

б) От Теоремата, че $E\,g\circ X=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f_X(x)\,dx$ следва, че: $EXY=E\,g\circ(X,Y)=\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy=$

$$=\frac{8}{5}\iint_D xy(1+xy)\,dx\,dy=13/72$$

Аналогично, от същата теорема следва, че:

$$D(X-Y)=E(X-Y)^2-(E(X-Y))^2=E\,g^2\circ(X,Y)-(E\,g\circ(X,Y))^2=$$

$$=\iint_{\mathbb{R}^2} g^2(x,y)f(x,y)\,dx\,dy-\left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)\,dx\,dy\right)^2=$$

$$=\frac{8}{5}\iint_D(x-y)^2(1+xy)\,dx\,dy-\frac{64}{25}\left(\iint_D(x-y)(1+xy)\,dx\,dy\right)^2=$$

$$=\frac{8}{5}\int_0^1\left(\int_x^1(x-y)^2(1+xy)\,dy\right)dx-\frac{64}{25}\left(\int_0^1\left(\int_x^1(x-y)(1+xy)\,dy\right)dx\right)^2=$$

$$=\frac{8}{5}\underbrace{\int_0^1\left(-\frac{1}{12}(x-1)^3(x^2+3x+4)\right)dx}-\frac{64}{25}\left(\int_0^1\left(\frac{1}{6}(x-1)^3(x+3)\right)dx\right)^2=$$

$$=\frac{\cancel{8}}{5}\cdot\frac{7}{\cancel{72}_{9}}-\left(\frac{64}{25}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\right)=\frac{7}{45}-\left(\frac{64.1}{25.25}\right)=\frac{7}{45}-\frac{64}{625}=\frac{4375-2880}{28\,125}=\frac{1495}{28\,125}\approx$$

$$\approx 0{,}05315556$$

Зад.2 Случайна величина X има разпределение на Коши с плътност $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.

Да се докаже, че $Y = X^{-1}$ има разпределение на Коши.

Р-е: Нека $Y = \operatorname{arctang} X$.

Съгласно следната теорема:

Ако $X(\Omega) = [0, \pi]$, то $X \in U[0, \pi]$ тогава и само тогава, когато $Y = \tan X$ има разпределение на Коши с плътност $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$ за $y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow Y \in U\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$$

Понеже $X = \tan Y$, то $X^{-1} = \operatorname{cotan} Y$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \text{ за } y \in \mathbb{R} \quad \square$$

Зад.3 Провеждаме бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит, равна на p. Нека ξ е сл. вел. - брой опити, докато за първи път получим последователност от k успеха. Да се намери $E\xi_k$.

Р-е: За $\forall n \in \mathbb{N}$ нека X_n - бр. опити, докато имаме последователност от n успеха. От $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = p$ и $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n > 1) = 1-p$

$$\Rightarrow X_{n+1} = p.(X_n + 1) + (1-p)(X_n + 1 + X_{n+1})$$

$$\Rightarrow p.X_{n+1} = 1 + X_n \Rightarrow X_{n+1} = \frac{1}{p} + \frac{X_n}{p}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{X_{n-1}}{p^2} = \dots = \sum_{j=1}^{n} p^{-j} + \frac{X_1}{p^n}$$

за $n \geq 0$:

$$\text{Но } X_1 \in Ge(p) \Rightarrow E X_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} p^{-j} + \frac{E X_1}{p^n} = \sum_{j=1}^{n+1} p^{-j} + \frac{1-p^{n+1}}{p^{n+1}(1-p)}$$

* От $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = p$ и $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n > 1) = 1-p$

$$\Rightarrow E(X_{n+1} - X_n) = 1.p + (1 + E X_{n+1})(1-p)$$

$$\Rightarrow E X_{n+1} = \frac{1}{p} + \frac{E X_n}{p^2}$$

Зад. 4 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини, като $\xi_n \in Bi(n, p_n)$ и $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Да се докаже, че редицата $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща по разпределение, с гранична ф-я $\xi \in Po(\lambda)$.

Д-во: Нека разгледаме $X \in Ber(p)$. Имаме, че $\phi(t) = E[e^{ixt}]$ добре дефинирана, че ограничена. От $X \in Ber(p) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = 1 - \mathbb{P}(X=0) = p \Rightarrow E(f(X)) = f(0).(1-p) + f(1).p$, ако f е деф. в $x=0$ и $x=1$

$f(x) = e^{itx} \Rightarrow E[e^{itX}] = e^{it.0}.(1-p) + e^{it.1}.p = 1-p+p.e^{it}$

$\Rightarrow \phi_{\xi_n}(t) = (1-p+p.e^{it})^n$

Тогава $\lim_{n\to\infty} \phi_{\xi_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1-p+p.e^{it})^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{n.p_n}{n} + \frac{n.p_n e^{it}}{n}\right)^n =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-\lambda+\lambda e^{it}}{n}\right)^n = e^{-\lambda+\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)} \Rightarrow \xi_{n\to\infty} \in Po(\lambda)$ $\square$

Зад. 5 Нека ξ е сл. вел. с хар. ф-я $\psi_\xi(t)$. Докажете, че:

а) ако $\xi \in Ex(\lambda)$, то $\psi_\xi(t) = (1-it\lambda^{-1})^{-1}$

б) ако $\xi \in \Gamma(\alpha, \beta)$, то $\psi_\xi(t) = (1-it\beta^{-1})^{-\alpha}$

Д-во: а) $\psi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$. Но $e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i.\sin(t\xi)$

$\Rightarrow Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$

$= \underbrace{\lambda \int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} dx}_{I} + \underbrace{i\lambda \int_0^{\infty} \sin(tx) e^{-\lambda x} dx}_{J}$

$I = \lambda \int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{t} \int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} dtx = \frac{\lambda}{t} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\sin(tx) =$

$\underset{\text{инт. по части}}{=} \frac{\lambda}{t} \sin(tx) e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \frac{\lambda}{t} \int_0^{\infty} \sin(tx) de^{-\lambda x} = \frac{\lambda^2}{t} \int_0^{\infty} \sin(tx) e^{-\lambda x} dx =$

$= -\frac{\lambda^2}{t^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d\cos(tx) = -\frac{\lambda^2}{t^2} \cos(tx) e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} + \frac{\lambda^2}{t^2} \int_0^{\infty} \cos(tx) de^{-\lambda x} = \frac{\lambda^2}{t^2} - \frac{\lambda^3}{t} \int_0^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} dx$

Полагаме $X = X_1 + X_2$

$$\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda^2/t^2}{x+\lambda^3/t^2} = \frac{\lambda^2}{t^2\lambda+\lambda^3} = \frac{\lambda}{\lambda^2+t^2}$$

$$\mathcal{Y} = i\lambda\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx = -\frac{i\lambda}{t}\int_0^\infty e^{-\lambda x}d\cos(tx) =$$

$$= -\frac{i\lambda}{t}\cos(tx)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{i\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)de^{-\lambda x} =$$

$$= \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^2}{t}\int_0^\infty \sin(tx)de^{-\lambda x} =$$

$$= \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^3}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx$$

$$\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{i\lambda/t}{i\lambda+i\lambda^3/t^2} = \frac{i\lambda t}{i\lambda t^2+i\lambda^3} = \frac{it}{it^2+\lambda^2 i} = \frac{t}{t^2+\lambda^2}$$

От I и $\mathcal{Y}$ следва:

$$\varphi_\xi(t) = Ee^{itx} = \lambda\frac{\lambda}{\lambda^2+t^2} + i\lambda\frac{t}{t^2+\lambda^2} = \lambda\frac{\lambda+it}{\lambda^2+t^2}\cdot\frac{\lambda-it}{\lambda-it} =$$

$$= \lambda\frac{\lambda^2-(it)^2}{(\lambda^2+t^2)(\lambda-it)} = \lambda\frac{\lambda^2-\overbrace{i^2}^{-1}t^2}{(\lambda^2+t^2)(\lambda-it)} = \lambda\frac{\cancel{\lambda^2+t^2}}{(\cancel{\lambda^2+t^2})(\lambda-it)} = \frac{\lambda}{\lambda-it} =$$

$$= \left(\frac{\lambda-it}{\lambda}\right)^{-1} = (1-it\lambda^{-1})^{-1} \quad \square$$

б) $\Gamma(1,\lambda) = Ex(\lambda) \Rightarrow Ee^{itX} = \frac{\lambda}{\lambda-it}$

Нека $X_1 \in Ex(\lambda)$ и $X_2 \in Ex(\lambda)$ – независими и експоненциално разпр. сл. вел.

$X = X_1 + X_2$

Понеже $X \in \Gamma(2,\lambda) \Rightarrow Ee^{itX} = Ee^{it(X_1+X_2)} = Ee^{itX_1}e^{itX_2} =$

$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^2 \Rightarrow \Gamma(\alpha,\beta)$ има х-на ф-я:

$$\left(\frac{\beta}{\beta-it}\right)^\alpha = (1-it\beta^{-1})^{-\alpha}$$

Имаме, че $\Gamma(1,\lambda) = Ex(\lambda)$.

Тогава, ако $Y \in \Gamma(1,\lambda)$, то $\varphi_Y(t) = Ee^{itY} = \frac{\lambda}{\lambda-it}$.

Нека $X_1 \in Ex(\lambda)$, $X_2 \in Ex(\lambda)$ и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

Полагаме $X = X_1 + X_2$

От $X_1 \perp X_2 \Rightarrow \psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{it(X_1+X_2)} =$
$= \mathbb{E}e^{itX_1} \times \mathbb{E}e^{itX_2} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^2$

Ще го док. чрез индукция.

Нека е вярно за $n = k$:

Ако $X = \sum_{i=1}^{k} X_i \in \Gamma(k, \lambda)$, то $\psi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^k$

Ще го док. за $n = k+1$:

$\psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{it\sum_{j=1}^{k+1} X_j} = \prod_{j=1}^{k+1} \mathbb{E}e^{itX_j} = \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{k+1}$

Окончателно $\psi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\beta - it}{\beta}\right)^{-\alpha} =$
$= (1 - it\beta^{-1})^{-\alpha}$ $\square$

Зад. 6 Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и експоненциално разпределени сл. вел. с парам. λ. Да се док., че $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ има разпределение $\Gamma(n, \lambda)$.

Д-во: Ще използваме ф-ии на момента на сл. вел.

$M_S(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow S \stackrel{d}{=} Y$

Нека $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и $Y \in \Gamma(n, \lambda)$.

Тогава $M_{X_i}(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_{X_i} dx =$
$= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{(-\lambda x)} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx =$
$= \frac{\lambda}{t - \lambda} \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} d(t-\lambda)x = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_0^{\infty}$

$t - \lambda < 0 \Rightarrow t < \lambda$, за да $M_{X_i}(t)$ бъде добре деф.

$M_{X_i}(t) = -\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\lambda - t)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - 1} e^0 = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$M_S(t) = \mathbb{E}e^{tS} = \mathbb{E}e^{t(X_1 + \dots + X_n)} =$
$= \mathbb{E}e^{tX_1} \times \mathbb{E}e^{tX_2} \times \dots \times \mathbb{E}^{tX_n} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$

Сега:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}\, e^{tY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} e^{ty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y}\,dy =$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)y} y^{n-1}\,dy$$

За да бъде добре деф. $M_Y(t)$ е необходимо да е изпълнено усл.:

$$t-\lambda<0 \Rightarrow t<\lambda \Rightarrow M_Y(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)y} y^n \frac{dy}{y} =$$

$(\lambda-t)y = x$
$dx = (\lambda-t)dy$
$y = \frac{x}{\lambda-t}$
$dy = \frac{dx}{\lambda-t}$

$$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{(\lambda-t)^n} \cdot \frac{\frac{dx}{\cancel{\lambda-t}}}{\frac{x}{\cancel{\lambda-t}}} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{(\lambda-t)^n} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{(\lambda-t)^n} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{n-1}\,dx}_{\Gamma(n)} = \frac{\lambda^n}{\cancel{\Gamma(n)}} \times \frac{1}{(\lambda-t)^n} \times \cancel{\Gamma(n)} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^n \text{ за } t<\lambda$$

$$\Rightarrow M_S(t) = M_Y(t) \Rightarrow S \overset{d}{=} Y \Rightarrow S \in \Gamma(n,\lambda) \quad \square$$

Зад. 7 Сл. вел. X се нарича безгранично делима, ако за $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ от независими и еднакво разпределени сл. вел.: X и $X_1+\dots+X_n$ имат еднакво разпределение. Докажете, че ако X има нормално, поасоново или гама разпр., то X е безгранично делима.

Д-во: • Първо нека $X_i \in \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ за $i=\overline{1,n}$. Тъй като всички сл. вел. X_i имат еднакво разпределение, то $\mu_i = \frac{\mu}{n}$ и $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{n^2}$ за $\forall i=\overline{1,n}$

От лин. св-во на нормалното разпр.:

$$X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = n \times \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n^2}\right) \text{ за } \forall n$$

• Нека $X \in Po(\lambda)$. $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{itk-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda e^{it}-\lambda}$$

За $\forall n$ $\sqrt[n]{\phi_X(t)}$ е характеристична за $Po\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

• Нека $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$. Тогава $\phi(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}$ е х-ната ѝ ф-ия

Но $\phi_n(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha/n}$ е х-на ф-ия на $\Gamma\left(\frac{\alpha}{n}, \beta\right)$

$\blacksquare$

Зад.8 Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ са независими и еднакво разпределени сл. вел. от $Ex(\lambda)$ и $T \in Ge(p)$. Да се док., че $S_T = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_{T+1}$ е експоненциално разпределена и да се намери параметъра на разпределението.

Д-во: Нека $\varphi_k(t)$ е х-на ф-ия на $\xi_k \in Ex(\lambda)$.

Следователно $\varphi_k(t) = E e^{it\xi_k} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_{\xi_k}(x)\,dx =$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x}\cos tx\,dx + i\lambda\int_{\mathbb{R}^+} e^{-\lambda x}\sin tx\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2} + \frac{i\lambda t}{\lambda^2+t^2} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

За $\forall n \in \mathbb{N}$, нека $\varphi_{S_n}(t)$ е х-на ф-ия на S_n. Понеже ξ_i са независими, то $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n$

Нека $\varphi(t)$ е х-на ф-ия на S_T. Пресмятаме:

$$\varphi(t) = E e^{itS_T} = E(E(e^{itS_T} \mid T)) = \sum_{n=1}^{\infty} E e^{itS_n} P(T=n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{S_n}(t)P(T=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n p(1-p)^{n-1} =$$

$$= \frac{p\lambda}{\lambda - it}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda(1-p)}{\lambda - it}\right)^{n-1} = \frac{p\lambda}{p\lambda - it}, \text{ понеже } \left|\frac{\lambda(1-p)}{\lambda - it}\right| < 1$$

$\Rightarrow S_T \in Ex(p\lambda)$ $\blacksquare$