Nadia Paola Jiménez Flores

Ejercicios Jueves

Ejercicio 1. Sea $p_k(x) = \mathbb{P}(y = k \mid x)$ con

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_k}{\sigma_k}\right)^2\right).$$

(1) Calcula $p_k(x)$ suponiendo homogeneidad.

(2) Sea $K = 2$ y $\pi_1 = \pi_2 = 1/2$. Verifica que la frontera de decisión se encuentra en

$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2}.$$

1) Para poder calcular p_K, usaremos el Teorema de Bayes

$$p_K(x) = \frac{f_K(x)\,\pi_K}{\sum_{i=1}^{K} f_i(x)\,\pi_i}$$

ya que estamos suponiendo homogeneidad obtenemos lo siguiente:

$$p_K(x) = \frac{f(x)\,\pi}{\sum_{i=1}^{K} f_K(x)\,\pi_K}$$

$$= \frac{e^{-1/2\left(\frac{x-\mu_K}{\sigma_K}\right)^2}}{\sum_{K=1}^{n} f_K(x)\,\pi_K}$$

2) $$\log\left(\frac{f_1(x)\,\pi_1}{f_2(x)\,\pi_2}\right) = \log\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}\, e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma_1}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\, e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma_2}\right)^2}}\right) = 0$$

$$= \frac{\log\left(e^{-1/2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2}\right)}{\log\left(e^{-1/2\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}\right)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = 0$$

$$+\frac{1}{2}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{2}\frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

Ahora, como suponemos homogeneidad

$$(x - \mu_1)^2 = (x - \mu_2)^2$$

$$x^2 - 2x\mu_1 + \mu_1^2 = x^2 - 2x\mu_2 + \mu_2^2$$

$$\mu_1^2 - \mu_2^2 = 2x\mu_1 + 2x\mu_2 = 0$$

$$(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) - 2x(\mu_1 + \mu_2) = 0$$

$$(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 + \mu_2) = 2x(\mu_1 + \mu_2)$$

por lo tanto $\dfrac{\mu_1 - \mu_2}{2} = x$, es la frontera de decisión.

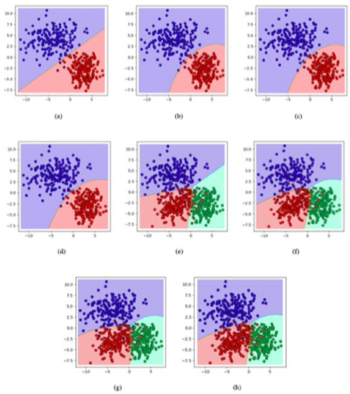
Ejercicio 2. Sean

$$\mu_1 = (-4, 4), \qquad \mu_2 = (3, -3), \qquad \mu_3 = (-3, 3)$$

y

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1.5 \\ 1.5 & 4 \end{pmatrix}$$

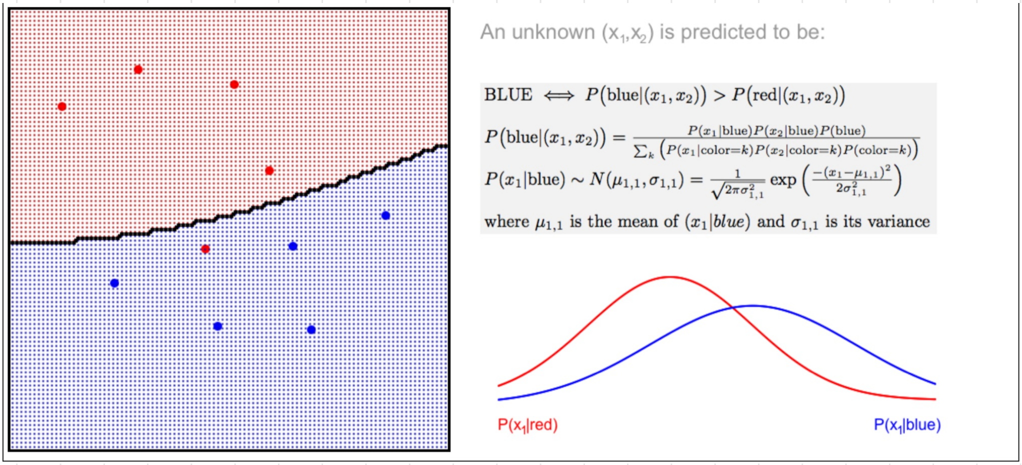
¿Cuáles de las siguientes gráficas representan las fronteras de decisión?



Con lo siguiente observado, podemos decir que el gráfico (a) es utilizando únicamente dos grupos con el supuesto de homogeneidad, esto dado que es una frontera lineal.

Tales gráficos usan una mezcla de homogeneidad y heterogeneidad, por esto es que hay fronteras lineales y también fronteras cuadráticas.

Ejercicio 3. Toma 5 puntos al azar de color rojo y 5 puntos al azar de color azul. Grafica las distintas gráficas de Voronoi con sus fronteras usando la siguiente applet: https://www.ccom.ucsd.edu/ cdeotte/programs/classify.html Explica cómo funciona la applet.



Con lo observado, dicha applet supone normalidad en las muestras, ya que utiliza:

$$x_3 = (x_1)^2 \qquad x_4 = (x_2)^2 \qquad x_5 = (x_3)(x_4)$$

esto para construir fronteras cuadráticas.