Las ecuaciones de lanchester y la Segunda guerra mundial

Eder Martinez
Diego Mendoza

26 de enero de 2021

Introducción:

La segunda guerra mundial ha sido el suceso bélico más desgarrador en la historia del ser humano, se calcula que alrededor de 50-70 millones de personas perdieron la vida en el enfrentamiento entres las fuerzas del eje y la alianza. En este trabajo queremos dar un vistazo desde el punto de vista de las matemáticas, ver que relación le podemos dar a las matemáticas y a la segunda guerra mundial, para logra este objetivo es menester resumir un poco acerca de la historia de la segunda guerra mundial y explicar lo relacionado a las ecuaciones de Lanchester.

S.G.M:

Entre los destrozos que dejo la primera guerra mundial se encontraba una Alemania destruida, rencorosa, enojada y sujeta al tratado de Versalles (1919). En este contexto llega Adolf Hilter al poder de Alemania en 1933, el dictador nazi empezó a violar el Tratado de Versalles de 1919. Reactivó su industria militar, reorganizó sus fuerzas armadas y se anexó Austria.
La ambición de Adolf Hitler (Alemania), Benito Mussolini (Italia) e Hirohito (Japón) por el predominio económico y político del planeta, fueron las causas principales de el estallido de la guerra.

En setiembre de 1939 Alemania sometió a Polonia, provocando así que Inglaterra y Francia le declaren la guerra. En los meses siguientes Alemania invadió Dinamarca, Noruega, Bélgica y Holanda. En junio de 1940 cayó París, la capital de Francia. En agosto del mismo ano los aviadores alemanes bombardeó Londres sin piedad, pero no obtuvieron la rendición de Inglaterra.

Motivado por los avances alemanes, el dictador italiano Mussolini envió tropas a invadir Egipto, pero fueron derrotadas. Esto orillo a Hitler a enviar ayuda a controlar el norte de África. Estas fuerzas fueron vencidas por los aliados en la Batalla de El Alameín (1942) y huyeron a Italia, donde también fueron derrotados.

En junio de 1941, Hitler ordenó la invasión a la Unión Soviética. Sus fuerzas avanzaron hacia Moscú, pero estando muy cerca tuvieron que retroceder por el contraataque ruso y la llegada del invierno. Finalmente fueron aplastados por los soviéticos en la gran Batalla de Stalingrado (junio de 1942 ? febrero de 1943). Mientras tanto los nazis aplicaban una política de exterminio contra los judíos en campos de concentración.

En el Océano Pacífico los japoneses realizaron el bombardeo de Pearl Harbor en diciembre de 1941, provocando el ingreso de Estados Unidos a la Segunda Guerra Mundial. La ofensiva japonesa la llevó a conquistar China, el Sudeste Asiático y casi todas las islas del Pacífico. Pero a partir de la victoria estadounidense en el Batalla de Midway (junio de 1942) los japoneses empezaron a perder posiciones.

En junio de 1944 los aliados iniciaron una gran contraofensiva con el Desembarco de Normandía, obligando a los alemanes a replegarse hacia su país. En agosto fue liberada París y en febrero de 1945 todo Francia quedó libre de alemanes. Los aliados invadieron Alemania en marzo, pero los soviéticos llegaron primero a Berlín (25 de abril de 1945). Hitler se suicidó el 30 de abril. El 9 de mayo de 1945 el mariscal alemán Wilhelm Keitel firmó la rendición de su país en Berlín.

Ecuaciones de Lanchester:

En mi 1914 F.Lanchester publico dos ecuaciones diferenciales que permitían modelar un acto bélico entre dos fuerzas de acuerdo a las variables de tamano y las eficiencias de cada fuerza, sin embargo nadie les presto atención. Fue hasta la segunda guerra mundial cuando las autoridades americanas y británicas solicitaban a los científicos la respuesta a ámbitos logisticos y tácticos siendo este el nacimiento de la investigación de modelos militares.

Modelo de desgaste por Lanchester:

Lanchester da un modelo de desgaste en el que un ejercito A se enfrenta a un ejercito B denotando el numero de soldados de cada ejercito respectivamente. De este modo A(t) y B(t) representan a la cantidad de efectivos en el instante t. El comportamiento de A(t) y B(t) vienen descritos por las ecuacioenes de Lanchester.

Lanchester propones dos tipos de de guerra: la antigua y la moderna, las cuales cada una tiene su expresión correspondiente una por la ley cuadrática y la otra por ley lineal.En un combate antiguo un enfrentamiento de dos ejércitos se simplificaba a varias peleas individuales en el que un soldado luchaba con otro, sin posibilidad alguna para enfrentar muchos soldados al mismo tiempo, de forma contraria la guerra moderna introduce una la variable que un soldado puede enfrentar de cierta forma una variedad de soldados enemigos.

Primero que nada supondremos ciertas condiciones para simplificar el modelo de la ley lineal y de la cuadrática :

1. Se considera a los dos ejércitos como homogéneos
2. El combate se mantiene de forma continua hasta que uno de los dos ejércitos es eliminado
3. Se desprecian los daños colaterales
4. los coeficiente de efectividad son independientes de las fuerzas enemigas
5. Cuando un efectivo es destruido, se inicia el inmediato fuego a otro efectivo
6. El fuego se divide de manera uniforme entres los efectivos

Ley lineal de Lanchester:

Este modelo representa un choque entre dos ejércitos los cuales no tienen un soporte de inteligencia respecto a la ubicación enemiga, sino que suponen su posición en una área , de igual forma no pueden llegar a saber cuanto daño infligen al enemigos los que hace que el fuego se dirija a una área y no sobre elementos enemigos, teniendo así que:

$$\frac{dA}{dt} = -\beta AB \ y \ \frac{dB}{dt} = -\alpha BA$$

donde:
t=Tiempo
A=Numero de soldados del ejercito a
B=Numero de soldados del ejercito b
βA = Ritmo en que B destruye a A
αB=Ritmo en que A destruye a B.
El modelo expone que las bajas de cada ejercito son proporcionales al grado de efectividad del ejercito adversario y al tamaño de ambos ejércitos.

Eliminando la variable del tiempo:

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\beta AB}{\alpha AB} = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \alpha \int_{A_0}^{A(t)} dA = \beta \int_{B_0}^{B(t)} dB$$

Teniendo que:

$$\alpha(A_0 - A(t)) = \beta(B_0 - B(t))(Lanchester\ lineal)$$

Predicción de ley lineal de Lanchester:

Para saber quien resulta vencedor en la batalla se tomaran tres casos:

1. Empate:
   Una igualdad de la batalla se pude dar cuando no queda ningún soldado de pie tanto del ejercito A como del B, dicho de otra forma $\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} B(t) = 0$.
   Así:
   $$\alpha A_0 = \beta B_0$$
2. A resulta ganador:
   Cuando los soldados de A eliminaron a todos los soldados de B se tiene que $\lim_{t\to\infty} A(t) > \lim_{t\to\infty} B(t) = 0$
   Así:
   $$\alpha A_0 - \alpha A_t = \beta B_0 \Rightarrow \alpha A_0 > \beta B_0$$
3. B resulta ganador:
   Cuando los soldados de B eliminaron a todos los soldados de A se tiene que $\lim_{t\to\infty} B(t) > \lim_{t\to\infty} A(t) = 0$

   Así:
   $$\alpha A_0 = \beta B_0 - \beta B(t) \Rightarrow \alpha A_0 < \beta B_0$$

Ley cuadrática de Lanchester:

Esta ley describe el modelo en el cual cada miembro de A se concentra dentro del alcance de cada miembro de B y viceversa.
En este modelo los ejércitos de combate tienen la información acerca de la ubicación enemiga en la cual si un soldado acierta en un soldado enemigo, dirigirá su ataque a otro soldado. A ira reduciendo su numero de soldados dependiendo de B, mientras que B se vera afectado de la misma forma dependiendo de la capacidad militar de A.

$$\frac{dA}{dt} = -\beta B \ y \ \frac{dB}{dt} = -\alpha A$$

donde:
t=representa el tiempo
A=numero de soldados de A
B=numero de soldados de B
β=efectividad de B
α=efectividad de A

$\frac{dA}{dt}$ representa como el ejercito de A varia en función del tiempo siendo proporcional a la capacidad bélica de B, análogo con B.
Quitando la dependencia del tiempo:

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\beta B}{\alpha A} \Rightarrow \alpha \int_{A_0}^{A(t)} AdA = \beta \int_{B_0}^{B(t)} BdB$$

Así:

$$\alpha(A_0^2 - A_t^2) = \beta(B_0^2 - B_t^2)$$

Predicción de ley cuadrática de Lanchester:

Para saber quien resulta vencedor en la batalla se tomaran tres casos:

1. Empate:
   Una igualdad de la batalla se pude dar cuando no queda ningún soldado de pie tanto del ejercito A como del B, dicho de otra forma $\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} B(t) = 0$.
   Así:
   $$\alpha A_0^2 = \beta B_0^2$$

2. A resulta ganador:
   Cuando los soldados de A eliminaron a todos los soldados de B se tiene que $\lim_{t\to\infty} A(t) > \lim_{t\to\infty} B(t) = 0$
   Así:
   $$\alpha(A_0^2 - A_t^2) = \beta B_0^2 \Rightarrow \alpha A_0^2 > \beta B_0^2$$

3. B resulta ganador:
   Cuando los soldados de B eliminaron a todos los soldados de A se tiene que $\lim_{t\to\infty} B(t) > \lim_{t\to\infty} A(t) = 0$
   Así:
   $$\alpha A_0^2 = \beta(B_0^2 - B_t^2) \Rightarrow \alpha A_0^2 < \beta B_0^2$$

Resumen de ecuaciones de lanchester:

situación	Cuadrática	Lineal
Empate	$\alpha A_0^2 = \beta B_0^2$	$\alpha A_0 = \beta B_0$
Gana A	$\alpha A_0^2 > \beta B_0^2$	$\alpha A_0 > \beta B_0$
Gana B	$\alpha A_0^2 < \beta B_0^2$	$\alpha A_0 < \beta B_0$

Solución a Lanchester cuadrática:

Partiendo de que:

$$\frac{dA}{dt} = -\beta B \text{ y } \frac{dB}{dt} = -\alpha A$$

derivando

$$\frac{d}{dt}(\frac{dA}{dt}) = -\beta\frac{dB}{dt} = \alpha\beta A$$

$$\Rightarrow \frac{d^2A}{dt^2} = \alpha\beta A \Rightarrow \frac{d^2A}{dt^2} - \alpha\beta A = 0$$

Tenemos una Ecuación de segundo orden tomamos $A = e^r$:

$$r^2 - \alpha\beta A = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\alpha\beta}$$

Así la solución es :

$$A(t) = c_1 e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + c_2 e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

Recordando que $\frac{dA}{dt} = -\beta B$:

$$\frac{dA(t)}{dt} = c_1\sqrt{\alpha\beta}e^{\sqrt{\alpha\beta}t} - c_2\sqrt{\alpha\beta}e^{-\sqrt{\alpha\beta}t} = -\beta B$$

Podemos concluir que:

$$B(t) = -\frac{c_1}{\beta}\sqrt{\alpha\beta}e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + \frac{c_2}{\beta}\sqrt{\alpha\beta}e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

Para determinar las constantes $A(0) = A_0$:

$$A_0 = A(0) = c_1 + c_2$$

Para determinar las constantes $B(0) = B_0$:

$$B_0 = B(0) = -\frac{c_1}{\beta}\sqrt{\alpha\beta} + \frac{c_2}{\beta}\sqrt{\alpha\beta} \Rightarrow B_0\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = -c_1 + c_2$$

Sumando:

$$2c_2 = A_0 + B_0\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \Rightarrow c_2 = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

Sustituyendo:

$$c_1 = A_0 - \frac{A_0}{2} - \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{A_0}{2} - \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

Así podemos concluir:

$$A(t) = (\frac{A_0}{2} - \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}})e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + (\frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}})e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

También:

$$B(t) = -(\frac{A_0}{2} - \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}})\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}e^{\sqrt{\alpha\beta}t} + (\frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}})\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}e^{-\sqrt{\alpha\beta}t}$$

Analisis de las 6 batallas más importantes de la S.G.M con Lanchester:

En la segunda guerra mundial hubo muchas batallas, pero de entre ellas se destacan 6 con suma importancia, las cuales serán analizadas con las ecuaciones de lanchester y podremos ver que tan precisas son las ecuaciones de lanchester.

Para el análisis se tendrá que calcular los coeficientes de letalidad de cada ejercito que son un conjunto de características que cumplen los ejércitos:

Factor	Explicación	Valor
Sorpresa (S)	En caso de que una fuerza embosque a otra tendrá cierta ventaja	+0.1
Armamento Portatil (AL)	Calibre/ Cadencia/ Precicisió/ Modernidad	+0.025 por característica
Armamento Pesado (AP)	En caso de contra con el	+0.1
Capacidad defensiva (CD)	Chalecos antibalas/Parapetos	+0.05 por caracteristica
Adiestramiento (A)	En caso de haber recibido formación profesional	+0.2
Moral (M)	Confianza en la voctoria	+0.1
Conocimiento del terreno (CT)	Conocimiento del terreno o posición elevada	+0.1
Condición física (CF)	Condicifísica adecuada para el combate sostenido	+0.1
Capacidad de desición de mandos (OF)	En caso de haber recibido formación especifica en la toma de decisiones	+0.2
TOTAL		1

Fuente: Aplicación de las Leyes de Lanchester en conflictos de baja intensidad

En base a la investigaión se recolectaron datos de las distintas batllas y se organizaron en una tabla que muestra el numbre de la batalla y los soldados iniciales de cada ejercito ordenados por los ejercitos del Eje y los ejercitos Aliados.
Tabla de datos estadisticos utilizados en los siguientes analisis
.

Batalla	El Ejer	Aliados
Westerplatte	3400	210
Alamein	150000	96000
Stalingrado	275000	187000
Iwo Jima	70000	20919
Pearl Harbor	390	414

Invasión de Polonia:

El primero de Septiembre de 1939 Alemania invadió Polonia con intenciones de ocupar su territorio, facilmente el ejercito polaco fue derrotado el 6 de octubre del mismo año gracias al brutal ataque de los alemanes, la presion de la invasion de la URSS el 17 de septiembre a Polonia y por la ausencia de los aliados de Polonia como Reino unido y Francia

Alemania ataco principalmente con 1500000 soldados y resulto con 50069 bajas(heridos, muertos y desaparecidos), por otro lado Polonia se defendió con 950000 y resulto con 894000 bajas (heridos, muertos y desaparecidos)

Se analizara en esta batalla los primeros 10 dias de ella lo que desembarca en la sub-batalla; Batalla de Westerplatte.

Análisis de ecuaciones de lanchester de la batalla de Westerplatte:

Calculando los coeficientes de efectividad de cada ejercito respectivamente tenemos que el coeficiente de los alemanes denotado por α= .75 y el de los polacos β=0.45 donde A(t) representa al ejercito aleman y B(t) al ejercito polaco, inicialmente el ejercito aleman contaba con 3400 soldados y del lado polaco 210 .

De esta forma las ecuaciones que describen los sucesos son:

$$A(t) = (\frac{3400}{2} - \frac{210}{2}\frac{,45}{\sqrt{,75,45}})e^{\sqrt{,75,45}t} + (\frac{3400}{2} + \frac{210}{2}\frac{,45}{\sqrt{,75,45}})e^{-\sqrt{,75,45}t}$$

$$B(t) = (\frac{3400}{2} - \frac{210}{2}\frac{,45}{\sqrt{,75,45}})(\frac{\sqrt{,75,45}}{0,45})e^{\sqrt{,75,45}t} + (\frac{3400}{2} + \frac{210}{2}\frac{,45}{\sqrt{,75,45}})(\frac{\sqrt{,75,45}}{0,45})e^{-\sqrt{,75,45}t}$$

que es lo mismo a

$$A(t) = (1618{,}667)e^{,58094t} + (1781{,}332)e^{-,58094t}$$

y

$$B(t) = -(2089{,}69)e^{,58094t} + (2299{,}68)e^{,58094t}$$

Análisis de ecuaciones de lanchester de la segunda batalla de El Alamein:

En agosto de 1942, Montgomery fue nombrado general jefe del VIII Ejército británico en Egipto. Churchill ordenó un masivo abastecimiento de tropas, armas y municiones con la intención de rechazar y hacer retroceder al ejército de Rommel. Montgomery utilizó tácticas muy prudentes, que en algún momento desesperaron a Churchill, e hizo diversas maniobras previas para engañar al "Zorro del Desierto". Finalmente, el 23 de octubre de 1942, las tropas británicas desencadenaron el ataque. Tras varios días de duros combates, especialmente complejos por los campos de minas preparados por los alemanes, el 3 de noviembre las tropas de Rommel tuvieron que retirarse pese a las reiteradas órdenes del Führer de resistencia a toda costa.

La batalla de El Alamein fue clave en el desenlace de la guerra en el norte de África. El desembarco anglo-norteamericano en Marruecos, Argelia y Túnez pocos días después permitió la derrota definitiva del "Afrika Korps" y de sus aliados italianos y el control aliado del norte de África. Este control permitió el ulterior ataque a Italia que propició la caída de Mussolini.

Calculando los coeficientes de efectividad de cada ejercito usando la tabla tenemos que el coeficiente para el ejercito del Eje (Alemania e Italia) es $\beta = 0.40$ y el de los Aliados es $\alpha = 0.70$ donde A(t) representa al ejercito Aliado con un A_0 igual a 150,000 Soldados y B(t) representa al ejercito del Eje con B_0 igual a 96,000 Soldados. Siguiendo la formula de Lanchester cuadrado obtenemos las siguientes funciones:

$$A(t) = (\frac{150,000}{2} - \frac{96,000}{2}\frac{,70}{\sqrt{,70,30}})e^{\sqrt{,70,30}t} + (\frac{150,000}{2} + \frac{96,000}{2}\frac{,70}{\sqrt{,70,30}})e^{-\sqrt{,70,30}t}$$

$$B(t) = (\frac{150,000}{2} - \frac{96,000}{2}\frac{,70}{\sqrt{,70,30}})(\frac{\sqrt{,70,30}}{0,70})e^{\sqrt{,70,30}t} + (\frac{150,000}{2} + \frac{96,000}{2}\frac{,70}{\sqrt{,70,30}})(\frac{\sqrt{,70,30}}{0,70})e^{-\sqrt{,70,30}t}$$

lo que es igual a

$$A(t) = (1,678,79)e^{,4583t} + (148,321,2)e^{-,4583t}$$

y

$$B(t) = -(27,000)e^{,4583t} + (123,000)e^{-,4583t}$$

Análisis de ecuaciones de lanchester de batalla de Stalingrado:

Batalla de Stalingrado. Fue un decisivo enfrentamiento entre las fuerzas alemanas y los ejércitos soviéticos por la ciudad de Stalingrado (actual Volgogrado) entre junio de 1942 y febrero de 1943, durante el transcurso de la Segunda Guerra Mundial. Con bajas estimadas de tres a cuatro millones de personas, entre soldados de ambos bandos y civiles, la Batalla de Stalingrado es considerada como la más sangrienta en la historia de la humanidad. Los alemanes la llamaron Rattenkrieg, "guerra de ratas".

Después de que Adolfo Hitler desviase fuerzas de la Fall Blau hacia Stalingrado, se libraron dentro de la ciudad intensos combates urbanos, sin que ningún bando se hiciese con el control total de las ruinas. En noviembre de 1942, una contraofensiva soviética atraparía al 6º Ejército Alemán, que sería derrotado cien días después.

La negativa de Hitler a renunciar a la importantísima ciudad, punto de entrada a la rica región petrolera del Cáucaso, significó la muerte de cientos de miles de soldados de ambos bandos, y más de un millón de civiles rusos. Stalingrado significó el fin de las esperanzas alemanas de capturar el Cáucaso y el Volga. Además, muchos oficiales del Ejército Alemán se convencieron definitivamente que Hitler estaba llevando a Alemania al desastre, participando luego en el atentado contra Hitler de 1944.

Calculando los coeficientes de efectividad de cada ejercito usando la tabla tenemos que el coeficiente para el ejercito del Eje es $\beta = 0.40$ y el ejercito Rojo es $\alpha = 0.60$ donde A(t) representa al ejercito Rojo con un A_0 igual a 187,000 Soldados y B(t) representa al ejercito del Ejer con B_0 igual a 275,000 Soldados. Siguiendo la formula de Lanchester cuadrado obtenemos las siguientes funciones:

$$A(t) = (\frac{187,000}{2} - \frac{275,000}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,40}})e^{\sqrt{,60,40}t} + (\frac{187,000}{2} + \frac{275,000}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,40}})e^{-\sqrt{,60,40}t}$$

$$B(t) = (\frac{187,000}{2} - \frac{275,000}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,40}})(\frac{\sqrt{,60,40}}{0,60})e^{\sqrt{,60,40}t} + (\frac{187,000}{2} + \frac{275,000}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,40}})(\frac{\sqrt{,60,40}}{0,60})e^{-\sqrt{,60,40}t}$$

lo que es igual a

$$A(t) = (40,246,6)e^{,4899t} + (146,753,5)e^{-,4899t}$$

y

$$B(t) = -(50,018,7)e^{,4899t} + (136,981,3)e^{-,4899t}$$

Análisis de ecuaciones de lanchester de la batalla de Iwo Jima:

A pesar hostigamiento japonés, tropas estadounidenses consiguieron recorrer los 900 m que separaban la playa de Iwo Jima de los pies del monte Suribachi, defendido por 2.000 soldados japoneses. Los estadounidenses veían como los japoneses les atacaban desde sus escondites excavados a través de la extensa galería de túneles, provocándoles numerosas bajas.

Finalmente, el 23 de febrero de 1945, los marines estadounidenses se hicieron con el control del monte Suribachi.La resistencia extrema japonesa y la abrupta orografía del terreno dificultaron enormemente la tarea. Sin embargo, después de durísimos combates y cuantiosas bajas, la conquista definitiva culminaría el 26 de marzo de 1945. El día anterior, Kuribayashi junto con 200 hombres supervivientes, habían lanzado una última carga banzai en un violento cuerpo a cuerpo contra el 5º batallón de marines, saldándose con la completa destrucción del ejército japonés.
Calculando los coeficientes de efectividad de cada ejercito usando la tabla tenemos que el coeficiente para el ejercito Japones es $\beta = 0.60$ y el de los Estados Unidos es $\alpha = 0.50$ donde A(t) representa al ejercito Estado Unidense con un A_0 igual a 70,000 Marines y B(t) representa al ejercito Japones con B_0 igual a 20,919 Soldados. Siguiendo la formula de Lanchester cuadrado obtenemos las siguientes funciones:

$$A(t) = (\frac{70,000}{2} - \frac{20919}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,50}})e^{\sqrt{,60,50}t} + (\frac{70,000}{2} + \frac{20919}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,50}})e^{-\sqrt{,60,50}t}$$

$$B(t) = (\frac{70,000}{2} - \frac{20919}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,50}})(\frac{\sqrt{,60,50}}{0,60})e^{\sqrt{,60,50}t} + (\frac{70,000}{2} + \frac{20919}{2}\frac{,60}{\sqrt{,60,50}})(\frac{\sqrt{,60,50}}{0,60})e^{-\sqrt{,60,50}t}$$

lo que es igual a

$$A(t) = (26520{,}1)e^{,5477t} + (43479{,}9)e^{-,5477t}$$

y

$$B(t) = -(32711{,}1)e^{,5477t} + (53630{,}1)e^{-,5477t}$$

Análisis de ecuaciones de lanchester de el bombardeo a Pearl Harbor:

Desde la derrota de Francia en mayo de 1940 la postura de no intervención del gobierno estadounidense ante la Segunda Guerra Mundial cada vez estaba más contra las cuerdas. El expansionismo agresivo de Japón fue aumentando la tensión en el Pacífico, lo que no llevó a las autoridades norteamericanas a tomar precauciones. Ante la más absoluta sorpresa, la amenaza se materializó el 7 de diciembre de 1941, cuando la aviación japonesa sembró la destrucción y el caos en la base naval de Pearl Harbor (Hawái). Murieron cerca de 2.500 hombres y a partir de entonces sucedió lo inevitable. Mientras Japón atacaba Filipinas, Guam, Midway, Hong Kong y Malasia; EE.UU. y Reino Unido declaraban la guerra a Japón. Estados Unidos entraba en otra Guerra Mundial veintiocho años después.
Calculando los coeficientes de efectividad de cada ejercito usando la tabla tenemos que el coeficiente para el ejercito Japones es $\beta = 0.70$ y el de los Estados Unidos es $\alpha = 0.40$ donde A(t) representa al ejercito Estado Unidense con un A_0 igual a 390 Aviones y B(t) representa al ejercito Japones con B_0 igual a 414 aviones. Siguiendo la formula de Lanchester cuadrado obtenemos las siguientes funciones:

$$A(t) = (\frac{414}{2} - \frac{390}{2}\frac{,40}{\sqrt{,40,70}})e^{\sqrt{,40,70}t} + (\frac{414}{2} + \frac{390}{2}\frac{,40}{\sqrt{,40,70}})e^{-\sqrt{,40,70}t}$$

$$B(t) = (\frac{414}{2} - \frac{390}{2}\frac{,40}{\sqrt{,40,70}})(\frac{\sqrt{,40,70}}{0,40})e^{\sqrt{,40,70}t} + (\frac{414}{2} + \frac{390}{2}\frac{,40}{\sqrt{,40,70}})(\frac{\sqrt{,40,70}}{0,40})e^{-\sqrt{,40,70}t}$$

lo que es igual a

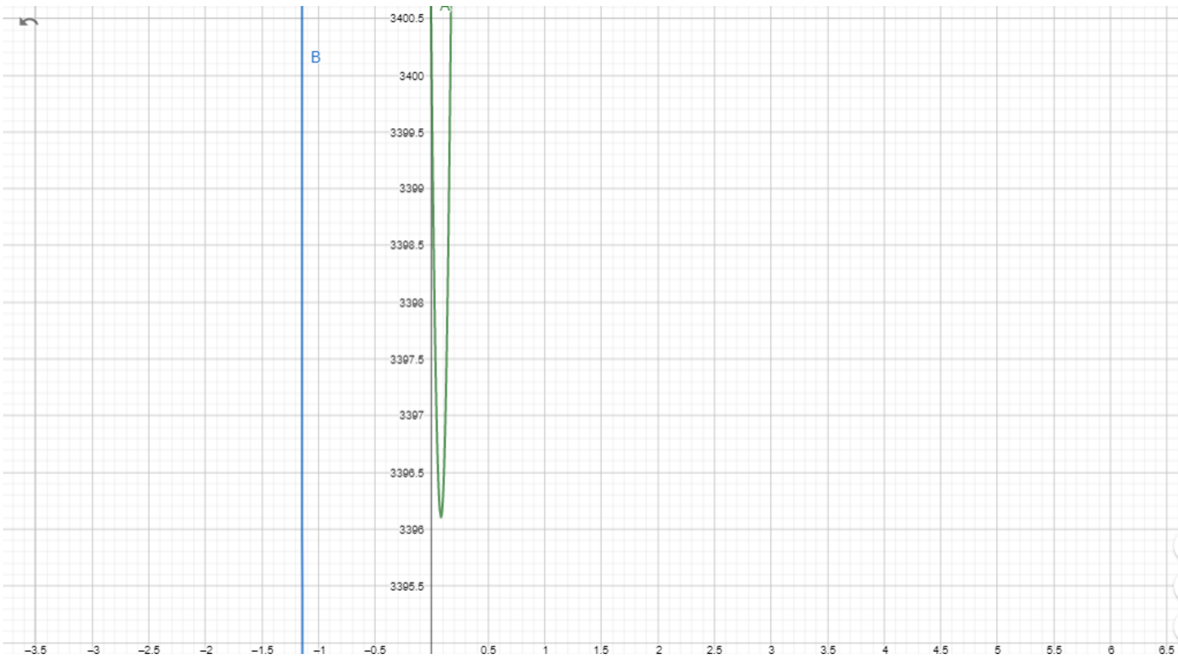
$$A(t) = (59,5938)e^{,5292t} + (354,4)e^{-,5292t}$$

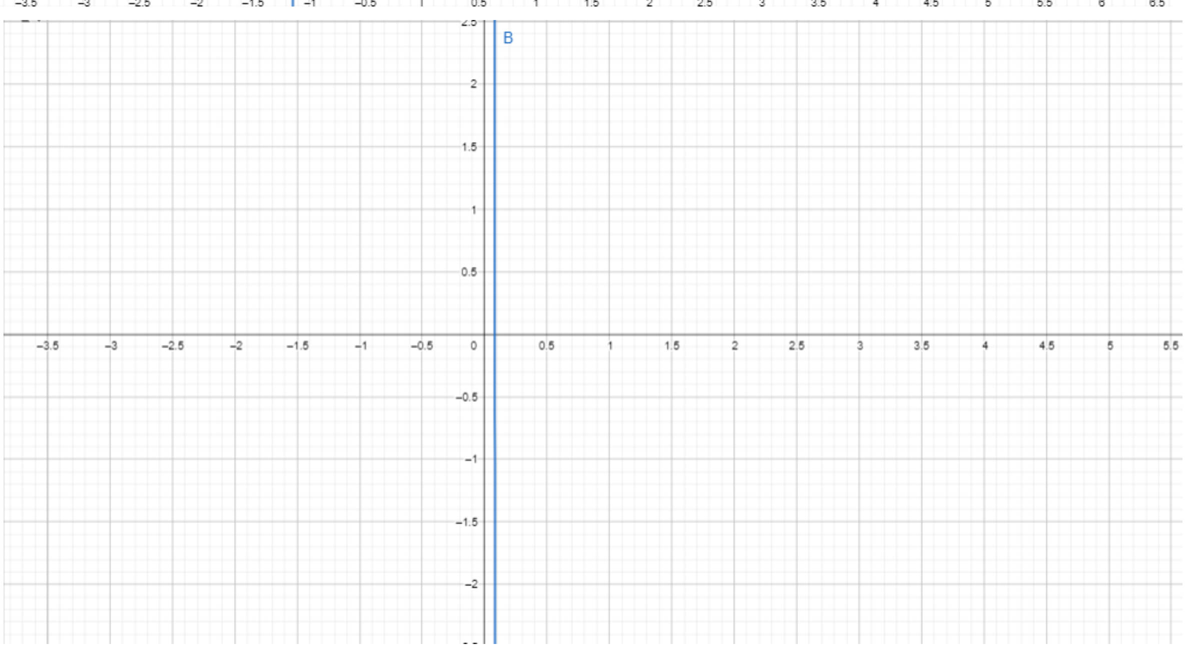
y

$$B(t) = -(12)e^{,5477t} + (402)e^{-,5292t}$$

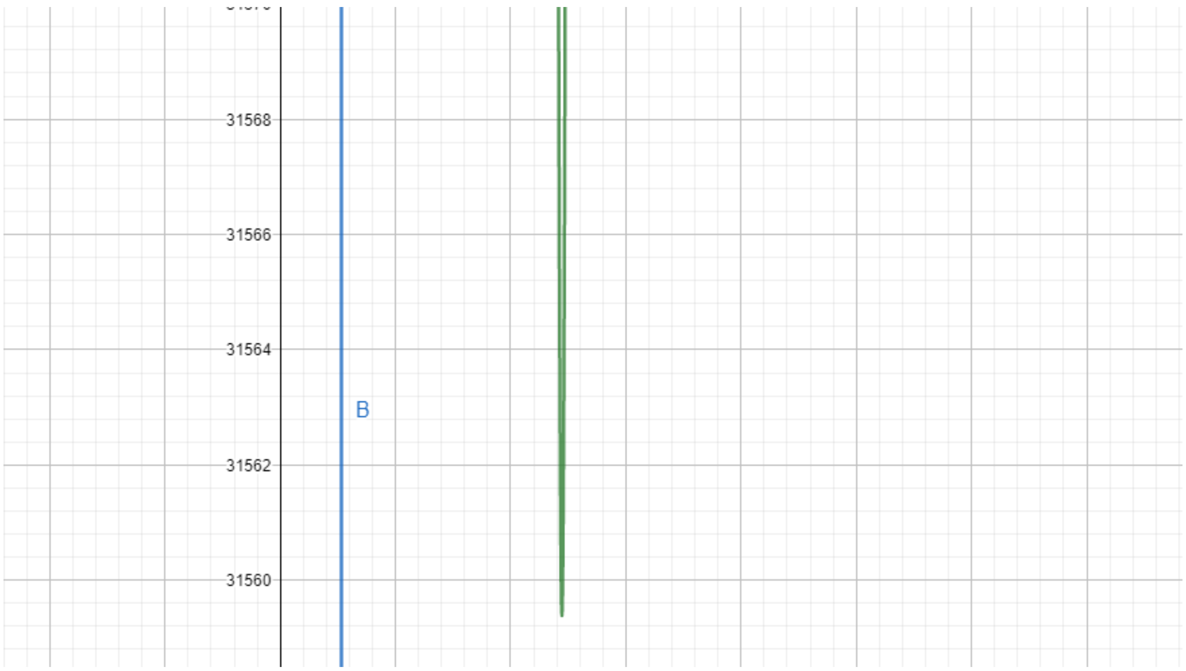
Graficas de las funciones obtenidas mediante el método de Lanchester

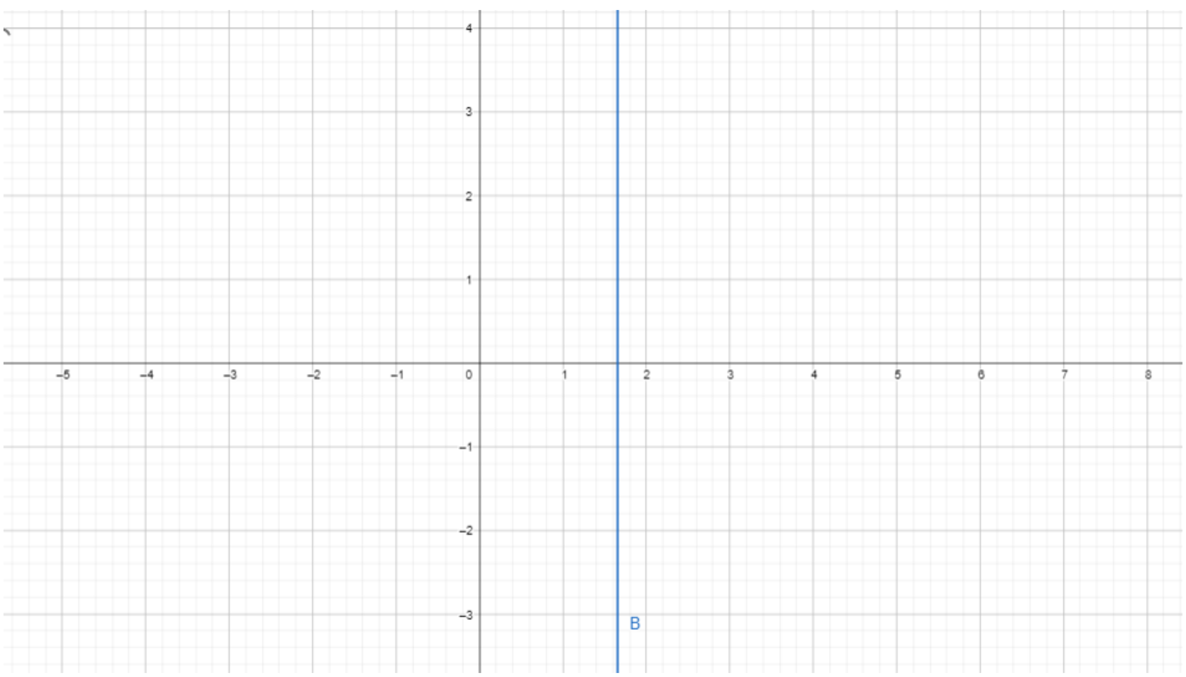
Batalla de Westerplate:



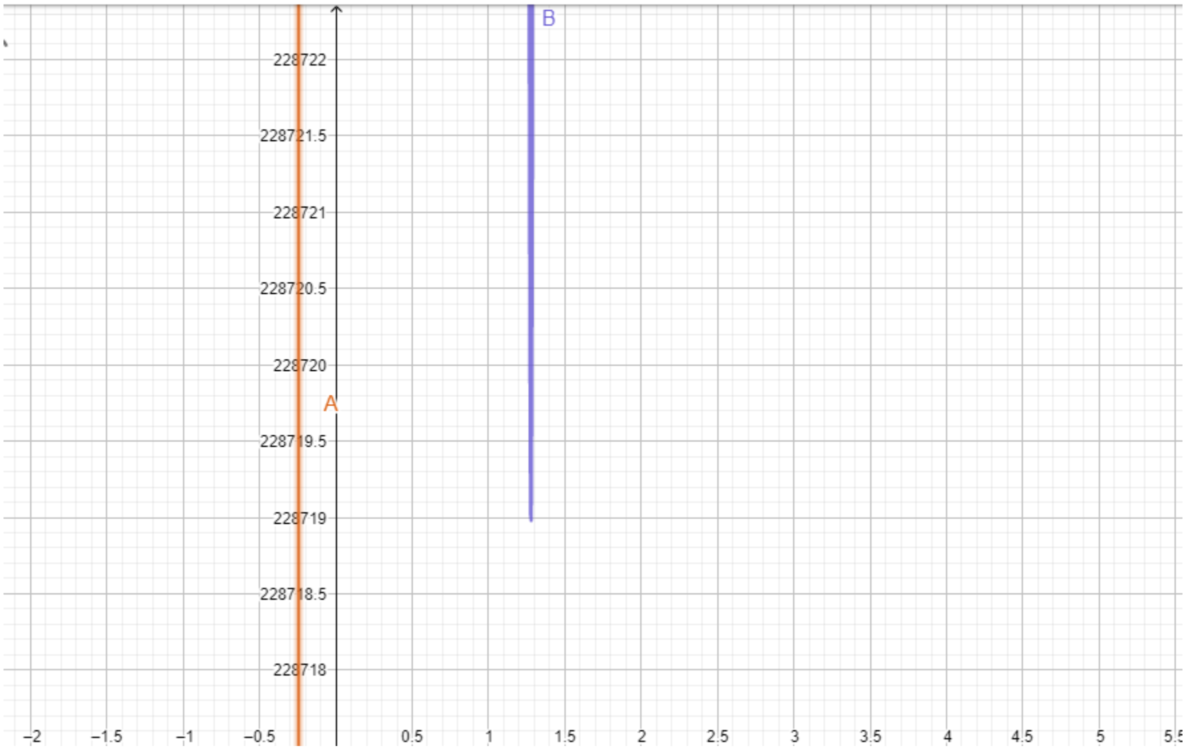


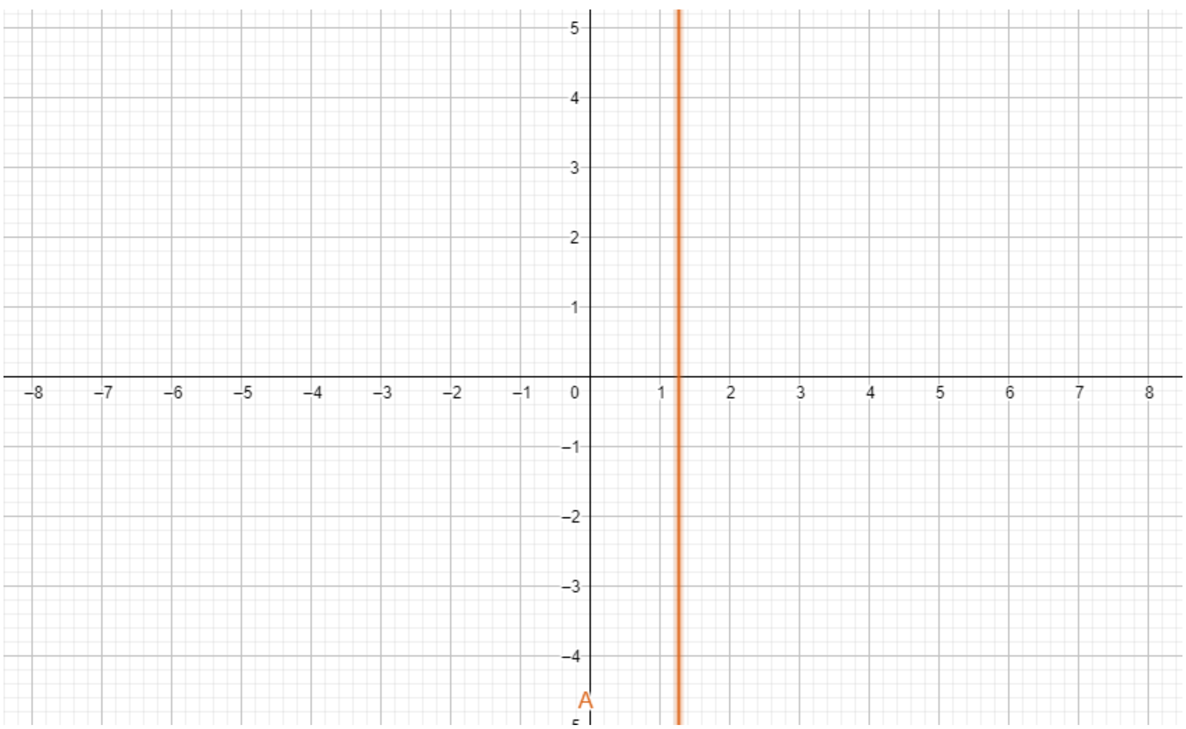
Batalla de Alamein:



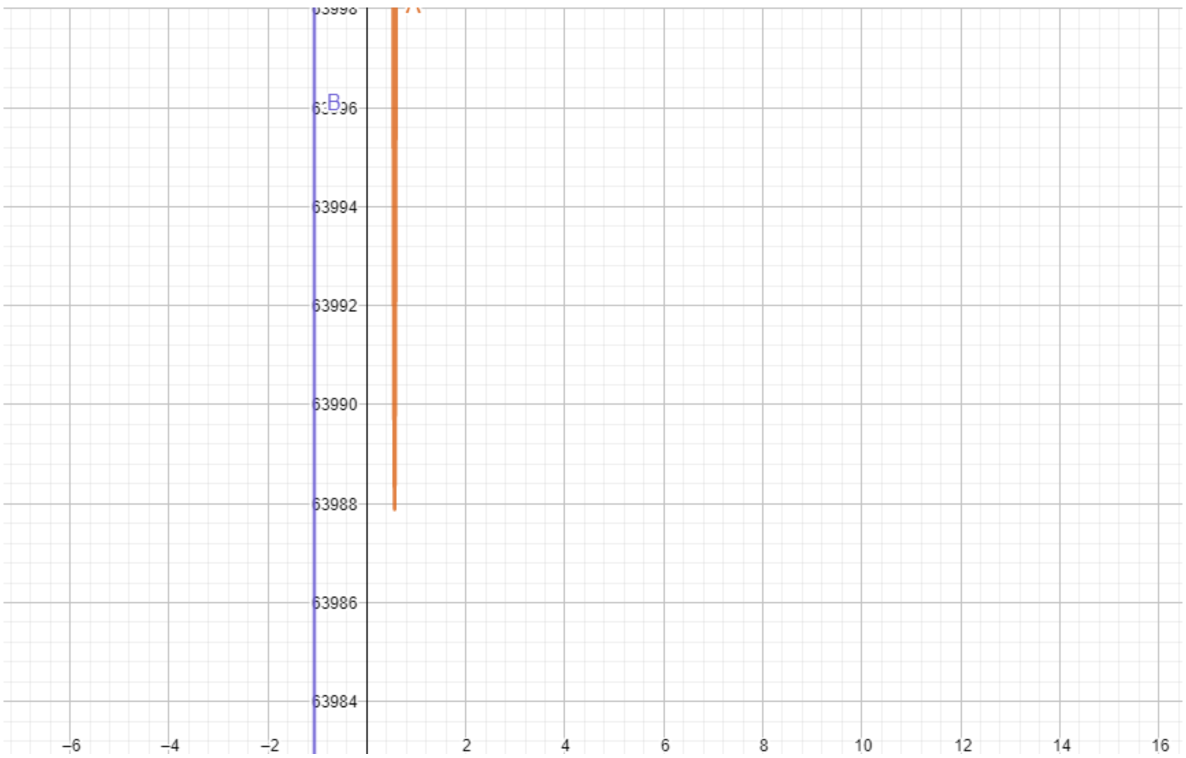


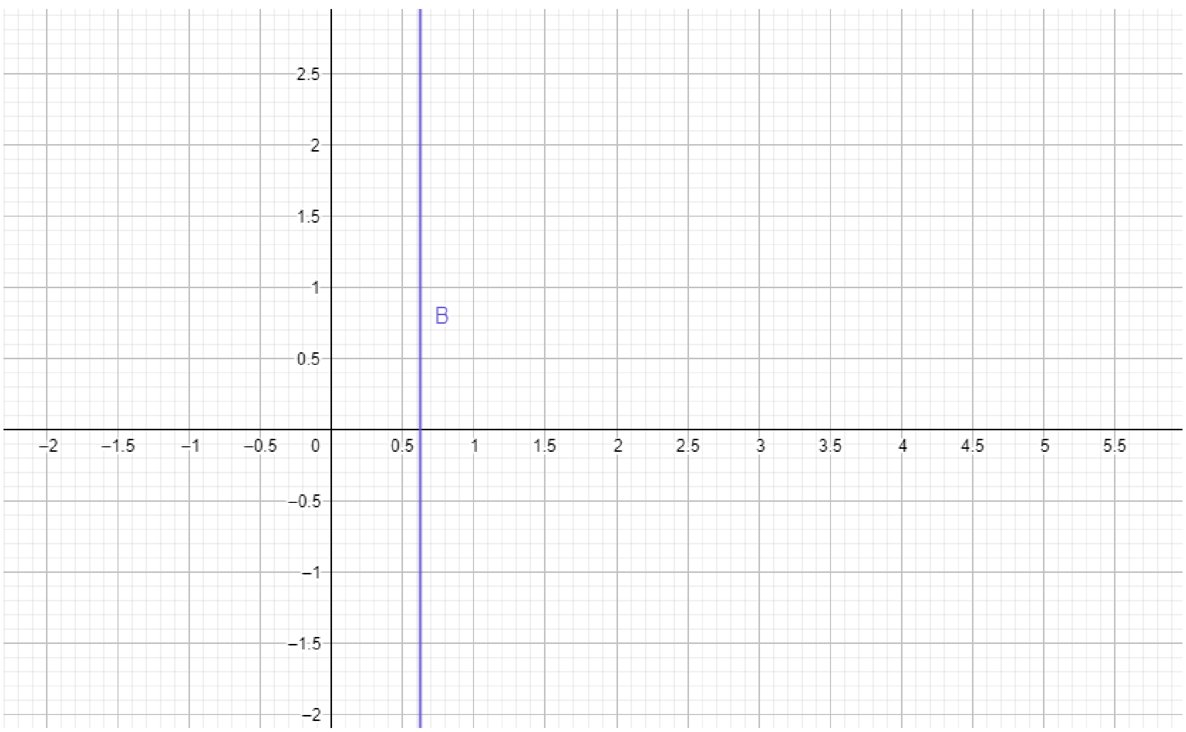
Batalla de Stalingrado:



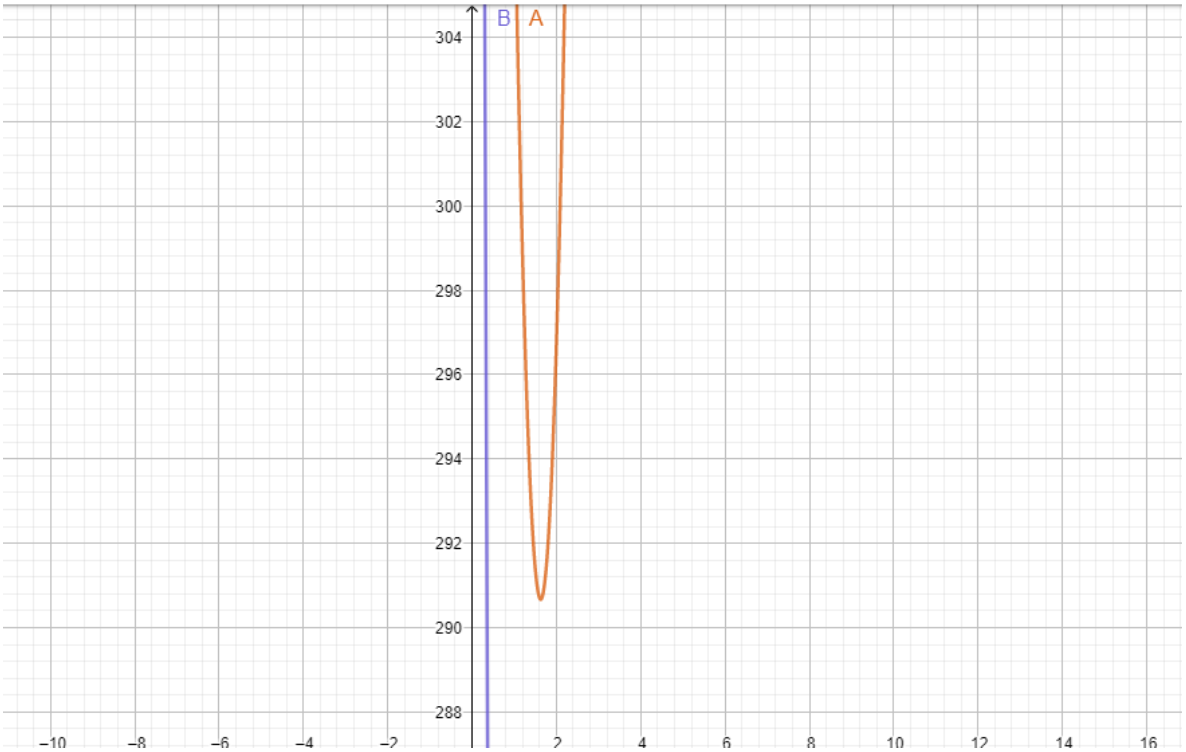


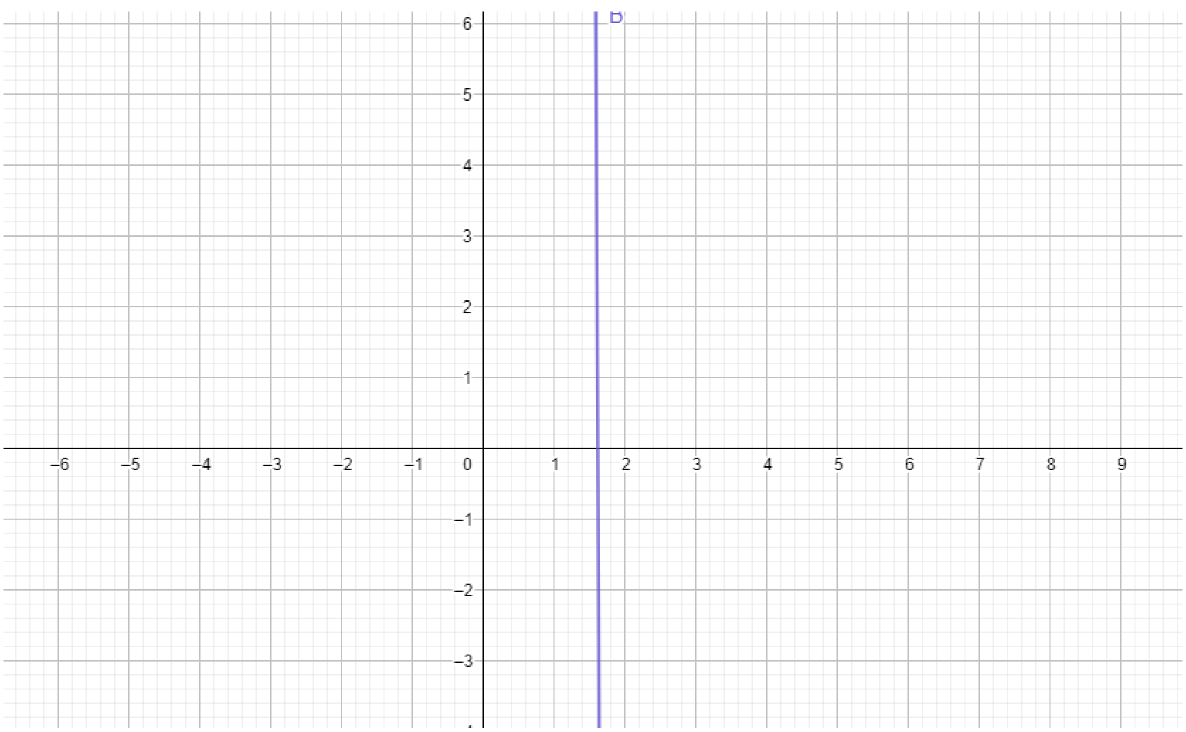
Batalla de Iwo Jima:





Batalla de Pearl Harbor:





Conclusión

Podemos notar que el modelo tiene tiene muchas fallas, pues se tomo el escenario más simple posible de las batallas, pero el principal objetivo podemos decir satisfactoriamente que fue un logro, se pudo observar como las matemáticas aplicadas impactan de un importante forma en distintas areas en este caso fueron las bélicas que en un mejor estudio se puede emplear hasta para ganar guerras o evitar muchas muertes humanas.

Biblografia

1. Historia National Geographic. (2020, 26 diciembre).
historia.nationalgeographic.com.es.
https://historia.nationalgeographic.com.es/a/batalla-stalingrado-imagenes$_1$2345

2. Batalla de Iwo Jima — Eurasia1945. (2016, 12 julio).
https://www.eurasia1945.com.
https://www.eurasia1945.com/batallas/contienda/batalla-de-iwo-jima/

3. Batallas de El-Alamein — Eurasia1945. (2019, 23 diciembre).
https://www.eurasia1945.com/.
https://www.eurasia1945.com/batallas/contienda/batallas-de-el-alamein/

4. Muñoz Soto, A. D. (2009). Aplicación de simulación discreta para un sistema de logistica militar basada en casos historicos de la segunda guerra mundial. Universidad del Bio-Bio Facultad de ingenieria Depto. Ingenieria industrial.

5. Modelos dinámicos de guerra. José Fernando Isaza (Fundación Mazda) y Diogenes Campos (Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá).

6. Osipov, M. 1915. The influence of the Numerical Stregth of Engaged Sides on Their Casualities. Voenniy Sbornik.

7. Dreyer T.P. (1993). Modelling whit Ordenary Differential Equations. Departament of Applied Mathematics, University of Stelenbosch, Stellenbosch, South Africa. CRC Press.