

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ МНОЖЕСТВА

**В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕМ
САМОЛЁТА В ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ**

Федотов Андрей Анатольевич

01.01.09 – дискретная математика

и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
кандидат физико-математических наук

В.С.Пацко

Екатеринбург – 2005 г.

Оглавление

Перечень основных обозначений и сокращений	4
Введение	5
1 Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы	13
1.1 Постановка задачи	14
1.2 Проекция множества достижимости на плоскость геометрических координат	15
1.3 Принцип максимума Понтрягина	16
1.4 Свойства движений с кусочно-постоянным управлением	18
1.5 Управления, ведущие на границу множества достижимости	23
1.6 Численное построение трехмерного множества достижимости	25
1.7 Изображение множеств достижимости при склейке координаты φ по модулю 2π и в цилиндрических координатах	29
2 Трёхмерные информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости	32
2.1 Постановка задачи о построении информационных множеств	33
2.2 Схема построения информационных множеств	34
2.2.1 Формальное описание информационных множеств	34
2.2.2 Эквивалентное представление информационных множеств	35
2.2.3 Учет специфики динамики движения	36
2.2.4 Овыпукление сечений множества прогноза	37
2.2.5 Полугрупповое свойство отображения $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$	38
2.3 Практическое построение информационных множеств	40
2.3.1 Дискретизация по t, u, φ	40
2.3.2 Аппроксимация выпуклыми многоугольниками	41
2.3.3 Построение выпуклой оболочки объединения	42
2.3.4 Операция пересечения	43

2.4 Сравнение с точными построениями	45
2.5 Результаты моделирования движения информационных множеств	49
3 Четырёхмерные информационные множества	53
3.1 Постановка задачи	53
3.2 Схема построения информационных множеств	54
3.2.1 Формальное описание информационных множеств	54
3.2.2 Эквивалентное представление информационных множеств	55
3.2.3 Специфика динамики движения	55
3.2.4 Овыпукление сечений	57
3.3 Основные идеи построения информационных множеств	58
3.4 Практическое построение информационных множеств	60
3.4.1 Построение множества прогноза	60
3.4.2 Учёт множества неопределённости замера	61
3.4.3 Регулирование числа узлов сетки на плоскости φ , V	62
3.5 Результаты моделирования	63
3.5.1 Исходные данные для моделирования	63
3.5.2 Структура информационного множества	65
3.5.3 Влияние числа нормалей в представлении сечений информационного множества	66
3.5.4 Оценивание ненаблюдаемых координат	66
3.5.5 Машины затраты	72
4 Построение множества разрешимости в задаче проводки самолёта при ветровом возмущении	73
4.1 Постановка задачи	74
4.2 Схема построения множества разрешимости	76
4.3 Алгоритм попятного построения множества разрешимости	77
4.3.1 Представление четырехмерных множеств	77
4.3.2 Переход от множества $\mathbf{W}(t_{i+1})$ к множеству $\mathbf{W}(t_i)$	78
4.4 Результаты моделирования	80
Приложение. Апостериорное оценивание информационных множеств	85
A.1 Общая схема	85
A.2 Построение эталонной траектории	86
A.3 Результаты моделирования	87
Литература	99

Перечень основных обозначений и сокращений

x, y	координаты геометрического положения, м;
φ	угол наклона вектора скорости движения на плоскости x, y , рад;
V	значение скорости, м/с;
k	максимальное боковое ускорение, коэффициент основной системы уравнений движения, м/с ² ;
u, w	управляющие воздействия, боковое и продольное, б/р;
Δ	шаг временной сетки при численных построениях, с;
$I(t)$	информационное множество в момент t ;
$\mathbf{I}(t)$	аппроксимация сверху множества $I(t)$;
$G(t)$	множество достижимости (прогноза) в момент t ;
$\mathbf{G}(t)$	аппроксимация сверху множества $G(t)$;
$H(t)$	множество неопределенности замера в момент t ;
W	множество разрешимости задачи наведения (максимальный стабильный мост);
$W(t)$	сечение множества W в момент t ;
\mathbf{W}	аппроксимация сверху множества W ;
ИМ	информационное множество;
МН	множество неопределенности.

Введение

В диссертации исследуются способы построения информационных множеств для модельных задач, связанных с движением самолёта.

Под информационным множеством $I(t)$ понимаем совокупность всех фазовых состояний системы в момент t , совместных с известным для наблюдателя процессом управления-наблюдения. В практическом плане построение множества $I(t_{i+1})$ в момент наблюдения t_{i+1} сводится к нахождению множества прогноза $G(t_{i+1})$ на основе построенного в момент t_i множества $I(t_i)$ и известных свойств динамики на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. Если в момент t_{i+1} получен новый замер фазового состояния системы и при этом известно ограничение на ошибку замера, то формируем множество неопределённости $H(t_{i+1})$, описывающее совокупность всех фазовых состояний, совместных с такими сведениями о замере. Множество $I(t_{i+1})$ получается в результате процедуры пересечения:

$$I(t_{i+1}) = G(t_{i+1}) \cap H(t_{i+1}).$$

Информационное множество $I(t)$ представляет собой точную гарантированную оценку фазового состояния системы, задаваемую в виде множества. В теории стохастического оценивания аналогом информационного множества в случае нормального распределения может рассматриваться задание в момент t математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины. Тогда, применяя правило “трёх сигм”, устанавливаем область, где только и может быть с практической точки зрения наблюдаемая величина.

В задачах управления с неполной информацией, когда текущее состояние системы измеряется неточно, но с известными ограничениями на ошибку замера, информационное множество может трактоваться как “обобщенное” состояние системы. Управление обратной связи при этом строится как функция от такого обобщённого состояния.

Вопросы, связанные с правильной постановкой (формализацией) и решением задач наблюдения и управления, где в той или иной форме появляются информационные множества, рассматривались, начиная с середины 60-х годов прошлого века в работах Н.Н.Красовского, А.Б.Куржанского, Ю.С.Осипова, А.И.Субботина, Ф.Л.Черноусько, их учеников и сотрудников [3, 6, 14, 17–25, 30, 34, 38, 49, 54–56, 74, 77].

В зарубежной литературе эквивалентными к термину “информационное множество” являются термины “feasible set”, “membership set”, “likelihood set”, “uncertainty set”. Сам подход часто называют “set membership estimation”, “unknown but bounded error description (UBB approach)”. Важную роль в развитии детерминированного гарантированного оценивания сыграли работы D.P.Bertsekas, M.Milanese, J.Norton, H.Piet-Lahanier, I.B.Rhodes, F.C.Schweppen, E.Walter, H.S.Witsenhausen [61, 62, 81, 82, 85–88].

Детерминированное гарантированное оценивание применяют не только для оценивания положения, но и для оценки неизвестных параметров системы. Здесь, кроме работ указанных выше авторов, отметим работы В.М.Кунцевича, М.М.Лычака [28, 29], Б.Н.Пшеничного, В.Г.Покотило [46].

Вопросы устойчивости построения информационных множеств изучались М.И.Гусевым [11].

Развёрнутые по времени информационные множества дают трубку гарантированного оценивания фазового состояния системы. Теоретическому описанию таких трубок посвящены работы А.Б.Куржанского, О.И.Никонова, Т.Ф.Филипповой [31, 37].

С самого начала развития теории детерминированного гарантированного оценивания разрабатываются методы внутренней и внешней аппроксимации информационных множеств. Особенно много работ, в которых исследуется эллипсоидальная аппроксимация. Среди работ последнего времени выделим книги Ф.Л.Черноусько [53], А.Б.Куржанского и I.Valyi [77]. Различные варианты полиэдральной аппроксимации изучались в работах Е.К.Костоусовой [15, 16], T.Alamo, J.M.Bravo, E.F.Camacho [58], B.R.Barmish, J.Sankaran [60], L.Chisci, A.Garulli, A.Vicino, G.Zappa [64, 65].

Поскольку построение информационных множеств связано с нахождением множеств прогноза (или что то же самое – множеств достижимости), а также с операцией пересечения, то трудности, возникающие здесь, близки к тем, что появляются при построении максимальных стабильных мостов в дифференциальных играх. В связи с этим отметим работы В.Н.Ушакова, А.М.Тарасьева, А.А.Успенского, А.П.Хрипунова [39, 50, 51], посвящённые численному построению максимальных стабильных мостов в системах с нелинейной динамикой, и работы [10, 13, 41], выполненные под руководством Н.Л.Григоренко, В.С.Пацко, Е.С.Половинкина, в которых изложены алгоритмы построения стабильных мостов для линейных дифференциальных игр.

В конкретных содержательных задачах информационные множества, как правило, имеют сложную структуру, что доставляет трудности при их аналитическом или численном исследовании. Построению информационных множеств в конкретных задачах посвящены работы Д.Д.Емельянова, Е.Я.Рубиновича, Б.М.Миллера [12, 68–70], С.И.Кумкова, В.С.Пацко [27, 40, 76], М.О.Антонова, В.И.Ширяева, К.Е.Афанасьевой, А.И.Коблова [5], А.В.Кряжимского, С.Д.Филиппова [26], В.Я.Рузакова [48], А.Ф.Шорикова [57], M.Marco, A.Vicino, A.Garulli, A.Giannitrapani [79, 80], L.Jaulin, M.Kieffer, O.Didrit, E.Walter, O.Leveque, D.Meizel [72, 73] A.G.Parlos, A.F.Henry, F.C.Schweppen, L.A.Could, D.D.Lanning [83].

Данная работа примыкает именно к этому направлению исследований.

Модельные уравнения движения. Говоря о движении самолёта, считаем, что оно происходит в горизонтальной плоскости и описывается либо системой третьего, либо четвёртого порядка.

В первом из этих случаев фазовые переменные есть две координаты x, y геометрического положения и угол φ направления вектора скорости. Величина скорости V полагается постоянной. Скалярное управление ограничено по модулю и определяет мгновенный радиус разворота вектора скорости. Описание динамики имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V} u, \quad |u| \leq 1, \quad V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Во втором случае величина скорости V является переменной (четвёртая фазовая координата). Добавлена также ещё одна компонента управляющего воздействия, влияющая на величину скорости. Она стеснена геометрическим ограничением. Описание динамики:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V, \\ \dot{V} &= w, \quad k = \text{const} > 0, \quad V \geq \text{const} > 0, \quad |u| \leq 1, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2.\end{aligned}\tag{0.2}$$

Предполагаем, что в процессе наблюдения за движением самолёта производятся замеры его геометрического положения на плоскости x, y . Ошибки замеров стеснены геометрическими ограничениями. Полученный в момент t замер и известное априорное ограничение на его ошибку выделяют на плоскости x, y множество неопределённости $H^\#(t)$.

На рис. 0.1 представлены три разных множества $H^\#(t)$ (в виде квадрата, круга и кольцевого сектора), сформированные по замерам положения объекта, двигающегося по пунктирной траектории. Точки на траектории, показывающие положение в моменты замеров, отмечены крестиками, а сами замеры – значком \oplus .

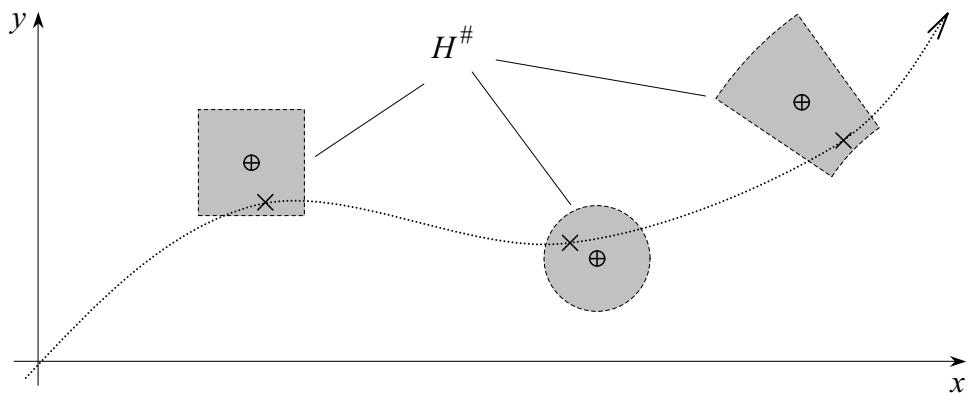


Рис. 0.1: Примеры множеств неопределённости.

Например, типичным источником информации является радиолокатор, от которого поступают замеры положения самолёта: дальность D_r и местный азимут α_r (рис. 0.2). Априорно известны максимальные ошибки ε_d (по дальности) и ε_α (по углу). Соответствующее множество $H^\#$ есть кольцевой сектор, который разумно подменять выпуклым четырёхугольником.

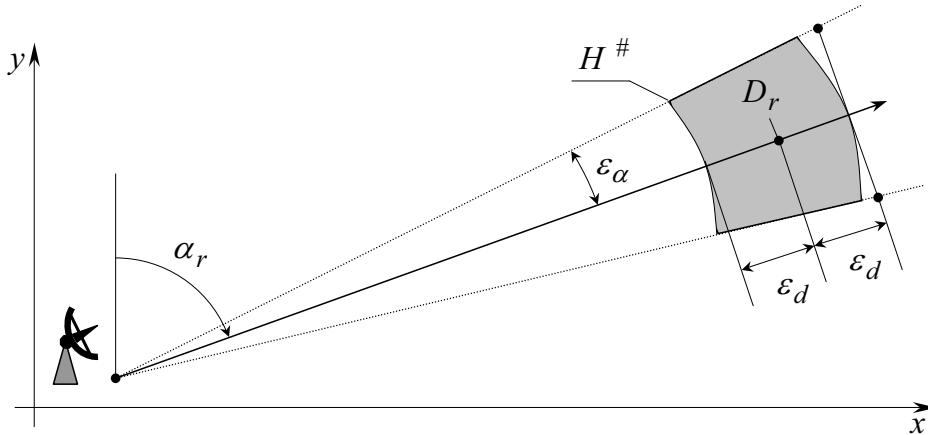


Рис. 0.2: Замер, получаемый при помощи РЛС, и его множество неопределённости.

В работе множества $H^\#$ считаются выпуклыми.

Способы описания динамики движения самолёта в виде системы (0.1) или системы (0.2) являются простейшими. Такие модели используются также в работах по управляемым тележкам. Обзорные статьи на эту тему собраны в книге [78], выпущенной под редакцией J.-P.Laumond.

В работах по управляемым тележкам систему (0.1) часто называют Dubins' Car, поскольку L.E.Dubins в статье [67] изучал задачу быстродействия для системы (0.1) (перевод в заданную точку трёхмерного фазового пространства) и доказал утверждение о числе и характере переключений оптимального управления.

Построение оптимального управления обратной связи в задаче быстродействия для системы (0.1) с трёхмерным условием окончания исследовал Т.Pecsvaradi в статье [84]. В этой статье рассматривались вопросы, связанные с маневрированием самолёта в районе аэропорта. В этой связи можно также отметить статью [71], где рассматривалось построение простых для реализации и близких к оптимальным маневров движений самолёта в горизонтальной плоскости.

Трёхмерную модель динамики вида (0.1) активно использовал Р.Айзекс [1] (причём даже в игровых ситуациях, когда в описании динамики присутствует помеха).

Задача быстродействия для четырёхмерной модели вида (0.2) изучалась в работе Ю.И. Бердышева [7].

Покажем, как уравнения вида (0.1), (0.2) получаются при рассмотрении движения самолёта в горизонтальной плоскости. Воспользуемся для этого материалом из книги [35, с. 60–61].

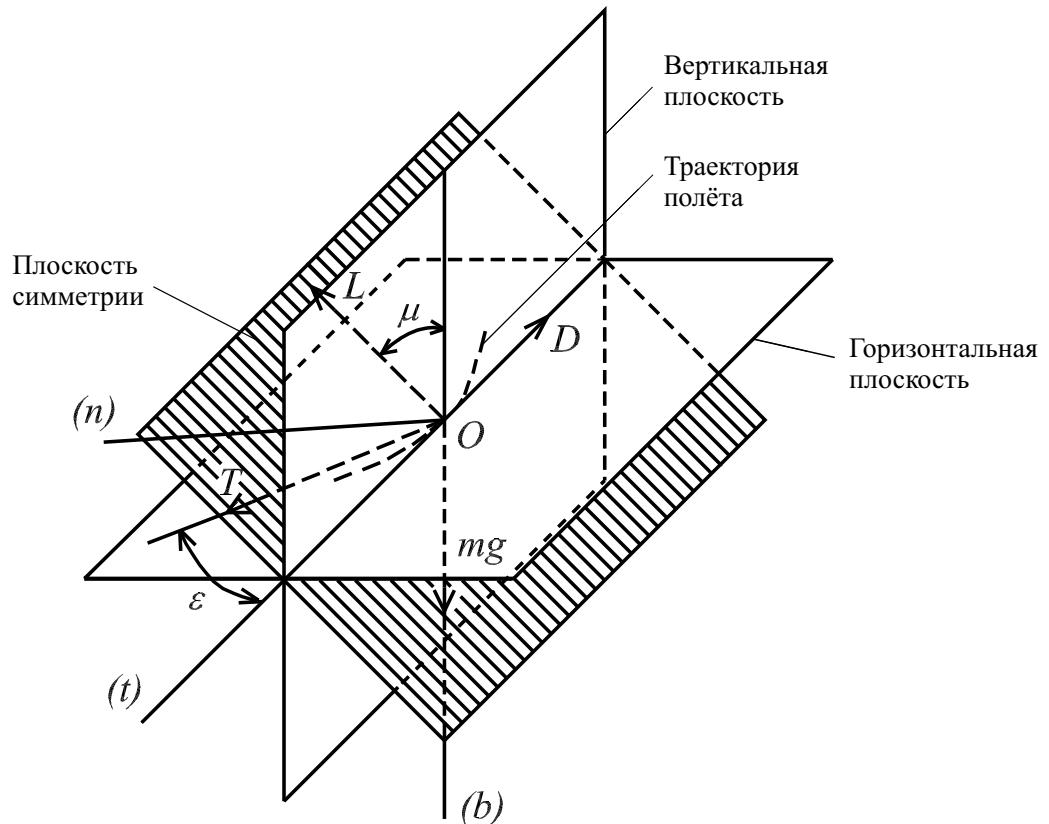


Рис. 0.3: Силы, действующие на самолёт при полёте в горизонтальной плоскости.

На рис. 0.3 показаны силы, действующие на самолёт при движении в горизонтальной плоскости. Здесь D – сила сопротивления, mg – сила тяжести, T – сила тяги, L – подъемная сила. Векторы T и L лежат в плоскости симметрии, ортогональной плоскости самолёта. Такое расположение силы тяги и подъёмной силы соответствует ситуации координированного разворота [35, 84]. Символом ϵ обозначен угол атаки тяги, символом μ – угол крена, т.е. угол между вертикальной плоскостью и плоскостью симметрии.

Если взять кинематические уравнения и соотношения равновесия сил в проекции на естественные оси (касательную (t), главную нормаль (n) и бинормаль (b)), то получится система из пяти уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} - V\cos\varphi &= 0, \\ \dot{y} - V\sin\varphi &= 0, \\ T\cos\epsilon - D - m\dot{V} &= 0, \\ (T\sin\epsilon + L)\sin\mu - mV\dot{\varphi} &= 0, \\ (T\sin\epsilon + L)\cos\mu - mg &= 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Считаем массу самолёта и его динамические характеристики постоянными на рассматриваемом промежутке времени. Выразив круглую скобку четвёртого уравнения

через пятое уравнение в системе (0.3), получим соотношение для $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi} = (g/V)\tang(\mu).$$

Обычно угол крена не превышает 30° (см. [84]). Вводя символ u для управляющего воздействия, запишем соотношение для $\dot{\varphi}$ в виде

$$\dot{\varphi} = \frac{g \cdot \tang 30^\circ}{V} u, \quad |u| \leq 1. \quad (0.4)$$

Третье уравнение системы (0.3) перепишем в виде

$$\dot{V} = (T\cos\varepsilon - D)/m. \quad (0.5)$$

В случае постоянной по величине скорости движения имеем $T\cos\varepsilon = D$. Если величина V не является постоянной, то правую часть соотношения (0.5) трактуем как управляющее воздействие w , стеснённое некоторым ограничением $\mu_1 \leq w \leq \mu_2$.

Таким образом, в случае постоянной скорости V из системы (0.3) получаем систему (0.1), а в случае переменной скорости – систему (0.2).

Краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена численно-аналитическому исследованию множеств достижимости системы (0.1). В литературе известно описание множеств достижимости этой системы на плоскости x, y . В диссертации множество достижимости исследуются в трёхмерном фазовом пространстве x, y, φ . Вначале доказывается, опираясь на принцип максимума Понтрягина, теорема о числе и характере переключений управляющих воздействий, ведущих на границу множества достижимости. Далее, с использованием этого результата численно строится граница множества достижимости и исследуется её изменение по времени. Обнаружены ситуации, когда множество достижимости перестаёт быть односвязным. Приведены изображения множества достижимости в различных системах координат.

Во *второй* главе рассматривается задача о построении информационных множеств для системы с динамикой (0.1), когда относительно реализации управляющих воздействий известно лишь то, что они удовлетворяют ограничению $|u| \leq 1$. Предложен способ построения оценки $\mathbf{G}(t)$ сверху для множеств прогноза $G(t)$ (множеств достижимости). Доказано утверждение о полугрупповом свойстве отображения $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$. При численной реализации способ использует сетку по координате φ . Каждому узлу сетки сопоставляется выпуклое множество на плоскости x, y . Разумность предлагаемой аппроксимации подтверждается сравнением с точными результатами, полученными в первой главе.

При построении информационных множеств предполагаем, что в дискретные моменты времени $\{t_i\}$ выполняются замеры геометрического положения (на плоскости x, y). Каждому замеру соответствует множество неопределённости $H(t_i)$ цилиндрическое по координате φ . Предлагаемый способ оценки сверху множеств прогноза удобен для выполнения операции пересечения $\mathbf{G}(t_i) \cap H(t_i)$.

При пересчете информационных множеств в процессе поступления замеров базовыми являются операция пересечения выпуклых многоугольников и операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых многоугольников. Реализация таких операций на плоскости не требует больших затрат. В конце второй главы приведены результаты моделирования движения информационных множеств $\mathbf{I}(t)$.

В *третьей* главе процедура построения информационных множеств переносится на случай системы (0.2). Здесь используется сетка по координатам φ, V . Приведены результаты моделирования.

В *четвёртой* главе рассматривается задача проводки самолёта (движущегося в горизонтальной плоскости) через заданные области. Для описания динамики выбрана система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi + v_1, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi + v_2, \quad v = (v_1, v_2)^T \in Q \\ \dot{\varphi} &= ku/V, \\ \dot{V} &= w, \quad k = \text{const} > 0, \quad V \geq \text{const} > 0, \quad |u| \leq 1, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2,\end{aligned}$$

отличающаяся от системы (0.2) наличием неизвестной помехи $v = (v_1, v_2)^T$ в первых двух строках динамики. Наложено ограничение $v \in Q$. Исследуется задача о возможности гарантированного перевода самолета из начального состояния на заданное терминальное множество в фиксированный момент времени с соблюдением фазовых ограничений в промежуточные моменты времени.

На основе методов теории дифференциальных игр предложен алгоритм попятного построения оценки сверху множества разрешимости в задаче о гарантированном переводе. В алгоритме применены аппроксимирующие процедуры аналогичные тем, что использованы в главе 3. Именно поэтому данная задача включена в диссертацию.

В *приложении* помещены результаты расчёта трубы четырёхмерных информационных множеств для двух примеров, в которых по постановке задачи замеры геометрического положения самолёта вместе с ограничениями на их ошибку считаются известными для некоторой совокупности моментов времени на весьма большом промежутке времени. Предполагается, что какие-либо дополнительные замеры больше не поступают. Для построения информационных множеств применяется алгоритм из третьей главы, который прогоняется несколько раз в прямом и обратном времени. Кратко описываются также результаты построения некоторого “эталонного” движения, идущего в трубке информационных множеств.

Основные результаты диссертации:

1. Доказана теорема о числе и характере переключений управления, ведущего на границу множества достижимости нелинейной системы третьего порядка, описывающей движение самолёта в горизонтальной плоскости.
2. Исследована структура границы множества достижимости нелинейной системы третьего порядка, описывающей движение самолёта в горизонтальной плоскости.
3. Предложен способ аппроксимации сверху информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости. Реализованы алгоритмы для трёхмерного и четырёхмерного случаев.
4. Предложен алгоритм построения оценки сверху множества разрешимости в игровой задаче проводки самолёта через заданные области.

Результаты диссертации опубликованы в работах [89–100].

Автор выражает глубокую признательность Валерию Семёновичу Пацко за постоянное внимание и поддержку при подготовке работы.

Глава 1

Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы

Данная глава посвящена нелинейной управляемой системе третьего порядка, описывающей движение автомобиля или самолета в горизонтальной плоскости. Доказывается утверждение о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества достижимости. Приведены результаты численного построения множества достижимости.

Под множеством достижимости $G(T)$ в фиксированный момент времени T понимаем совокупность всех состояний в фазовом пространстве, в каждое из которых возможен перевод системы в момент T из заданного начального состояния при помощи некоторого допустимого управления.

В исследуемой системе две координаты имеют смысл геометрического положения на плоскости, а третья координата есть угол направления вектора скорости. Величина скорости предполагается постоянной. Скалярное управляющее воздействие ограничено по модулю и определяет мгновенную угловую скорость вращения вектора линейной скорости. Такая система часто используется [1, 4, 9, 47, 52, 78, 84] при простейшем описании движения автомобиля или самолета в горизонтальной плоскости.

Применяя к рассматриваемой системе принцип максимума Понtryгина [43], нетрудно установить, что в каждую точку на границе множества $G(T)$ ведет кусочно-постоянное управление с конечным числом переключений. Доказывается утверждение о числе переключений и их характере. Это утверждение используется для численного построения границы множества достижимости.

Исследуемое множество $G(T)$ представляет интерес как нетривиальный пример множества достижимости в трехмерном пространстве для нелинейной управляемой системы. Результаты построения множества $G(T)$ могут быть использованы в качестве тестовых при разработке универсальных численных алгоритмов построения множеств достижимости нелинейных управляемых систем. Они также полезны при анализе процедур построения множеств прогноза в задачах с неполной информацией для систем, описывающих движение самолета в горизонтальной плоскости.

1.1 Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \frac{k}{V} u, \quad |u| \leq 1, \quad V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения, φ – угол наклона вектора скорости (рис. 1.1), V – величина скорости, k – максимальное боковое ускорение. Допустимыми управлениями $u(\cdot)$ считаются измеримые функции времени, удовлетворяющие ограничению $|u| \leq 1$. Значения угла φ рассматриваются на промежутке $(-\infty, \infty)$.

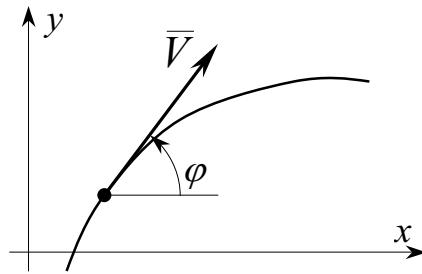


Рис. 1.1: Система координат.

Фазовый вектор (x, y, φ) системы (1.1) обозначим через z . Для краткости положим $\alpha = k/V$.

Зафиксируем z_0 – произвольное состояние системы (1.1) в начальный момент времени t_0 . Множество достижимости $G(T)$ в момент времени $T \geq t_0$ есть совокупность всех точек z трехмерного фазового пространства, в каждую из которых возможен перевод системы (1.1) в момент T при помощи некоторого допустимого управления на промежутке $[t_0, T]$ из начальной точки z_0 .

В силу стационарности системы (1.1) выбор начального момента времени t_0 не существенен. Кроме того, специфика системы (1.1) такова, что начальное состояние z_0 влияет на множество достижимости лишь с точностью до поворота и переноса.

Из общих результатов математической теории управления следует [33], что множество $G(T)$ замкнуто и ограничено.

Целью данной главы является доказательство утверждения о числе и характере переключений управлений, ведущих на границу множества $G(T)$, и численное построение его границы.

Исследование проекции $G^\#(T)$ множества $G(T)$ на плоскость x, y проведено в статье [66]. Множество $G^\#(T)$ изучалось также в работе [8]. Автору неизвестны работы, где бы рассматривалось трехмерное множество достижимости для системы (1.1).

1.2 Проекция множества достижимости на плоскость геометрических координат

Прежде чем приступить к исследованию множества достижимости в трехмерном фазовом пространстве, дадим изображение его проекции на плоскость x, y . Начальный момент времени считаем равным нулю. На рис. 1.2 показаны проекции множества достижимости для четырех моментов времени $T_i = i \cdot 0.5\pi/\alpha$, $i = 1, 2, 3, 4$. Эти моменты соответствуют времени разворота вектора скорости на угол $i \cdot 0.5\pi$ ($-i \cdot 0.5\pi$) при движении с управлением $u = 1$ ($u = -1$). Для каждого момента рисунок сделан в подходящем масштабе.

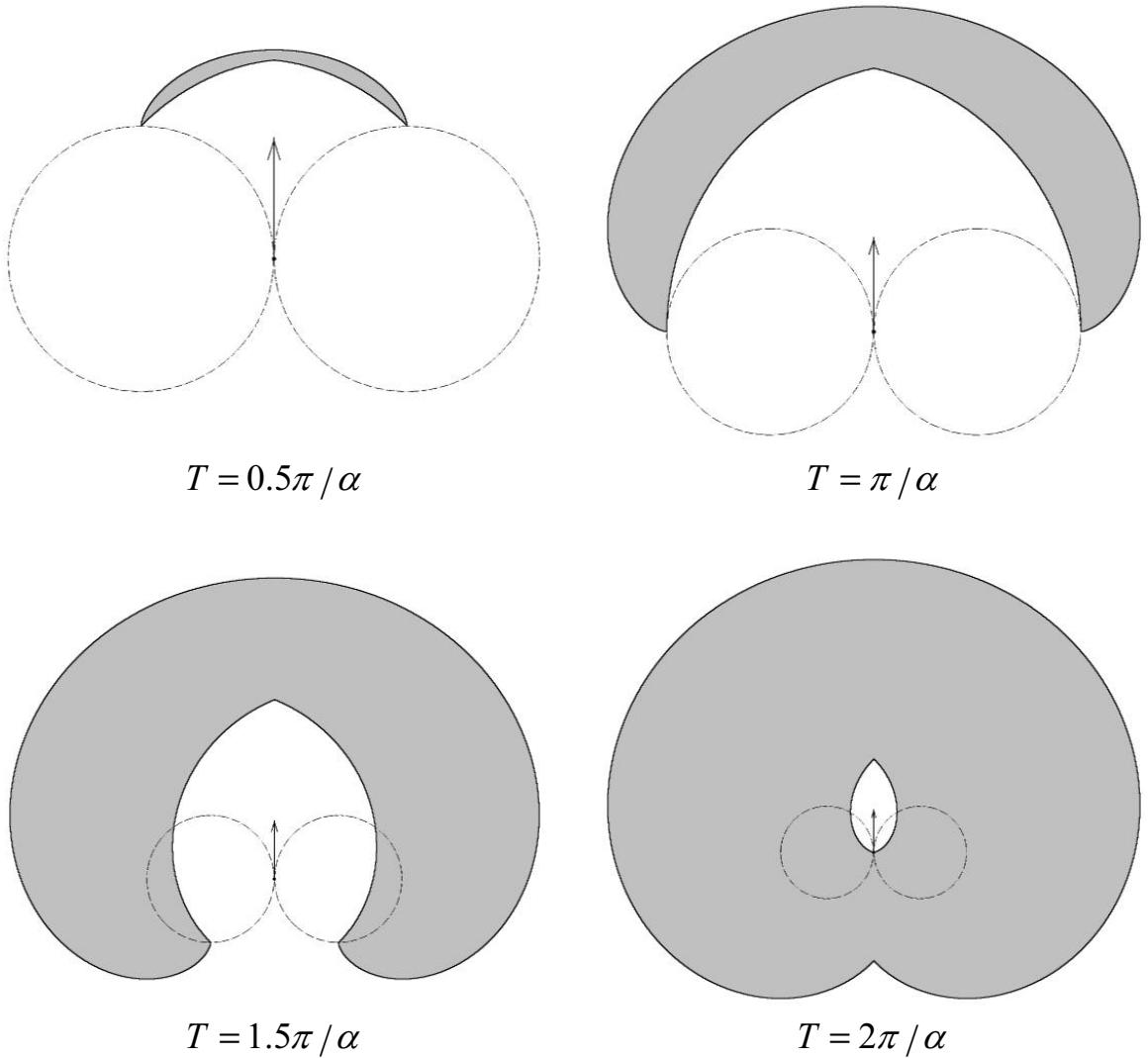


Рис. 1.2: Проекции множества достижимости на плоскость x, y .

Траектории с крайними управлениями $u = 1$ и $u = -1$ являются окружностями радиуса V/α . Вектор начальной скорости отмечен стрелочкой. Представленные множества подсчитаны при помощи соотношений из статей [8, 66].

1.3 Принцип максимума Понtryгина

Известно [33], что управлени, которые ведут на границу множества достижимости, удовлетворяют принципу максимума Понtryгина. Запишем соотношения принципа максимума для системы (1.1).

Пусть $u^*(\cdot)$ – некоторое допустимое управление, а $(x^*(\cdot), y^*(\cdot), \varphi^*(\cdot))$ – соответствующее движение системы (1.1) на промежутке $[t_0, t_*]$. Дифференциальные уравнения сопряженной системы имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 0, \\ \dot{\psi}_2 &= 0, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_1 V \sin \varphi^*(t) - \psi_2 V \cos \varphi^*(t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Принцип максимума означает, что существует ненулевое решение $(\psi_1^*(\cdot), \psi_2^*(\cdot), \psi_3^*(\cdot))$ системы (1.2), для которого почти всюду (п.в.) на промежутке $[t_0, t_*]$ выполнено условие

$$\begin{aligned}\psi_1^*(t)V \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t)V \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t)\alpha u^*(t) &= \\ = \max_{|u| \leq 1} [\psi_1^*(t)V \cos \varphi^*(t) + \psi_2^*(t)V \sin \varphi^*(t) + \psi_3^*(t)\alpha u].\end{aligned}$$

Таким образом, условие максимума имеет вид

$$\text{п.в. } \psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{|u| \leq 1} \psi_3^*(t)u, \quad t \in [t_0, t_*].\tag{1.3}$$

Отметим, что функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ есть константы. Обозначим их ψ_1^* и ψ_2^* .

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на промежутке $[t_0, t_*]$. Следовательно, в этом случае либо п.в. $u^*(t) = 1$, либо п.в. $u^*(t) = -1$.

Пусть теперь хотя бы одно из чисел ψ_1^* , ψ_2^* не равно нулю. Опираясь на (1.1) и (1.2), можно записать следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^*y^*(t) - \psi_2^*x^*(t) + C.$$

Отсюда следует, что $\psi_3^*(t) = 0$ тогда и только тогда, когда точка $(x^*(t), y^*(t))$ геометрического положения в момент t удовлетворяет уравнению прямой

$$\psi_1^*y - \psi_2^*x + C = 0.\tag{1.4}$$

Прямая (1.4) использовалась во многих работах (например, [8, 52]), где для системы (1.1) анализировался принцип максимума.

В силу соотношения (1.3), если $\psi_3^*(t) > 0$ ($\psi_3^*(t) < 0$) на некотором промежутке времени, то $u^*(t) = 1$ ($u^*(t) = -1$) п.в. на этом промежутке. Соответствующее движение

в проекции на плоскость x, y при этом идет по дуге окружности радиуса V/α против часовой стрелки в полуплоскости $\psi_1^*y - \psi_2^*x + C > 0$ (по часовой стрелке в полуплоскости $\psi_1^*y - \psi_2^*x + C < 0$). Условимся называть циклом участок движения длительностью $2\pi/\alpha$, на котором п.в. $u^*(t) = 1$ или п.в. $u^*(t) = -1$. Траектория движения на таком участке в проекции на плоскость x, y представляет собой окружность.

Если $\psi_3^*(t) = 0$ на некотором промежутке времени, то на этом промежутке движение $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ идет по прямой (1.4). Стало быть, $\varphi^*(t) = \text{const}$. Поэтому $u^*(t) = 0$ п.в. на этом промежутке.

Рассмотрим три варианта возможного взаимного расположения траектории движения $(x^*(\cdot), y^*(\cdot))$ и прямой (1.4).

1) Траектория пересекает прямую (1.4) в некоторый момент времени под ненулевым углом (рис. 1.3а). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей и интервалы времени между соседними моментами пересечения прямой (1.4) одинаковы. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ меняет знак на промежутке $[t_0, t_*]$ конечное число раз.

2) Траектория касается прямой (1.4) в некоторый момент времени (рис. 1.3б). Тогда траектория представляет собой набор дуг окружностей и прямолинейных участков. Прямолинейные участки лежат на прямой (1.4), дуги окружностей касаются этой прямой. При этом любой полный участок в виде дуги окружности, не являющийся крайним, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов. Функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ либо не меняет знак, либо меняет его конечное число раз.

3) Траектория не пересекается с прямой (1.4). В этом случае функция $\psi_3^*(\cdot)$ имеет один и тот же знак на всем промежутке $[t_0, t_*]$ и траектория является дугой окружности.

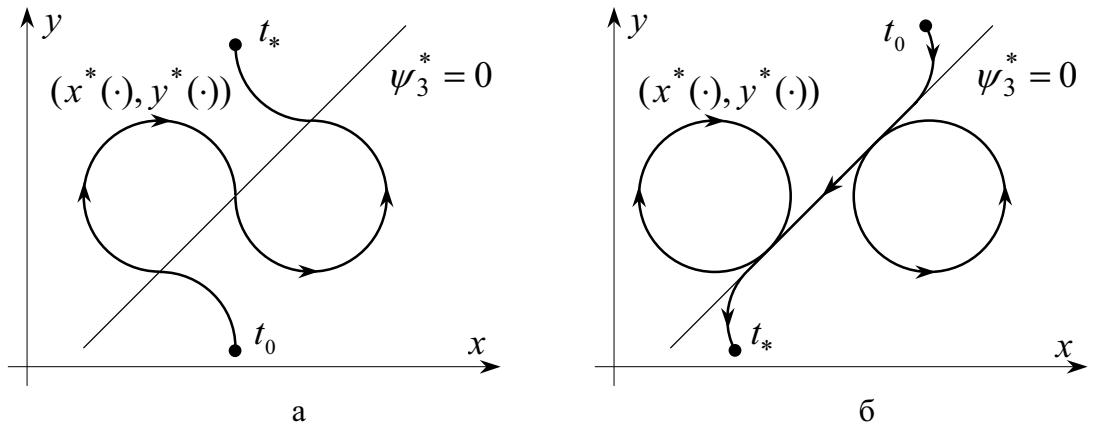


Рис. 1.3: Траектории принципа максимума и прямая переключения.

Таким образом, если выполнено условие максимума (1.3), то функция $\psi_3^*(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ может менять знак лишь конечное число раз. Поэтому в качестве управления $u^*(\cdot)$, порождающего движение $z^*(\cdot)$ и удовлетворяющего принципу максимума, можно взять кусочно-постоянное управление со значениями $0, \pm 1$ и конечным числом переключений на промежутке $[t_0, t_*]$. Для определенности будем считать такое управ-

ление кусочно-непрерывным справа. Момент t_* не включаем в число моментов переключения.

Кроме того, из изложенного в данном разделе вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 1.1. *Пусть движение $z^*(\cdot)$ порождается кусочно-постоянным управлением $u^*(\cdot)$ и при этом выполнен принцип максимума. Тогда*

- а)** *если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и нет циклов, то интервалы времени между соседними моментами переключения одинаковы;*
- б)** *если на движении $z^*(\cdot)$ нет участков с нулевым управлением и есть хотя бы один цикл, то все точки геометрического положения в моменты переключения совпадают;*
- в)** *если на движении $z^*(\cdot)$ есть совпадающие точки геометрического положения в моменты переключения, то на этом движении имеется хотя бы один цикл;*
- г)** *если на движении $z^*(\cdot)$ есть участок с нулевым управлением, то любой полный участок с управлением 1 или -1 , не лежащий на краю, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов.*

1.4 Свойства движений с кусочно-постоянным управлением

В этом разделе будем рассматривать кусочно-постоянные управления со значениями $0, \pm 1$. Как показано в предыдущем разделе, таких управлений достаточно для построения границы множества достижимости. В леммах 1.2, 1.3 исследуются движения без участков с нулевым управлением. В лемме 1.4 анализируется случай с участком нулевого управления. Символ ∂ будет означать границу множества, символ int – внутренность.

Л е м м а 1.2. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ± 1 и двумя моментами переключения t_1, t_2 . Предположим, что точки геометрического положения на плоскости x, y в моменты переключения не совпадают. Пусть, кроме того, выполнено неравенство*

$$(t_1 - t_0) + (t_* - t_2) > (t_2 - t_1). \quad (1.5)$$

Тогда $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, примем следующую последовательность значений управления $u(\cdot)$: $-1, 1, -1$. Обозначим через $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2 .

Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Поскольку точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ не совпадают, то опираясь на лемму 1.1б, получаем, что движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ не имеет циклов.

Выберем моменты $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ и $\hat{t} \in (t_2, t_*)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$(t_1 - \bar{t}) + (\hat{t} - t_2) = (t_2 - t_1). \quad (1.6)$$

Это всегда можно сделать в силу условия (1.5).

Положим $\tilde{t}_1 = \bar{t} + \hat{t} - t_2$, $\tilde{t}_2 = \hat{t} - t_1 + \bar{t}$. Определим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot) = (\tilde{x}(\cdot), \tilde{y}(\cdot), \tilde{\varphi}(\cdot))$, выходящее в момент t_0 из точки $z(t_0)$ и задаваемое на промежутке $[t_0, t_*]$ управлением

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_0, \bar{t}), \\ 1, & t \in [\bar{t}, \tilde{t}_1), \\ -1, & t \in [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), \\ 1, & t \in [\tilde{t}_2, \hat{t}), \\ -1, & t \in [\hat{t}, t_*]. \end{cases}$$

Траектории исходного и вспомогательного движений показаны схематично на рис. 1.4.

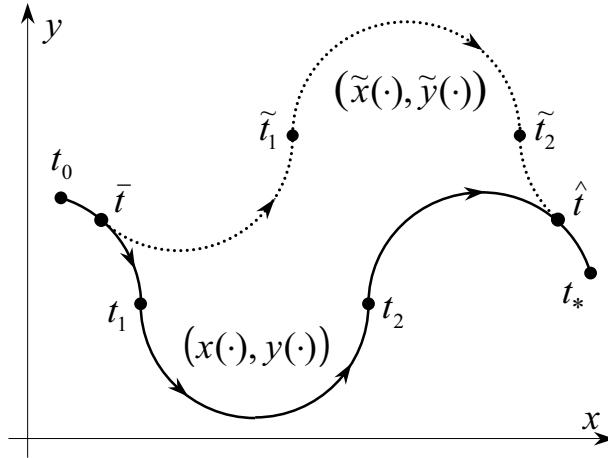


Рис. 1.4: Пояснение к доказательству леммы 1.2.

На полуинтервале $[\bar{t}, \hat{t}]$ управление $u(\cdot)$ имеет три промежутка $[\bar{t}, t_1], [t_1, t_2], [t_2, \hat{t}]$ постоянства со значениями $-1, 1, -1$. Вспомогательное управление $\tilde{u}(\cdot)$ имеет на $[\bar{t}, \hat{t}]$ также три промежутка $[\bar{t}, \tilde{t}_1], [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2], [\tilde{t}_2, \hat{t}]$ постоянства со значениями $1, -1, 1$.

Очевидно, что

$$t_1 - \bar{t} = \hat{t} - \tilde{t}_2, \quad t_2 - t_1 = \tilde{t}_2 - \tilde{t}_1, \quad \hat{t} - t_2 = \tilde{t}_1 - \bar{t}.$$

При этом на соответствующих парах промежутков управляющие воздействия исходного и вспомогательного движений противоположны по знаку. Отсюда получаем

$$u(t) = -\tilde{u}(\bar{t} + \hat{t} - t), \quad t \in (\bar{t}, t_1) \cup (t_1, t_2) \cup (t_2, \hat{t}). \quad (1.7)$$

Таким образом, равенство $u(t) = -\tilde{u}(\bar{t} + \hat{t} - t)$ выполняется всюду на (\bar{t}, \hat{t}) , за исключением моментов t_1, t_2 .

Используя третье уравнение системы (1.1), определение моментов \tilde{t}_1 , \tilde{t}_2 и соотношение (1.6), имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\hat{t}) &= \tilde{\varphi}(\bar{t}) + \alpha(\tilde{t}_1 - \bar{t}) - \alpha(\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1) + \alpha(\hat{t} - \tilde{t}_2) = \\ &= \tilde{\varphi}(\bar{t}) + \alpha(2\tilde{t}_1 - \bar{t} - 2\tilde{t}_2 + \hat{t}) = \tilde{\varphi}(\bar{t}).\end{aligned}$$

Следовательно, учитывая равенство $\tilde{\varphi}(\bar{t}) = \varphi(\bar{t})$, приходим к соотношению

$$\tilde{\varphi}(\hat{t}) = \varphi(\bar{t}). \quad (1.8)$$

Опираясь на (1.7), (1.8) и на третье уравнение системы (1.1), получаем

$$\varphi(t) = \varphi(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \alpha u(\tau) d\tau = \tilde{\varphi}(\hat{t}) - \int_{\bar{t}}^t \alpha \tilde{u}(\bar{t} + \hat{t} - \tau) d\tau.$$

Используя замену переменных $s = \bar{t} + \hat{t} - \tau$, имеем

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\hat{t}) + \int_{\hat{t}}^{\bar{t} + \hat{t} - t} \alpha \tilde{u}(s) ds = \tilde{\varphi}(\bar{t} + \hat{t} - t).$$

Таким образом,

$$\varphi(t) = \tilde{\varphi}(\bar{t} + \hat{t} - t), \quad t \in [\bar{t}, \hat{t}]. \quad (1.9)$$

Далее имеем

$$\tilde{x}(\hat{t}) = \tilde{x}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} V \cos \tilde{\varphi}(s) ds = \tilde{x}(\bar{t}) - \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} V \cos \tilde{\varphi}(\bar{t} + \hat{t} - \tau) d\tau.$$

Опираясь на (1.7) и учитывая, что $\tilde{x}(\bar{t}) = x(\bar{t})$, получаем

$$\tilde{x}(\hat{t}) = x(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\hat{t}} V \cos \varphi(\tau) d\tau = x(\hat{t}).$$

Аналогично получаем $\tilde{y}(\hat{t}) = y(\hat{t})$.

Таким образом, установлено равенство $\tilde{z}(\hat{t}) = z(\hat{t})$, т.е. в момент \hat{t} вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ находится в той же фазовой точке, что и исходное движение $z(\cdot)$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Стало быть, $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Поэтому управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

Движение $\tilde{z}(\cdot)$ не имеет циклов на промежутке $[t_0, t_*]$. Это следует из определения управления $\tilde{u}(\cdot)$ и отсутствия циклов на движении $z(\cdot)$. В силу леммы 1.1а получаем,

что интервалы времени между соседними моментами переключения управления $\tilde{u}(\cdot)$ должны быть одинаковы.

Однако это не так. Возьмем подряд идущие моменты переключения $\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \hat{t}$. С учетом (1.6) имеем $t_2 - t_1 > t_1 - \bar{t}$. Отсюда

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = t_2 - t_1 > t_1 - \bar{t} = \hat{t} - \tilde{t}_2.$$

Пришли к противоречию.

Таким образом, $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

Л е м м а 1.3. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями ± 1 и тремя моментами переключения. Тогда $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ – точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2, t_3 .

1) Будем считать вначале, что среди точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ нет совпадающих. Из двух средних промежутков $[t_1, t_2]$ и $[t_2, t_3]$ возьмем меньший по длине, а если их длины совпадают, то любой.

Предположим, что выбран промежуток $[t_2, t_3]$. Тогда на $[t_1, t_*]$ движение $z(\cdot)$ удовлетворяет условиям леммы 1.2 и, стало быть, $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

Если выбран промежуток $[t_1, t_2]$, то условия леммы 1.2 выполнены для движения $z(\cdot)$ на $[t_0, t_3]$. Поэтому $z(t_3) \in \text{int}G(t_3)$ и, стало быть, $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

2) Пусть теперь среди точек $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ есть совпадающие. Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

В силу леммы 1.1в на движении $z(\cdot)$ есть хотя бы один цикл. С учетом леммы 1.1б получаем тогда, что точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ совпадают. В таком случае движение на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов в одну сторону, а на промежутке $[t_2, t_3]$ – один или несколько подряд идущих циклов в другую сторону (рис. 1.5).

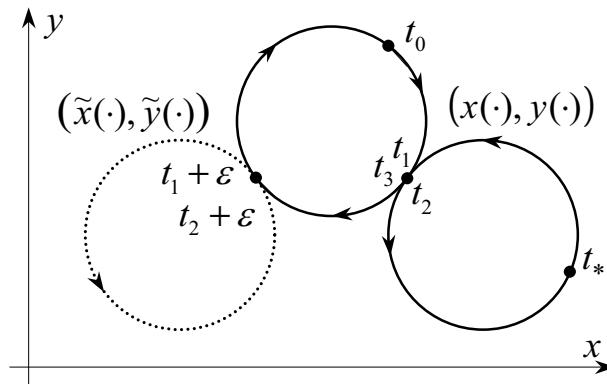


Рис. 1.5: Пояснение к доказательству леммы 1.3.

Рассмотрим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ (рис. 1.5), полученное путем небольшого смещения моментов переключения t_1 и t_2 . А именно, возьмем вместо них моменты переключения $t_1 + \varepsilon$ и $t_2 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2\pi/\alpha$.

Движения $\tilde{z}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают на промежутке $[t_2 + \varepsilon, t_*]$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Поэтому $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Стало быть, выполнен принцип максимума. Однако на движении $\tilde{z}(\cdot)$ есть циклы, хотя точки геометрического положения в моменты переключения не совпадают. Это противоречит лемме 1.1б. Таким образом, $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

Л е м м а 1.4. *Пусть движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_0, t_*]$ порождается кусочно-постоянным управлением $u(\cdot)$ со значениями $0, \pm 1$ и двумя моментами переключения. Предположим, что участок с нулевым управлением один и является одним из двух крайних участков постоянства управления. Тогда $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности управление $u(\cdot)$ принимает последовательно значения $0, 1, -1$. Точки геометрического положения в моменты переключения t_1, t_2 обозначим $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$.

Предположим от противного, что $z(t_*) \in \partial G(t_*)$. Тогда управление $u(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума.

В силу леммы 1.1г движение $z(\cdot)$ на промежутке $[t_1, t_2]$ представляет собой один или несколько подряд идущих циклов (рис. 1.6). Следовательно, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

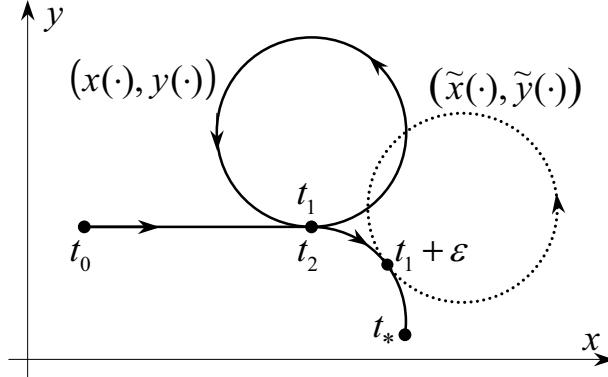


Рис. 1.6: Пояснение к доказательству леммы 1.4.

Рассмотрим вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$ (рис. 1.6), выходящее в момент t_0 из точки $z(t_0)$ и задаваемое управлением

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_1), \\ -1, & t \in [t_1, t_1 + \varepsilon), \\ 1, & t \in [t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon), \\ -1, & t \in [t_2 + \varepsilon, t_*]. \end{cases}$$

Здесь ε – достаточно малое число: $0 < \varepsilon < t_* - t_2$, $\varepsilon < 2\pi/\alpha$.

Движения $\tilde{z}(\cdot)$ и $z(\cdot)$ совпадают на промежутке $[t_2 + \varepsilon, t_*]$. Следовательно, $\tilde{z}(t_*) = z(t_*)$. Поэтому $\tilde{z}(t_*) \in \partial G(t_*)$. Стало быть, управление $\tilde{u}(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Однако движение $\tilde{z}(\cdot)$ на промежутке $[t_1, t_1 + \varepsilon]$ не имеет циклов, что противоречит лемме 1.1г.

Таким образом, $z(t_*) \in \text{int}G(t_*)$.

1.5 Управления, ведущие на границу множества достижимости

Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1.1 В каждую точку границы множества достижимости системы (1.1) можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями. При этом в случае двух переключений можно ограничиться шестью вариантами последовательности управлений:

$$\begin{array}{llll} 1) & 1, 0, 1; & 2) & -1, 0, 1; \\ 5) & 1, -1, 1; & 6) & -1, 1, -1. \end{array} \quad (1.10)$$

Доказательство. Предположим от противного, что на границе множества достижимости $G(T)$ есть точка \hat{z} , перевод в которую возможен лишь при помощи управления с тремя или более переключениями. Если таких управляющих функций несколько, то возьмем управление с наименьшим числом переключений. Обозначим выбранное управление через $u^*(\cdot)$, а порождаемое им движение через $z^*(\cdot)$.

Рассмотрим движение $z^*(\cdot)$ на четырех последних участках постоянства управления. Среди них может быть не более двух участков с нулевым управлением. При этом возможны следующие четыре варианта.

а) Участков с нулевым управлением нет. Тогда в силу леммы 1.3 имеем $z^*(T) \in \text{int}G(T)$. Это противоречит тому, что $z^*(T) = \hat{z} \in \partial G(T)$.

б) Участок с нулевым управлением один. В этом случае можно выделить три подряд идущих участка так, чтобы участок с нулевым управлением был расположен в начале или в конце такой тройки. Опираясь на лемму 1.4, имеем $z^*(T) \in \text{int}G(T)$, что противоречит соотношению $z^*(T) = \hat{z} \in \partial G(T)$.

в) Участков с нулевым управлением два, и они расположены по краям. Здесь аналогично пункту б) при помощи леммы 1.4 устанавливаем, что $z^*(T) \in \text{int}G(T)$, и получаем противоречие.

г) Участков с нулевым управлением два (из четырех), и между ними только один участок с ненулевым управлением. Управление $u^*(\cdot)$ удовлетворяет принципу максимума. Поэтому в силу леммы 1.1г средний участок с ненулевым управлением, лежащий

между участками с нулевым управлением, представляет собой один или несколько подряд идущих циклов (рис. 1.7).

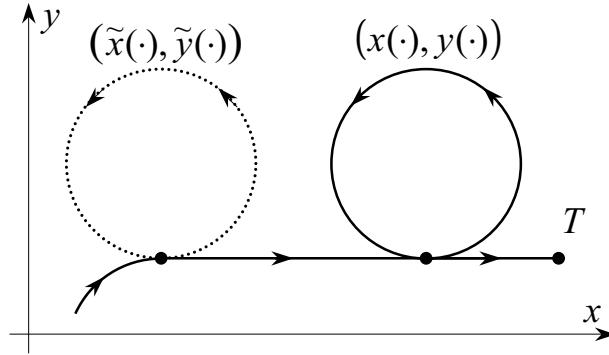


Рис. 1.7: Пояснение к доказательству теоремы 1.1.

Переносим все циклы со среднего участка в начальную точку первого прямолинейного участка, либо в конечную точку второго прямолинейного участка. Склейвая во времени прямолинейные участки, получаем вспомогательное движение $\tilde{z}(\cdot)$, ведущее в ту же точку в момент времени T , что и исходное движение $z^*(\cdot)$ (рис. 1.7). При этом вспомогательное движение имеет на одно переключение меньше, чем исходное. Это противоречит сделанному предположению о выборе управления $u^*(\cdot)$ с наименьшим числом переключений.

Таким образом, в любую точку на границе множества достижимости $G(T)$ можно перейти при помощи кусочно-постоянного управления с не более чем двумя переключениями.

Перейдем к вопросу о виде последовательности управлений. Кроме указанных в формулировке теоремы вариантов 1–6 управлений с двумя переключениями, логически возможны еще шесть вариантов:

$$\begin{array}{ll} 7) & 0, 1, -1; \quad 8) & 0, -1, 1; \quad 9) & 1, -1, 0; \quad 10) & -1, 1, 0; \\ 11) & 0, 1, 0; \quad 12) & 0, -1, 0. \end{array}$$

Управления вида 7–10 не могут приводить на границу множества достижимости в силу леммы 1.4.

Рассмотрим варианты 11,12. Здесь для каждого движения можно уменьшить число переключений на единицу аналогично тому, как это сделано в пункте г). Получим управление с одним переключением, ведущее в ту же точку на границе. Теорема доказана.

Замечание 1.1. Отметим, что приведенная теорема не дает полной характеристики управлений, ведущих на границу множества достижимости. Открытым является вопрос о дополнительной совокупности эффективно проверяемых условий, учет которых на движениях вида (1.10) целиком отсеивал бы движения, идущие во внутренность множества достижимости, и оставлял все движения, которые идут на его границу.

Замечание 1.2. В работе [67, с. 515], были получены необходимые условия оптимальности в задаче минимизации времени перевода системы (1.1) из одной точки в другую в трёхмерном фазовом пространстве. Эти условия имеют ту же форму, что и в сформулированной выше теореме. Однако не все точки границы множества достижимости $G(t)$ соответствуют решению задачи быстродействия. Поэтому теорема 1.1 не следует из результатов работы [67].

1.6 Численное построение трехмерного множества достижимости

Применим теорему 1.1 для численного построения границы множества достижимости системы (1.1). Моменты переключения будем использовать в качестве параметров.

Полагаем $t_0 = 0$, $z_0 = 0$.

Для построения границы множества $G(T)$ перебираем все управления вида 1–6 из списка (1.10) с двумя моментами переключения t_1, t_2 . Для каждого варианта переключений параметр t_1 выбирается из промежутка $[0, T]$, а параметр t_2 – из промежутка $[t_1, T]$. Управления с одним переключением и без переключений при этом также охватываются. Взяв конкретный вариант переключений и перебирая для него параметры t_1, t_2 на некоторой достаточно мелкой сетке, получаем набор точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве x, y, φ .

Таким образом, каждому из шести вариантов в списке (1.10) соответствует своя поверхность в трехмерном пространстве. Граница множества достижимости $G(T)$ составляется из кусков этих поверхностей. Шесть поверхностей без какой-либо дополнительной обработки загружаются в программу визуализации. С ее помощью выделяем границу множества достижимости. Некоторые поверхности частично или полностью попадают внутрь множества достижимости. При изображении границы такие участки не видны.

На рис. 1.8 показана с двух ракурсов граница множества $G(T)$ для момента $T = \pi/\alpha$. Цветом отмечены участки границы с различным характером управляемого воздействия. Синим цветом показан участок, соответствующий варианту, в котором управление последовательно во времени принимает значения 1, 0, 1. Фиолетовый цвет соответствует участку для варианта с последовательностью управлений -1, 0, 1 и т.д. С некоторым шагом по оси φ изображены сечения множества достижимости плоскостью $\varphi = \text{const}$. Управление, тождественно равное нулю, ведет в точку стыковки участков 1–4. В точки линий, лежащих на стыке участков 1,2; 1,3; 2,4; 2,5; 2,6; 3,4; 3,5; 3,6, ведет управление с одним переключением. В любую точку линии, являющейся общей для участков 5 и 6, идут два движения, каждое с двумя переключениями. На этой линии участки 5,6 имеют негладкую стыковку. Угол стыковки не очень большой и на рисунке не заметен.

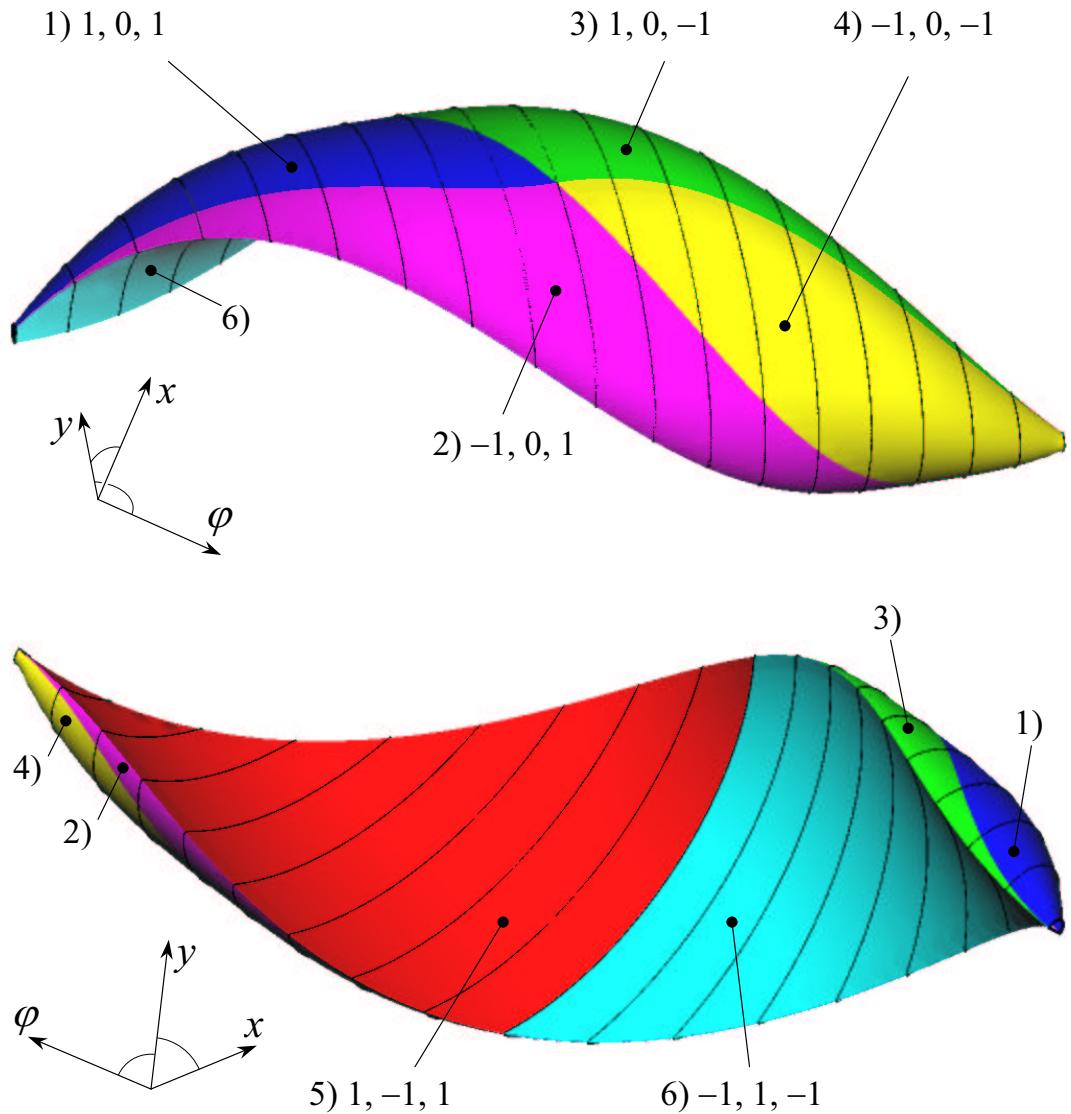


Рис. 1.8: Структура границы множества достижимости для $T = \pi/\alpha$.

На рис. 1.9 показаны в одном ракурсе множества достижимости $G(T)$ для четырех моментов времени T . Четко прослеживается изменение структуры границы множества достижимости. С увеличением времени передняя часть границы, составленная из участков 1–4, “затягивает” тыльную часть, составленную из участков 5, 6.

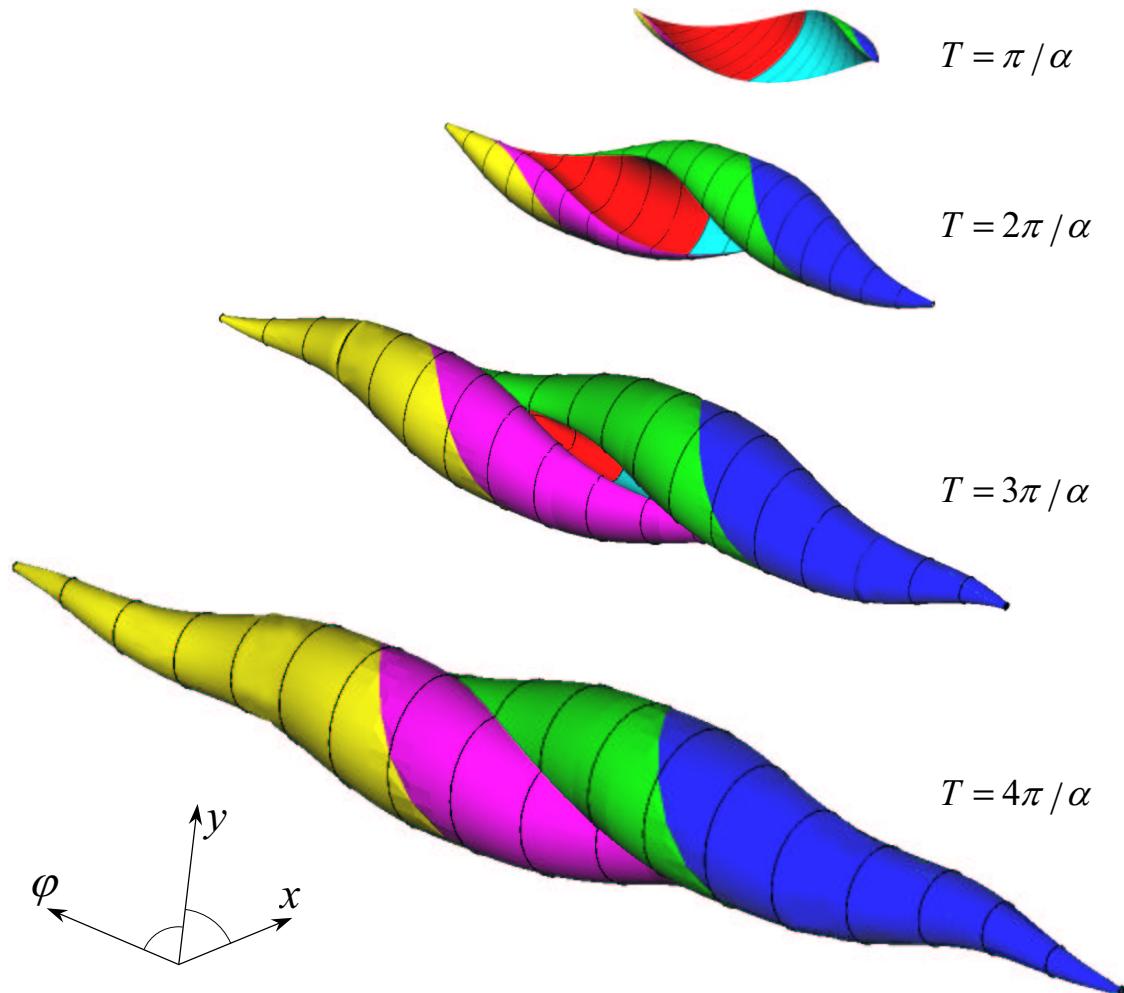


Рис. 1.9: Развитие множества достижимости.

При переходе от $T = 3\pi/\alpha$ к $T = 4\pi/\alpha$ наступает момент $T \approx 3.63\pi/\alpha$, начиная с которого множество достижимости $G(T)$ на некотором малом промежутке времени не является односвязным. А именно, появляется полость, не принадлежащая множеству достижимости. На рис. 1.10 показано зарождение такой ситуации. Здесь изображен срез двух множеств $G(T)$ для моментов $T = 3\pi/\alpha$ и $T = 3.63\pi/\alpha$. Отсечка сделана при помощи плоскости $\varphi = 0$. Множество $G(3\pi/\alpha)$ односвязное, а множество $G(3.63\pi/\alpha)$ односвязным не является.

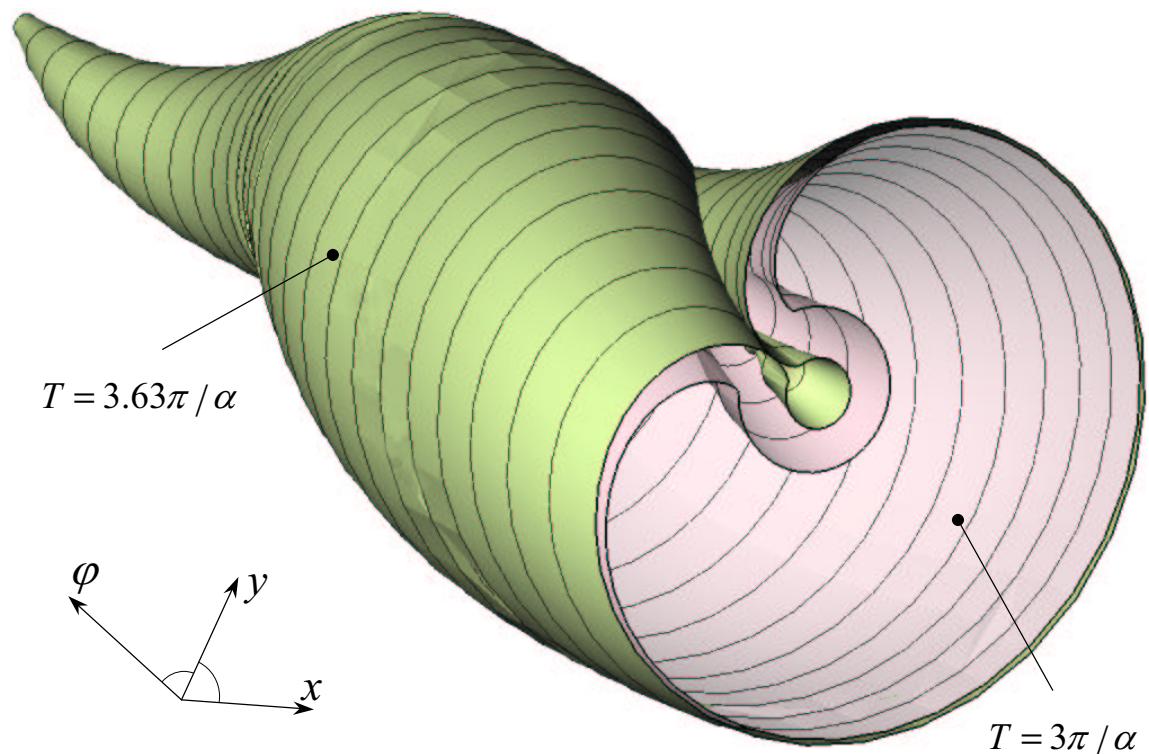


Рис. 1.10: Нарушение односвязности множества достижимости.

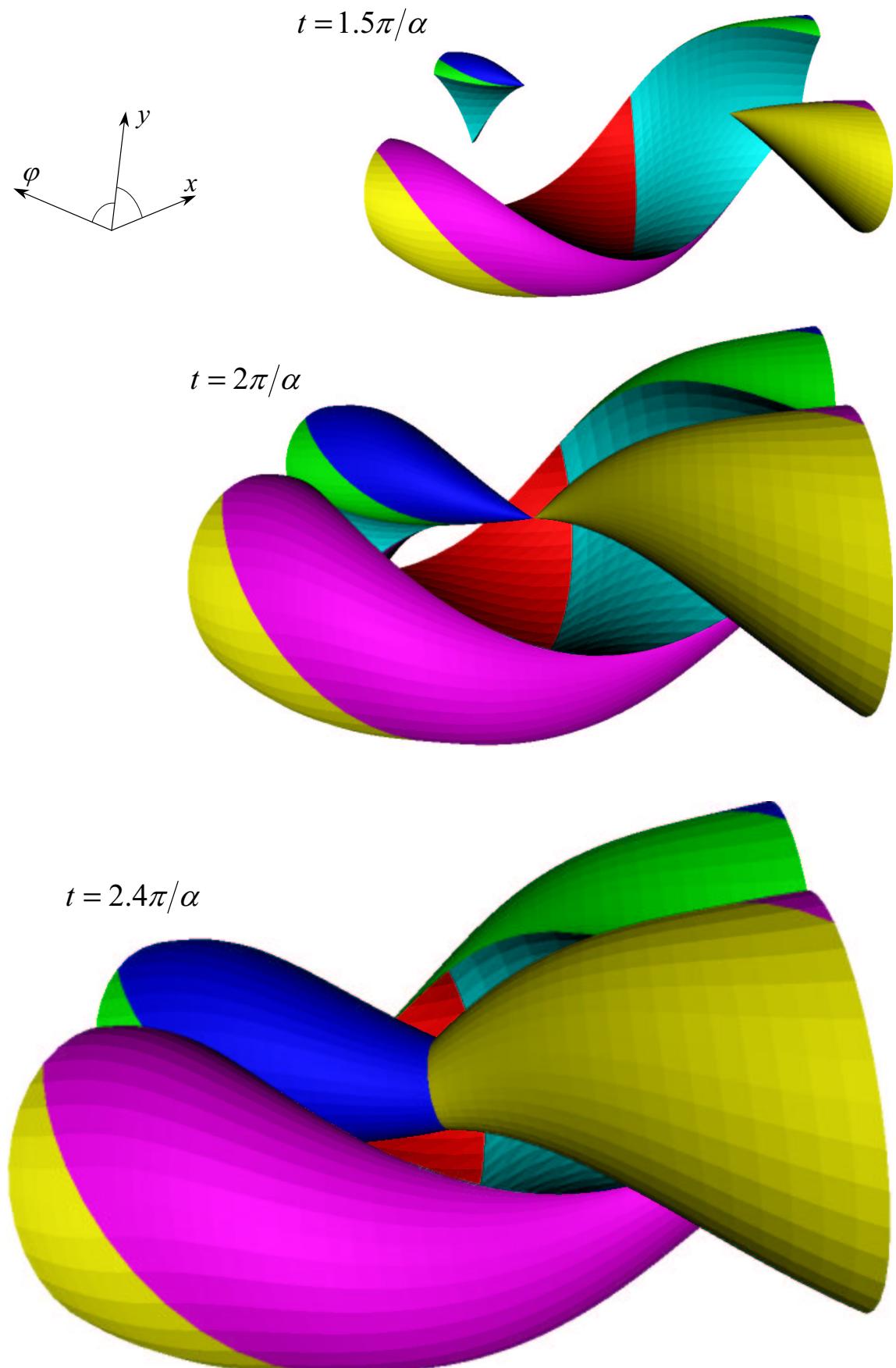
Таким образом, граница трехмерного множества достижимости $G(T)$ устроена весьма просто для не слишком больших моментов времени T . При увеличении T структура границы усложняется. Существует небольшой промежуток времени, на котором множество $G(T)$ не является односвязным.

1.7 Изображение множеств достижимости при склейке координаты φ по модулю 2π и в цилиндрических координатах

Во многих практических задачах не различимы фазовые состояния, отличающиеся на угол 2π . В связи с этим дадим изображения множеств достижимости системы (1.1) для случая, когда производится склейка значений координаты φ по модулю 2π .

На рис. 1.11 показаны множества достижимости в трёхмерном фазовом пространстве x, y, φ для трёх моментов времени $T = 1.5\pi/\alpha, 2\pi/\alpha, 2.4\pi/\alpha$. В качестве допустимых значений φ взят интервал $(-\pi, \pi]$.

Приведём также изображение множеств достижимости в цилиндрических координатах φ_c, ρ_c, z_c . Здесь координата φ_c – отклонение от “нулевого меридиана”; ρ_c – расстояние от оси вращения и z_c – проекция на ось вращения (рис. 1.12). На рис. 1.12 изображены те же множества, что и на рис. 1.11, но с преобразованием в цилиндрические координаты: $\varphi_c = \varphi$, $\rho_c = x + 4000$, $z_c = y$.

Рис. 1.11: Множества достижимости с отрезком по модулю 2π .

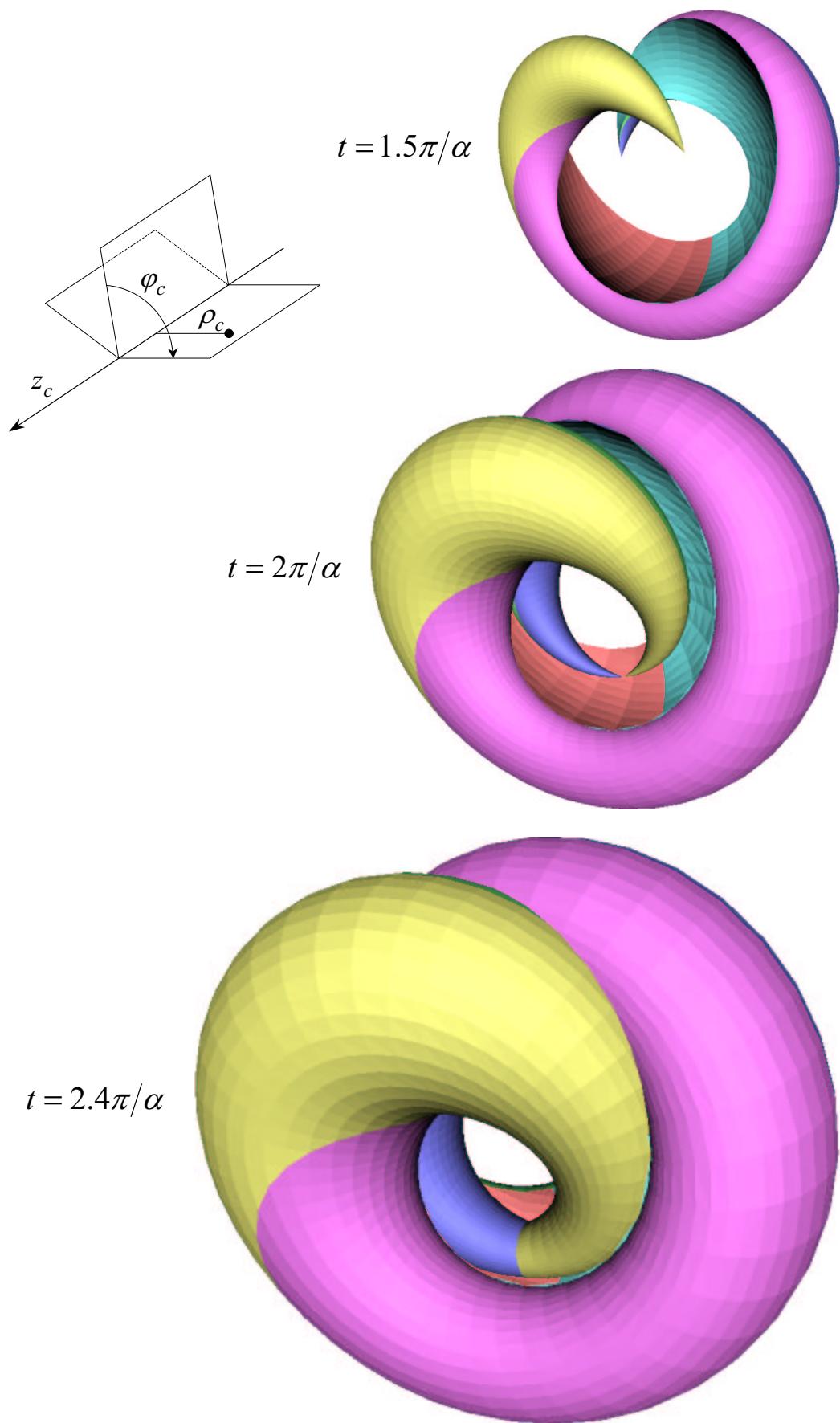


Рис. 1.12: Множества достижимости в цилиндрических координатах.

Глава 2

Трёхмерные информационные множества в задаче наблюдения за движением самолёта в горизонтальной плоскости

Данная глава посвящена построению оценки сверху для информационных множеств, характеризующих фазовые состояния самолета при его движении в горизонтальной плоскости. В основе лежит способ огрубления сверху множеств достижимости исследуемой нелинейной управляемой системы. Информационные множества строятся в трехмерном фазовом пространстве на основе замеров двумерного геометрического положения с учетом известных ограничений на ошибку замеров. Предложенные алгоритмы позволяют вести вычисления в реальном масштабе времени. Приведены результаты моделирования.

Рассматривается в модельной постановке задача наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. Динамика движения описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V; \quad V = \text{const} > 0, \quad k = \text{const} > 0, \quad |u| \leq 1.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь x, y – геометрические координаты, φ – угол направления вектора скорости, V – величина скорости, u – неизвестное управляющее воздействие. Угол φ отсчитывается от горизонтальной оси против часовой стрелки. Величины k, V считаем известными.

Текущая информация о движении самолета поступает в виде замеров его положения на плоскости x, y . Известны геометрические ограничения на ошибки замеров. Замеру, пришедшему в некоторый момент t_* , соответствует множество неопределенности $H(t_*)$ – совокупность всех фазовых состояний (x, y, φ) , совместных с полученным замером и заданными ограничениями на его ошибку. Предполагаем, что множество $H(t_*)$ цилиндрично по координате φ и имеет выпуклую проекцию на плоскость x, y .

Совокупность всех фазовых состояний в момент t , совместных с множествами неопределенности, накопленными к этому моменту, составляет информационное множество $I(t)$. Информационное множество можно трактовать как “обобщенное” состояние системы.

В дискретной схеме наблюдения на сетке моментов t_j информационное множество $I(t_j)$ получается пересечением множества прогноза $G(t_j)$ с множеством неопределенности $H(t_j)$. Множество $G(t_j)$ есть множество достижимости системы (2.1) в момент t_j , построенное от множества $I(t_{j-1})$, взятого в качестве начального для системы (2.1) в предыдущий момент наблюдения t_{j-1} . Множество $H(t_j)$ соответствует наблюдению в момент t_j .

Информационные множества в рассматриваемой задаче невыпуклые, поскольку не являются выпуклыми множества достижимости. В данной главе предложен вариант огрубления сверху множеств прогноза и, как следствие, информационных множеств. В численной процедуре расширенное множество прогноза $\mathbf{G}(t_j)$ и расширенное информационное множество $\mathbf{I}(t_j)$ представляются сеткой узлов по координате φ и набором сечений $\{\mathbf{G}_\varphi(t_j)\}$, соответственно $\{\mathbf{I}_\varphi(t_j)\}$, в виде выпуклых многоугольников на плоскости x, y . Основными являются операция построения выпуклой оболочки объединения выпуклых многоугольников и операция пересечения выпуклых многоугольников. Разработанный алгоритм позволяет строить информационные множества в реальном времени.

Расширенное множество прогноза $\mathbf{G}(t_j)$ оценивает сверху множество достижимости $G(t_j)$ управляемой системы (2.1) с начальным множеством $\mathbf{I}(t_*)$, где $t_* < t_j$ – момент последнего замера. С целью изучения характера возникающей погрешности проведено сравнение трехмерных множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$, а также проанализированы их проекции на плоскость координат x, y . При этом в качестве начального множества бралась точка в трехмерном пространстве. Алгоритм построения трехмерного множества достижимости опирается на утверждение о числе переключений управления, ведущего на границу множества достижимости.

В заключительной части главы представлены результаты построения информационных множеств для различных вариантов геометрии множеств неопределенности и при различном числе вершин выпуклых многоугольников, аппроксимирующих сечения информационного множества.

2.1 Постановка задачи о построении информационных множеств

Считаем, что динамика движения удовлетворяет системе (2.1). Значения координаты φ либо рассматриваются на бесконечной оси $(-\infty, \infty)$, либо вычисляются по модулю 2π . В последнем случае отождествляются значения φ , отличающиеся на величину кратную 2π . Ниже будем писать формулы для первого случая изменения координаты φ . Во втором случае везде, где говорим о расчете значений φ , следует добавить обозначение $(\text{mod } 2\pi)$.

В дискретные моменты времени поступают замеры положения самолета на плоскости x, y . Каждому замеру сопоставляется *множество неопределенности* (МН) – совокупность всех состояний (x, y, φ) , совместных с данным замером при известных

ограничениях на ошибку замера. Например, если в некоторый момент поступает замер (\hat{x}, \hat{y}) и максимальная радиальная ошибка замера есть σ , то неизвестное нам геометрическое состояние в этот момент находится в круге радиуса σ с центром в точке (\hat{x}, \hat{y}) . МН такого замера представляет собой цилиндр в трехмерном пространстве с проекцией на плоскость x, y в виде указанного круга.

Условимся, что множество неопределенности $H(t)$ каждого текущего замера является цилиндрическим по координате φ и целиком задается своей проекцией $H^\#(t)$ на плоскость x, y :

$$H(t) = H^\#(t) \times \{\varphi\}. \quad (2.2)$$

Множества $H^\#(t)$ в дальнейшем предполагаются выпуклыми.

Под *информационным множеством* (ИМ) $I(t)$ понимаем совокупность всех состояний (x, y, φ) системы (2.1) в момент t , совместных с имеющимися к моменту t множествами неопределенности.

Требуется разработать алгоритм построения информационных множеств.

2.2 Схема построения информационных множеств

2.2.1 Формальное описание информационных множеств

Предполагаем известным начальное информационное множество $I(t_0)$. Оно формируется на основе предварительных сведений и по МН начального замера.

Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ построено и следующий замер ожидается в момент $t^* > t_*$. Определим *множество прогноза* $G(t^*)$ как множество достижимости системы (2.1) в момент времени t^* из состояний, принадлежащих множеству $I(t_*)$ в момент t_* :

$$G(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), z \in I(t_*)} \xi(t^*; t_*, z, u(\cdot)).$$

Здесь $\xi(t^*; t_*, z, u(\cdot))$ – решение системы дифференциальных уравнений (2.1), доведенное до момента t^* , при начальном фазовом состоянии z в момент t_* и кусочно-непрерывном управлении $u(\cdot)$, удовлетворяющем при любом t условию $|u(t)| \leq 1$.

МН несет новую информацию о системе, поэтому множество $I(t^*)$ определяется как пересечение множества прогноза $G(t^*)$ и множества неопределенности $H(t^*)$ пришедшего замера:

$$I(t^*) = G(t^*) \cap H(t^*). \quad (2.3)$$

На рис. 2.1 схематично показано построение информационного множества с учётом множества неопределённости.

Если в момент t^* замер отсутствует, то операция пересечения не выполняется и полагается, что текущее информационное множество $I(t^*)$ совпадает с текущим мно-

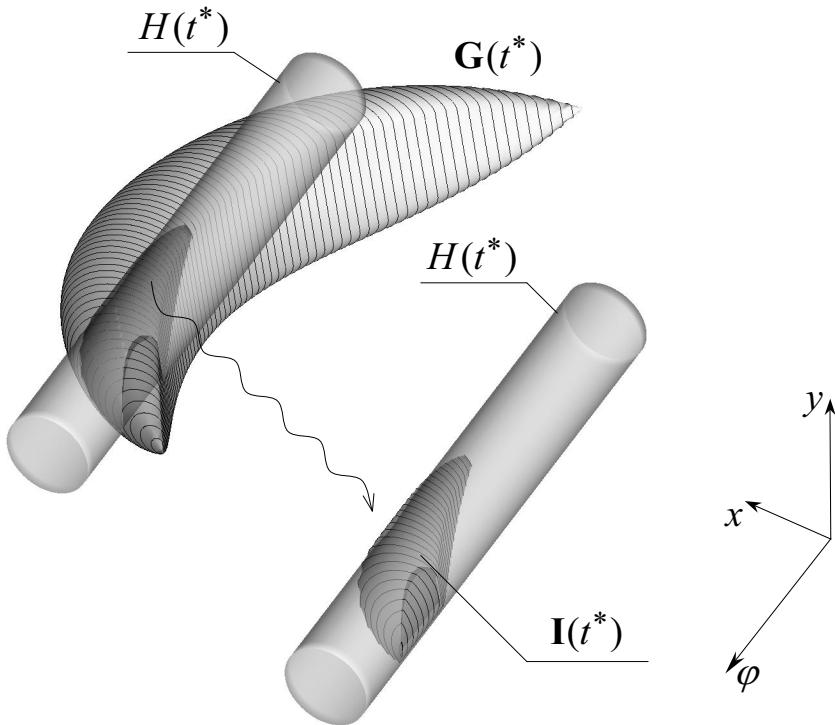


Рис. 2.1: Учёт множества неопределённости.

жеством прогноза $G(t^*)$. Формально можно считать, что МН отсутствующего замера совпадает со всем пространством $\{x, y, \varphi\}$.

Таким образом, в каждый текущий момент ИМ определяется начальным множеством $I(t_0)$ и МН замеров, поступивших к этому моменту.

Система (2.1) нелинейна, множество прогноза невыпуклое и имеет сложную структуру. Как следствие, достаточно сложно устроено пересечение (2.3). Для эффективного описания ИМ необходимо идти на некоторые упрощения. Мы сделаем их, используя разумным образом специфику системы.

2.2.2 Эквивалентное представление информационных множеств

Перепишем выражение (2.3), определяющее ИМ, в удобном для нас эквивалентном виде.

Рассмотрим проекцию $I^\diamond(t_*)$ множества $I(t_*)$ на ось φ . Каждой точке $\varphi \in I^\diamond(t_*)$ поставим в соответствие сечение $I_\varphi(t_*)$ информационного множества $I(t_*)$ плоскостью $\varphi = \text{const}$. Такие сечения будем рассматривать в проекции на плоскость x, y :

$$I_\varphi(t_*) = \{(x, y): (x, y, \varphi) \in I(t_*)\}.$$

Информационное множество $I(t_*)$ представим проекцией $I^\diamond(t_*)$ на ось φ и множе-

ствами $I_\varphi(t_*)$ на плоскости x, y :

$$I(t_*) = \bigcup_{\varphi \in I^\diamond(t_*)} [I_\varphi(t_*) \times \varphi]. \quad (2.4)$$

Аналогично запишем множество прогноза:

$$G(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [G_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \bar{\varphi}]. \quad (2.5)$$

С учетом (2.2), (2.5) формулу (2.3) можно переписать следующим образом:

$$I(t^*) = \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} \left[(G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*)) \times \bar{\varphi} \right]. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) записано в таком же виде, что и (2.4). Это следует из того, что

$$I_{\bar{\varphi}}(t^*) = G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*),$$

$$I^\diamond(t^*) = \left\{ \bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*): G_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*) \neq \emptyset \right\}.$$

Представление множеств $I(t_*)$, $G(t^*)$, $I(t^*)$ в виде (2.4), (2.5), (2.6) позволяет в дальнейшем перейти к сетке по координате φ и рассматривать только те сечения, которые соответствуют узлам сетки.

2.2.3 Учет специфики динамики движения

Покажем, как можно вычислять множества $G^\diamond(t^*)$ и $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ на основе множеств $I^\diamond(t_*)$ и $I_\varphi(t_*)$.

Зафиксируем управление $u(\cdot)$ на полуинтервале $[t_*, t^*]$. Рассмотрим прогнозируемое множество $G(t^*, u(\cdot))$ при начальном множестве $I(t_*)$ и управлении $u(\cdot)$. Данное множество, как и множество $G(t^*)$, представим проекцией $G^\diamond(t^*, u(\cdot))$ на прямую φ и сечениями $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$.

Фазовые координаты x, y отсутствуют в правой части системы (2.1). Поэтому третье уравнение можно проинтегрировать независимо от первых двух:

$$\varphi(t) = \varphi(t_*) + \int_{t_*}^t ku(\tau)/V d\tau.$$

Следовательно,

$$G^\diamond(t^*, u(\cdot)) = \left\{ \varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(t)/V dt : \varphi \in I^\diamond(t_*) \right\}.$$

Зафиксируем дополнительно значение $\varphi \in I^\diamond(t_*)$. Интегрирование первых двух уравнений системы (2.1) для начальных состояний из $I_\varphi(t_*)$ означает перенос каждой

точки на один и тот же вектор. Полагая

$$\bar{\varphi} = \varphi(t^*) = \varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(\tau)/V d\tau, \quad (2.7)$$

имеем

$$G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = I_{\varphi}(t_*) + \left(\int_{t_*}^{t^*} V \cos \varphi(t) dt, \int_{t_*}^{t^*} V \sin \varphi(t) dt \right)^T. \quad (2.8)$$

Здесь и далее верхний символ T означает транспонирование.

Перебирая значения $\varphi \in I^\diamond(t_*)$, получим по формуле (2.8) все сечения $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ прогнозируемого множества $G(t^*, u(\cdot))$.

Будем формально считать, что множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$ заданы для произвольных значений $\bar{\varphi}$. Если $\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*, u(\cdot))$, т.е. $\bar{\varphi}$ соответствует в силу (2.7) некоторому $\varphi \in I^\diamond(t_*)$, то сечение определяется формулой (2.8); иначе $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)) = \emptyset$.

Откажемся теперь от фиксации управления $u(\cdot)$. Множество $G^\diamond(t^*)$ есть множество достижимости в силу третьего уравнения системы (2.1) при начальном множестве $I^\diamond(t_*)$:

$$G^\diamond(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)).$$

Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ вычисляются по формуле

$$G_{\bar{\varphi}}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot)} G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot)). \quad (2.9)$$

2.2.4 Овыпукление сечений множества прогноза

При нахождении сечений $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ имеем дело с объединением (2.9) множеств на плоскости x, y . Множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$, $\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)$, пересекаются затем с множеством $H^\#(t^*)$. Трудность состоит в том, что множества $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$ невыпуклы.

Условимся подменять каждое из множеств $G_{\bar{\varphi}}(t^*)$, $\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)$, его выпуклой оболочкой. Таким образом, одновременно с операцией (2.9) объединения по $u(\cdot)$ множеств $G_{\bar{\varphi}}(t^*, u(\cdot))$, вычисляем выпуклую оболочку. Получаем множество

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) = \text{conv } G_{\bar{\varphi}}(t^*).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(t^*) &= \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \times \bar{\varphi}], \\ \mathbf{I}(t^*) &= \bigcup_{\bar{\varphi} \in G^\diamond(t^*)} [(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^*) \cap H^\#(t^*)) \times \bar{\varphi}]. \end{aligned}$$

Имеем

$$G(t^*) \subset \mathbf{G}(t^*), \quad I(t^*) \subset \mathbf{I}(t^*).$$

Условимся проводить овыпукление, начиная с начального момента t_0 . Тогда на момент t_* получим множество $\mathbf{I}(t_*)$ с выпуклыми сечениями $\mathbf{I}_\varphi(t_*)$. Следовательно, при нахождении множества $\mathbf{G}_\varphi(t^*)$ будем строить выпуклую оболочку объединения выпуклых множеств.

Полагая выше в формулах для $\mathbf{G}(t^*)$ вместо t^* произвольное $t \in [t_*, t^*]$, получим множество $\mathbf{G}(t)$ на момент t . Покажем, что отображение $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$ обладает полугрупповым свойством.

2.2.5 Полугрупповое свойство отображения $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$

Для формулировки и доказательства соответствующего утверждения введём следующие обозначения:

$G(t; t_*, A)$ – множество достижимости системы (2.1) в момент t при начальном множестве A в момент t_* ;

$\mathbf{G}(t; t_*, A)$ – множество, получающееся после овыпукления φ -сечений множества $G(t; t_*, A)$;

$r(t; t_*, \varphi_*, u(\cdot))$ – вектор сдвига на плоскости x, y в силу системы (2.1) на интервале $[t_*, t]$ с управлением $u(\cdot)$ и начальным направлением $\varphi(t_*) = \varphi_*$;

$\Gamma(t, \varphi; t_*, A^\diamond)$ – совокупность всех пар $(\varphi_*, u(\cdot))$, где $\varphi_* \in A^\diamond$, таких, что

$$\varphi = \varphi_* + \int_{t_*}^t k u(\tau)/V d\tau.$$

Рассмотрим движение системы (2.1) на промежутке $[t_1, t_3]$. Пусть A – произвольное начальное множество в момент t_1 в пространстве x, y, φ .

Л е м м а 2.1. *Отображение $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$ обладает полугрупповым свойством: для $\forall t_2 \in (t_1, t_3)$ справедливо равенство $\mathbf{G}(t_3; t_1, A) = \mathbf{G}(t_3; t_2, \mathbf{G}(t_2; t_1, A))$*

Доказательство. Используя полугрупповое свойство множеств достижимости, имеем

$$\mathbf{G}(t_3; t_1, A) = \mathbf{G}(t_3; t_2, G(t_2; t_1, A)).$$

Таким образом, для доказательства леммы следует установить равенство

$$\mathbf{G}(t_3; t_2, G(t_2; t_1, A)) = \mathbf{G}(t_3; t_2, \mathbf{G}(t_2; t_1, A)).$$

Введём обозначения

$$B = G(t_2; t_1, A), \quad \mathbf{B} = \mathbf{G}(t_2; t_1, A), \quad \mathbf{C} = \mathbf{G}(t_3; t_2, B), \quad \mathbf{D} = \mathbf{G}(t_3; t_2, \mathbf{B}).$$

Используя специфику системы (2.1) (отсутствие x, y в правой части), запишем множества \mathbf{C} и \mathbf{D} в виде

$$\mathbf{C} = \bigcup_{\varphi_3 \in \mathbf{C}^\diamond} \left[\left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, B^\diamond)} [B_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right) \times \varphi_3 \right],$$

$$\mathbf{D} = \bigcup_{\varphi_3 \in \mathbf{D}^\diamond} \left[\left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, \mathbf{B}^\diamond)} [\mathbf{B}_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right) \times \varphi_3 \right].$$

Поскольку третье уравнение системы (2.1) не зависит от первых двух, то выполнены равенства

$$B^\diamond = \mathbf{B}^\diamond, \quad \mathbf{C}^\diamond = \mathbf{D}^\diamond.$$

Поэтому для доказательства совпадения множеств \mathbf{C} и \mathbf{D} достаточно установить, что

$$\begin{aligned} & \left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, B^\diamond)} [B_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right) = \\ & \left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, \mathbf{B}^\diamond)} [\mathbf{B}_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right), \quad \forall \varphi_3 \in \mathbf{C}^\diamond. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Отметим, что $\mathbf{B}_{\varphi_2} = \text{conv} B_{\varphi_2}$ для $\forall \varphi_2 \in B^\diamond$. Учитывая соотношение

$$\text{conv}(B_{\varphi_2}) + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot)) = \text{conv}(B_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))),$$

перепишем требуемое нам равенство (2.10) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, B^\diamond)} [B_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right) = \\ & \left(\text{conv} \bigcup_{(\varphi_2, u(\cdot)) \in \Gamma(t_3, \varphi_3; t_2, B^\diamond)} \text{conv}[B_{\varphi_2} + r(t_3; t_2, \varphi_2, u(\cdot))] \right), \quad \forall \varphi_3 \in \mathbf{C}^\diamond. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Справедливость равенства (2.11) следует из того, что для любой совокупности множеств Q_i выполнено соотношение

$$\text{conv} \bigcup_i Q_i = \text{conv} \bigcup_i (\text{conv} Q_i).$$

Утверждение доказано.

Полугрупповое свойство имеет важное значение, так как позволяет вести построения без лишних промежуточных шагов по времени без потери точности.

Замечание 2.1. Определение множества $\mathbf{G}(t)$ в виде

$$\mathbf{G}(t) = \bigcup_{\varphi \in G^\diamond(t)} [\text{conv} G_\varphi(t) \times \varphi]$$

и доказательство полугруппового свойства отображения $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$ опираются лишь на отсутствие в правой части системы (2.1) фазовых переменных x, y . Рассмотрим более общую систему

$$\begin{aligned}\dot{z} &= f(\xi), \\ \dot{\xi} &= g(\xi, u),\end{aligned}\quad z \in R^{n_1}, \quad \xi \in R^{n_2}, \quad u \in P \subset R^{n_3}.$$

Пусть $G(t)$ – её множество достижимости в момент t , $G^\diamond(t)$ – проекция на подпространство координат ξ , а $G_\xi(t)$ – сечение при зафиксированном ξ . Тогда также можно ввести “расширенное” множество достижимости

$$\mathbf{G}(t) = \bigcup_{\xi \in G^\diamond(t)} [\text{conv}G_\xi(t) \times \xi]$$

и отображение $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$ будет обладать полугрупповым свойством.

2.3 Практическое построение информационных множеств

Далее речь пойдет о построении множеств $\mathbf{G}(t)$ и $\mathbf{I}(t)$. Опуская слово “расширенное” будем по-прежнему называть их (как и $G(t), I(t)$) множеством прогноза и информационным множеством.

При численном нахождении ИМ используем некоторую дискретизацию построений. Опишем основные элементы дискретизации.

2.3.1 Дискретизация по t, u, φ

Пусть в момент t_* информационное множество $\mathbf{I}(t_*)$ построено и требуется построить множество $\mathbf{I}(t^*)$ в момент $t^* > t_*$ следующего замера.

Сначала найдем множество прогноза $\mathbf{G}(t^*)$. С этой целью можно разбить промежуток времени $[t_*, t^*]$ с шагом Δ и рассмотреть кусочно-постоянныепод управлениия $u(\cdot)$, принимающие на каждом полуинтервале $[t^{(i)}, t^{(i+1)})$ полученного разбиения нулевое значение или одно из крайних: $u \in \{-1, 0, 1\}$. Выбор таких значений определяется тем, что экстремальные движения, формирующие границу множества достижимости, удовлетворяют [33] принципу максимума Понтрягина и, стало быть, образуются для системы (2.1) при помощи крайних управляющих воздействий $u = \pm 1$. Значение $u = 0$ реализуется на вырожденных участках экстремальных движений. Перебирая указанные кусочно-постоянныепод управлениия и проводя операцию овыпукления в момент t^* , приближенно просчитаем множество $\mathbf{G}(t^*)$.

Но более удобно, опираясь на полугрупповое свойство отображения $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$, рекуррентно пересчитывать множество $\mathbf{G}(t)$ с шагом Δ , пока не дойдем до момента t^* . При таком способе на каждом Δ -шаге используем три постоянных управлениия $u = -1, 0, 1$. Каждый шаг завершается операцией овыпукления.

Множество прогноза $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ на момент $t^{(i+1)}$ строим, опираясь на множество $\mathbf{G}(t^{(i)})$, построенное в момент $t^{(i)}$. При этом для момента $t^{(1)} = t_*$ формально полагаем $\mathbf{G}(t^{(1)}) = \mathbf{I}(t_*)$.

Пересчет множества $\mathbf{G}(t^{(i)})$ в множество $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ осуществляется следующим образом. Имеем на момент $t^{(i)}$ набор узлов по φ . Каждому узлу соответствует выпуклое множество $\mathbf{G}_\varphi(t^{(i)})$. Используя управления $u = -1, 0, 1$, получим на момент $t^{(i+1)}$ три узла новой сетки: $\bar{\varphi} = \varphi + \Delta k u / V$. Сечения, соответствующие этим узлам, имеют вид

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}(t^{(i+1)}, u) = \begin{cases} \mathbf{G}_\varphi(t^{(i)}) + \frac{V^2}{ku}(\sin \bar{\varphi} - \sin \varphi, \cos \varphi - \cos \bar{\varphi})^T, & \text{если } u = \pm 1; \\ \mathbf{G}_\varphi(t^{(i)}) + \Delta V(\cos \varphi, \sin \varphi)^T, & \text{если } u = 0. \end{cases}$$

Таким образом, количество узлов новой сетки на шаге Δ может вырасти в три раза. Однако какие-то из узлов оказываются близкими, что позволяет “склеивать” их для ограничения общего количества сечений. Вместо каждой группы сечений с близкими значениями $\bar{\varphi}$ вводится одно сечение со средним значением координаты φ , представляющее собой выпуклую оболочку объединения сечений рассматриваемой группы. Набор результирующих сечений и составляет множество $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$.

Так доходим до момента t^* и получаем множество $\mathbf{G}(t^*)$.

При поступлении в момент t^* замера формируется множество неопределенности $H(t^*)$. Оно цилиндрично по координате φ и целиком определяется проекцией $H^\#(t^*)$ на плоскость x, y .

Информационное множество $\mathbf{I}(t^*)$ получается путем пересечения каждого сечения $\mathbf{G}_\varphi(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^\#(t^*)$. Результаты непустых пересечений и составляют искомое множество $\mathbf{I}(t^*)$.

2.3.2 Аппроксимация выпуклыми многоугольниками

На плоскости x, y работаем с выпуклыми множествами $\mathbf{G}_\varphi(t)$, $\mathbf{I}_\varphi(t)$ и $H^\#(t)$. Для их представления используем, применяя аппроксимацию сверху, выпуклые многоугольники.

Зафиксируем расположенный равномерно по углу набор из m единичных векторов n_1, \dots, n_m (сетка нормалей) на плоскости x, y с отсчетом против часовой стрелки от оси x .

Для любого ограниченного, замкнутого множества D на плоскости в качестве аппроксимирующего его сверху будем брать многоугольник D_m , определяемый набором значений ρ_i опорной функции множества D на векторах n_i :

$$D_m = \{(x, y)^T: xn_{ix} + yn_{iy} \leq \rho_i, i = 1, \dots, m\}. \quad (2.12)$$

На рис. 2.2 показан пример такой аппроксимации для $m = 8$.

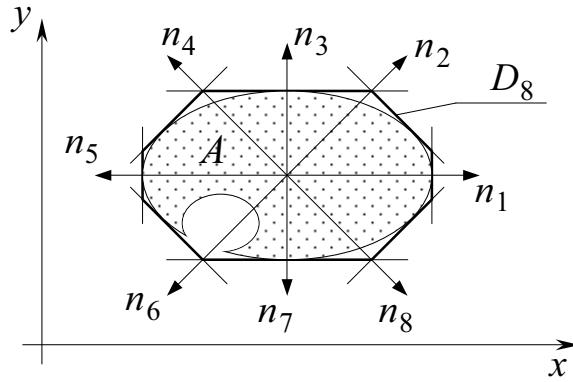


Рис. 2.2: Аппроксимация сверху множества D многоугольником D_8 .

Можно показать, что если множество D выпукло, то относительная погрешность его представления выпуклым многоугольником D_m вида (2.12) оценивается сверху по формуле

$$\frac{h(D, D_m)}{\text{diam}(D)} \leq \frac{1}{2} \operatorname{tg}(\pi/m). \quad (2.13)$$

Для этого, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть множество D в виде отрезка. Здесь $h(D, D_m)$ – хаусдорфово расстояние между D и D_m , $\text{diam}(D)$ – диаметр множества D . Чем детальнее выбранная сетка векторов, тем меньше погрешность. Так, при $m = 32$ относительная погрешность меньше 0.1.

При $m = 4$ имеем 4 вектора, и аппроксимирующий многоугольник есть прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Использование только логических операций для работы с прямоугольниками выделяет этот случай особо в плане минимизации затрат памяти и машинного времени.

2.3.3 Построение выпуклой оболочки объединения

Пусть выпуклые многоугольники A и B заданы наборами $\rho_1^A, \dots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \dots, \rho_m^B$ значений опорных функций на фиксированной сетке из m векторов n_i . Выпуклая оболочка $\operatorname{conv}(A \cup B)$ объединения таких многоугольников есть многоугольник, векторы нормалей которого не обязательно принадлежат сетке n_1, \dots, n_m . Будем аппроксимировать сверху выпуклую оболочку $\operatorname{conv}(A \cup B)$ выпуклым многоугольником C , который определяется набором $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$:

$$\rho_i^C = \max(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \dots, m.$$

Многоугольник C является минимальным по включению среди многоугольников, содержащих объединение $A \cup B$ и заданных значениями опорной функции на векторах n_1, \dots, n_m .

Многоугольник C может не совпадать с $\text{conv}(A \cup B)$ (рис. 2.3). Причина заключается в использовании фиксированной сетки векторов в представлении многоугольников. Формула (2.13) определяет оценку сверху возникающей погрешности:

$$\frac{h(C, \text{conv}(A \cup B))}{\text{diam}(\text{conv}(A \cup B))} \leq \frac{1}{2} \tan(\pi/m).$$

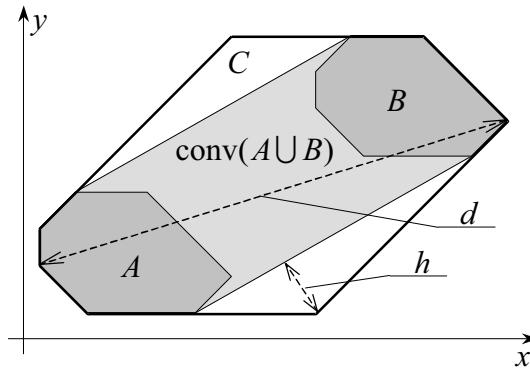


Рис. 2.3: Погрешность ов выпукления, $m = 8$.

На рис. 2.3 буквой d обозначен диаметр множества $\text{conv}(A \cup B)$, буквой h – хаусдорфово расстояние между C и $\text{conv}(A \cup B)$.

2.3.4 Операция пересечения

Пересечение выпуклых многоугольников A и B , заданных наборами $\rho_1^A, \dots, \rho_m^A$ и $\rho_1^B, \dots, \rho_m^B$ значений опорных функций, осуществляется путем вычисления набора ρ_1, \dots, ρ_m :

$$\rho_i = \min(\rho_i^A, \rho_i^B), \quad i = 1, \dots, m,$$

который и определяет многоугольник $C = A \cap B$ в виде пересечения полуплоскостей

$$(xn_{ix} + yn_{iy}) \leq \rho_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Полученный набор ρ_1, \dots, ρ_m не обязательно совпадает с набором $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C , заданного на рассматриваемой фиксированной сетке векторов n_i . Кроме того, пересечение может быть пусто. Для получения искомого набора $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$ значений опорной функции многоугольника C на заданной фиксированной сетке векторов производится дополнительная обработка набора ρ_1, \dots, ρ_m , состоящая из двух шагов.

Шаг 1. Рассматриваем набор ρ_1, \dots, ρ_m как замкнутый список, в котором элементы ρ_1 и ρ_m считаются соседними. Вычеркиваем из этого списка все элементы ρ_i , не совпадающие с соответствующими значениями ρ_i^C опорной функции множества $C = A \cap B$.

При этом используем следующий критерий. Пусть ρ_s , ρ_j и ρ_k – три последовательных элемента из рассматриваемого списка. Находим точку $(x_{sj}, y_{sj})^T$ пересечения границ полуплоскостей, заданных парами (n_s, ρ_s) и (n_j, ρ_j) :

$$(x_{sj}, y_{sj})^T = \left(\frac{\rho_s n_{jy} - \rho_j n_{sy}}{n_{sx} n_{jy} - n_{jx} n_{sy}}, \frac{\rho_j n_{sx} - \rho_s n_{jx}}{n_{sx} n_{jy} - n_{jx} n_{sy}} \right)^T.$$

Если точка $(x_{sj}, y_{sj})^T$ не принадлежит полуплоскости, заданной парой (n_k, ρ_k) , т.е. если

$$x_{sj} n_{kx} + y_{sj} n_{ky} > \rho_k,$$

то вычеркиваем средний элемент ρ_j . Если же точка $(x_{sj}, y_{sj})^T$ принадлежит (рис. 2.4) этой полуплоскости, т.е. если выполнено соотношение

$$x_{sj} n_{kx} + y_{sj} n_{ky} \leq \rho_k, \quad (2.14)$$

то переходим к рассмотрению следующей тройки.

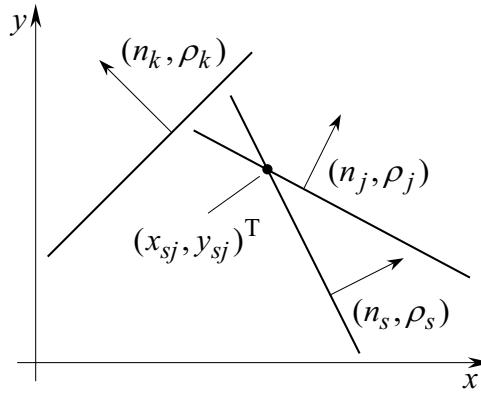


Рис. 2.4: Пояснение к процедуре пересечения.

Так продолжаем до получения набора, при котором условие (2.14) выполнено для любой тройки соседних векторов.

Если после очередного вычеркивания некоторого элемента ρ_j угол между соседними векторами n_s и n_k стал больше или равен π , т.е. если выполнено условие

$$n_{sx} n_{ky} - n_{kx} n_{sy} \leq 0, \quad (2.15)$$

то результат пересечения есть пустое множество, и выполнение операции пересечения завершается. При практической реализации данного алгоритма условие (2.15) необходимо проверять с некоторым запасом.

После завершения первого шага получаем список $\{\rho_i^C\}$, каждому элементу которого соответствует сторона многоугольника C .

Шаг 2. Список $\{\rho_i^C\}$ дополняем недостающими значениями опорной функции на фиксированной сетке векторов n_1, \dots, n_m и получаем искомое представление множества $C = A \cap B$ в виде набора $\rho_1^C, \dots, \rho_m^C$. При этом используем следующий способ дополнения.

Пусть между соседними элементами ρ_s и ρ_k есть недостающие значения опорной функции.

Вычисляем вершину $(x, y)^\top$ многоугольника C , соответствующую сторонам с нормалями n_s и n_k . Недостающие на промежуточных векторах n_j (между n_s и n_k) значения ρ_j опорной функции просчитываем по формуле

$$\rho_j = xn_{jx} + yn_{jy}.$$

В случае $m = 4$ дополнительная обработка (шаг 1, шаг 2) набора $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ сводится лишь к проверке невырожденности пересечения множеств A и B по одновременному выполнению двух неравенств $\rho_1 + \rho_3 > 0$ и $\rho_2 + \rho_4 > 0$.

Подобные описанному алгоритмы построения опорной функции пересечения многоугольников на плоскости широко используются в вычислительной практике [2, 32, 44].

2.4 Сравнение с точными построениями

Для того чтобы пояснить характер погрешности, вносимой операцией овывпукления, применяемой при построении множеств прогноза $\mathbf{G}(t)$, сравним множество $\mathbf{G}(t)$ с точным множеством прогноза (или, что то же самое, с точным множеством достижимости) $G(t)$. При этом условимся, что в момент $t_0 = 0$ начальное множество есть точка в трехмерном пространстве $\{x, y, \varphi\}$, т.е. в начальный момент оговорены геометрическое положение и направление скорости.

В работах [8, 66] приведены формулы, описывающие границу проекции на плоскость x, y множества достижимости $G(t)$ системы (2.1). Обозначим такую проекцию символом $G^\#(t)$. Проекцию на плоскость x, y множества прогноза $\mathbf{G}(t)$, строящегося по предлагаемому в работе алгоритму с элементами овывпукления на каждом Δ -шаге, обозначим $\mathbf{G}^\#(t)$. Проведем сравнение множеств $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$. Не теряя общности, считаем равными нулю начальное геометрическое положение и начальный угол вектора скорости.

На рис. 2.5 изображены множества $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$, построенные для моментов $t = q(\pi/2)(V/k)$, $q = 1, 2, 3, 4$. Данные моменты соответствуют времени поворота вектора скорости на угол $q(\pi/2)$ при движении с максимальным боковым ускорением. Для каждого момента используем свой масштаб изображения. Траектории движения с экстремальными управлениями $u = -1$ и $u = 1$ представляют собой окружности радиусом V^2/k . Вектор начальной скорости показан стрелочкой. Множества $G^\#(t)$ выделены контуром и темной заливкой, а множества $\mathbf{G}^\#(t)$ – светлой заливкой. Множества $\mathbf{G}^\#(t)$ построены с малым шагом Δ по времени и при числе нормалей $m = 64$ в многоугольниках. Использовалась достаточно мелкая сетка по φ в промежутке $[-2\pi, 2\pi]$. Склейивание по модулю 2π не проводилось. Видно, что “внешние” участки границ множеств $G^\#(t)$ и $\mathbf{G}^\#(t)$ практически совпадают, а “внутренние” отличаются. Имеет место вложение $G^\#(t) \subset \mathbf{G}^\#(t)$.

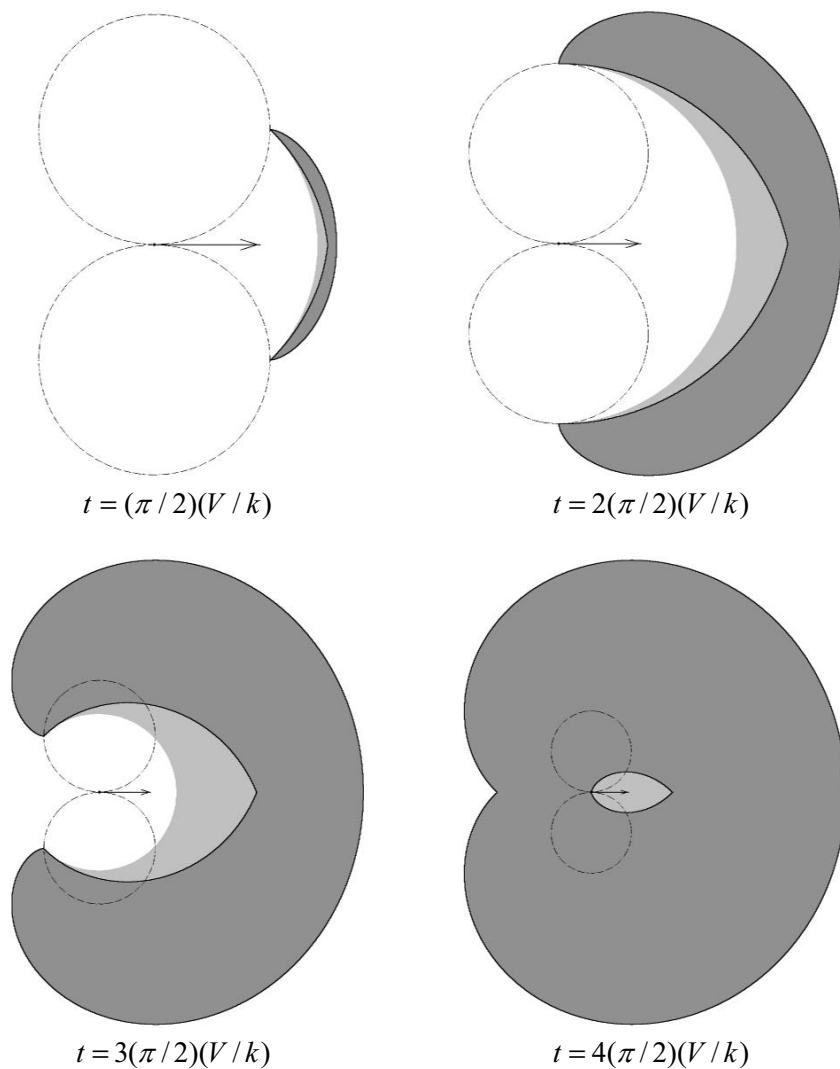


Рис. 2.5: Сравнение с точным множеством достижимости в проекции на плоскость x, y .

Рис. 2.6 показывает зависимость результатов построения множества $\mathbf{G}^\#(t)$ от количества нормалей. Построения сделаны для момента $t = (5\pi/4)(V/k)$ при числе нормалей $m = 12$ и $m = 24$. Если число нормалей m больше, чем 24, картина существенно не меняется.

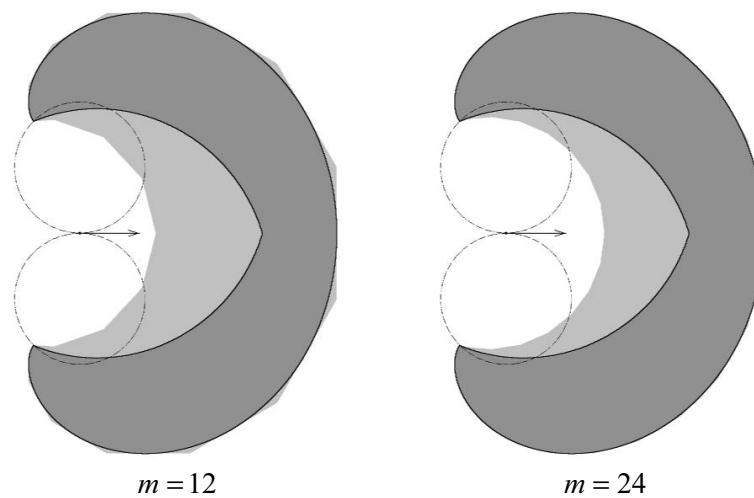


Рис. 2.6: Влияние числа нормалей на построение множества $\mathbf{G}^\#(t)$.

Перейдем к сравнению трехмерных множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$. Множества достижимости $G(t)$ были построены на основе теоремы 1.1, их аппроксимация сверху – множества $\mathbf{G}(t)$ просчитаны по алгоритмам построения множеств прогноза.

На рис. 2.7, 2.8, 2.9 для трех моментов времени $t = h\pi(V/k)$, $h = 2, 3, 4$, изображены (для каждого момента в своем масштабе) множества $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$. Тонкими линиями показаны некоторые φ -сечения. При просчете множеств $G(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ отождествление значений координаты φ по модулю 2π не проводилось.

Подчеркнем, что при построении множества $\mathbf{G}(t)$ точное множество достижимости $G(t)$ считается неизвестным. Видно, что погрешность за счет операции овыпукления проявляется лишь с одной стороны поверхности, ограничивающей точное множество. По сути, каждое φ -сечение множества $\mathbf{G}(t)$ совпадает с выпуклой оболочкой соответствующего φ -сечения множества $G(t)$.

В задачах с неполной информацией приходится строить трехмерное множество прогноза от весьма произвольного начального множества. Описанный в работе алгоритм построения множества прогноза хотя и не дает точного множества достижимости, но оценивает его сверху и является весьма простым для реализации.

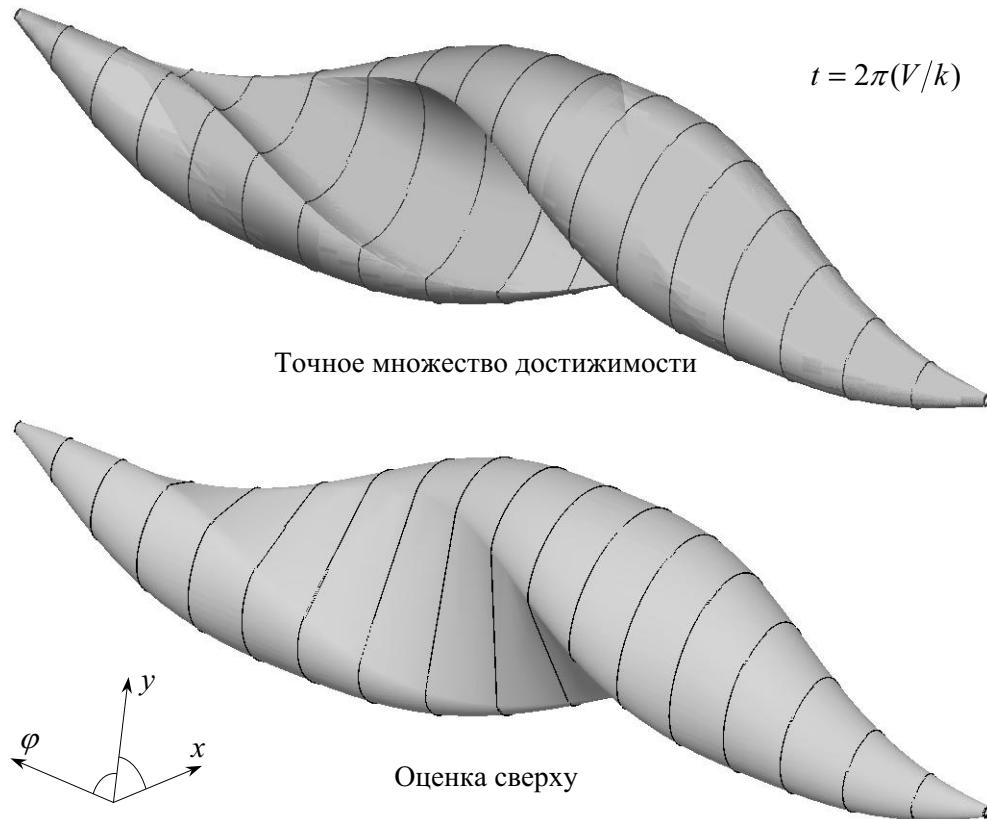


Рис. 2.7: Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 2\pi(V/k)$.

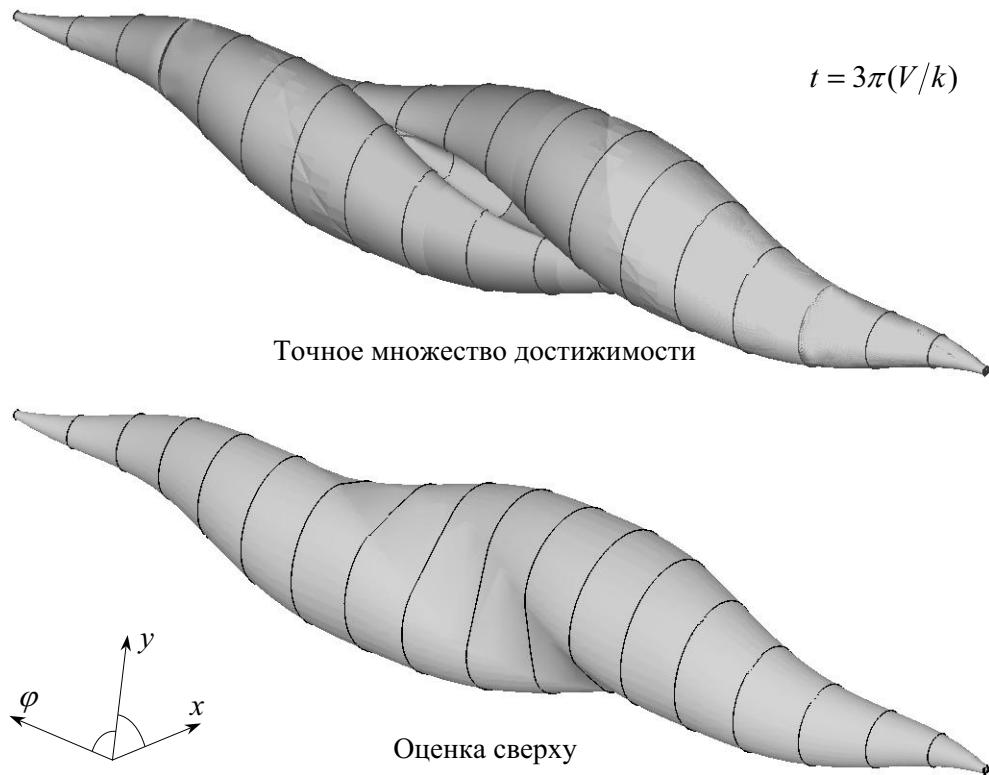


Рис. 2.8: Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 3\pi(V/k)$.

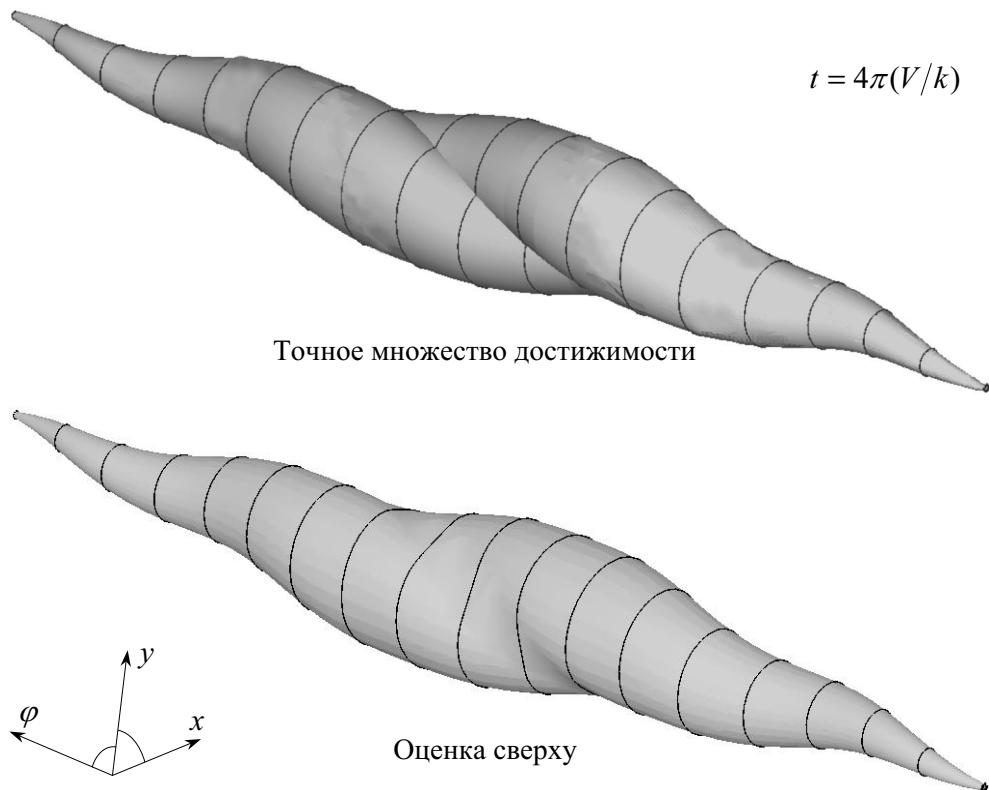


Рис. 2.9: Сравнение с точным множеством достижимости, $t = 4\pi(V/k)$.

2.5 Результаты моделирования движения информационных множеств

Для первого примера были взяты параметры: $V = 400 \text{ м/с}$, $k = 15 \text{ м/с}^2$, $\Delta = 1 \text{ с}$, $m = 60$. Начальное информационное множество $\mathbf{I}(0)$ имело только одно φ -сечение в форме квадрата. Таким образом, в начальный момент времени $t_0 = 0$ считалось известным направление скорости. При $t \geq 0$ задавалось истинное движение фазовой точки в трехмерном пространстве. Относительно этого движения формировались замеры. К ним привязывались МН с оговоренной формой проекций $H^\#(t)$ на плоскость x, y (ограничения на ошибку замера явно не выписывались).

В рассматриваемом примере диапазон значений φ , используемых для построения множеств прогноза, меньше 2π . Поэтому нет необходимости в склеивании значений φ по модулю 2π .

На рис. 2.10 показана общая картина изменения ИМ на промежутке времени $0 - 40 \text{ с}$ в проекции на плоскость x, y . Траектория истинного движения изображена сплошной линией. Замеры приходят в моменты 20 и 32 с . Предполагаем, что проекции $H^\#(20)$ и $H^\#(32)$ множеств неопределенности – параллелограмм (а) и прямоугольник (б). В информационных множествах для наглядности представлены не все сечения, а лишь каждое второе. Из тех же соображений показаны ИМ только на каждом четвертом шаге по времени: $\mathbf{I}(0), \mathbf{I}(4), \mathbf{I}(8), \dots, \mathbf{I}(40)$. Крестиками отмечены положения истинной точки в эти же моменты. Выделены сечения ИМ наиболее близкие по φ к соответствующим истинным значениям.

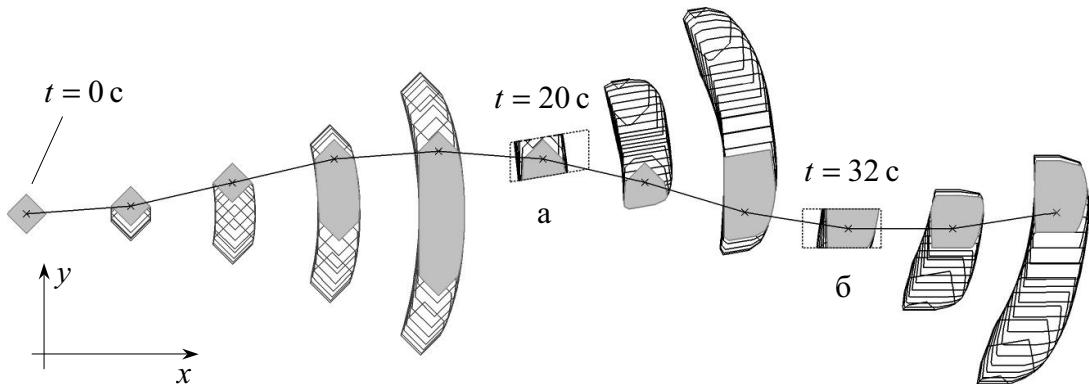


Рис. 2.10: Движение информационного множества в проекции на плоскость x, y .

На рис. 2.11 более детально, в трехмерном пространстве изображены ИМ на моменты 20 и 32 с. Для каждого из этих моментов показаны два множества: до учета замера (множество прогноза) и после учета замера.

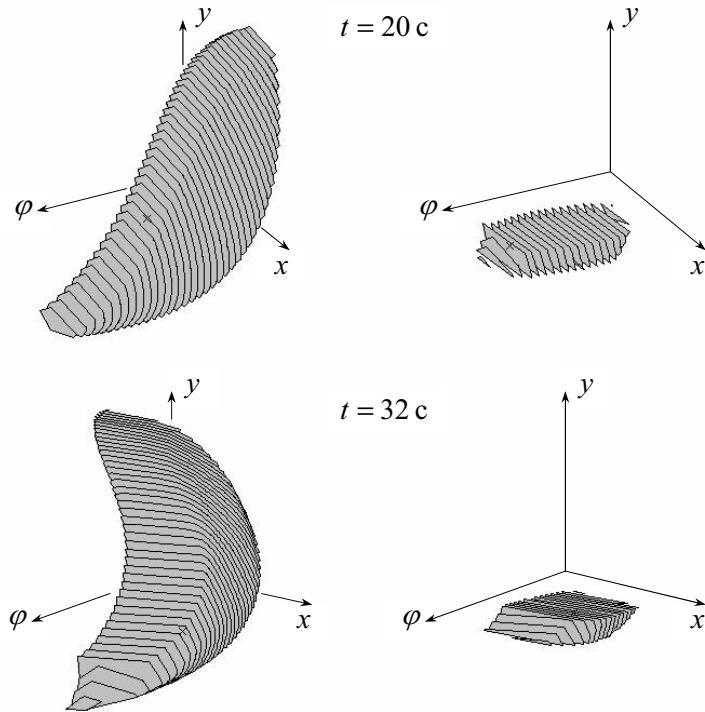


Рис. 2.11: Информационное множество до и после замера.

Результаты моделирования, где φ -сечения ИМ задавались в виде прямоугольников со сторонами, ориентированными по осям x, y , приведены на рис. 2.12. Построение ИМ осуществлялось на участке времени 80 с. Использовались следующие параметры: $V = 200 \text{ м/с}$, $k = 5 \text{ м/с}^2$, $\Delta = 1 \text{ с}$. Замеры поступали с интервалом 20 с, соответствующие МН имели форму квадрата со стороной 400 м. Начальное ИМ формировалось по МН начального замера и состояло из 360 одинаковых φ -сечений в полуинтервале $[0, 2\pi)$. При просчете множеств прогноза проводилось склеивание значений φ по модулю 2π .

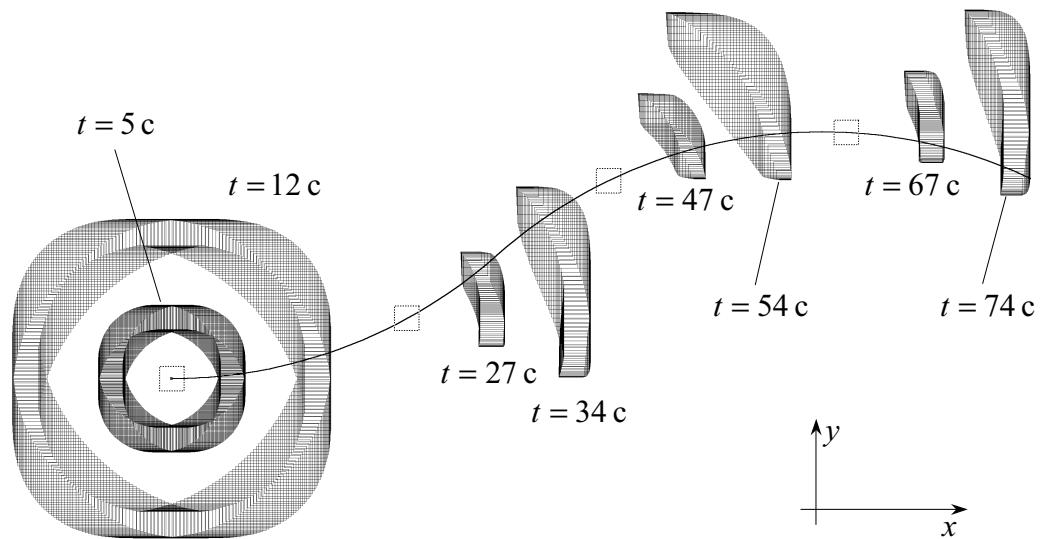


Рис. 2.12: Динамика изменения информационного множества в проекции на плоскость x, y . Случай прямоугольных φ -сечений.

Траектория истинного движения имела два разворота в разные стороны. МН поступающих замеров отмечены пунктиром. Показаны проекции ИМ на плоскость x, y для моментов 5, 12, 27, 34, 47, 54, 67, 74 с. Проекция начального ИМ совпадает с МН замера в начальный момент. До прихода второго замера неопределенность по φ сохраняется в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Поэтому соответствующие ИМ в проекции на плоскость x, y имеют кольцеобразный вид.

Для повышения точности построений вместо фиксированной сетки на плоскости x, y для представления выпуклых многоугольников можно использовать плавающую сетку с ограничением на максимальное количество нормалей. Соответствующие процедуры описаны в [91]. При достижении заданного максимального уровня применяется специальная процедура прореживания нормалей. Приведём результаты моделирования для исходных данных $V = 200 \text{ м/с}$, $k = 10 \text{ м/с}^2$, $\Delta = 1 \text{ с}$. Начальное множество содержало только одно сечение по ϕ . Замеры поступали с тактом 25 с, множества неопределенности имели форму квадрата со сторонами 400 м, ориентированными по осям координат.

На рис. 2.13 показаны проекции ИМ на плоскость x, y на момент 195 с при ограничениях на число нормалей $N_{\max} = 10, 20$ и без ограничения. Видно, что результаты мало отличаются. Следовательно, при работе с плавающей сеткой можно ограничиться небольшим количеством нормалей.

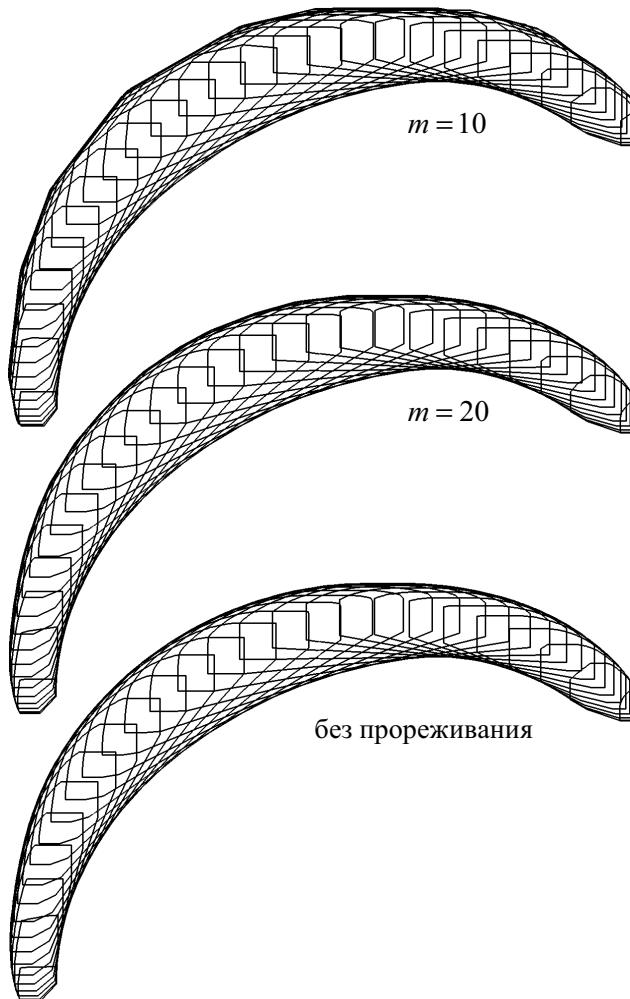


Рис. 2.13: Общий вид ИМ в проекции на плоскость x, y , $t = 195 \text{ с}$

На рис. 2.14а изображено множество прогноза (синяя заливка) на момент $t = 200$ с. Одновременно показано множество неопределённости (зеленая заливка) пришедшего в этот момент замера. Оно цилиндрически по координате φ . Область пересечения более крупным планом приведена рядом, рис. 2.14б. В таком же масштабе на рис. 2.14в показан результат пересечения (красная заливка) – ИМ на момент $t = 200$ с.

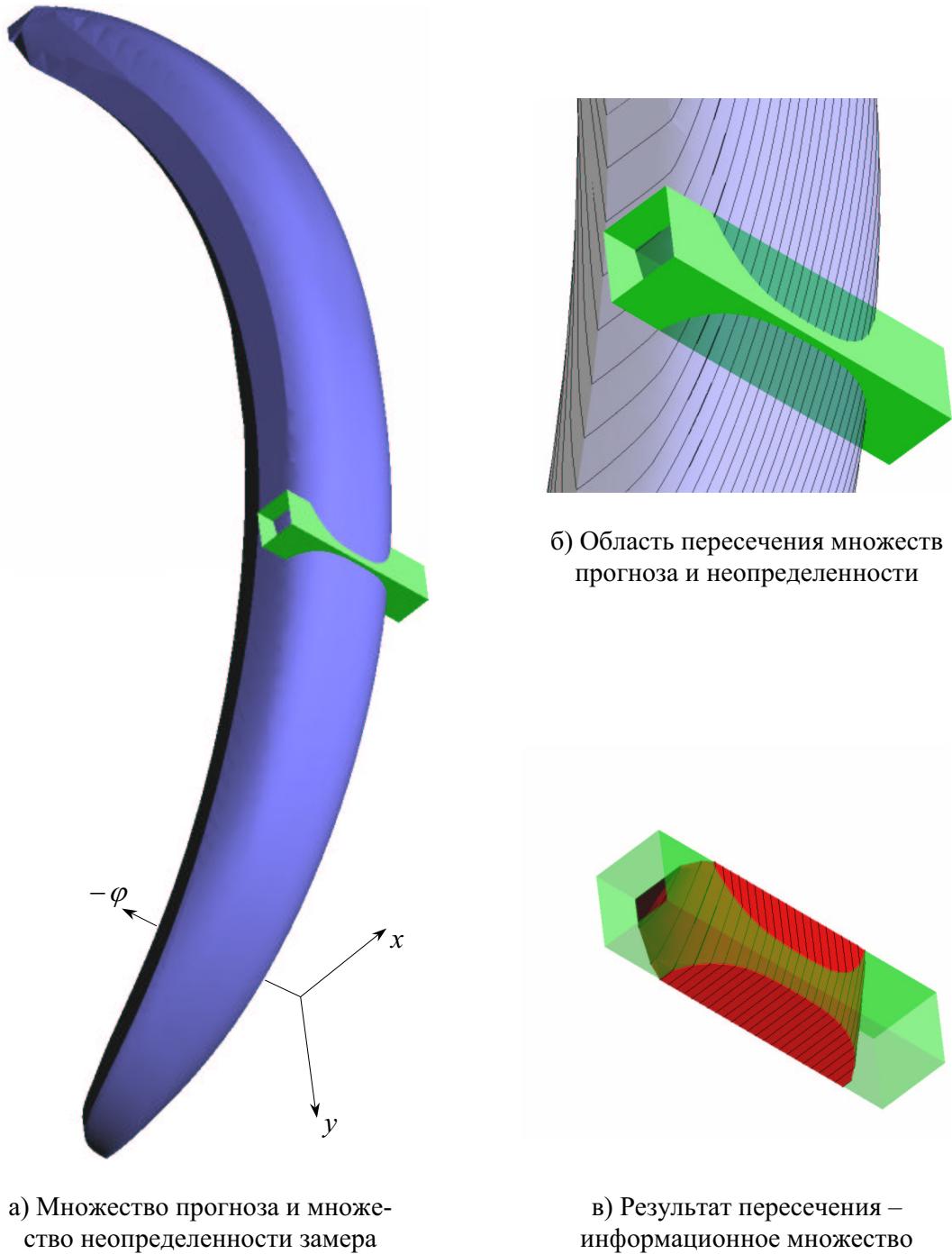


Рис. 2.14: Пересечение множества прогноза и множества неопределенности, $t = 200$ с

Глава 3

Четырёхмерные информационные множества

Данная глава, как и предыдущая, посвящена построению оценки сверху для информационных множеств, характеризующих фазовые состояния самолета при его движении в горизонтальной плоскости. Рассматривается вариант с непостоянной по величине скоростью, которая теперь является дополнительной фазовой координатой. Информационные множества строятся в четырёхмерном фазовом пространстве на основе замеров двумерного геометрического положения с учетом известных ограничений на ошибку замеров. Приводятся результаты моделирования.

3.1 Постановка задачи

Информация о движении самолёта поступает в виде замеров координат его положения на плоскости x, y . Известны геометрические ограничения на ошибку замера. Направление φ и скорость V движения напрямую не замеряются, полагаются неизвестными и могут быть непостоянны.

Используется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= ku/V, \\ \dot{V} &= w, \quad V \geq \text{const} > 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Здесь k – максимальное боковое ускорение, $k = \text{const} > 0$; u – неизвестное управление по боковому каналу; w – неизвестное управление по продольному каналу. Предполагаем, что управления u, w стеснены геометрическими ограничениями

$$|u| \leq 1, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2, \quad \mu_1 < 0, \quad \mu_2 > 0.$$

Отметим, что соотношение, определяющее динамику изменения скорости, вообще говоря, может быть более сложным, чем четвертое уравнение системы (3.1). Это соотношение может зависеть от большого числа параметров и не всегда точно известно. Отказываясь от сложного описания, приходим к уравнению $\dot{V} = w$ и трактуем μ_1, μ_2 как ограничения на возможные значения ускорения \dot{V} .

Задачи оптимального управления, связанные с системой (3.1), рассматривались в работах [1, 7, 52].

Под *информационным множеством* (ИМ) понимается совокупность всех точечных состояний (x, y, φ, V) системы (3.1), совместных с полученной к рассматриваемому моменту времени информацией.

Требуется разработать алгоритм построения информационных множеств.

3.2 Схема построения информационных множеств

3.2.1 Формальное описание информационных множеств

В дискретные моменты времени поступают замеры положения самолёта на плоскости x, y . Каждому замеру сопоставляется *множество неопределенности* (МН) – совокупность состояний (x, y, φ, V) , совместных с данным замером при известных геометрических ограничениях на ошибку замера.

Так как по постановке задачи направление φ и скорость V напрямую не замеряются, то множество неопределенности H каждого текущего замера является цилиндрическим по координатам φ, V и целиком задается своей проекцией $H^\#$ на плоскость x, y :

$$H = H^\# \times \{(\varphi, V)\}. \quad (3.2)$$

Множества $H^\#$ предполагаются выпуклыми.

Приведем формальное описание информационных множеств.

Информационное множество $I(t_0)$ в начальный момент строится на основе предварительных сведений и по МН начального замера.

Пусть в некоторый момент времени t_* информационное множество $I(t_*)$ построено, и следующий замер приходит в момент $t^* > t_*$. Определим *множество прогноза* $G(t^*)$ как множество достижимости системы (3.1) в момент времени t^* из состояний, принадлежащих множеству $I(t_*)$ в момент t_* :

$$G(t^*) = \bigcup_{\substack{u(\cdot), w(\cdot), \\ z \in I(t_*)}} \xi(t^*; t_*, z, u(\cdot), w(\cdot)).$$

Здесь $\xi(t^*; t_*, z, u(\cdot), w(\cdot))$ – решение системы дифференциальных уравнений (3.1), доведённое до момента t^* , при начальном фазовом состоянии z в момент t_* и кусочно-непрерывных управлении $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$.

Информационное множество $I(t^*)$ определяется как пересечение множества прогноза $G(t^*)$ и множества неопределённости $H(t^*)$ пришедшего замера:

$$I(t^*) = G(t^*) \bigcap H(t^*). \quad (3.3)$$

Следовательно, $I(t^*)$ – все возможные состояния системы (3.1) в момент t^* , согласованные с информационным множеством $I(t_*)$ и множеством неопределённости $H(t^*)$.

Если в момент t^* замер отсутствует, то полагаем, что $I(t^*) = G(t^*)$.

Таким образом, в каждый текущий момент ИМ определяется начальным множеством $I(t_0)$ и МН замеров, поступивших к этому моменту.

3.2.2 Эквивалентное представление информационных множеств

Перепишем выражение (3.3), в эквивалентном виде.

Рассмотрим проекцию $I^\diamond(t_*)$ множества $I(t_*)$ на плоскость φ, V . Каждой точке $(\varphi, V) \in I^\diamond(t_*)$ поставим в соответствие сечение $I_{\varphi, V}(t_*)$ информационного множества $I(t_*)$ плоскостью $\{\varphi = \text{const}, V = \text{const}\}$. Такие сечения будем рассматривать в проекции на плоскость x, y :

$$I_{\varphi, V}(t_*) = \{(x, y) : (x, y, \varphi, V) \in I(t_*)\}.$$

Информационное множество $I(t_*)$ представим проекцией $I^\diamond(t_*)$ на плоскость φ, V и множествами $I_{\varphi, V}(t_*)$ на плоскости x, y :

$$I(t_*) = \bigcup_{(\varphi, V) \in I^\diamond(t_*)} [I_{\varphi, V}(t_*) \times (\varphi, V)]. \quad (3.4)$$

Аналогично запишем множество прогноза:

$$G(t^*) = \bigcup_{(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*)} [G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \times (\bar{\varphi}, \bar{V})]. \quad (3.5)$$

С учетом (3.2), (3.5) выражение (3.3) можно переписать в виде

$$I(t^*) = \bigcup_{(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*)} [(G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \bigcap H^\#(t^*)) \times (\bar{\varphi}, \bar{V})]. \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) записано в таком же виде, что и (3.4). Это следует из того, что

$$I_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) = G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \bigcap H^\#(t^*),$$

$$I^\diamond(t^*) = \{(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*) : G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \bigcap H^\#(t^*) \neq \emptyset\}.$$

Представление множеств $I(t_*)$, $G(t^*)$, $I(t^*)$ в виде (3.4), (3.5), (3.6) позволяет в дальнейшем перейти к некоторой сетке на плоскости φ, V и рассматривать только те сечения, которые соответствуют узлам сетки.

3.2.3 Специфика динамики движения

Покажем, что множества $G^\diamond(t^*)$ и $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ можно вычислять прямо на основе множеств $I^\diamond(t_*)$ и $I_{\varphi, V}(t_*)$.

Зафиксируем пару управлений $u(\cdot), w(\cdot)$ на полуинтервале $[t_*, t^*)$. Рассмотрим множество $G(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ – множество прогноза при начальном множестве $I(t_*)$ и управлении $u(\cdot), w(\cdot)$. Будем представлять его проекцией $G^\diamondsuit(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ на плоскость φ, V и сечениями $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$.

Специфика динамики (3.1) состоит в том, что третье и четвертое уравнения можно интегрировать независимо от первых двух:

$$V(t) = V(t_*) + \int_{t_*}^t w(\tau) d\tau, \quad \varphi(t) = \varphi(t_*) + \int_{t_*}^t ku(\tau)/V(\tau) d\tau. \quad (3.7)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} G^\diamondsuit(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) &= \\ &= \left\{ \left(\varphi + \int_{t_*}^{t^*} ku(t)/V(t) dt, V + \int_{t_*}^{t^*} w(t) dt \right) : (\varphi, V) \in I^\diamondsuit(t_*) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Зафиксируем точку $(\varphi, V) \in I^\diamondsuit(t_*)$. Фазовые координаты x, y отсутствуют в правой части уравнений системы (3.1), поэтому интегрирование первых двух уравнений для начальных состояний из $I_{\varphi, V}(t_*)$ означает перенос на один и тот же вектор (рис. 3.1).

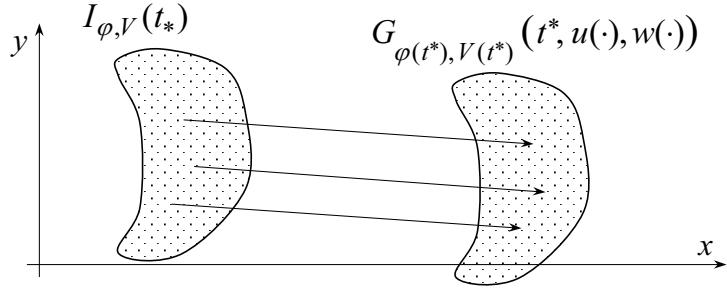


Рис. 3.1: Перенос сечений на плоскости x, y .

Полагая

$$\bar{\varphi} = \varphi(t^*), \quad \bar{V} = V(t^*), \quad (3.9)$$

имеем

$$\begin{aligned} G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) &= \\ &= I_{\varphi, V}(t_*) + \left(\int_{t_*}^{t^*} V(t) \cos \varphi(t) dt, \int_{t_*}^{t^*} V(t) \sin \varphi(t) dt \right)^T. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Перебирая все пары $(\varphi, V) \in I^\diamondsuit(t_*)$, получим сечения $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ множества прогноза $G(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ для всех $(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamondsuit(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$.

Будем формально считать, что сечения $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$ заданы для произвольных $(\bar{\varphi}, \bar{V})$. Если $(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$, т.е. $(\bar{\varphi}, \bar{V})$ соответствует в силу (3.7), (3.9) некоторой паре $(\varphi, V) \in I^\diamond(t_*)$, то сечение определяется формулой (3.10); иначе $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)) = \emptyset$.

В целом, множество $G^\diamond(t^*)$ есть множество достижимости в силу третьего и четвертого уравнений системы (3.1) при начальном множестве $I^\diamond(t_*)$ (рис. 3.2):

$$G^\diamond(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), w(\cdot)} G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)).$$

Множества $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ вычисляются по формуле

$$G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) = \bigcup_{u(\cdot), w(\cdot)} G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot)). \quad (3.11)$$

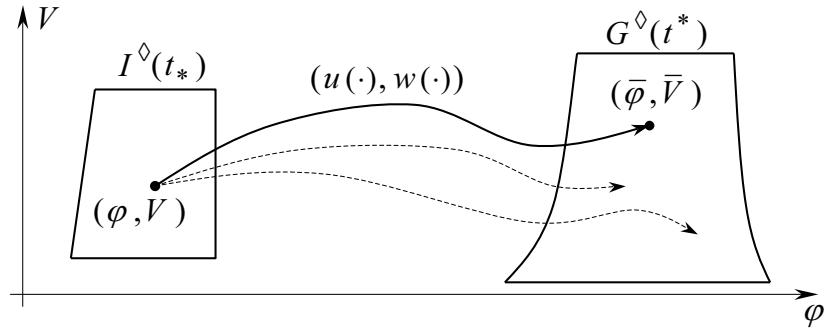


Рис. 3.2: Построение множества достижимости на плоскости φ, V .

3.2.4 Овыпукление сечений

При нахождении множеств $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ имеем дело с объединением (3.11) множеств на плоскости x, y . Множества $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ пересекаются затем с множеством $H^\#(t^*)$. Множества $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ невыпуклы.

Условимся подменять множества $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ их выпуклыми оболочками. Таким образом, одновременно с операцией (3.11) объединения по $u(\cdot), w(\cdot)$ множеств $G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*, u(\cdot), w(\cdot))$, вычисляем выпуклую оболочку. Получаем множество

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) = \text{conv} G_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*).$$

Обозначим

$$\mathbf{G}(t^*) = \bigcup_{(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*)} [\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \times (\bar{\varphi}, \bar{V})], \quad (3.12)$$

$$\mathbf{I}(t^*) = \bigcup_{(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in G^\diamond(t^*)} [(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*) \cap H^\#(t^*)) \times (\bar{\varphi}, \bar{V})]. \quad (3.13)$$

Формулы (3.12), (3.13) написаны для момента t^* в предположении о применении операции овыпукления только на промежутке $[t_*, t^*]$. Имеем

$$G(t^*) \subset \mathbf{G}(t^*), \quad I(t^*) \subset \mathbf{I}(t^*).$$

Если овыпукление проводить с начального момента t_0 , то на момент t_* получим множество $\mathbf{I}(t_*)$ с выпуклыми сечениями $\mathbf{I}_{\varphi, V}(t_*)$. Следовательно, при нахождении множества $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^*)$ будем строить выпуклую оболочку объединения выпуклых множеств.

Далее речь пойдет о построении множеств \mathbf{G} и \mathbf{I} . Будем по-прежнему называть их множеством прогноза и информационным множеством.

Как и в трёхмерном варианте, отображение $t \rightarrow \mathbf{G}(t)$ обладает полугрупповым свойством (см. замечание 2.1).

3.3 Основные идеи построения информационных множеств

Для нахождения множества $\mathbf{I}(t^*)$ сначала получим множество прогноза $\mathbf{G}(t^*)$. Чтобы построить $\mathbf{G}(t^*)$, разбиваем промежуток времени $[t_*, t^*]$ с постоянным шагом Δ : $t_* = t^{(1)} < t^{(2)} < \dots = t^*$. Управления $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$ считаем кусочно-постоянными на данном разбиении. При этом на каждом полуинтервале $[t^{(i)}, t^{(i+1)})$ управления u, w принимают лишь нулевые и крайние значения: $u \in \{-1, 0, 1\}$, $w \in \{\mu_1, 0, \mu_2\}$. Выбор значений $u = -1, 0, 1$ и $w = \mu_1, \mu_2$ вытекает из анализа принципа максимума Понтрягина. Значение $w = 0$ включено ради технического удобства.

Положим $\mathbf{G}(t^{(1)}) = \mathbf{I}(t_*)$. Множество прогноза $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ строим, опираясь на множество $\mathbf{G}(t^{(i)})$. При интегрировании системы (3.1) используем метод Эйлера с шагом Δ .

Нахождение множеств $\mathbf{G}^\diamond(t)$ и $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t)$ в схеме построения ИМ, изложенной в предыдущем разделе, упрощается следующим образом.

Формула для проекции на плоскость φ, V множества прогноза при фиксированных управляющих воздействиях u, w (аналог (3.8)) запишется на момент $t^{(i+1)}$ в виде

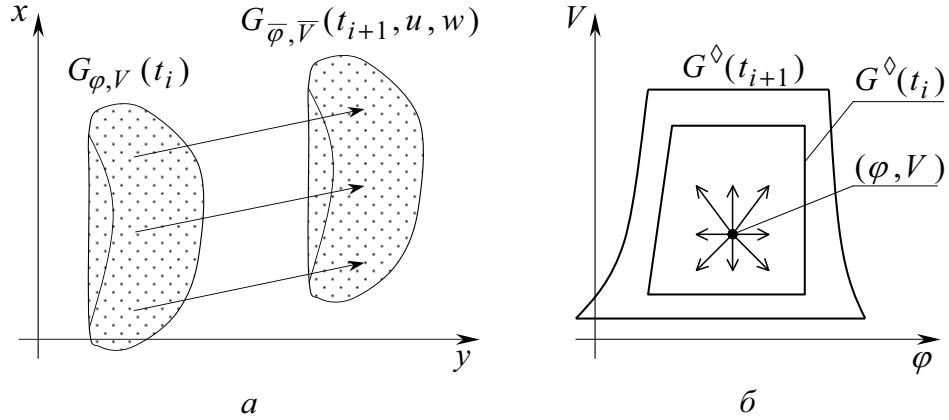
$$\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)}, u, w) = \{(\varphi + \Delta k u / V, V + \Delta w) : (\varphi, V) \in \mathbf{G}^\diamond(t^{(i)})\}. \quad (3.14)$$

Проекция на плоскость x, y сечения множества прогноза при фиксированных u, w (аналог (3.10)) теперь на момент $t^{(i+1)}$ будет иметь вид

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, u, w) = \mathbf{G}_{\varphi, V}(t^{(i)}) + (\Delta V \cos \varphi, \Delta V \sin \varphi)^T, \quad (3.15)$$

где $\bar{\varphi} = \varphi + \Delta k u / V$, $\bar{V} = V + \Delta w$. Перебирая $(\varphi, V) \in \mathbf{G}^\diamond(t^{(i)})$, получим все сечения $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, u, w)$.

Подчеркнем, что при интегрировании по методу Эйлера перенос (рис. 3.3, а) по формуле (3.15) каждого сечения $\mathbf{G}_{\varphi, V}(t^{(i)})$ определяется только соответствующей парой (φ, V) .

Рис. 3.3: Упрощение построения множеств $\mathbf{G}^\diamond(t)$ и $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t)$.

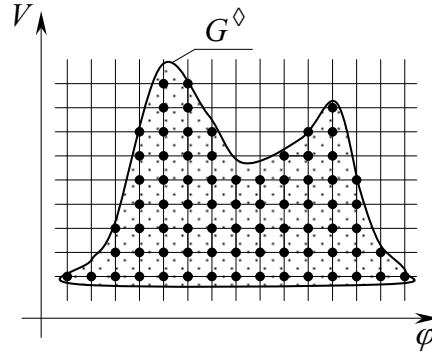
При построении $\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)})$ и $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)})$ рассматриваем лишь девять вариантов (рис. 3.3, б) возможных пар управлений:

$$\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)}) = \bigcup_{\substack{u \in \{-1, 0, 1\}, \\ w \in \{\mu_1, 0, \mu_2\}}} \mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)}, u, w), \quad (3.16)$$

$$\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}) = \text{conv} \bigcup_{\substack{u \in \{-1, 0, 1\}, \\ w \in \{\mu_1, 0, \mu_2\}}} \mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, u, w). \quad (3.17)$$

Заметим, что $\mathbf{G}^\diamond(t^{(i)}) \subset \mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)})$.

Множество \mathbf{G}^\diamond на плоскости φ, V не является выпуклым и даже может быть несвязно. Поэтому трудно описать его границу. То же самое можно сказать и о множестве \mathbf{I}^\diamond . Будем использовать сетку на плоскости φ, V с шагом $\delta\varphi$ по φ и с шагом δV по V . Множества \mathbf{G}^\diamond и \mathbf{I}^\diamond будем подменять наборами узлов такой сетки (рис. 3.4).

Рис. 3.4: Сетка на плоскости φ, V .

В результате пошагового построения множества прогноза $\mathbf{G}(t^{(i)})$ получаем множество $\mathbf{G}(t^*)$. Согласуя прогноз с замерами на момент времени t^* , находим искомое ИМ: $\mathbf{I}(t^*) = \mathbf{G}(t^*) \cap H(t^*)$.

На плоскости x, y работаем с выпуклыми множествами $\mathbf{G}_{\varphi, V}$, $\mathbf{I}_{\varphi, V}$ и $H^\#$. Для их представления используем, применяя аппроксимацию сверху, выпуклые многоугольники. При этом на плоскости x, y можно брать фиксированный набор векторов (сетку нормалей), на которых будут заданы значения опорной функции многоугольников. Другой вариант – работа с ограниченным, но не зафиксированным заранее набором векторов, значения опорной функции на которых также определяют многоугольник. Первый вариант прост для реализации, но несколько проигрывает второму по точности. Ниже используется первый вариант.

3.4 Практическое построение информационных множеств

В соответствии со схемой из раздела 3.2 построение ИМ на промежутке времени $[t_*, t^*]$ осуществляется расчетом множества прогноза на момент времени t^* и последующим учётом множества неопределённости замера, поступившего в этот момент. Опишем реализацию этих операций в соответствии с допущениями, принятыми в разделе 3.3.

3.4.1 Построение множества прогноза

Для построения множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ на основе множества $\mathbf{G}(t^{(i)})$ используем формулы (3.14)–(3.17).

Основная сложность построений, использующих сетку на плоскости φ, V , заключается в том, что вновь возникающие узлы $(\bar{\varphi}, \bar{V})$ множеств $\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)}, u, w)$ не совпадают с узлами зафиксированной (исходной) сетки. Поэтому множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)}, u, w)$ строятся приближенно, с привязкой к исходной сетке.

Сначала строим множество пассивного прогноза $\mathbf{G}(t^{(i+1)}, 0, 0)$. Набор узлов $(\bar{\varphi}, \bar{V})$ этого множества совпадает с набором узлов множества $\mathbf{G}(t^{(i)})$. Отвечающие узлам $(\bar{\varphi}, \bar{V})$ многоугольники $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, 0, 0)$ на плоскости x, y вычисляются по формуле (3.15) путём переноса многоугольников $\mathbf{G}_{\varphi, V}(t^{(i)})$ на векторы $(\Delta V \cos \varphi, \Delta V \sin \varphi)^T$. Для многоугольника, заданного набором (ρ_1, \dots, ρ_m) значений опорной функции, такой перенос означает изменение каждой компоненты ρ_i на величину $n_{ix}\Delta V \cos \varphi + n_{iy}\Delta V \sin \varphi$.

Для построения узлов множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)}, u, w)$ при $(u, w) \neq (0, 0)$ берем за основу узлы множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)}, 0, 0)$ (они совпадают с узлами исходной сетки) и, в соответствии с (3.14), смещаем каждый узел (φ, V) на вектор $(\Delta k u / V, \Delta w)$. Для новых узлов $(\bar{\varphi}, \bar{V}) \in \mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)}, u, w)$ в силу (3.15) имеем $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, u, w) = \mathbf{G}_{\varphi, V}(t^{(i+1)}, 0, 0)$, т.е. берем уже полученные сечения множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)}, 0, 0)$.

По координате φ в исходной сетке используем фиксированное разбиение интервала $[0, 2\pi]$ с шагом $\delta\varphi$. Смещение узла сетки на величину $\Delta k / V$ по φ (влево при $u = -1$ и вправо при $u = 1$) может быть не кратно $\delta\varphi$. Чтобы добиться кратности в этой ситуации, берём смещение на величину $([(\Delta k / V) / \delta\varphi] + 1)\delta\varphi$, которая оценивает сверху

приращение $\Delta k/V$ и кратна $\delta\varphi$ (квадратные скобки означают целую часть), т.е. имеем перенос на

$$\llbracket (\Delta k/V)/\delta\varphi \rrbracket + 1$$

узлов влево при $u = -1$ и вправо при $u = 1$.

По координате V также используем фиксированное разбиение с шагом δV . Величина смещения $\Delta |w|$ может быть не кратна δV . Чтобы добиться кратности, берем перенос на

$$\llbracket \Delta |w|/\delta V \rrbracket + 1 \quad (3.18)$$

узлов в отрицательном направлении при $w = \mu_1$ и в положительном направлении при $w = \mu_2$.

Таким образом, для построения множества $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ применяем исходную сетку на плоскости φ, V . Множество $\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)})$ находим по формуле (3.16). При использовании 9 пар управлений в каждый узел может попасть до 9 многоугольников. Для каждого узла $(\bar{\varphi}, \bar{V})$ сетки строим выпуклую оболочку объединения многоугольников $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)}, u, w)$, попавших в этот узел. В результате каждому узлу будет соответствовать свой многоугольник, который и принимаем за $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)})$ согласно формуле (3.17). Множества $\mathbf{G}^\diamond(t^{(i+1)})$, $\mathbf{G}_{\bar{\varphi}, \bar{V}}(t^{(i+1)})$ определяют множество прогноза $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$.

Следует отметить, что неопределённость по фазовой координате V может быть достаточно большой, особенно в начальный момент времени. В таком случае шаг δV сетки ИМ по скорости трудно заранее ограничить сверху. Следовательно, величина $\Delta |w|/\delta V$ может быть достаточно малой ($\Delta |w|/\delta V \ll 1$). Несмотря на это, согласно формуле (3.18) будет осуществлен перенос на один шаг сетки. Таким образом, сдвиги узлов по V могут быть не согласованными с динамикой системы (3.1). Поэтому при построении $\mathbf{G}(t^{(i+1)})$ учёт динамики по V за счёт сдвигов (3.18) будем осуществлять не на каждом шаге по времени, а лишь через заданное количество шагов. Символом q_1 (q_2) обозначим количество шагов, через которые будем производить сдвиг в отрицательном (положительном) направлении. В качестве чисел q_1, q_2 возьмем максимальные натуральные числа, удовлетворяющие соотношению

$$\llbracket \Delta |\mu_i|/\delta V \rrbracket = \llbracket q_i \Delta |\mu_i|/\delta V \rrbracket, \quad i = 1, 2.$$

Это позволяет согласовать сдвиги (3.18) узлов по V с динамикой системы (3.1).

3.4.2 Учёт множества неопределённости замера

Для каждого пришедшего в момент t^* замера формируется его МН. Это формирование производится в соответствии с типом источника информации и его характеристиками точности. Если в момент t^* замеры положения данного самолёта поступили сразу от нескольких источников, то формируется единое множество неопределённости $H(t^*)$ как пересечение МН этих замеров.

Для построения ИМ в момент времени t^* пересекаем сечения $\mathbf{G}_{\varphi, V}(t^*)$ множества прогноза $\mathbf{G}(t^*)$ с множеством $H^\#(t^*)$.

Операция пересечения поясняется на рис. 3.5. Здесь в проекции на плоскость x, y приведен возможный вид сечений множества $\mathbf{G}(t^*)$, отвечающих узлам (φ, V) при некотором конкретном V . Пунктиром изображено множество неопределённости $H^\#(t^*)$.

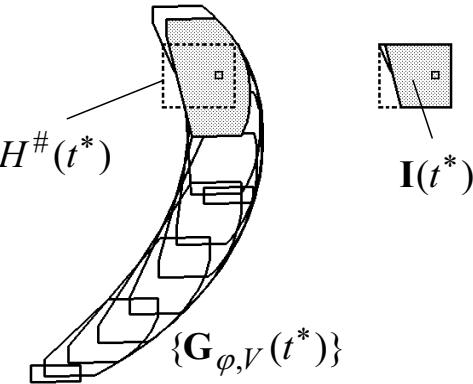


Рис. 3.5: Учёт множества неопределённости замера.

Узлы (φ, V) множества $\mathbf{G}(t^*)$ с непустыми результатами пересечений и будут составлять множество $\mathbf{I}^\diamond(t^*)$ – набор узлов информационного множества $\mathbf{I}(t^*)$. Реализация операции пересечения многоугольников описана в подразделе 2.3.4.

3.4.3 Регулирование числа узлов сетки на плоскости φ, V

При практическом построении информационных множеств работаем с ограниченным количеством узлов (φ, V) . Для фазовой координаты φ это легко решаемая проблема, поскольку множество $[0, 2\pi]$ возможных значений ограничено. Для V число узлов приходится регулировать дополнительно. Кроме того, неопределённость по фазовой координате V заранее может быть оценена лишь грубо, т.е. начальное ИМ задаётся с большим интервалом по V и большим шагом разбиения δV .

Рассмотрим подробнее работу с сеткой узлов по V . С течением времени количество узлов по V может меняться. Так, при отсутствии замеров от источников информации интервал неопределённости по V растёт по времени, а при поступлении замеров часть узлов высекается и интервал неопределённости уменьшается. В первом случае предусмотрено прореживание числа узлов с увеличением шага разбиения δV . Во втором случае сетка по V учащается с уменьшением шага δV . В обоих случаях сетка остаётся равномерной, как было принято в разделе 3.3.

Пусть N_V – ограничение на число узлов по V . Технически настройка сетки под текущий интервал неопределённости по скорости осуществляется следующим образом. Число узлов по V поддерживается в интервале от $\lceil (N_V + 1)/2 \rceil$ до N_V . Каждый раз после построения очередного ИМ проверяется выполнение данного условия. Если число узлов стало слишком большим (т.е. больше N_V), то удаляем каждый второй узел. Тем самым сокращаем число узлов до допустимого количества и увеличиваем шаг δV сетки по скорости вдвое. Если же число узлов стало слишком малым, т.е. меньше

$\llbracket (N_V + 1)/2 \rrbracket$, то добавляем промежуточные узлы, аналогично достигая допустимого количества узлов, и уменьшаем шаг δV вдвое.

Всё это позволяет более точно отслеживать фазовую координату V при уменьшении интервала неопределённости по скорости.

Основной проблемой при реализации указанных процедур подстройки сетки по V является построение на вновь вводимых узлах сетки по V соответствующих сеток по φ и соответствующих сечений ИМ. Возможно несколько вариантов решения этой проблемы. Данный вопрос должен исследоваться с точки зрения быстродействия алгоритмов и минимизации затрат памяти.

Опишем один вариант построения сечений на новых узлах сетки по скорости. Именно он использовался при моделировании (раздел 3.5).

Пусть текущее число узлов в данной сетке стало меньше порога $\llbracket (N_V + 1)/2 \rrbracket$. Тогда добавляются два новых крайних узла $V_{\min} - \delta V$ и $V_{\max} + \delta V$ с прежней величиной дискрета δV . На эти два новых крайних узла дублируются узлы по φ и наборы сечений ИМ, имеющиеся на прежних узлах V_{\min} и V_{\max} соответственно. Если увеличенное таким образом число узлов начинает превышать порог $\llbracket (N_V + 1)/2 \rrbracket$, то процедура останавливается. Заметим, что при этом интервал по скорости подстроен, а дискрет δV сохраняется.

Если после указанного увеличения числа узлов на 2 общее число узлов все еще меньше порога, то вводятся промежуточные узлы по V между имеющимися, а дискрет δV уменьшается вдвое. При этом на каждом вновь введенном промежуточном узле V соответствующая сетка узлов по φ строится объединением сеток, отвечающих узлам, соседним с V . Соответствующий набор сечений ИМ на этих узлах по φ конструируется с помощью быстрой процедуры объединения сечений. Процесс дробления сетки заканчивается, когда число узлов сетки по V первый раз превысит порог $\llbracket (N_V + 1)/2 \rrbracket$.

3.5 Результаты моделирования

3.5.1 Исходные данные для моделирования

Построение ИМ моделировалось на участке времени 120 с. Начальное информационное множество $I(0)$ представлялось в виде сетки с минимально допустимыми шагами разбиения по φ и V , на узлах которой задавались многоугольники, совпадающие с начальным множеством неопределённости $H^\#(0)$. Начальная неопределённость по φ была взята от 0 до 2π рад, а по V – от 100 до 500 м/с. Моделировалось движение истинной точки, и относительно нее с интервалом 20 с формировались множества неопределённости замеров в форме правильных m -угольников со стороной $400 \operatorname{tg}(\pi/m)$, м. Центры МН замеров располагались в соответствующих положениях истинного движения. Кроме этого, использовались следующие данные:

$V(0) = 200 \text{ м/с}$	– начальная скорость движения истинной точки;
$k = 6 \text{ м/с}^2$	– параметр системы дифференциальных уравнений (3.1), максимальное боковое ускорение;
$\mu_1 = -1 \text{ м/с}^2$	– минимальное значение продольного ускорения самолёта;
$\mu_2 = 3 \text{ м/с}^2$	– максимальное значение продольного ускорения самолёта;
$\Delta = 1 \text{ с}$	– шаг временной сетки построения ИМ;
$N_\varphi = 600$	– ограничение на число узлов сетки ИМ по φ ;
$\delta\varphi = 2\pi/600 \text{ рад}$	– дискрет фиксированной сетки по φ ;
$N_V = 20$	– ограничение на число узлов сетки ИМ по V ;
$\delta V = 400/11 \text{ м/с}$	– начальный шаг сетки скорости при начальном числе узлов данной сетки 12 (здесь 400 – размер принятого начального интервала [100, 500] неопределённости по скорости, м/с).

Траектория истинного движения самолёта (рис. 3.6, тонкая сплошная линия) имела прямолинейный участок на интервале 0–10 с, разворот против часовой стрелки на интервале 10–40 с и разворот по часовой стрелке на интервале 40–120 с (в обоих случаях боковое ускорение максимально). По скорости движение шло с максимальным ускорением $w = 3 \text{ м/с}^2$ на интервале 0–30 с, с нулевым ускорением на интервале 30–40 с и с торможением $w = -1 \text{ м/с}^2$ на интервале 40–120 с.

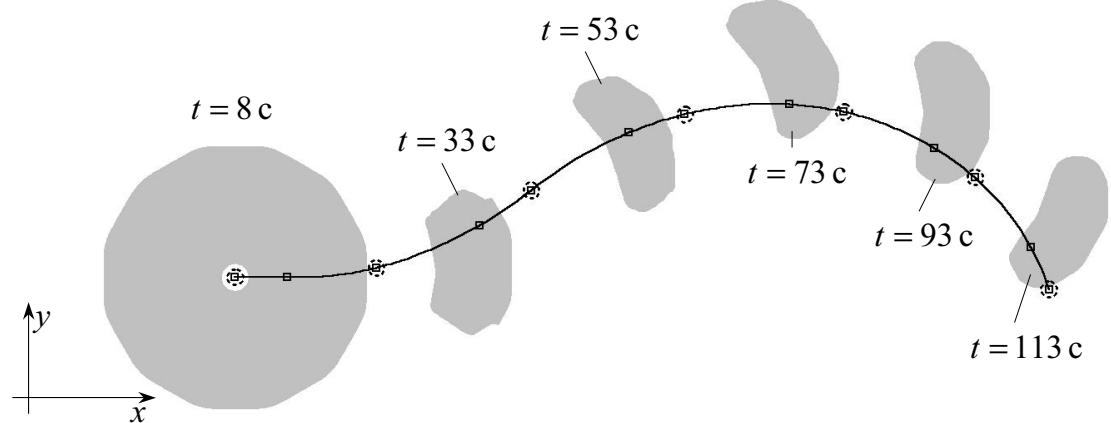


Рис. 3.6: Движение информационного множества в проекции на плоскость x, y .

Динамика изменения ИМ вдоль траектории движения иллюстрируется проекциями ИМ на плоскость x, y в моменты 8, 33, 53, 73, 93 и 113 с. Положения истинной точки в эти моменты отмечены квадратиками. Множества неопределённости замеров в моменты их прихода изображены пунктиром.

Проекция начального информационного множества $\mathbf{I}(0)$ на плоскость x, y совпадает с множеством $H^\#(0)$ неопределённости замера в начальный момент времени. До появления второго замера и построения его МН область возможных значений φ совпадает с интервалом $[0, 2\pi]$, поэтому проекция ИМ на плоскость x, y имеет кольцеобразный вид (рис. 3.6, начальная часть траектории).

В данном варианте использовалось представление МН и сечений ИМ многоугольниками, заданными на фиксированной сетке из 12 векторов. Моделировались также варианты $m = 4, 8, 16$ и 20 .

3.5.2 Структура информационного множества

Структура ИМ в проекции на плоскость x, y детально изображена на рис. 3.7 в момент $t = 53$ с. Здесь на фоне общей проекции ИМ (слабая заливка) выделен слой, соответствующий $V = 277.8$ м/с (средняя заливка). Данный слой наиболее близок по V к истинному значению скорости 277.0 м/с в этот момент. Внутри него отмечено одно сечение ИМ (темная заливка) для $\varphi = 1.173$ рад, содержащее истинную точку (обозначена квадратиком). Истинное значение координаты φ в данный момент равно 1.177 рад.

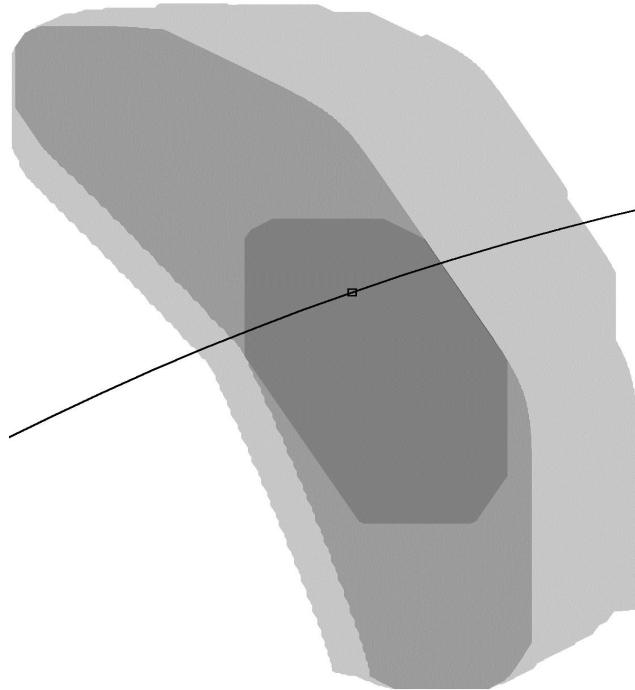


Рис. 3.7: Структура информационного множества, $t = 53$ с.

3.5.3 Влияние числа нормалей в представлении сечений информационного множества

Влияние количества векторов на точность построения ИМ отражено на рис. 3.8. Здесь приведены проекции ИМ на плоскость x, y для $t = 79$ с при моделировании с $m = 4$ (слабая заливка), $m = 8$ (темная заливка) и $m = 16$ (средняя заливка). Видно, что повышение быстродействия алгоритмов (за счет уменьшения числа векторов) приводит к некоторому снижению точности оценивания: размер текущего ИМ увеличивается.

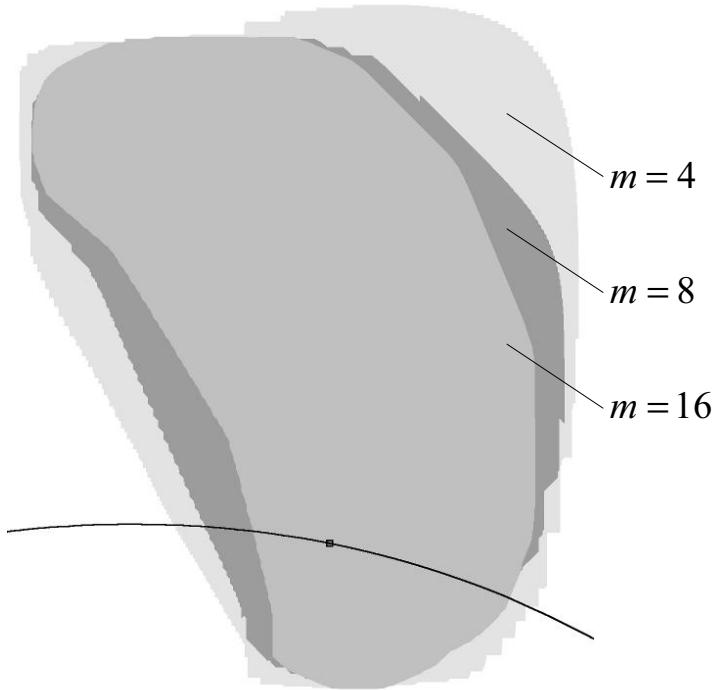


Рис. 3.8: Проекция информационного множества на плоскость x, y , $t = 79$ с.

3.5.4 Оценивание ненаблюдаемых координат

Предложенный подход на базе информационных множеств позволяет разработать вычислительную схему оценивания всех четырех параметров движения самолёта. Рассмотрим динамику оценивания ненаблюдаемых фазовых координат φ и V .

ИМ каждого замера дает непустое пересечение только для тех узлов φ и V , которые близки к текущим истинным их значениям. На рис. 3.9 показано ИМ на момент $t = 120$ с прихода 7-го замера. Выделен один из отбрасываемых слоев ИМ по скорости (тёмная заливка, $V = 305.6$ м/с), который не пересекается с множеством $H^\#(120)$ (кружочек, отмеченный пунктиром). Таким образом, происходит уточнение информации по ненаблюдаемой координате V .

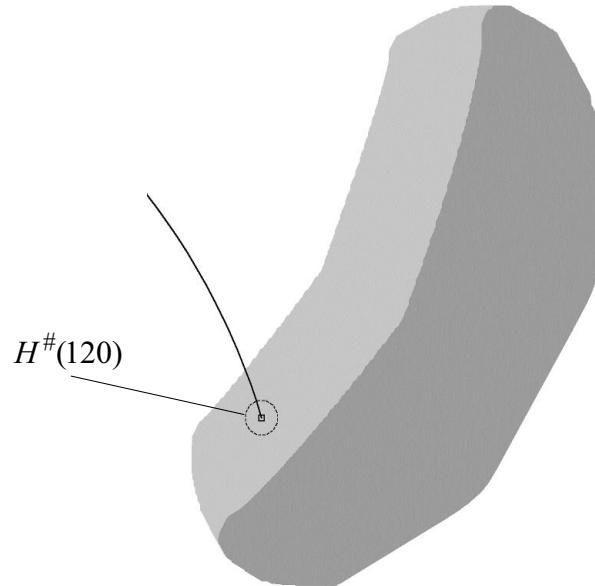


Рис. 3.9: Учёт множества неопределённости замера, $t = 120$ с.

На рис. 3.10 дана двумерная сетка узлов на плоскости φ, V в моменты учета МН замеров на 20 (а), 40 (б), 60 (в), 80 (г), 100 (д) и 120 (е) секунд. Рассматривается вариант моделирования с числом векторов $m = 12$ и ограничением $N_V = 40$ на число узлов по V . На моменты прихода замеров возможные интервалы значений φ отмечены тонкими вертикальными отрезками. Диапазоны узлов по φ после высечки отмечены жирными отрезками для каждого из оставшихся узлов сетки V . Квадратиком отмечены истинные значения этих координат в соответствующие моменты времени.

Неопределенность по φ на момент 20 с (рис. 3.10, а) составляет 2π рад. Соответствующий интервал неопределенности по скорости равен [80 м/с; 560 м/с], число узлов сетки по V равно 26. Заметим, что к моменту прихода замера размах интервала неопределенности по φ такой же, как и в начальный момент, а из-за возможного ускорения число узлов по скорости V увеличивается с 22 в начальный момент до 26. При этом размах интервала неопределенности по скорости возрастает. Видно, что пришедший в момент 20 с замер (по наблюдаемым координатам x, y) дает существенное уточнение информации по ненаблюдаемым координатам φ, V .

Для других замеров (рис. 3.10 б–е) также происходит улучшение оценки ненаблюдаемых координат. Отметим, что истинная точка (квадратик) всегда находится внутри оцененных областей.

Моделирование позволило количественно оценить влияние точности представления сечений ИМ на плоскости x, y на точность оценивания координат φ, V . На рис. 3.11 показаны оцениваемые области на момент 20 с второго замера (а, в, д) и на момент 60 с четвёртого замера (б, г, е) для значений числа фиксированных векторов $m = 4, 8, 16$.

Приведенные числовые данные по размахам ИМ показывают, что увеличение числа нормалей приводит к улучшению оценивания ненаблюдаемых координат φ, V .

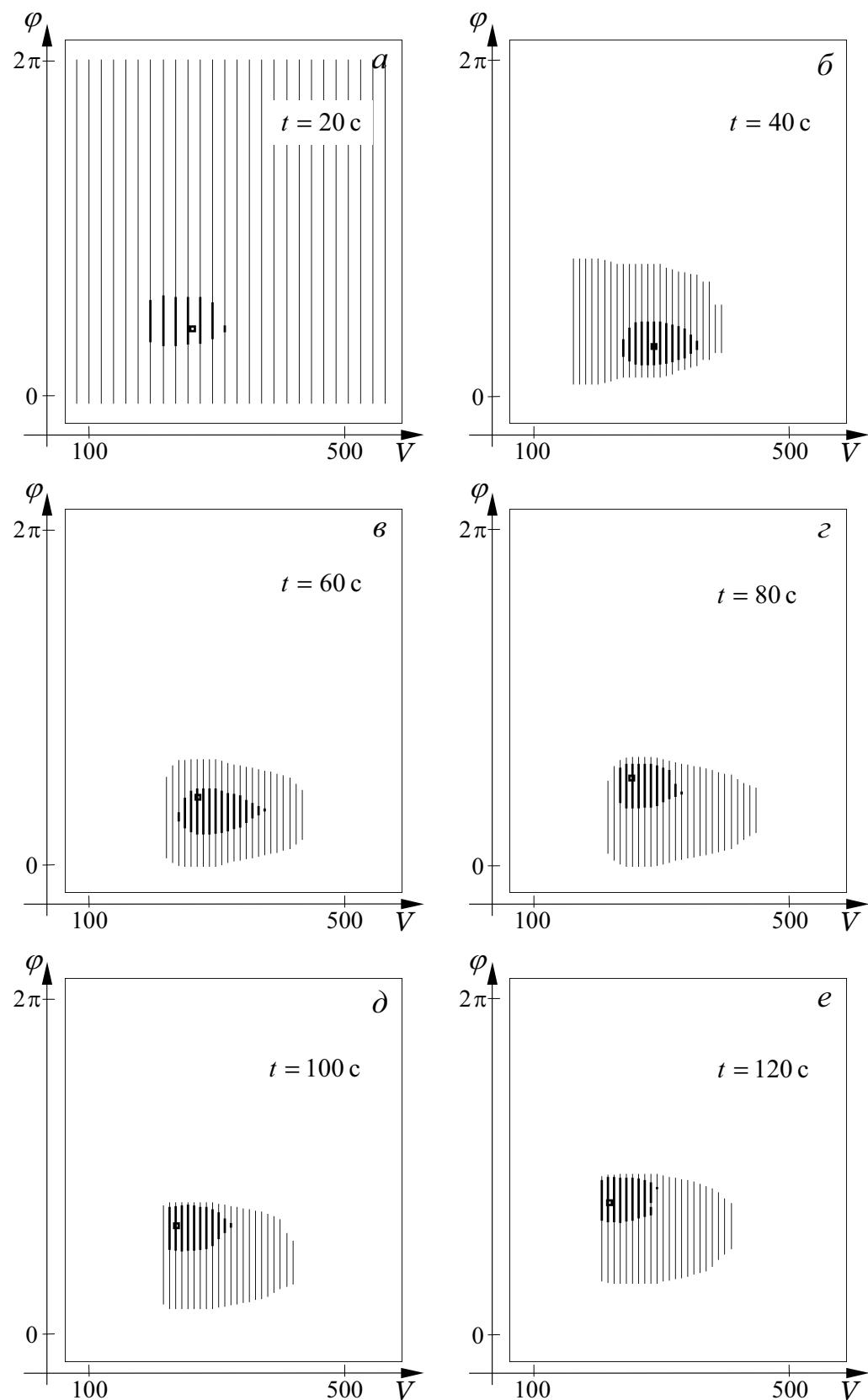
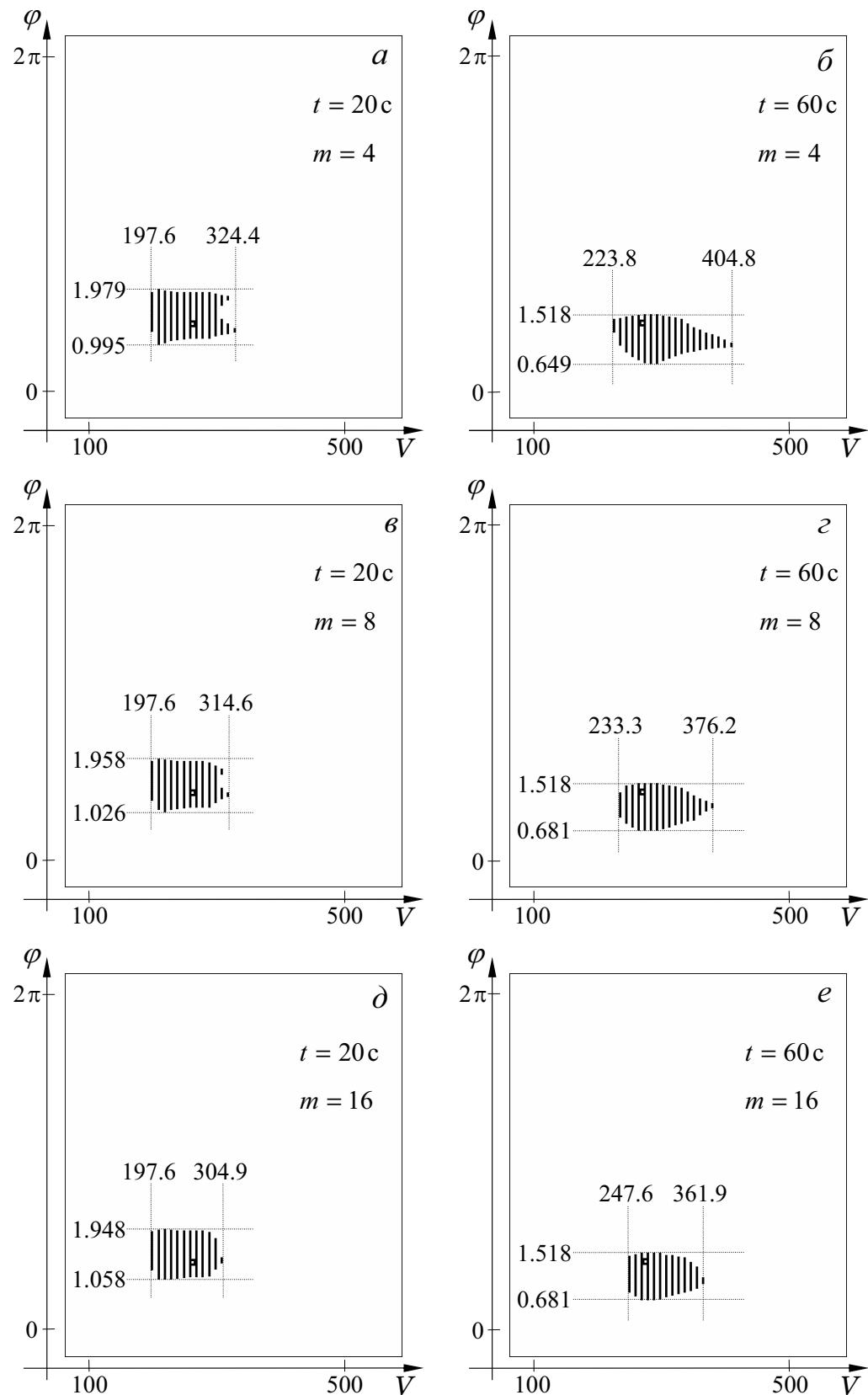


Рис. 3.10: Уточнение информации при поступлении замеров; φ в рад, V в м/с.

Рис. 3.11: Влияние числа нормалей на точность построения; φ в рад, V в м/с.

Отметим универсальность технологии, опирающейся на использование информационных множеств. Пусть в некоторый момент от некоторых источников информации (например, от бортовой навигационной системы) приходят замер φ_s по φ и замер V_s по V . Этим замерам ставим в соответствие множества неопределенности H_φ , H_V на плоскости φ, V (рис. 3.12). Каждое из этих множеств – полоса, ширина которой определяется величиной максимальной ошибки соответствующего измерителя. Пересечение множеств H_φ , H_V с текущей областью \mathbf{G}^\diamond (слабо заштрихована) допустимых значений φ и V может дополнительно улучшить оценку (оставшиеся отрезки отмечены жирными линиями). При этом будет происходить улучшение ИМ и по координатам x, y , так как из состава ИМ будут отброшены те его сечения, которые соответствуют отбрасываемым узлам по φ, V .

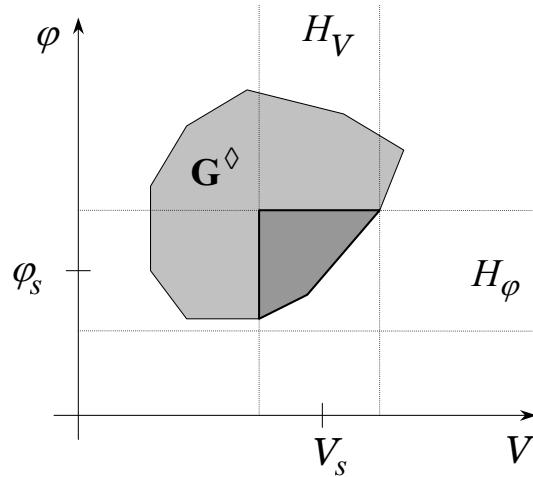


Рис. 3.12: Учет замеров по φ и V .

Возможность оценивания ненаблюдаемых координат через замеры наблюдаемых принципиально обусловлена тем, что построение ИМ ведется в пространстве всех фазовых координат. Такая возможность отсутствует при простых инженерных представлениях многомерного ИМ двумерными “стробами” на плоскостях x, y и φ, V оцениваемых координат.

Моделирование показало, что существенная начальная неопределенность по скорости движения действительно требует подстройки дискрета и размаха сетки по скорости под интервал возможных ее значений. При большом уровне возможных ускорений торможения и разгона независящая от времени сетка по скорости с фиксированным грубым дискретом может приводить к вырождению (пустоте) текущего информационного множества.

На рис. 3.13 показана динамика изменения оцениваемого интервала скорости. На рис. 3.14 приведен аналогичный график для интервала возможных значений координаты φ . Заливкой отмечены области допустимых значений процессов, сплошными линиями – их границы, приведены значения размахов на моменты прихода замеров. Пунктирной линией показаны истинные движения. Видно, что данные движения находятся внутри оцененных областей, а ИМ в целом не вырождается.

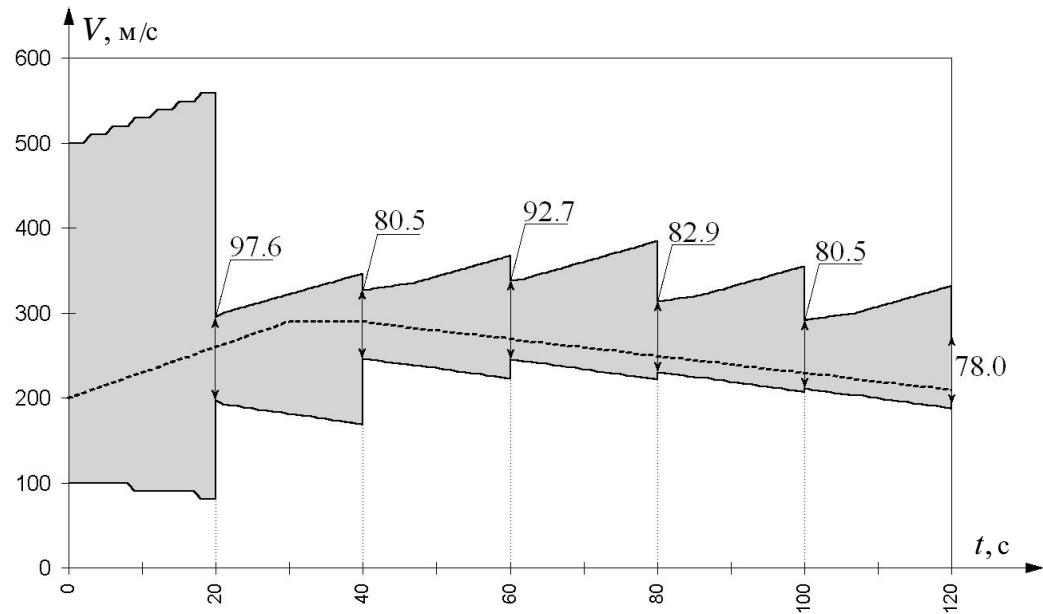


Рис. 3.13: Динамика изменения интервала возможных значений V .

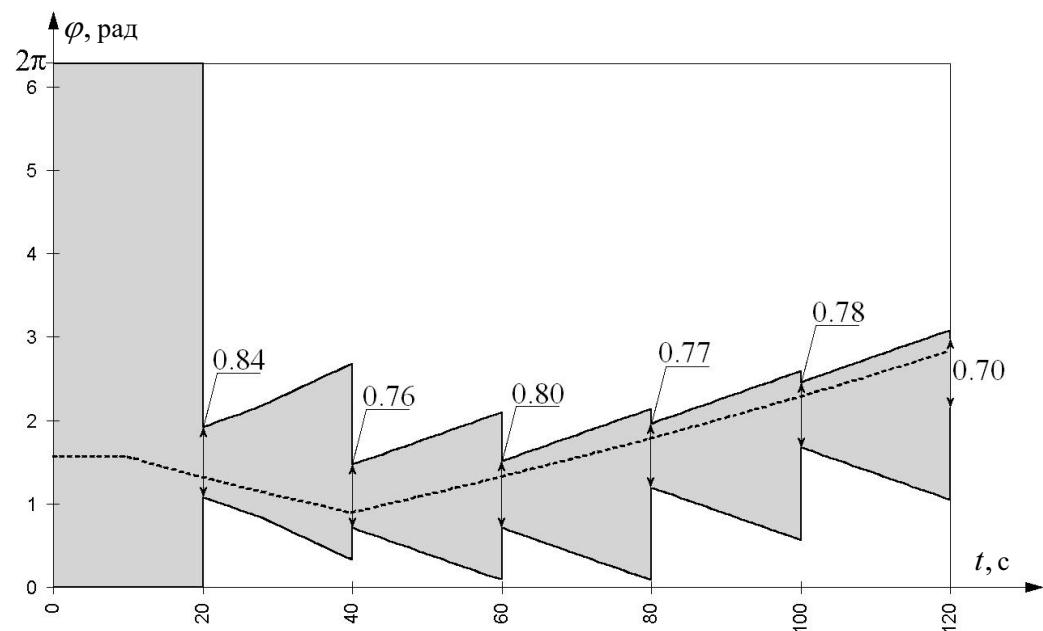


Рис. 3.14: Динамика изменения интервала возможных значений φ .

3.5.5 Машинные затраты

В данном разделе приводятся оценки машинной памяти, необходимой для хранения текущего ИМ, и оценки времени построения ИМ.

Используется представление ИМ при помощи набора допустимых узлов (φ, V) , которым соответствуют многоугольники (сечения) на плоскости x, y . Многоугольники задаются наборами (ρ_1, \dots, ρ_m) значений опорной функции.

Отметим ещё раз, что фиксированная сетка по фазовой координате φ и представление многоугольников при помощи опорной функции на фиксированном равномерном наборе векторов (n_1, \dots, n_m) позволяют существенно ускорить вычисления. Построение выпуклой оболочки объединения многоугольников и операция пересечения многоугольников сводятся к простым арифметическим операциям без расчета тригонометрических функций.

Пусть для действительных чисел применяется формат *double*. Тогда для хранения каждого многоугольника требуется $8t$ байт машинной памяти. Число узлов (φ, V) информационного множества не превосходит величины $N_\varphi N_V$, где N_φ – ограничение на число узлов по φ , а N_V – ограничение на число узлов по V . В целом максимальный объём памяти в байтах, достаточный для хранения ИМ, равен $8tN_\varphi N_V$.

При моделировании (раздел 3.5) использовались ограничения $N_\varphi = 600$ и $N_V = 20$. Для хранения одного ИМ в случае $t = 4$ достаточно было резервировать около 375 Кб.

Оценка затрат машинного времени, необходимого для построения ИМ, проводилась на компьютере с процессором *Pentium – 166*. Моделировалось движение на участке 120 с с шагом $\Delta = 1$ с. Замеры поступали с интервалом 20 с. Другие параметры приведены в начале раздела 3.5.

Данные о затратах машинной памяти и машинного времени в зависимости от числа векторов сетки нормалей в представлении выпуклых многоугольников приведены в таблице 5.1 .

Таблица 5.1 : Машинные затраты

Число нормалей, t	4	8	12	16	20
Объем памяти, необходимый для хранения текущего ИМ, Кб	375	750	1125	1500	1875
Время построения ИМ, с (на участке времени 120 с)	52	83	112	143	168

При построении ИМ использовалась только оперативная память. На каждом шаге по времени информация записывалась в файл на внешнюю память лишь для последующей визуализации процессов оценивания.

Глава 4

Построение множества разрешимости в задаче проводки самолёта при ветровом возмущении

В системах избежания столкновений воздушных судов актуальной является задача проведения самолета из начального состояния в заданную область в назначенный момент времени. При этом в некоторые промежуточные моменты времени траектория должна проходить через другие заданные области пространства. Последовательность таких областей (фазовых ограничений) вдоль траектории стандартного маневра и моменты их пролета задаются диспетчером службы управления воздушным движением с целью обеспечения безопасного расхождения конфликтующих судов.

Полезно иметь быстрый вычислительный алгоритм, позволяющий ответить на вопрос о возможности проведения самолета через заданные области, но уже при наличии ветровых возмущений.

В данной главе такой алгоритм предлагается для случая движения самолета в горизонтальной плоскости. Относительно ветрового возмущения считается известным лишь интервал возможных значений его скорости. Движение самолета описывается при помощи системы дифференциальных уравнений четвертого порядка. Две фазовые координаты имеют смысл геометрического положения самолета, третья координата – угол направления вектора скорости и четвертая – величина скорости. Таким образом, построения проводятся в четырехмерном фазовом пространстве.

Рассматриваемая задача трактуется как задача о нахождении множества разрешимости дифференциальной игры наведения [23, 75] на терминальное множество в фиксированный момент окончания при наличии фазовых ограничений, оговоренных в промежуточные моменты времени. Для решения задачи используется попятная процедура, основу которой составляют алгоритмы построения множеств достижимости, операции пересечения множеств и построения выпуклых оболочек. Подобная процедура (но только в прямом времени) использовалась в главах 2, 3 для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости при неточных замерах его геометрического положения.

4.1 Постановка задачи

Примем, что движение самолета в горизонтальной плоскости (рис. 1.1) описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V \cos \varphi + v_1, \\ \dot{y} &= V \sin \varphi + v_2, \\ \dot{\varphi} &= ku/V, \\ \dot{V} &= w, \quad V \geq \text{const} > 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения; v_1, v_2 – компоненты вектора v ветрового возмущения; φ – угол направления вектора скорости самолета; V – величина скорости (в невозмущенной среде); k – максимальное боковое ускорение, $k = \text{const} > 0$; u, w – управляющие воздействия. Предполагаем, что управления u, w , а также помеха v стеснены геометрическими ограничениями

$$|u| \leq 1, \quad |w| \leq \mu, \quad v \in Q \subset R^2,$$

где Q – выпуклое компактное множество.

Система (4.1), хотя и является упрощенной (отсутствуют факторы, связанные с влиянием ветровой помехи на аэродинамику движения), широко используется (см., например, [4]) в навигационных расчетах для построения опорных траекторий, составления полетных планов и т.д.

Условимся, что значения координаты φ , отличающиеся на величину кратную 2π , отождествляются. Пусть

$$\Phi = R^2 \times [-\pi, \pi) \times R_+$$

– фазовое пространство задачи.

Будем говорить, что управляющие воздействия u, w принадлежат первому игроку, а векторное мешающее воздействие v – второму.

Цель первого игрока – привести фазовый вектор системы (4.1) в фиксированный момент времени T на заданное множество $M \subset \Phi$ с соблюдением фазовых ограничений $H(\tilde{t}_j) \subset \Phi$, оговоренных для моментов времени $\tilde{t}_j, j = \overline{1, \omega}$, как бы ни действовал второй игрок. Считаем, что

$$t_0 \leq \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_j < \dots < \tilde{t}_\omega \leq T.$$

Требуется построить в пространстве $[t_0, T] \times \Phi$ максимальное множество W , откуда такое наведение возможно.

Используя терминологию книги [23], можно сказать, что W – максимальный стабильный мост в дифференциальной игре наведения на терминальное множество M .

Условимся, что

$$M = M^\diamondsuit \times M^\#,$$

$$H(\tilde{t}_j) = H^\diamondsuit(\tilde{t}_j) \times H^\#(\tilde{t}_j), \quad j = \overline{1, \omega},$$

где $M^\#$ и $H^\#(\tilde{t}_j)$ – выпуклые компактные множества на плоскости x, y ; $M^\diamondsuit, H^\diamondsuit(\tilde{t}_j) \subset [-\pi, \pi] \times R_+$ – выпуклые компакты на плоскости φ, V .

Поясним возможное применение вычислительной программы построения множества W . Предположим, что диспетчер службы управления воздушным движением, обнаружив конфликтную ситуацию, принял решение об изменении маршрута одного из самолетов. Диспетчер выбирает типовой маневр на плоскости x, y . Например, на рис. 4.1 изображен типичный S -образный маневр (сплошная линия). Диспетчер оценивает, как можно осуществить выбранный маневр, двигаясь из начального положения (x_0, y_0) в момент t_0 с начальным направлением φ_0 вектора скорости и величиной скорости V_0 . При этом диспетчер рассчитывает движение в силу некоторых допустимых управлений $u(t), w(t)$, уровень которых меньше (на оговоренную величину) максимального допустимых значений $|u(t)| = 1$ и $|w(t)| = \mu$. Такой расчет выполняется диспетчером в предположении об отсутствии ветрового возмущения. Далее, на проложенной траектории диспетчер задает терминальное множество M , отнесенное к моменту времени T , а также фазовые ограничения $H(\tilde{t}_j)$, $j = \overline{1, \omega}$. Тем самым устанавливаются допуски на отклонение самолета от стандартной траектории. На рис. 4.1 пунктиром показаны проекции $H^\#(\tilde{t}_j)$ множеств $H(\tilde{t}_j)$ и проекция $M^\#$ терминального множества M на плоскость x, y .

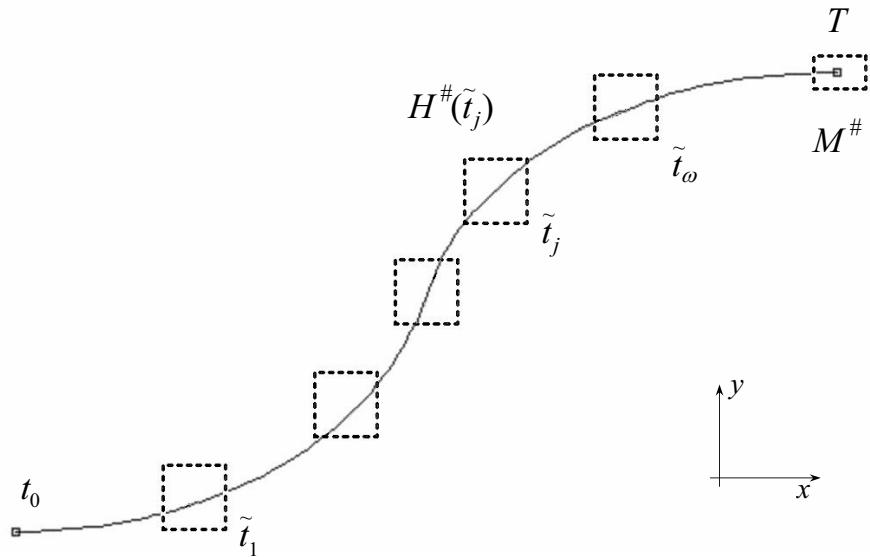


Рис. 4.1: Опорная траектория, фазовые ограничения и терминальное множество в проекции на плоскость x, y .

Диспетчера интересует вопрос о возможности прохождения самолета вблизи заданной траектории, но уже при наличии ветрового возмущения. Задав ограничение Q на ветровое возмущение (например, в виде $|v| \leq \nu$), он при помощи вычислительной программы просчитывает множество W . Если сечение $W(t_0)$ множества W , соответствующее начальному моменту t_0 , содержит точку $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$, то маневр самолета выбран правильно. В противном случае выбранный маневр удовлетворительным не является и его нужно изменить.

4.2 Схема построения множества разрешимости

В теории дифференциальных игр накоплен значительный опыт [2, 10, 36, 39, 41, 42, 45, 50, 51, 59, 63, 77] численного построения множеств разрешимости игровой задачи наведения на заданное множество M в фиксированный момент времени T . Как было отмечено в разделе 1, множество разрешимости называется также максимальным стабильным мостом. Разработаны алгоритмы попятного построения максимальных стабильных мостов как для линейных задач, так и для задач с нелинейной динамикой (см., например, [2, 10, 39, 41, 50, 77])

Следует, однако, отметить, что для нелинейных задач высокой размерности реализация алгоритмов общего характера наталкивается на существенные трудности. В нашем случае размерность фазового вектора равна четырем. Следовательно, множество W расположено в пространстве «время \times фазовая переменная» размерности пять. С целью создания быстрого алгоритма приближенного построения множества W будем учитывать специфику системы (4.1).

Опишем общую схему попятной процедуры. Численное построение сечений $W(t_i)$ максимального стабильного моста W проводится на заданной сетке моментов времени t_i , $i = \overline{0, N} : t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$. Удобно считать, что набор моментов $\{\tilde{t}_j\}$, в которые заданы фазовые ограничения, включается в набор $\{t_i\}$. Переход от сечения $W(t_{i+1})$ к сечению $W(t_i)$ осуществляется при помощи следующих операций:

А) построение множества достижимости $G(t_i ; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$ рассматриваемой системы в обратном времени на момент t_i при начальном моменте t_{i+1} , начальном множестве $W(t_{i+1})$ и при фиксированном постоянном управлении v второго игрока;

Б) пересечение полученных множеств по $v \in Q$ и пересечение с фазовым ограничением $H(t_i)$:

$$W(t_i) = \left(\bigcap_{v \in Q} G(t_i ; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v) \right) \bigcap H(t_i). \quad (4.2)$$

Здесь считаем, что $H(t_i) = R^4$, если в момент t_i фазового ограничения нет, т.е. $t_i \notin \{\tilde{t}_j\}$.

Если бы исследуемая система была линейной по фазовой переменной, то, опираясь на выпуклость терминального множества M и выпуклость фазовых ограничений $H(\tilde{t}_j)$, $j = \overline{1, \omega}$, получили бы выпуклость множеств достижимости $G(t_i ; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$, $v \in Q$. Таким образом, имели бы дело с операциями пересечения выпуклых множеств. Пересечение выпуклых множеств – существенно более простая операция по сравнению с операцией пересечения невыпуклых множеств. Более того, при отсутствии фазового ограничения, в задачах с линейной динамикой пересекаем множества $G(t_i ; t_{i+1}, W(t_{i+1}), v)$, $v \in Q$, отличающиеся друг от друга лишь сдвигом, обусловленным различием $v \in Q$. Это также позволило бы существенно упростить процедуру пересечения.

Система (4.1) не является линейной. Однако она обладает некоторой спецификой, позволяющей в значительной степени использовать перечисленные выше упрощения, характерные для линейных систем.

4.3 Алгоритм попятного построения множества разрешимости

Специфика системы (4.1) состоит в том, что переменные x и y , характеризующие геометрическое положение объекта, не входят в правую часть системы. Это позволяет при интегрировании движения системы рассматривать два последних уравнения независимо от двух первых. Кроме того, при фиксированных функциях $\varphi(\cdot)$ и $V(\cdot)$ два первых уравнения представляют собой весьма простой вариант линейной динамики. Управление первого игрока здесь отсутствует. Если задать на промежутке времени от момента t_{i+1} до момента t_i управление второго игрока в виде функции времени $v(\cdot)$ (в частности, постоянное управление), то множество состояний на плоскости x, y , оговоренное для момента t_{i+1} , жестко перенесется на некоторый вектор – результат интегрирования правой части при оговоренных функциях $\varphi(\cdot), V(\cdot)$ и управляющем воздействии $v(\cdot)$.

Сечения $W(t_i)$ максимального стабильного моста W будем строить на сетке моментов времени t_i с достаточно мелким шагом $\Delta = t_{i+1} - t_i$. Множество Q при этом подменяем выпуклым многоугольником с конечным числом вершин. Множества $M^\#$, M^\diamond и $H^\#(\tilde{t}_j)$, $H^\diamond(\tilde{t}_j)$ также подменяются выпуклыми многоугольниками.

За счет введения дискретизации, сечения $W(t_i)$ строятся приближенно. Кроме того, в процессе построения очередного сечения будем использовать овыпукление некоторых множеств, тем самым загрублляя сверху выстраиваемое сечение. (Тщательный компьютерный анализ влияния дополнительной процедуры овыпукления показывает, что вносимое загрубление “не слишком велико”.) Чтобы подчеркнуть приближенность построений и применение операций, загрублющих результат сверху, будем употреблять символ $\mathbf{W}(t_i)$ вместо $W(t_i)$ для обозначения сечений, выстраиваемых по предла-гаемому в работе алгоритму.

4.3.1 Представление четырехмерных множеств

Описание алгоритма построения множеств $\mathbf{W}(t_i)$ начнем с изложения принятого способа представления четырехмерных множеств.

На плоскости φ, V вводим прямоугольную сетку узлов $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$, не зависящую от времени. По координате φ сетка строится в диапазоне $[-\pi, \pi]$. По координате V интервал расположения узлов сетки задается на основе множества M^\diamond с учетом грубого оценивания возможного изменения величины скорости V .

Пусть

$$L(T) = \{(n, m) : (\varphi_n, V_m) \in M^\diamond \bigcap H^\diamond(T)\},$$

$$F_{n,m}(T) = M^\# \bigcap H^\#(T), \quad (n, m) \in L(T).$$

Множество узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in L(T)$, вместе с относящимися к ним множествами $F_{n,m}(T)$ примем за множество $\mathbf{W}(T)$. Таким образом,

$$\mathbf{W}(T) = \bigcup_{(n, m) \in L(T)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(T)).$$

В аналогичном виде будем задавать множества $\mathbf{W}(t_i)$: совокупность узлов (φ_n, V_m) , $(n, m) \in L(t_i)$, на плоскости φ, V вместе с относящимися к ним выпуклыми множествами $F_{n,m}(t_i)$ на плоскости x, y . Рекуррентная процедура построения множеств $\mathbf{W}(t_i)$ описывается следующем пункте.

4.3.2 Переход от множества $\mathbf{W}(t_{i+1})$ к множеству $\mathbf{W}(t_i)$

Пусть множество $\mathbf{W}(t_{i+1})$ построено. Оно представлено в виде

$$\mathbf{W}(t_{i+1}) = \bigcup_{(n, m) \in L(t_{i+1})} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(t_{i+1})).$$

где $F_{n,m}(t_{i+1})$ – выпуклые множества.

A) *Приближенное построение множества $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$.*

1. Рассмотрим произвольный узел (φ_n, V_m) такой, что $(n, m) \in L(t_{i+1})$. Пусть

$$B(\varphi_n, V_m) = \left\{ \Pr(\varphi_n + \Delta \frac{ku}{V_m}, V_m + \Delta w) : u \in \{-1, 0, 1\}, w \in \{-\mu, \mu\} \right\}.$$

Здесь $\Pr(\varphi, V)$ – узел сетки $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$, ближайший к (φ, V) . При малом Δ множество $B(\varphi_n, V_m)$ приближает узлами сетки $\{\varphi_n\} \times \{V_m\}$ множество достижимости последних двух уравнений системы (4.1) из точки (φ_n, V_m) на момент $t_i = t_{i+1} - \Delta$ в силу постоянных управлений $u = -1, 0, 1$ и $w = -\mu, \mu$.

2. Символом $D_{n,m}(t_i)$ обозначим номера тех узлов с момента t_{i+1} , которые “перевелись” в узел (φ_n, V_m) , т.е.

$$D_{n,m}(t_i) = \{(n^*, m^*) \in L(t_{i+1}) : (\varphi_n, V_m) \in B(\varphi_{n^*}, V_{m^*})\}.$$

Пусть

$$K(t_i) = \{(n, m) : D_{n,m}(t_i) \neq \emptyset\}.$$

3. Каждому узлу (φ_n, V_m) , $(n, m) \in K(t_i)$, поставим в соответствие объединение

$$A_{n,m}(t_i, 0) = \bigcup_{(n^*, m^*) \in D_{n,m}(t_i)} (F_{n^*, m^*}(t_{i+1}) - \Delta V_{m^*}(\cos \varphi_{n^*}, \sin \varphi_{n^*})^T).$$

При малом Δ множество $A_{n,m}(t_i, 0)$ приближает сечение четырехмерного множества достижимости $G(t_i; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$ системы (4.1) при $\varphi = \varphi_n$ и $V = V_m$ (для случая $v = 0$). Поскольку каждое множество $F_{n^*, m^*}(t_{i+1})$ на плоскости x, y является выпуклым, то $A_{n,m}(t_i, 0)$ есть объединение выпуклых множеств на плоскости.

Строим выпуклую оболочку

$$S_{n,m}(t_i, 0) = \text{conv} A_{n,m}(t_i, 0). \quad (4.3)$$

Пусть

$$\mathbf{G}(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, 0)).$$

Множество $\mathbf{G}(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$ оценивает сверху (с учетом погрешностей дискретизации) множество достижимости $G(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), 0)$.

4. Отмеченные выше специфические свойства системы (4.1) позволяют легко построить аналогичное множество $\mathbf{G}(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$ для любого постоянного $v \in Q$. А именно,

$$\mathbf{G}(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v) = \bigcup_{(n, m) \in K(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times S_{n,m}(t_{i+1}, v)),$$

где

$$S_{n,m}(t_i, v) = S_{n,m}(t_{i+1}, 0) - \Delta v.$$

Б) *Построение множества $\mathbf{W}(t_i)$.*

5. Чтобы найти пересечение $\bigcap_{v \in Q} \mathbf{G}(t_i ; t_{i+1}, \mathbf{W}(t_{i+1}), v)$, достаточно построить для каждого $(n, m) \in K(t_i)$ пересечение

$$E_{n,m}(t_i) = \bigcap_{v \in Q} S_{n,m}(t_i, v).$$

Выполнение такой операции сводится к нахождению положительно-однородной функции

$$\gamma_{n,m}(\ell, t_i) = \min_{v \in Q} \rho(\ell, S_{n,m}(t_i, v)), \quad \ell \in R^2, \quad (4.4)$$

где $\rho(\cdot, S_{n,m}(t_i, v))$ – опорная функция множества $S_{n,m}(t_i, v)$, и последующему построению выпуклой оболочки $\text{conv} \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$. Тем самым получаем опорную функцию

$$\rho(\cdot, E_{n,m}(t_i)) = \text{conv} \gamma_{n,m}(\cdot, t_i)$$

множества $E_{n,m}(t_i)$. При реализации операции минимума в (4.4) перебираем лишь вершины многоугольника, аппроксимирующего множество Q .

6. Пусть

$$L(t_i) = \{(n, m) \in K(t_i) : (\varphi_n, V_m) \in H^\diamondsuit(t_i)\},$$

$$F_{n,m}(t_i) = E_{n,m}(t_i) \bigcap H^\#(t_i), \quad (n, m) \in L(t_i).$$

Учитывая (4.2) и принятый способ представления четырехмерных множеств, имеем

$$\mathbf{W}(t_i) = \bigcup_{(n, m) \in L(t_i)} (\{(\varphi_n, V_m)\} \times F_{n,m}(t_i)).$$

Подчеркнем, что именно за счет операции ов выпукления, присутствующей в формуле (4.3), получаем выпукłość множеств $F_{n,m}(t_i)$. Последнее главным образом и определяет простоту реализации попятной процедуры. Операция ов выпукления несколько расширяет выстраиваемую трубку множества разрешимости по сравнению с действительной.

Алгоритм, состоящий из шагов 1 – 6, во многом аналогичен тому, что был разработан [89, 93] для построения информационных множеств в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости. В работах [89, 93] приведено сравнение точных множеств достижимости системы (4.1) с множествами, полученными при помощи операции построения выпуклой оболочки объединения выпуклых множеств. Показано, что возникающие ошибки не являются существенными с практической точки зрения.

Замечание 4.1. Построение управления по принципу обратной связи, удерживающего движение самолета в условиях ветрового возмущения внутри множества разрешимости, является самостоятельной задачей и в данной работе не рассматривается.

4.4 Результаты моделирования

Для моделирования работы описанного алгоритма были выбраны следующие числовые данные:

- максимальное боковое ускорение самолета $k = 4 \text{ м/с}^2$;
- максимальное управляющее продольное ускорение $\mu = 2 \text{ м/с}^2$;
- ограничение на ветровое возмущение задавалось в виде $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq \nu$; значение параметра ν бралось из диапазона 16 м/с \div 22 м/с;
- начальный момент времени $t_0 = 0 \text{ с}$;
- общее время движения $T = 120 \text{ с}$;
- начальная позиция самолета: $x_0 = 0 \text{ м}$, $y_0 = 0 \text{ м}$, $\varphi_0 = 0^\circ$, $V_0 = 200 \text{ м/с}$;
- координаты опорной терминальной точки в момент T : $x_T = 15216 \text{ м}$, $y_T = 8543 \text{ м}$, $\varphi_T = 0^\circ$, $V_T = 200 \text{ м/с}$;
- опорная фазовая траектория между начальной позицией и опорной терминальной точкой строилась при помощи программных управлений (с “запасом” на неизвестные возмущения) $u = 0.8$, $w = -1.5 \text{ м/с}^2$ на интервале времени $[0, 60]$ с и $u = -0.8$, $w = 1.5 \text{ м/с}^2$ на интервале $[60, 120]$ с;

- терминальное множество M имело размер ± 300 м по координате x , ± 300 м по координате y , $\pm 20^\circ$ по углу φ и ± 20 м/с по скорости V ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной терминальной точки;
- моменты времени, для которых заданы фазовые ограничения: $\tilde{t}_1 = 20$, $\tilde{t}_2 = 40$, $\tilde{t}_3 = 60$, $\tilde{t}_4 = 80$, $\tilde{t}_5 = 100$ с;
- фазовые ограничения $H(\tilde{t}_j)$, $j = \overline{1, 5}$, имели размер ± 300 м по координате x , ± 300 м по координате y , $\pm 20^\circ$ по углу φ и ± 40 м/с по скорости V ; центры данных интервалов совмещены с соответствующими значениями параметров опорной траектории в заданные моменты времени;
- шаг Δ попятных построений — 1 с; размер сетки на плоскости φ , V — 720×64 ; множества на плоскости x , y представляются выпуклыми многоугольниками на равномерной фиксированной сетке нормалей (24 нормали).

Динамика изменения во времени множества $\mathbf{W}(t)$ для случая $\nu = 16$ м/с показана на рис. 4.2. А именно, серой заливкой изображены проекции $\mathbf{W}^\#(t)$ четырехмерных множеств $\mathbf{W}(t)$ на плоскость x, y . Видно, что при отходе в обратном времени от терминального множества размер проекции сечения увеличивается. После пересечения с фазовым ограничением сечение сокращается. Далее процесс протекает аналогично. В момент времени $t_0 = 0$ построенное сечение $\mathbf{W}(t_0)$ моста содержит начальную позицию самолета.

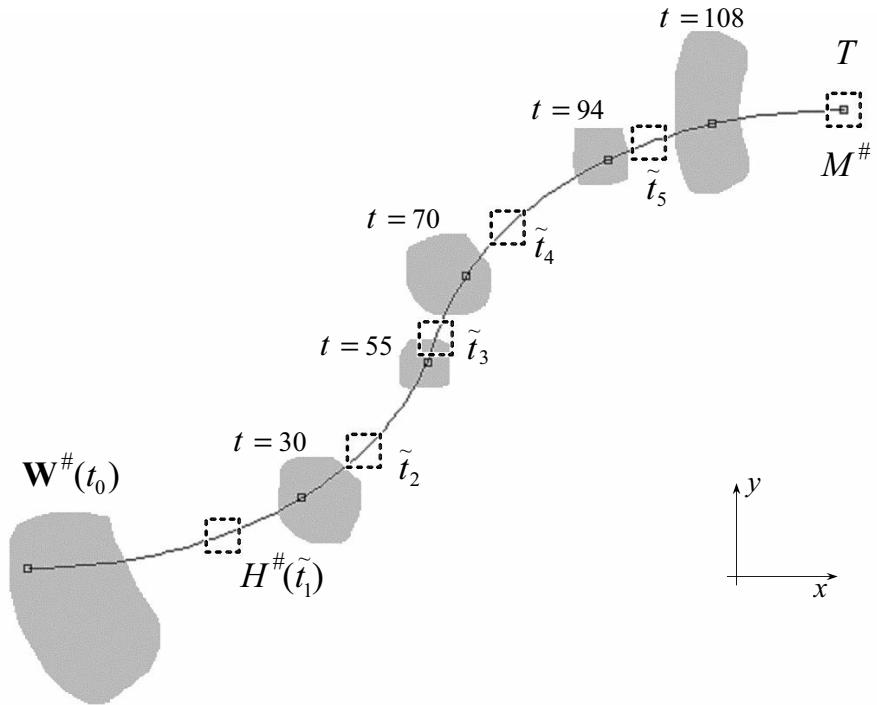


Рис. 4.2: Динамика изменения во времени множества $\mathbf{W}^\#(t)$.

Структура сечения $\mathbf{W}(t_0)$ (оценка сверху сечения $W(t_0)$ максимального стабильного моста W) в момент времени $t_0 = 0$ показана на рис. 4.3. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории в проекции на плоскость x, y , черным квадратиком обозначено положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом указано первое фазовое ограничение в момент \tilde{t}_1 . Слабой заливкой показана проекция $\mathbf{W}^\#(t_0)$ четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$ на плоскость геометрических координат x, y . Виден ее полный контур. Внутри этой проекции белой заливкой отмечена проекция трехмерного слоя, который соответствует узлу сетки $\{V_m\}$, максимально близкому к начальной скорости самолета $V_0 = 200$ м/с. Внутри проекции трехмерного слоя темной заливкой выделен двумерный слой, соответствующий узлу сетки $\{\varphi_n\}$, ближайшему к начальному значению угла $\varphi_0 = 0^\circ$.

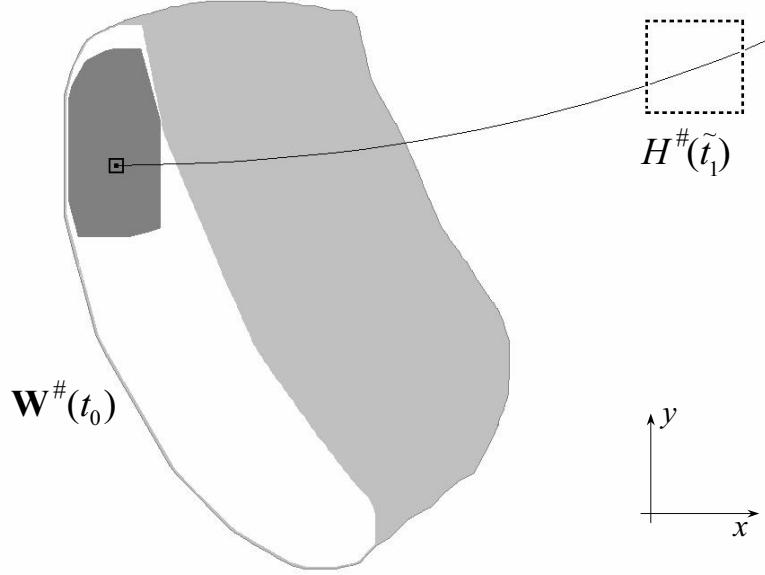


Рис. 4.3: Структура четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$ по слоям V и φ (в проекции на плоскость x, y), уровень ограничения на ветер $\nu = 16$ м/с.

На рис. 4.4 приведено трехмерное изображение четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$. Трехмерные слои, которые соответствуют пяти различным значениям узлов по скорости, отмечены заливкой разного цвета.

Влияние уровня ν максимального значения ветрового возмущения на размеры проекции $\mathbf{W}^\#(t_0)$ иллюстрируется на рис. 4.5. Здесь сплошной линией отмечена начальная часть опорной траектории, черным квадратиком – положение самолета в начальный момент, пунктирным квадратом – фазовое ограничение в контрольный момент \tilde{t}_1 .

На рис. 4.6 для тех же данных показана проекция $\mathbf{W}^\#(t_0)$ множества $\mathbf{W}(t_0)$ на плоскость φ, V .

Как было отмечено выше, начальная позиция самолета принадлежит множеству $\mathbf{W}(t_0)$ при ограничении $\nu = 16$ м/с (рис. 4.5а, 4.6а). Следовательно, пренебрегая различием между множествами $\mathbf{W}(t_0)$ и $W(t_0)$, заключаем, что задача перевода самолета на

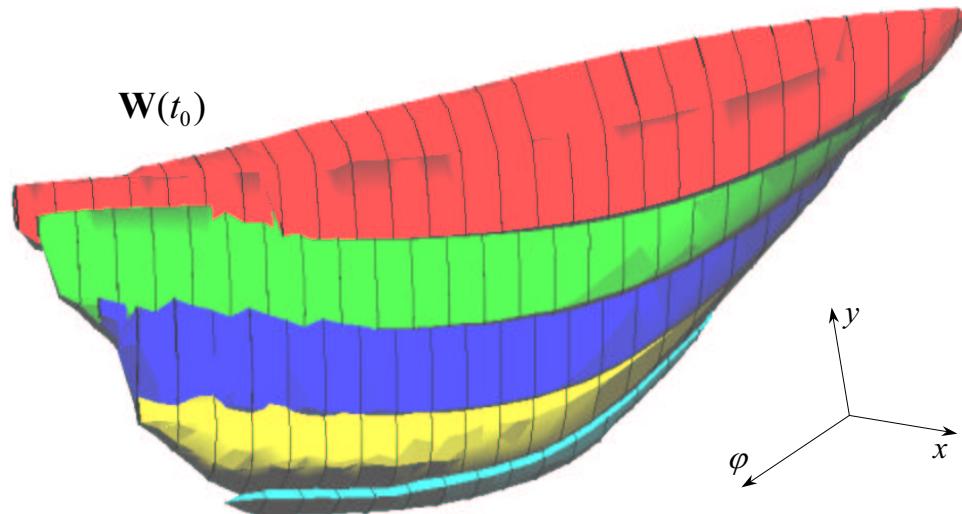


Рис. 4.4: Трехмерное изображение четырехмерного множества $\mathbf{W}(t_0)$, уровень ограничения на ветер $\nu = 16$ м/с.

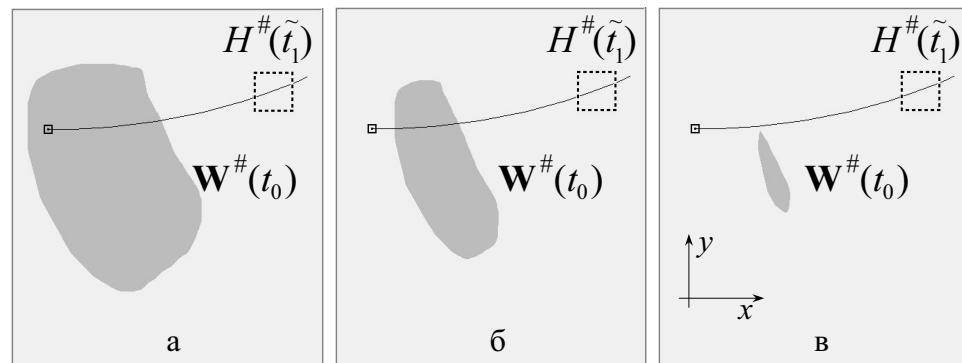


Рис. 4.5: Сравнение множеств $\mathbf{W}^\#(t_0)$ для различных ограничений на возмущение:
а) $\nu = 16$ м/с, б) $\nu = 20$ м/с, в) $\nu = 21$ м/с.

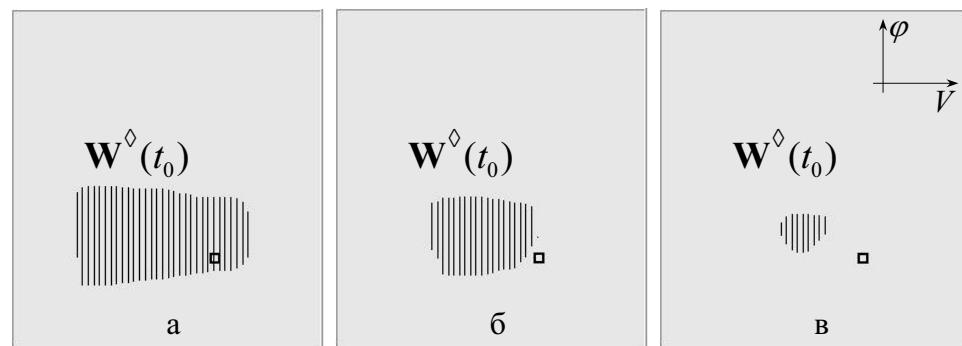


Рис. 4.6: Сравнение множеств $\mathbf{W}^\diamond(t_0)$ для различных ограничений на возмущение:
а) $\nu = 16$ м/с, б) $\nu = 20$ м/с, в) $\nu = 21$ м/с.

терминальное множество разрешима при таком ограничении на ветровое возмущение. При ограничении $\nu = 20$ м/с (рис. 4.5б, 4.6б) сечение моста не “дотягивается” до начальной позиции самолета. В этом случае перевод самолета на заданное терминальное множество не является гарантированным. При ограничении $\nu = 21$ м/с (рис. 4.5в, 4.6в) сечение $\mathbf{W}(t_0)$ моста еще более отстоит от начальной позиции самолета и, кроме того, начинает существенно сокращаться в размерах. При дальнейшем увеличении ограничения ν до 22 м/с множество $\mathbf{W}(t)$ становится пустым за 46 с до начального момента времени t_0 .

Размеры и структура множества $\mathbf{W}(t_0)$ существенно зависят также от моментов времени, в которые заданы фазовые ограничения, и от размеров этих ограничений.

Приложение

Апостериорное оценивание информационных множеств

Здесь представлены результаты моделирования трубы информационных множеств для ситуации апостериорного оценивания. В этом случае замеры геометрического положения самолёта вместе с ограничениями на их ошибку считаются заранее известными на оговоренном промежутке для некоторой совокупности моментов времени. Трубка информационных множеств выделяет на фиксированной сетке моментов времени, включающей моменты замеров, четырёхмерные множества фазовых состояний, совместных с динамикой системы (3.1) и заданными замерами. Используется рекуррентный алгоритм из третьей главы, который прогоняется несколько раз в прямом и обратном времени. Как и в третьей главе, речь идёт о построении аппроксимации сверху истинных информационных множеств. Строится также некоторое “эталонное” движение системы (3.1), проходящее в полученной трубке.

A.1 Общая схема

Предполагаем, что известен набор замеров геометрического положения самолёта на некотором промежутке времени. Оговорены точности замеров. Под множеством неопределённости $H(t_i)$ замера в момент t_i понимаем совокупность всех фазовых состояний в четырёхмерном пространстве (x, y, φ, V) , совместных с полученным замером и характеристиками его точности. Поскольку замеряется только геометрическое положение и характеристики точности не зависят от других фазовых координат, то множества неопределённости являются цилиндрическими по координатам φ, V и целиком задаются своей проекцией $H^\#$ на плоскость x, y .

Каждое множество $H^\#$ аппроксимируем сверху выпуклым многоугольником, который обозначаем $\mathbf{H}^\#$. Соответствующее цилиндрическое множество обозначаем \mathbf{H} и по-прежнему называем множеством неопределённости.

Итак, после обработки исходных данных о замерах и их точностях нам заданы совокупность моментов времени $t_0, \dots, t_i, \dots, t_N$ и соответствующая совокупность множеств $\mathbf{H}(t_i)$.

Представляем четырёхмерные информационные множества при помощи сетки на плоскости φ, V и выпуклых многоугольников $\mathbf{I}_{\varphi, V}$ на плоскости x, y . Каждому узлу со-

ответствует свой выпуклый многоугольник. Расчёт очередного информационного множества $\mathbf{I}(t_{i+1})$ осуществляется на основе прогноза множества $\mathbf{I}(t_i)$ на момент t_{i+1} в силу динамики движения самолёта (3.1), и пересечения полученного множества с множеством неопределённости замера в момент t_{i+1} . Полученные таким образом множества аппроксимируют истинные информационные множества сверху.

Передвигаясь от начального момента к конечному, получаем набор информационных множеств $\mathbf{I}(t_i)$. Каждое множество $\mathbf{I}(t_i)$ учитывает информацию о множествах неопределённости на промежутке $[t_0, t_i]$, но не учитывает информацию о множествах неопределённости на промежутке $[t_{i+1}, t_N]$. В ситуации, когда информационные множества строятся апостериорно, т.е. после получения всей совокупности замеров, есть возможность учесть такую информацию. Для этого делаем обратный прогон. Берём множество $\mathbf{I}(t_N)$ в качестве начального и, используя систему (3.1) в обратном времени, пересчитываем информационные множества, пяясь от момента t_N к моменту t_0 . При этом вместо множеств неопределённости $\mathbf{H}(t_i)$, ($i = 0, \dots, N - 1$) используем множества $\mathbf{I}(t_i)$, ($i = 0, \dots, N - 1$), насчитанные при прямом прогоне.

Учитывая, что построение информационных множеств осуществляется с оценкой сверху, имеет смысл выполнить повторные прогоны (вперёд-назад) несколько раз. При выполнении очередного прогона вместо множеств неопределённости используем информационные множества с предыдущего прогона. Для каждого момента времени t_i очередной прогон уменьшает размер получаемого информационного множества. Число прогонов целесообразно проводить до стабилизации размеров получаемых множеств.

При численной реализации описанной схемы построения информационных множеств используются не только моменты замеров, но и некоторые промежуточные моменты времени. Последние подбираются так, чтобы возникающая сетка по времени была достаточно частой. Это следует делать, поскольку при пересчёте информационных множеств на один шаг управления считаются постоянными.

A.2 Построение эталонной траектории

Через построенные информационные множества можно провести целый пучок траекторий, удовлетворяющих системе (3.1). В качестве *первичной* эталонной траектории возьмём некоторую “среднюю” траекторию. А именно, на очередном промежутке времени, определяемом двумя соседними моментами, для которых построены информационные множества, перебираем на некоторой сетке постоянные управлений u, w . Для каждой пары управлений с хорошим интегрированием находим положения системы (3.1) на плоскости φ, V и на плоскости x, y . На плоскости φ, V определяем ближайший из узлов, для которого сечение информационного множества в плоскости x, y непусто. Оцениваем положение системы на плоскости x, y по отношению к найденному сечению. При этом учитываем размер рассматриваемого сечения (желательно, чтобы он был как можно больше). Среди перебираемых пар управлений u, w выбираем ту, для которой рассматриваемая оценка является наилучшей. Учитываем также прогноз положения системы

на шаг вперёд по времени. В качестве начальной точки для эталонной траектории выбирается некоторая точка из начального информационного множества.

Получаемая по разработанному алгоритму траектория, как правило, идёт внутри информационных множеств, но в некоторые моменты может отклоняться от них (введён штраф за выход из информационных множеств). Отклонение возможно потому, что мы работаем не с точными информационными множествами, а с их некоторой оценкой сверху (хотя, с практической точки зрения, и очень хорошей).

Первичная эталонная траектория может иметь частые переключения по управлению u, w . Дальнейшая обработка связана с желанием подправить эту траекторию так, чтобы новая траектория проходила через информационные множества, и реализации управлений представляли собой кусочно-постоянные функции с небольшим числом переключений.

Построение *скорректированной* эталонной траектории выполняется в два этапа.

1) Первичная траектория корректируется путём варьирования управлений u, w (учитывая ограничения, наложенные на них) с соблюдением условия прохождения вновь получаемой траектории через информационные множества, а также с оптимизацией близости траектории на плоскости x, y в соответствующие моменты времени к центрам Штейнера овальных проекций информационных множеств на плоскость x, y . Направление варьирования управляющего воздействия выбирается в сторону интервала, один край которого получен усреднением заданного числа управляющих воздействий слева от рассматриваемого момента, а второй – усреднением заданного числа управляющих воздействий справа. Если исходное управление уже находится внутри этого интервала, то варьирование производится в обе стороны.

2) Полученная после первого этапа траектория в моменты замеров проходит через построенные информационные множества. В отделе динамических систем Института математики и механики к.т.н. С.И.Кумковым разработана специальная процедура оптимизации, в результате работы которой построенная траектория разбивается на некоторые участки с концами в моменты замеров. При этом на каждом участке ищется кусочно-постоянное управление u , имеющее не более одного переключения, и кусочно-постоянное управление w также с не более, чем одним переключением. На концах каждого участка фазовое положение новой траектории совпадает с фазовым положением траектории, полученной на первом этапе. Контролируется прохождение траектории через множества неопределённости замеров для промежуточных моментов времени.

A.3 Результаты моделирования

Пример 1. Первый пример является модельным. Исходные данные для него подготовлены С.И.Кумковым по согласованию с руководителем математической группы корпорации “Новые информационные технологии в авиации” (г. С-Петербург) А.В.Беляковым.

Предполагается, что движение самолёта описывается системой (3.1). При этом

$$k = 3 \text{ м/c}^2, \quad |u| \leq 1, \quad \mu_1 \leq w \leq \mu_2, \quad \mu_1 = -2 \text{ м/c}^2, \quad \mu_2 = 3 \text{ м/c}^2.$$

Допустимый диапазон изменения скорости составляет [30 м/с; 330 м/с].

Исходная модельная траектория показана красной линией на рис. A.1. Траектория состоит из десяти характерных участков: пять поворотов и пять прямолинейных участков. На каждом участке управляющие воздействия постоянны:

- 1) $u = 0, w = 1;$
- 2) $u = 2/3, w = 0.25;$
- 3) $u = 0, w = 0.2;$
- 4) $u = 2.5/3, w = 0;$
- 5) $u = 0, w = 0;$
- 6) $u = -2.5/3, w = -0.3;$
- 7) $u = 0, w = -0.2;$
- 8) $u = -2/3, w = 0;$
- 9) $u = 2/3, w = 0;$
- 10) $u = 0, w = 0.$

Участки 8 и 9 моделируют типичный S-образный манёвр самолёта. Общая протяженность во времени составляет $2511.3 \text{ с} \approx 42 \text{ мин}$. Радиолокатор находится в точке с координатами $x = 0, y = 0$. Число замеров положения самолёта – 130. Длительность интервала между замерами от 10 до 30 с. Моменты замеров с учётом этого ограничения выбирались случайным образом. Положение самолёта на траектории в моменты замеров отмечено кружочками. Сами замеры показаны квадратиками. Максимально допустимая ошибка радиолокатора по углу $\pm 1.5^\circ$, по дальности $\pm 500 \text{ м}$. Замеры положения формировались при помощи датчика случайных чисел. Точные множества неопределённости (в проекции на плоскость x, y) оценивались сверху выпуклыми многоугольниками. При этом применена равномерная сетка из 36 нормалей. Размеры множеств неопределённости зависят от расстояния до радиолокатора.

При построении информационных множеств помимо моментов замеров добавлялись промежуточные моменты времени, чтобы шаг построения информационных множеств по времени не превышал 5 с. Использовалась рекуррентная процедура, описанная в третьей главе, с тем отличием, что на каждом шаге постоянные управляющие воздействия брались на некоторой достаточно густой сетке. Движение системы (3.1) интегрировалось по методу Эйлера с шагом 0.5 с.

Итоговые информационные множества были получены путём четырёхкратного прохождения (вперёд-назад-вперёд-назад) процедуры третьей главы.

На рис. A.2 представлен фрагмент, охватывающий второй поворот. Серой заливкой показаны овально-выпукленные проекции четырёхмерных информационных множеств на плоскость x, y для моментов замеров. Видно, что для многих моментов проекция информационного множества существенно меньше множества неопределённости. Красная линия – исходная траектория. Эталонная траектория, получающаяся в результате первого этапа коррекции, отмечена зелёными треугольниками для моментов построения информационных множеств. Отличие траекторий после первого и после второго этапов коррекции несущественно.

На рис. A.3 для трёх моментов времени $t_1 = 488, t_2 = 813, t_3 = 1225.9 \text{ с}$ (до второго поворота, середина поворота, после поворота; см. рис. A.2) даны проекции информационных множеств на плоскость φ, V .

Реализации управления u по боковому каналу в результате первого и второго этапов коррекции показаны на рис. A.4, реализации управления w по продольному каналу – на рис. A.5. Красная линия на этих рисунках изображает соответствующие управления на исходной траектории.

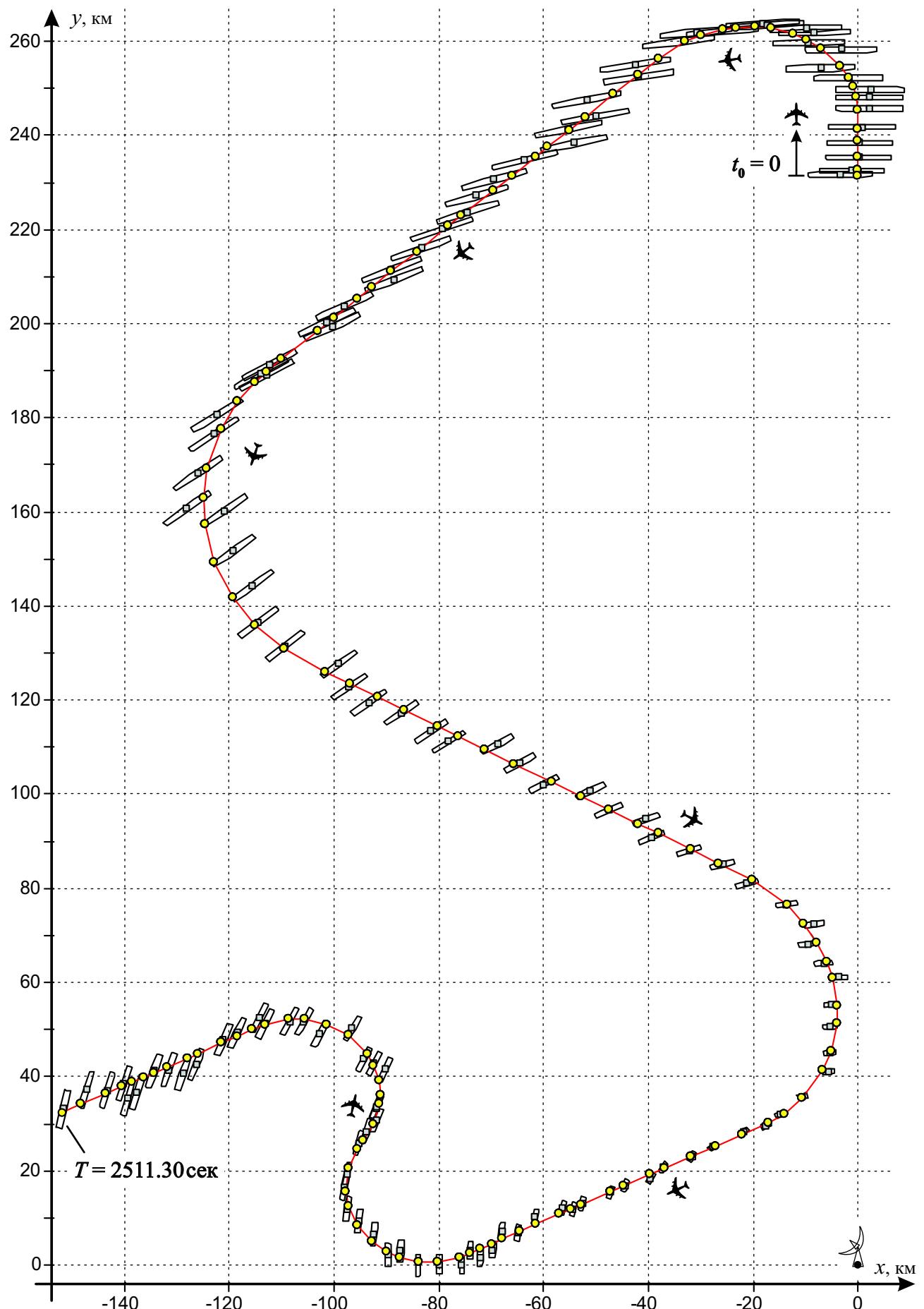


Рис. А.1: Модельный пример. Сплошная линия – истинная траектория. Радиолокатор: $x = 0$, $y = 0$. Замеры показаны квадратиками. Ошибка по углу $\pm 1.5^\circ$, по дальности $\pm 500 \text{ м}$. Множества неопределённости – многоугольники.

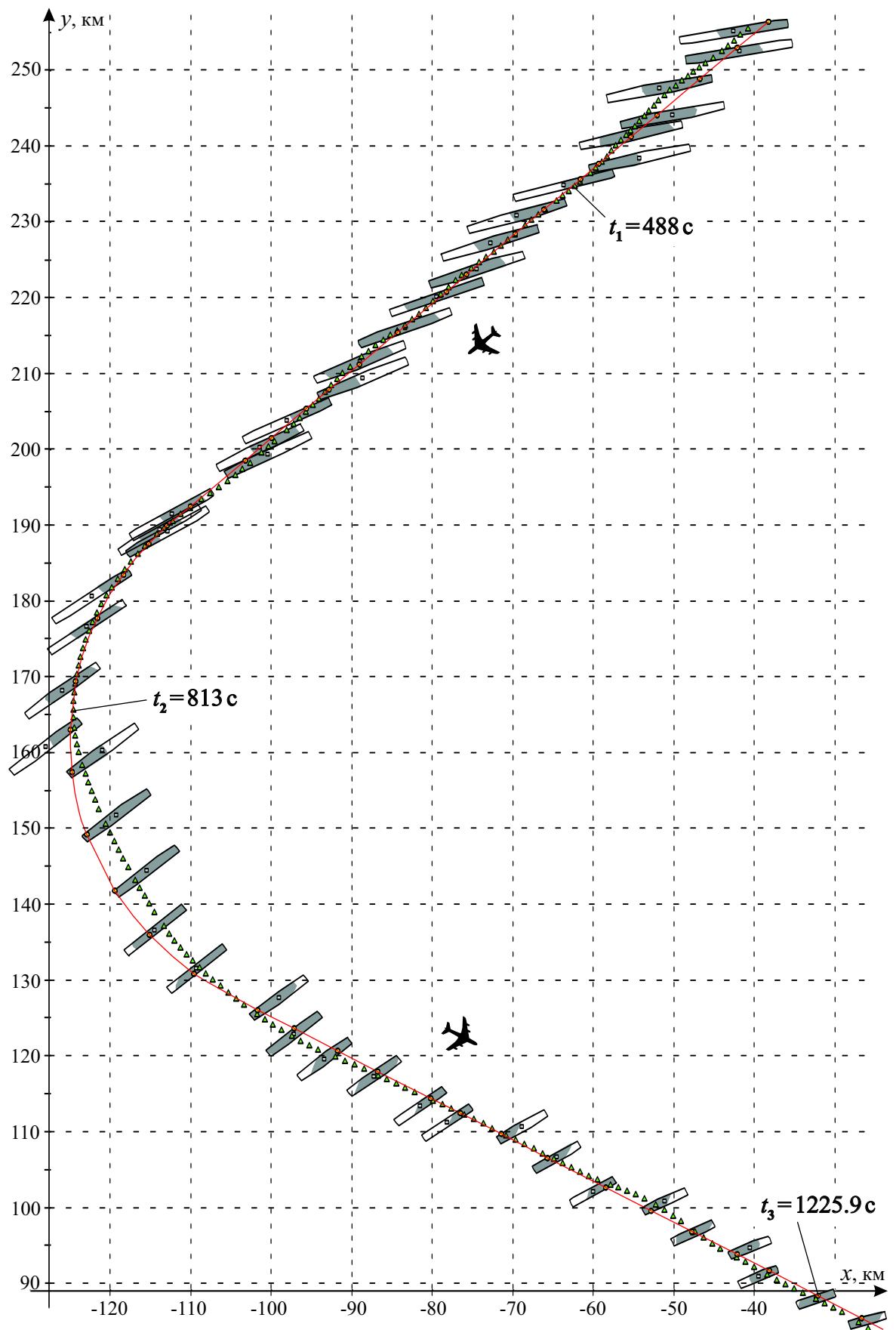


Рис. А.2: Фрагмент модельного примера. Сплошная линия – истинная траектория. Замеры показаны квадратиками. Множества неопределённости – многоугольники. Серой заливкой отмечены информационные множества в моменты замеров (проекция на плоскость x, y). Эталонная траектория отмечена треугольниками.

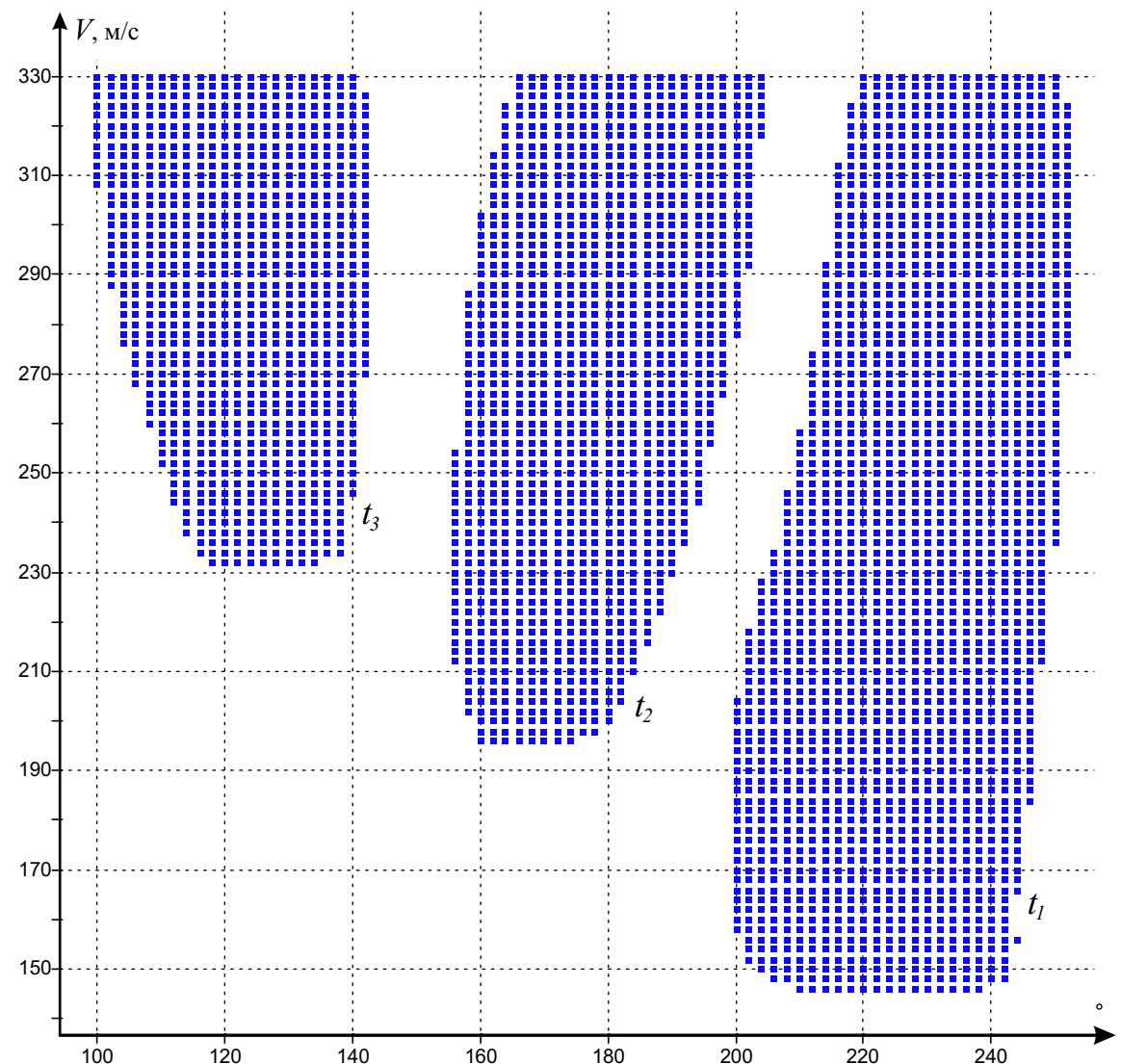


Рис. A.3: Модельный пример, область второго поворота. Информационные множества в проекции на плоскость φ, V для моментов времени $t_1 = 488 \text{ с}, t_2 = 813 \text{ с}, t_3 = 1225.9 \text{ с}$.

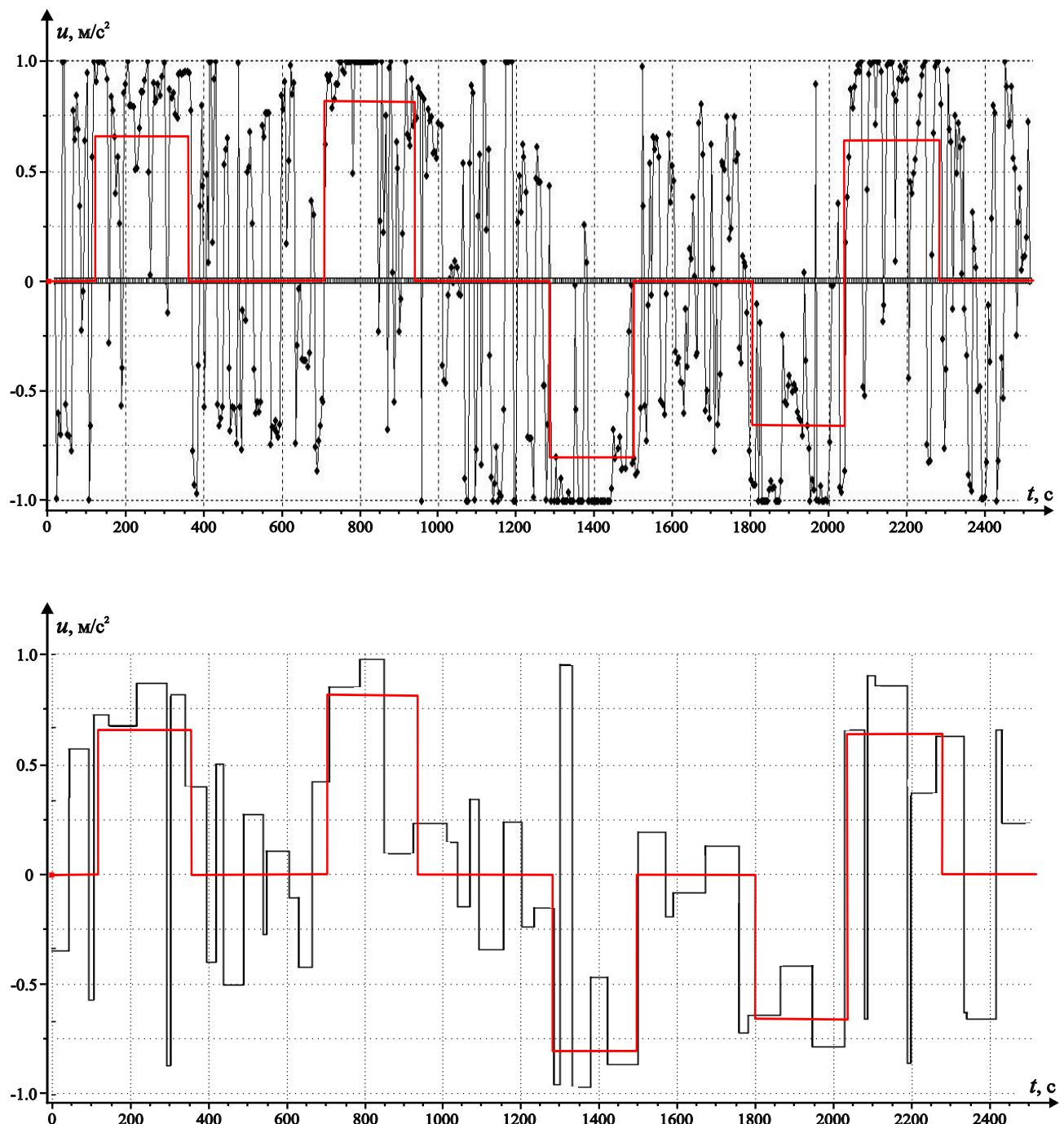


Рис. А.4: Модельный пример. Управление по боковому каналу на эталонной траектории после первого и после второго этапов коррекции. Сплошная красная линия – управление на исходной истинной траектории.

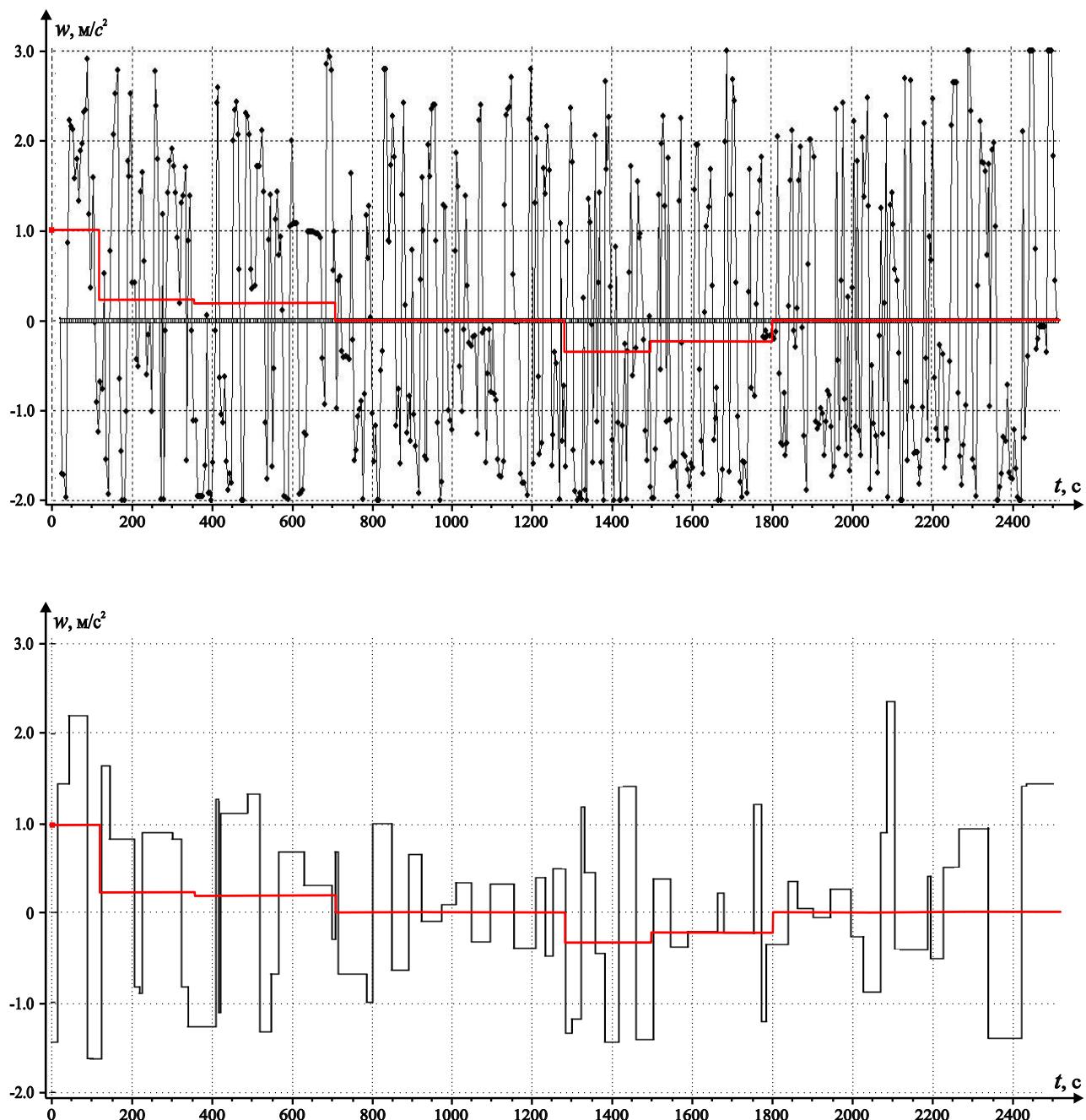


Рис. A.5: Модельный пример. Управление по продольному каналу на эталонной траектории после первого и после второго этапов коррекции. Сплошная красная линия – управление на исходной истинной траектории.

Пример 2. Второй пример базируется на реальных исходных данных наблюдения за движением самолёта, предоставленных А.В.Беляковым. Промежуток наблюдения составляет $2872.14\text{ с} \approx 48\text{ мин}$. Истинная траектория неизвестна. Наблюданная траектория самолёта (рис. А.6) имеет “прямолинейный” участок, крутой разворот на 180° с возвратом на первоначальный прямолинейный участок, длительное “прямолинейное” движение, крутой поворот влево и движение по “прямой”. Замеры геометрического положения самолёта осуществлялись при помощи радиолокатора, расположенного в точке $x = 0, y = 0$. Ошибка замера радиолокатора по углу лежит в интервале $[-1.5^\circ, 1.5^\circ]$, по дальности – в интервале $[-500\text{м}; 500\text{м}]$. Множества неопределённости на плоскости x, y просчитывались по замерам положения самолёта (показаны квадратиками) и аппроксимировались сверху выпуклыми многоугольниками. Расчёт множеств неопределённости произведён С.И.Кумковым. Увеличенный фрагмент разворота на 180° показан в нижней части рис. А.6.

Итоговые информационные множества были получены, как и в первом примере, путём четырёхкратного прогона рекуррентной процедуры третьей главы.

На рис. А.7 представлена эталонная траектория после первого этапа коррекции для двух фрагментов с поворотами.

Реализации управления u после первого и второго этапов коррекции показаны на рис. А.8, реализации управления w – на рис. А.9. Траектории после первого и после второго этапов коррекции практически совпадают.

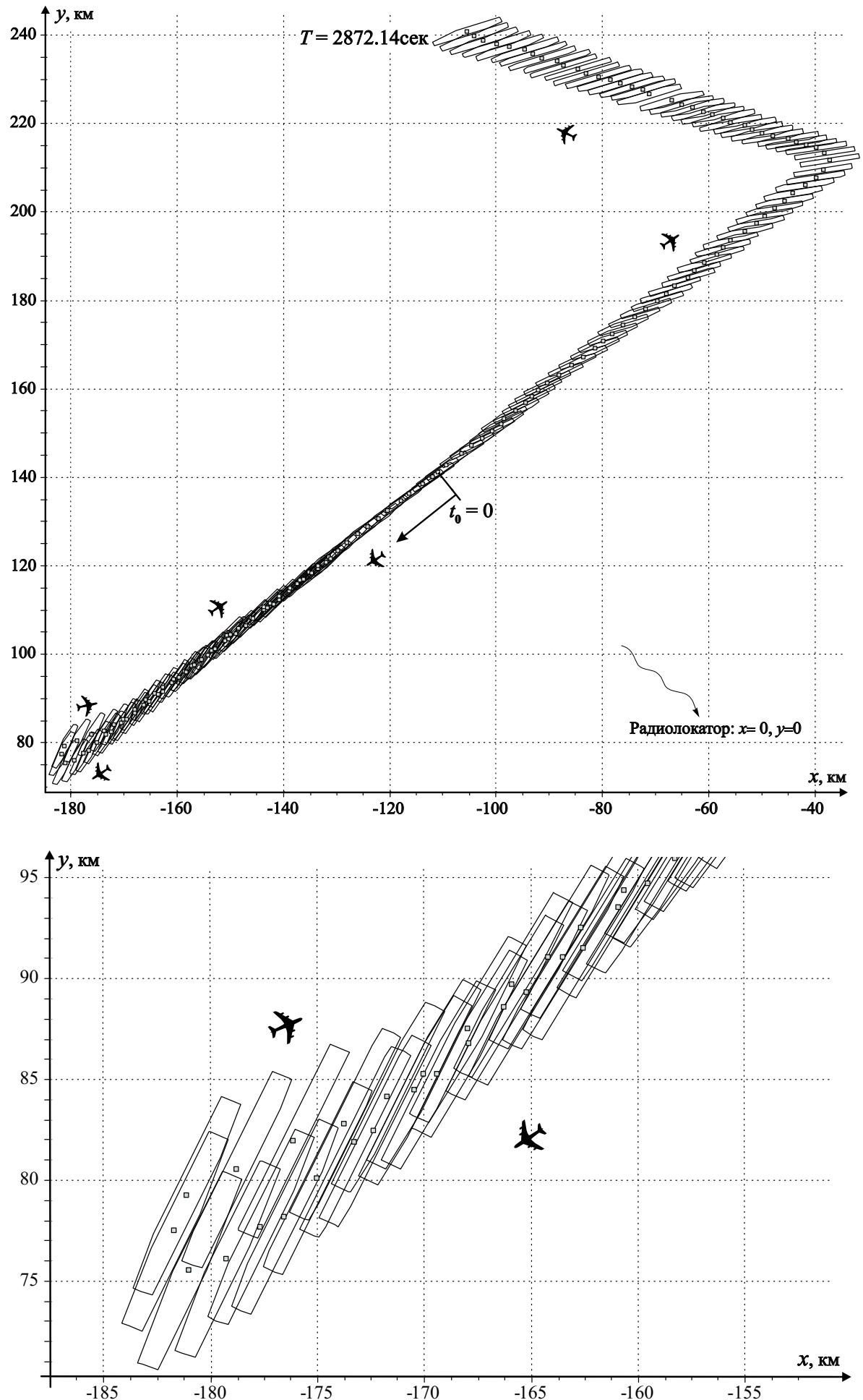


Рис. А.6: Пример с реальными исходными данными. Замеры показаны квадратиками. Множества неопределённости – многоугольники. Внизу – фрагмент разворота.

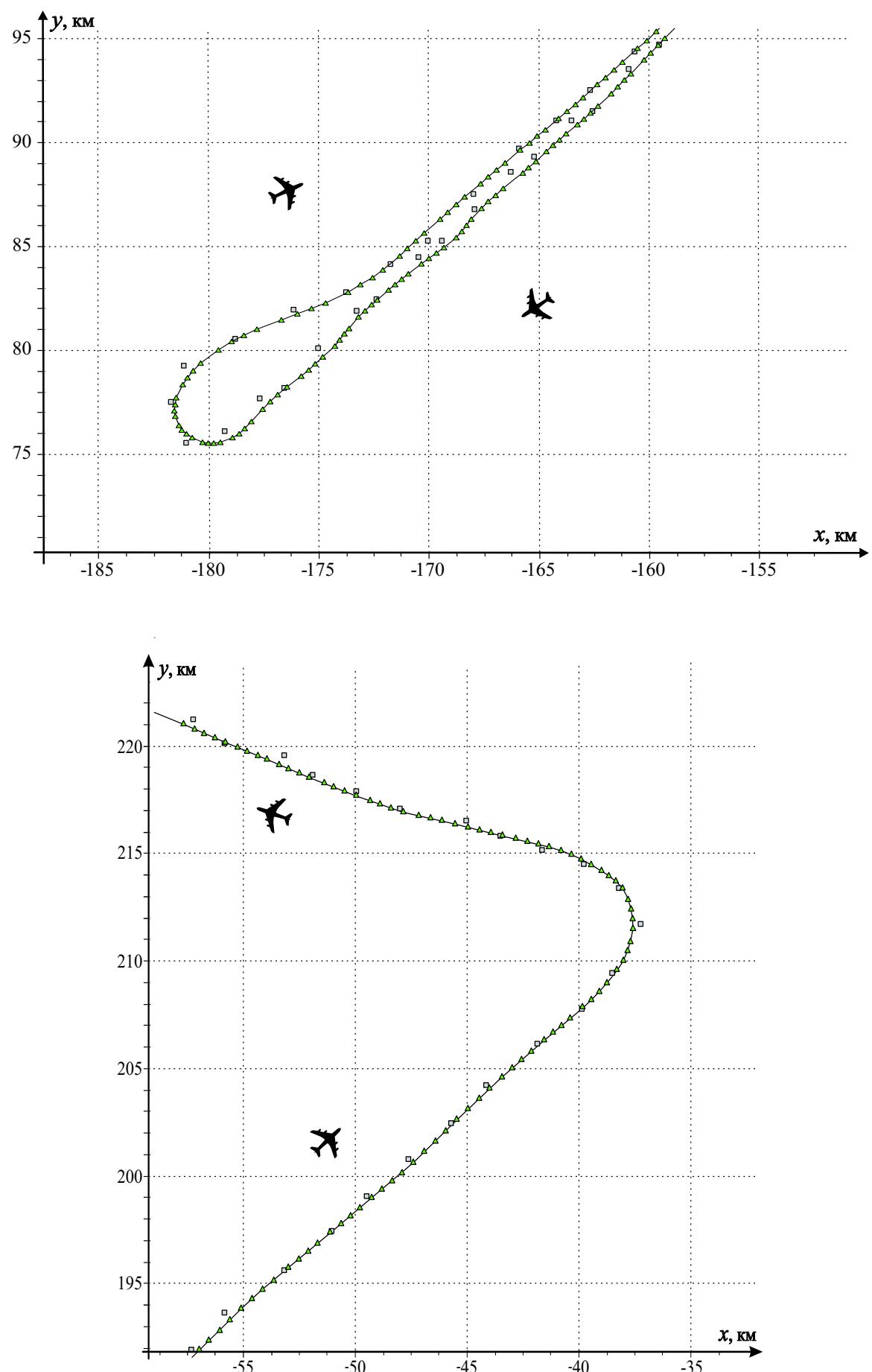


Рис. A.7: Пример с реальными исходными данными. Эталонная траектория (отмечена треугольниками) на двух фрагментах движения с поворотом. Замеры показаны квадратиками.

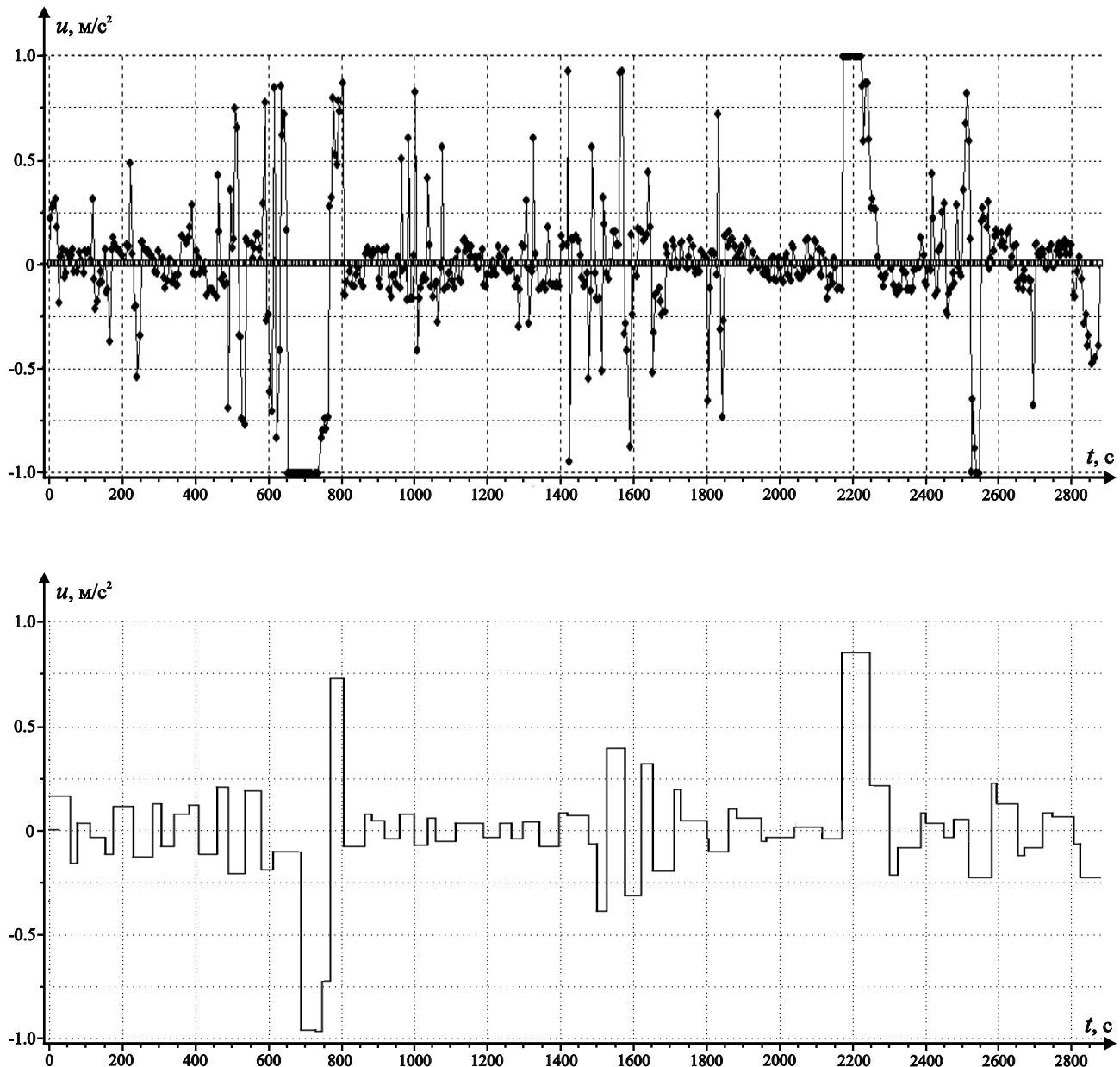


Рис. A.8: Пример с реальными исходными данными. Управление по боковому каналу на эталонной траектории до и после коррекции.

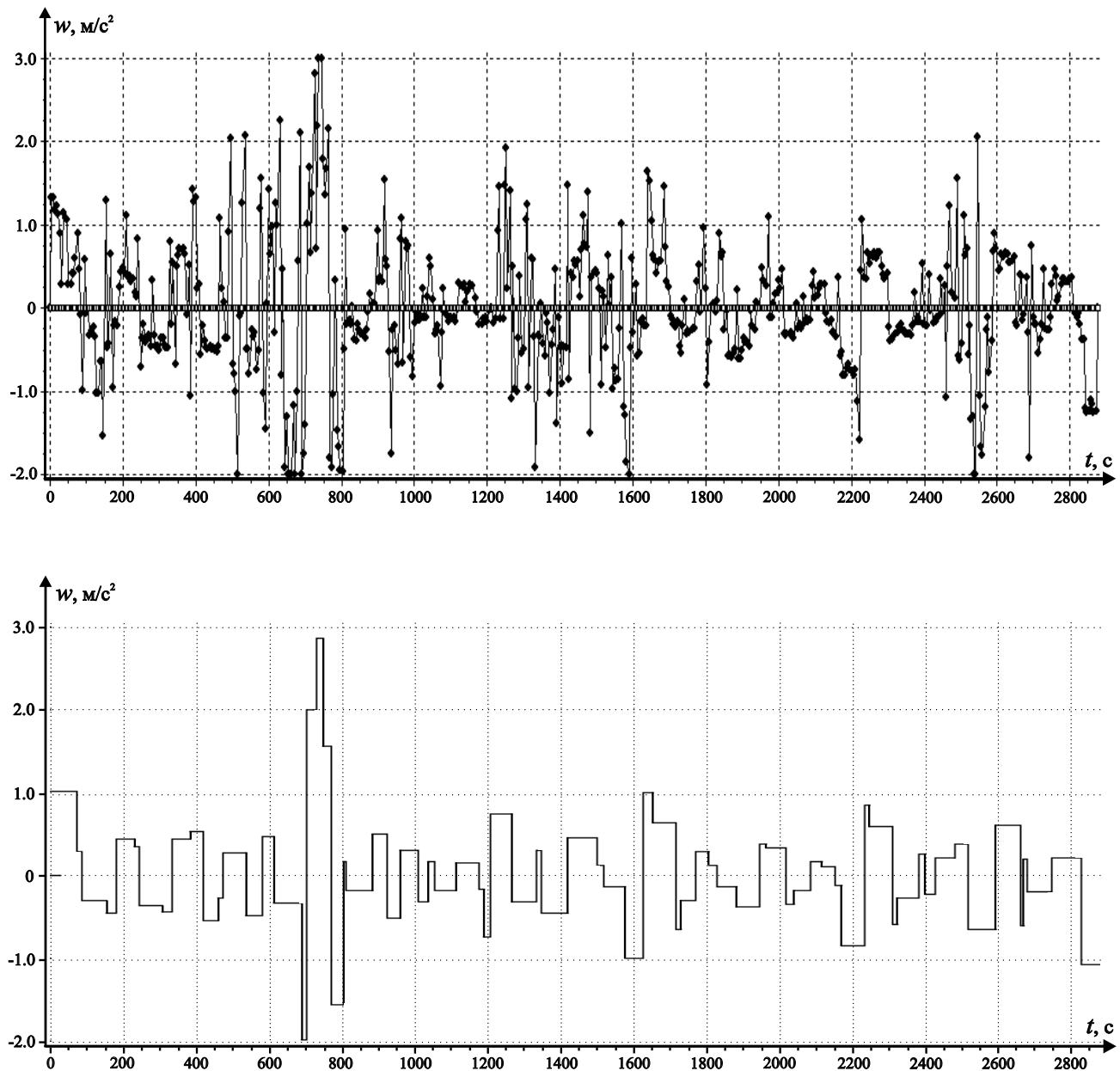


Рис. A.9: Пример с реальными исходными данными. Управление по продольному каналу на эталонной траектории до и после коррекции.

Литература

- [1] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- [2] Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под ред. А.И.Субботина, В.С.Пацко. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984.
- [3] Ананьев Б.И., Куржсанский А.Б., Шелементьев Г.С. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения // Прикладная математика и механика, Т. 40, Вып. 1, 1976, С. 3–13.
- [4] Анодина Т.Г., Мокшанов В.И. Моделирование процессов в системе управления воздушным движением. М.: Радио и связь, 1993.
- [5] Антонов М.О., Ширяев В.И., Афанасьев К.Е., Коблов А.И. Точность управления летательным аппаратом в условиях неопределенности на этапе захода на посадку // Авиакосмическое приборостроение, 2004, N. 7, С. 64–69.
- [6] Батухтин В.Д. Об одной игровой задаче наведения с неполной информацией // Прикладная математика и механика, Т. 44, Вып. 4, 1980, С. 595–601.
- [7] Бердышиев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // Прикладная математика и механика, Т. 39, Вып. 6, 1975, С. 985–994.
- [8] Бердышиев Ю.И. Об одной задаче построения области достижимости для нелинейной системы третьего порядка // Сборник научных трудов “Методы построения множеств достижимости и конструкции расширений”. Екатеринбург: Издательство УГТУ-УПИ, 2004, С. 6–12.
- [9] Болычевцев Э.М. Одна задача оптимального управления // Вестник МГУ. Серия Математика, Механика. 1968, №1, С.91–98.
- [10] Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунова Н.В., Силин Д.Б., Тринько Н.Г. Методы решения дифференциальных игр // Математическое моделирование, 1993, С. 296–316.
- [11] Гусев М.И. Об устойчивости информационных множеств в задаче гарантированного оценивания // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000, Т. 6, N 1, С. 55–72.

- [12] Емельянов Д.Д. Оптимальное импульсное управление информационным множеством в задаче наведения по неполным данным // Автоматика и телемеханика, № 1, 1998, С. 35–43.
- [13] Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. Ред. Субботин А.И., Пацко В.С. Свердловск. 1984, С. 127–158.
- [14] Кац И.Я, Куржанский А.Б. Минимаксное оценивание в многошаговых системах // Доклады АН СССР, 1975, Т. 221, № 3, С. 535–538.
- [15] Костоусова Е.К. О полиэдральном оценивании областей достижимости линейных многошаговых систем // Автоматика и телемеханика. 1997, № 3, С. 57–68.
- [16] Костоусова Е.К. Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Сборник научных трудов. Екатеринбург: УрО РАН. 1999, Вып. 3, С. 107–126.
- [17] Кощеев А.С., Куржанский А.Б. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределённости // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983, № 2, С. 72–93.
- [18] Красовский Н.Н. Игровая задача о коррекции движения // Прикладная математика и механика, 1969, Т. 33, Вып. 3, С. 386–396.
- [19] Красовский Н.Н. Игровые задачи динамики. II // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1970, №. 1, С. 3–13.
- [20] Красовский Н.Н. Об управлении при неполной информации // Прикладная математика и механика, 1976, Т. 40, Вып. 2, С. 197–206.
- [21] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
- [22] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. Задача управления с неполной информацией // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела, 1973, №. 4, С. 5–14.
- [23] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
- [24] Крекнин А.А. Дифференциальная игра преследования с неполной информацией // Дифференциальные игры и задачи управления. Сборник статей УНЦ АН СССР. Свердловск: 1975, С. 113–124.
- [25] Кряжимский А.В. Дифференциальная игра сближения в условиях неполной информации о системе // Украинский математический журнал. 1975, Т. 27, №. 4, С. 521–526.

- [26] Кряжимский А.В., Филиппов С.Д. Об одной игровой задаче сближения двух точек на плоскости в условиях неполной информации // Задачи управления с неполной информацией. Свердловск, 1976, С. 62–77.
- [27] Кумков С.И., Пацко В.С. Информационные множества в задаче импульсного управления // Автоматика и телемеханика, № 7, 1997, С. 195–207.
- [28] Кунцевич В.М. Оптимальное управление дискретными динамическими объектами с неизвестными нестационарными параметрами // Автоматика и телемеханика, 1980, N 2, С. 79–88.
- [29] Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход. Киев: Наукова думка, 1985.
- [30] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
- [31] Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф. Об описании множества выживающих траекторий управляемой системы // Дифференциальные уравнения. 1987, Т. 23, N 8, С. 1303–1315.
- [32] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
- [33] Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
- [34] Меликян А.А., Черноусъко Ф.Л. Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // Прикладная математика и механика, 1971, Т. 35, Вып. 6, С. 952–961.
- [35] Миеле А. Механика полёта. Т. 1. М.: Наука, 1965.
- [36] Никольский М.С. Об альтернированном интеграле Л.С. Понtryгина // Математический сборник, 1981, Т. 116, N 1, С. 136–144.
- [37] Куржанский А.Б., Никонов О.И. Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН. 1993, Т. 333, N. 5, С. 578–581.
- [38] Пак В.Е. Задача наведения с неполной информацией // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1976, N. 4, С. 29–36.
- [39] Пахотинских В.Ю., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конструирование стабильных мостов в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика, 2003, Т. 67, Вып. 5, С. 771–783.
- [40] Пацко В.С. Модельный пример игровой задачи преследования с неполной информацией. I, II // Дифференциальные уравнения, 1971, Т. 7, N. 3 С. 424–435.; 1972, Т. 8, N. 8 С. 1423–1434.

- [41] Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В. Алгоритмы численного решения линейных дифференциальных игр // Математический сборник, 2001, Т. 192, № 10, С. 95–122.
- [42] Понtryагин Л.С. О линейных дифференциальных играх. II // Доклады АН СССР, 1967, Т. 175, № 4, С. 764–766.
- [43] Понtryагин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
- [44] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989.
- [45] Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. Дифференциальные игры с фиксированным временем // Кибернетика, 1971, Т. 6, № 1, С. 72–80.
- [46] Пшеничный Б.Н., Покотило В.Г. Минимаксный подход к оценке параметров линейной регрессии // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1983, № 2, С. 77–85.
- [47] Розенберг Г.С. Построение траекторий оптимального преследования // Автоматика и телемеханика. 1965, № 4.
- [48] Рузаков В.Я. Программное наблюдение по нелинейному сигналу, измеряемому с ошибкой // Задачи управления с неполной информацией. Свердловск, 1976, С. 109–121.
- [49] Субботина Н.Н., Субботин А.И. Игровая задача управления при неполной информации // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 5, С. 14–23.
- [50] Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П. Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикладная математика и механика, 1987, Т. 51, Вып. 2, С. 216–222.
- [51] Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1980, № 4, С. 29–36.
- [52] Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В. Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Труды второго международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства, Вена, Австрия, сентябрь 1967. Управление космическими аппаратами и кораблями / Под ред. Б.Н.Петрова, И.С.Уколова. М.: Наука, 1971.
- [53] Черноусъко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
- [54] Черноусъко Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978.

- [55] Шелементьев Г.С. Об одной задаче коррекции движения // Прикладная математика и механика, 1969, Т. 33, Вып. 2, С. 251–260.
- [56] Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // Известия РАН. Техническая кибернетика, 1994, N. 3, С. 229–237.
- [57] Шориков А.Ф. Одна нелинейная задача наблюдения // Задачи управления с неполной информацией. Свердловск, 1976, С. 129–138.
- [58] Alamo T., Bravo J.M., Camacho E.F. Guaranteed state estimation by zonotopes // Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, 2003, pp. 5831–5836.
- [59] Bardi M., Dolcetta I.C. Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [60] Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via politopes // IEEE Trans. on Automatic Control. 1979, Vol. AC-24, No 2, pp. 346–349.
- [61] Bertsekas D.P., Rhodes I.B. Recursive state estimation for a set-membership description of uncertainty // Automatica, 1971, Vol. 16, No. 2, pp. 117–128.
- [62] Bertsekas D.P., Rhodes I.B. Sufficiently informative functions and the minimax feedback control of uncertain dynamic systems // Automatica, 1973, Vol. 18, No. 2, pp. 117–124.
- [63] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games // Annals of the International Society of Dynamic Games, Vol. 4 / M. Bardi, T.E. Raghavan, T. Parthasarathy, eds., 1999, pp. 177–247.
- [64] Chisci L., Garulli A., Vicino A., Zappa G. Block recursive parallelotopic bounding in set membership identification // Automatica, 1998, Vol. 34, No. 1, pp. 15–22.
- [65] Chisci L., Garulli A., Zappa G. Recursive state bounding by parallelotops // Automatica, 1996, Vol. 32, No. 7, pp. 1049–1055.
- [66] Cockayne E.J., Hall G.W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control, 1975, Vol. 13, No. 1, pp. 197–220.
- [67] Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. // Amer. J. Math., 1957, Vol. 79, pp. 497–516.
- [68] Emeliyanov D., Rubinovich E. The multiple hypothesis extension of the information set-based tracking algorithm for multi-target environment // Proc. of the 16-th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, St.-Petersburg, Russia, 2004, Vol. 2, pp. 62–67.

- [69] Emeliyanov D., Rubinovich E., Miller B. Advanced guidance law design based on the information-set concept // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, 2001, pp. 652–657.
- [70] Emeliyanov D., Rubinovich E., Miller B. Information set-based guidance algorithm against a decelerating maneuvering target // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. Vol 41, No. 1, January 2005.
- [71] Erzberger H., Lee H.Q. Optimum Horizontal Guidance Techniques for Aircraft // J. Aircraft. Vol. 8, No. 2, 1971.
- [72] Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied interval analysis with examples in parameter and state estimation, Robust Control and Robotics. London: Springer-Verlag, 2001.
- [73] Jaulin L., Walter E., Leveque O., Meizel D. Set inversion for χ -algorithms, with application to guaranteed robot localization // Mathematics and Computers in Simulation Vol. 52, Issues 3–4, 2000, pp. 197–210.
- [74] Krasovskii N.N. Game-theoretical control under incomplete phase-state information // Problems of Control and Information Theory. 1976, Vol. 5, pp. 291–302.
- [75] Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer-Verlag, 1988.
- [76] Kumkov S.I., Patsko V.S. Informational sets in a model problem of homing // Journal of optimization theory and applications, 2001, Vol. 108, No. 3, pp. 499–526.
- [77] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
- [78] Laumond J.-P. (editor). Robot Motion Planning and Control / Lecture notes in control and information sciences; 229. London: Springer-Verlag, 1998.
- [79] Marco M. Set-membership estimation techniques for mobile robotics applications. Ph.D. Thesis, Firenze, 2001.
- [80] Marco M., Garulli A., Giannitrapani A., Vicino A. Set membership pose estimation of mobile robots based on angle measurements // Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida USA, 2001, pp. 3734–3739.
- [81] Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E. (editors). Bounding Approaches to System Identification. London: Plenum Press, 1996.
- [82] Milanese M., Vicino A. Optimal estimation theory for dynamic systems with set membership uncertainty // Automatica, 1991, Vol. 27, No. 6, pp. 997–1009.

- [83] *Parlos A.G., Henry A.F., Scheweppe F.C., Gould L.A., Lanning D.D.* Nonlinear multivariable control of nuclear power plants based on the unknown-but-bounded disturbance model // Automatica, 1988, Vol. 33, No. 2, pp. 130–137.
- [84] *Pecsvaradi T.* Optimal horizontal guidance law for aircraft in the terminal area // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972, Vol. AC-17, No. 6, pp. 763–772.
- [85] *Scheweppe F.C.* Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system inputs // IEEE Trans. on Automatic Control. 1968, Vol. AC-13, No. 1, pp. 22–28.
- [86] *Scheweppe F.C.* Uncertain dynamic system. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [87] *Witsenhausen H.S.* A minimax control problem for sampled linear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1968, Vol. AC-13, No. 1, pp. 5–21.
- [88] *Witsenhausen H.S.* Sets of possible states of linear systems given perturbed observations // IEEE Trans. on Automatic Control. 1968, Vol. AC-13, No. 5, pp. 556–558.
- [89] *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000, Т. 6, N 1-2, С. 413–434.
- [90] *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Построение множества разрешимости в задаче проводки самолёта при ветровом возмущении // Труды Института математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005, Т. 11, N 1, С. 149–159.
- [91] *Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А.* Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств. / Научные доклады, Академия гражданской авиации, Санкт-Петербург, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 1999.
- [92] *Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.* Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. Теория и системы управления, 2003, N 3, С. 8–16.
- [93] *Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Решетов В.М., Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета в горизонтальной плоскости // Известия РАН. Теория и системы управления, 2003, N 4, С. 51–61.
- [94] *Федотов А.А.* Информационные множества в задаче наблюдения за движением самолета // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тезисы докладов 30-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1999, С. 70–71.

- [95] *Федотов А.А.* Оценивание четырехмерных множеств достижимости в задаче наблюдения за движением самолета // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 31-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2000, С. 102–103.
- [96] *Федотов А.А.* Построение множества достижимости для нелинейной управляемой системы третьего порядка // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 32-й Региональной молодёжной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2001, С. 224–228.
- [97] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Informational Sets in a Problem of Observation of Aircraft Trajectory // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2000, pp. 94–112.
- [98] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Four-dimensional informational sets in a problem of aircraft tracking // Proceedings of the 11th IFAC International Workshop "Control Applications of Optimization"(CAO 2000), 2000, Vol. 2. St.-Petersburg, Russia, Edited by V.Zakharov, Oxford: Pergamon Press, 2000, pp. 573–578.
- [99] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Nonlinear construction of informational sets in aircraft tracking problem under inertional control // Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Vol. 3, St.-Petersburg, Russia, 2001. Edited by A.B.Kurzhanski, A.L.Fradkov, Oxford: Pergamon Press, 2002, pp. 1389–1394.
- [100] *Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A.* Construction of the stable bridge in a problem of aircraft guiding under wind disturbances // Proceedings of the Tenth International Simposium on Dynamic Games and Applications. St.-Petersburg, Russia. 2002, Vol. 2, pp. 474–480.