



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Teorema di Whitney-Graustein

CANDIDATO:

Danilo Calcinaro

RELATORE:

Prof. Paolo Lisca

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Contents

1	Nozioni preliminari	3
2	Teorema di Whitney-Graustein	5
2.1	Il teorema di deformazione	5
2.2	Calcolo dell'indice di rotazione	9
3	Dimostrazione del teorema di Whitney tramite la geometria di contatto	13
3.1	Curve Legendriane	13
3.2	Indice di rotazione per curve Legendriane	14
3.3	Dimostrazione del teorema di Whitney-Graustein	16

Introduzione

L'argomento principale della tesi è il teorema di Whitney-Graustein per le curve nel piano. Il teorema prende il nome da H. Whitney, che lo ha dimostrato nel suo articolo "On regular closed curves in the plane" , e da W.C. Graustein, che ha proposto il teorema a H. Whitney, insieme a una veloce dimostrazione. Questo teorema classifica completamente le curve regolari chiuse nel piano a meno di omotopia regolare.

Nel primo capitolo daremo un'idea generale delle nozioni necessarie per la comprensione della teoria che seguirà. In particolare ricorderemo i concetti di curva e alcune sue proprietà, la definizione di grado di una mappa differenziabile e alcuni risultati che useremo in seguito.

Nel secondo capitolo ripercorreremo l'articolo di H. Whitney, introducendo il concetto di indice di rotazione che risulterà essere invariante completo per omotopia regolare di curve nel piano. Inoltre, daremo una prima dimostrazione del teorema di Whitney-Graustein e mostreremo un risultato che ci permette di calcolare l'indice di rotazione in maniera combinatoria.

Nel terzo capitolo introdurremo il concetto di struttura di contatto standard e di curva Legendriana. Con questi nuovi strumenti dimostreremo il teorema di Whitney-Graustein per curve Legendriane, e utilizzeremo questo risultato per dimostrare in maniera alternativa il teorema di Whitney-Graustein per curve piane.

1 Nozioni preliminari

Iniziamo introducendo il concetto di curva, che ricoprirà un ruolo centrale nella tesi, e le proprietà che ci serviranno.

Sia I l'intervallo chiuso $[0, 1]$ di \mathbb{R} ; una *curva* è una qualsiasi mappa $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua (la definizione può essere data su spazi topologici qualsiasi, ma per noi è sufficiente \mathbb{R}^n). Una curva è *chiusa* se $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Diciamo che la curva è *parametrizzata* se è della forma $\gamma(s) = (a_1(s), \dots, a_n(s))$, dove le funzioni a_i sono C^∞ . Ad una curva parametrizzata γ possiamo associare un *vettore velocità* dato da

$$\gamma'(s) = (a_1'(s), \dots, a_n'(s)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(s+h) - \gamma(s)}{h};$$

e diciamo che la curva è *regolare* se il suo vettore velocità è non nullo per ogni valore di $s \in [0, 1]$.

Una curva γ è quindi *regolare chiusa* se

$$\gamma(0) = \gamma(1), \quad \gamma'(0) = \gamma'(1), \quad \gamma'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [0, 1].$$

Nel corso della trattazione ci occuperemo principalmente di curve parametrizzate regolari chiuse nel piano.

Ad ogni curva γ con le proprietà richieste possiamo associare una mappa differenziabile $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(s) \quad \forall s \in [0, 1], \quad \tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(s+1), \quad \tilde{\gamma}'(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Diciamo che due curve parametrizzate γ e δ sono *equivalenti* se esiste un diffeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(s+1) = \varphi(s) + 1, \quad \varphi'(s) > 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\gamma}(\varphi(s)) = \tilde{\delta}(s).$$

Questa è chiaramente una relazione di equivalenza; chiamiamo *curve* le classi di equivalenza e *parametrizzazioni* gli elementi della classe di equivalenza.

Teorema 1.1. *Data una curva C , si può scegliere una parametrizzazione δ tale che*

$|\delta'(s)|$ sia costante, cioè tale che il parametro sia la lunghezza d'arco moltiplicata per una costante.

La dimostrazione di questo fatto è sostanzialmente uguale alla costruzione che si effettua per parametrizzare una curva per lunghezza d'arco, evitando però di normalizzare il vettore tangente. In questo modo si evita che il dominio della curva cambi da $[0, 1]$ a $[0, \text{lung}(\gamma)]$. Una dimostrazione più dettagliata si può trovare in [1].

Un altro strumento molto usato è il grado di una mappa differenziabile tra varietà di uguale dimensione.

Siano M , N varietà differenziabili di uguale dimensione tali che M orientata e compatta, e N senza bordo orientata e connessa. Data $f : M \rightarrow N$ continua e differenziabile, sia $x \in M$ un punto regolare per f . Definiamo $\text{segno}(df_x) = \pm 1$ se df_x mantiene o cambia l'orientazione del tangente, rispettivamente.

Definiamo il *grado* di f in y , valore regolare per f , come

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{segno}(df_x).$$

Si può vedere che la nozione di grado non dipende dal valore regolare scelto, ma dalla funzione, e che due mappe differenzialmente omotope hanno lo stesso grado. Vediamo dunque il seguente risultato:

Teorema 1.2. (*Hopf*) *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m , compatta, connessa, orientata e senza bordo. Allora due mappe $M \rightarrow S^m$ sono omotope C^∞ se e solo se hanno lo stesso grado.*

La dimostrazione di questo teorema e dei risultati sopra nominati può essere trovata in [3]. Nel nostro caso si parlerà unicamente di mappe a valori in S^1 .

2 Teorema di Whitney-Graustein

Definizione 2.1. Siano γ_0, γ_1 due curve regolari chiuse e $F : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'omotopia C^∞ tale che $F(0, s) = \gamma_0(s)$, $F(1, s) = \gamma_1(s)$. Diciamo che l'omotopia è *regolare* se $F(t, s) = \gamma_t(s)$ è una curva regolare chiusa $\forall t \in [0, 1]$ fissato e $\gamma'_t(s)$ è continua in entrambe le variabili.

Osservazione. Whitney nel suo articolo usa il termine *deformazione* invece di omotopia regolare. Per comodità useremo anche noi questa terminologia in alcuni passaggi.

Osservazione. Date γ_0 e γ_1 parametrizzazioni della curva C allora esiste tra le due un'omotopia regolare tale che γ_t è una parametrizzazione di C ad ogni istante di tempo.

Dimostrazione: Sia $\gamma_1(s) = \gamma_0(\varphi(s))$. Poniamo

$$\varphi_t(s) = t\varphi(s) + (1-t)s, \quad \gamma_t(s) = \gamma_0(\varphi_t(s)),$$

per $0 \leq t \leq 1$. Si ha così $\varphi_0(s) = s$, $\varphi_1(s) = \varphi(s)$. Dato che

$$\varphi_t(s+1) = t(\varphi(s)+1) + (1-t)(s+1) = \varphi_t(s) + 1,$$

$$\frac{d\varphi_t(s)}{ds} = t \frac{d\varphi(s)}{ds} + (1-t) > 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1,$$

ogni γ_t è una curva parametrizzata equivalente a γ_0 . □

Possiamo quindi dire che due curve C_0 e C_1 sono regolarmente omotope se esiste un'omotopia regolare tra γ_0, γ_1 parametrizzazioni di C_0 e C_1 rispettivamente. Per quanto visto nell'osservazione, questa definizione è indipendente dalle parametrizzazioni scelte.

2.1 Il teorema di deformazione

Il seguente lemma è fondamentale per la dimostrazione del teorema di Whitney-Graustein



Figure 1: Curve regolari chiuse γ con $rot(\gamma) = 1, 0, -2$, rispettivamente.

Lemma 2.2. Sia γ' una mappa continua da I in \mathbb{R}^2 tale che $\gamma'(s) \neq 0$ per ogni $s \in I$. Dato un punto p di \mathbb{R}^2 , allora

$$\gamma(s) = p + \int_0^s \gamma'(u) du$$

è la parametrizzazione di una curva regolare se e solo se

$$\gamma'(0) = \gamma'(1), \quad \int_0^1 \gamma'(u) du = 0 .$$

La dimostrazione di questo fatto viene direttamente dalle definizioni. La seconda relazione corrisponde al fatto che il valore medio di $\gamma'(s)$ è 0.

Identificando la circonferenza unitaria S^1 con \mathbb{R}/\mathbb{Z} , possiamo pensare una curva γ come una mappa continua differenziabile $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Definizione 2.3. Data una curva parametrizzata $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiamo l'indice di rotazione $rot(\gamma)$ come il grado della mappa

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1 \\ s &\longrightarrow \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}. \end{aligned}$$

Notiamo che l'indice di rotazione di γ coincide con l'indice di avvolgimento di $\gamma'(s)$ attorno all'origine. Possiamo quindi vedere $rot(\gamma)$ come il numero di rotazioni con segno che il vettore $\gamma'(s)$ esegue attorno all'origine.

Osservazione. Se esiste un'omotopia regolare tra due curve γ_0 e γ_1 , allora $rot(\gamma_0) = rot(\gamma_1)$. Questo perché $rot(\gamma_t)$ è una mappa continua in t a valori in \mathbb{Z} , dunque è costante. Possiamo quindi definire l'indice di rotazione per una curva regolare C

come $rot(C) = rot(\gamma)$, dove γ è una parametrizzazione qualsiasi di C .

Teorema 2.4. (*Whitney-Graustein*) *Date due curve C_0 e C_1 , tra le due esiste un'omotopia regolare se e solo se $rot(C_0) = rot(C_1)$*

Dimostrazione: La prima implicazione è stata dimostrata con l'osservazione precedente. Supponiamo ora che $rot(C_0) = rot(C_1) = r$. Senza perdita di generalità supponiamo C_0 e C_1 di lunghezza unitaria, γ_0 e γ_1 parametrizzazioni di C_0 e C_1 . rispettivamente, e tali che $|\gamma'_0| \equiv |\gamma'_1| \equiv 1$. Altrimenti, siano C di lunghezza L e δ parametrizzazione di C con $|\delta'| \equiv L$. Allora tramite l'omotopia regolare

$$\delta_t(s) = \delta(0) + \left[\frac{t}{L} + (1-t) \right] (\delta(s) - \delta(0)),$$

possiamo portare δ in δ_1 tale che $|\delta_1| \equiv 1$.

Per proseguire, l'idea è di considerare le mappe γ'_0 e γ'_1 che per ipotesi hanno grado r : per il teorema di Hopf, tra le due esiste un'omotopia C^∞ , che denotiamo con h_t . Modificheremo h_t per traslazione così da ottenere γ'_t come nel Lemma 2.2 e da questa ricaveremo l'omotopia regolare richiesta.

Sia $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$ il rivestimento universale di S^1 . Supponiamo in un primo momento $r \neq 0$. Senza perdita di generalità si può supporre $\gamma'_0(0) = \gamma'_1(0) = p(0)$, altrimenti, ruotando γ_0 e γ_1 attorno all'origine, possiamo ricondurci a questo caso. Per $i = 0, 1$, dato che $\gamma'_i(s) \in S^1$, consideriamo il sollevamento f_i di γ'_i tramite p a partire da 0. Al valore $f_i(s)$ corrisponde l'angolo tracciato da γ'_i a partire da 0 fino all'istante s ; dalla definizione di r segue quindi che

$$f_i(1) = 2\pi \cdot r, \text{ per } i = 0, 1.$$

Dalla teoria dei rivestimenti abbiamo

$$\gamma'_i(s) = p(f_i(s)), \text{ per } i = 0, 1;$$

Definiamo

$$\begin{aligned} f_t(s) &= tf_1(s) + (1-t)f_0(s), \\ h_t(s) &= p(f_t(s)); \end{aligned}$$

e poniamo

$$\gamma'_t(s) = h_t(s) - \int_0^1 h_t(u) du,$$

$$\gamma_t(s) = \gamma_0(0) + t[\gamma_1(0) - \gamma_0(0)] + \int_0^s \gamma'_t(u) du.$$

$\int_0^1 \gamma'_t(s) ds = 0$. Si ha $f_t(0) = 0$, $f_t(1) = 2\pi \cdot r$, e r è un intero, quindi

$$\gamma'_t(1) - \gamma'_t(0) = p(f_t(1)) - p(f_t(0)) = p(2\pi \cdot r) - p(0) = 0.$$

Notiamo inoltre che nella disuguaglianza di Schwarz vale il minore stretto se e solo se le funzioni f , g a cui viene applicata la disuguaglianza sono linearmente dipendenti. Nel nostro caso, prendendo $f = h_t$ e $g = 1$, vale il minore stretto in quanto h_t non è costante, essendo $r \neq 0$. Abbiamo quindi che

$$\left| \int_0^1 h_t(u) du \right| < 1, \quad \text{cioè} \quad \int_0^1 h_t(u) du \notin S^1.$$

Dunque $\gamma'_t(s) \neq 0$ e per il Lemma 2.2 la curva γ_t è la parametrizzazione di una curva regolare chiusa per ogni t . Poichè $\gamma_t(s)$ e $\gamma'_t(s)$ sono continue in entrambe le variabili, $F(t, s) = \gamma_t(s)$ è l'omotopia regolare tra γ_0 e γ_1 cercata.

Sia ora $r = 0$. Se modifichiamo $f_t(s)$ in modo che non sia costante per alcun t avremo come prima $\gamma'_t(s) \neq 0$, e la dimostrazione del caso precedente continuerà a funzionare. Scegliamo s_0 per cui $f_1(s_0) \neq 0$, e in un piccolo intorno di s_0 deformiamo $f_0(s)$ in $f_1(s)$. Tra la nuova f_0 e f_1 troviamo un'omotopia regolare usando il procedimento applicato in precedenza. Dato che $f_t(0) = 0$ e $f_t(s_0) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$, la funzione f_t non è costante per alcun t . \square

Osservazione. Whitney definisce l'omotopia regolare senza richiedere che $\gamma'_t(s)$ sia continua in t . Tuttavia, Geiges fa notare nel suo articolo [2] come questa condizione sia necessaria, altrimenti si potrebbero costruire degli esempi che negano il teorema di Whitney-Graustein.

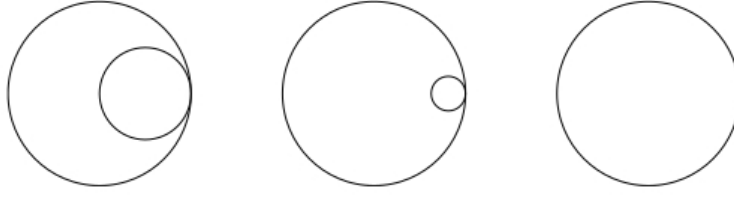


Figure 2: Omotopia tra due curve regolari in cui *rot* non è invariante.

2.2 Calcolo dell'indice di rotazione

Definizione 2.5. Sia $\gamma(s)$ una curva parametrizzata e p punto nel piano. Diciamo che p è un *punto d'incrocio semplice* se ci sono esattamente due valori s_1, s_2 , tali che

$$0 \leq s_1 < s_2 < 1, \quad \gamma(s_1) = \gamma(s_2) = p$$

e se $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ sono vettori linearmente indipendenti.

La presenza di questi punti non dipende dalla parametrizzazione scelta. Inoltre, diciamo che la curva è **normale** se non ammette singolarità a meno di un numero finito di punti d'incrocio semplici.

Lemma 2.6. *Una curva qualsiasi può diventare normale attraverso piccole deformazioni.*

Dimostrazione: Sia $\epsilon > 0$, dividiamo I in intervalli I_1, \dots, I_n in modo tale che gli archi $A_i = \gamma(I_i)$ siano di lunghezza minore di ϵ , e i tangenti lungo A_i abbiano norma che differisce al più di ϵ . Con piccole deformazioni possiamo ottenere degli archi A'_i tali che gli estremi di A'_i non tocchino altri punti della curva. Ora per ogni i e j , possiamo rimpiazzare A'_j con un arco A''_j arbitrariamente vicino e avente gli stessi estremi, in modo che A''_j attraversi A'_i solo in punti di incrocio semplici. Modifichiamo quindi A'_2 in relazione a A'_1 , poi A'_3 in relazione a A'_1 , ed inseguito A'_3 in relazione a A'_2 , cosicchè la sua relazione con A'_1 resti invariata. Si procede in questo modo per ogni i e si ottiene la tesi. \square

Sia \bar{C} l'insieme di punti nel piano corrispondente a $\gamma(s)$. Una **linea di supporto** L per \bar{C} è una retta tangente a \bar{C} che non separa i suoi punti, ovvero \bar{C} si trova interamente in uno dei due semipiani chiusi definiti da L e almeno un punto di \bar{C}

si trova su L . Diciamo che γ ha un **punto di partenza esterno** se \bar{C} ammette una linea di supporto che contiene $\gamma(0)$.

Siano s_1, s_2 con $s_1 < s_2$ punti che definiscono un punto d'incrocio semplice di γ . Se i vettori $\gamma'(s_1)$ e $\gamma'(s_2)$ sono orientati relativamente tra di loro in maniera opposta rispetto agli assi x e y (fissati), diciamo che il punto d'incrocio è **positivo** (Figura 4); nel caso di orientazione concorde diciamo che è **negativo**.

Ad ogni curva parametrizzata possiamo associare i numeri N^+ e N^- che indicano il numero di punti d'incrocio positivi e negativi rispettivamente.

Teorema 2.7. *Se γ è una curva parametrizzata normale con un punto di partenza esterno, allora*

$$\text{rot}(\gamma) = \mu + (N^+ - N^-), \quad \mu = \pm 1.$$

Se muoviamo la curva nel piano in modo che la linea di supporto coincida con l'asse x e la curva si trovi nel semipiano $y \geq 0$, la direzione positiva o negativa di $\gamma'(0)$ lungo l'asse delle x definisce il segno di μ .

Osservazione. Se la curva è semplice allora $\gamma = \pm 1$.

Dimostrazione: Sia T il triangolo formato da tutte le coppie di numeri reali (s_1, s_2) con $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$. Posto $l(s_1, s_2) = \min(s_2 - s_1, 1 + s_1 - s_2)$, definiamo la funzione

$$\psi(s_1, s_2) = \begin{cases} \frac{\gamma(s_2) - \gamma(s_1)}{l(s_1, s_2)} & \text{se } l(s_1, s_2) \neq 0, \\ \gamma'(s_2) & \text{se } s_2 = s_1, \\ -\gamma'(0) & \text{se } s_2 = 1, s_1 = 0. \end{cases}$$

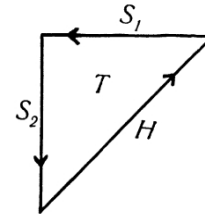


Figure 3

La mappa ψ è continua su T , ed è nulla solo per coppie (s_1, s_2) che indentificano punti d'incrocio

Sia $p = \gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ punto d'incrocio e supponiamo sia positivo. Dato che $s_1 < s_2$, il punto $P = (s_1, s_2)$ non si trova sull'ipotenusa di T . Poichè $\gamma(0)$ è un punto di partenza esterno, sicuramente non è un punto d'incrocio, quindi $s_1 \neq 0$ e $s_2 \neq 1$, cioè P non si trova sul bordo di T . Scegliamo dei numeri t_1, t'_1 vicini a s_1 ,

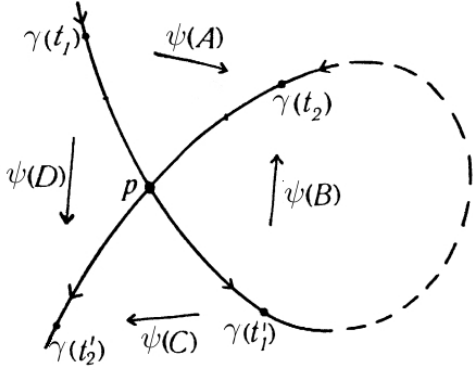


Figure 4

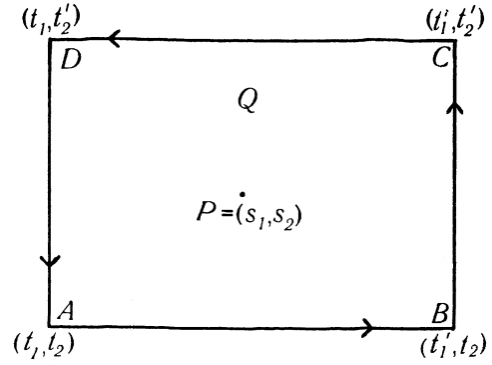


Figure 5

e t_2, t'_2 vicini a s_2 , in modo che

$$t_1 < s_1 < t'_1, \quad t_2 < s_2 < t'_2,$$

e tali che $\gamma(t_1), \gamma(t'_1), \gamma(t_2), \gamma(t'_2)$ siano equidistanti da p . Sia Q il rettangolo in T contenente P , di vertici $(t_1, t_2), (t'_1, t_2), (t'_1, t'_2), (t_1, t'_2)$ (vedere Figura 5).

Siano ora P_1, \dots, P_m i punti di T corrispondenti ai punti d'incrocio di γ , e siano Q_1, \dots, Q_m i corrispondenti rettangoli che li racchiudono, presi in modo che siano a due a due disgiunti. Dividiamo il resto di T in triangoli Q_{m+1}, \dots, Q_n .

Consideriamo $\psi^* = \frac{\psi}{|\psi|}$ e la mappa φ che ad una curva a valori in T (non necessariamente chiusa) associa l'angolo tracciato in S^1 da ψ^* nel percorrere la curva. Percorrendo i bordi dei Q_i in senso antiorario si vede che $\varphi(\partial Q_i) = \pm 1$ per $i = 1, \dots, m$ (Figura 4) se il punto d'incrocio racchiuso da Q_i è positivo o negativo, rispettivamente, mentre $\varphi(\partial Q_i) = 0$ per $i = m+1, \dots, n$.

Consideriamo adesso i bordi dei Q_i come unione degli spigoli $\alpha_{i,j}$ che li compongono. Si ha dunque $\varphi(\partial Q_i) = \sum_j \varphi(\alpha_{i,j})$, da cui risulta

$$N^+ - N^- = \sum_i \varphi(\partial Q_i) = \sum_{i,j} \varphi(\alpha_{i,j}) = \varphi(\partial T).$$

L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che uno spigolo interno a T appartiene esattamente a due dei Q_i . Questo fa in modo che venga percorso in entrambi i versi dando luogo a due termini uguali e di segno opposto che quindi si annullano all'interno

della sommatoria. I rimanenti termini della sommatoria sono i valori di φ sugli spigoli del bordo di T , da cui segue l'uguaglianza.

Siano ora S_1 , S_2 e H rispettivamente i cateti e l'ipotenusa di T . Si vede facilmente che

$$\varphi(H) = \text{rot}(\gamma), \quad \varphi(S_1) = \varphi(S_2) = \mp \frac{1}{2} \quad \text{se } \mu = \pm 1.$$

Di conseguenza abbiamo

$$N^+ - N^- = \varphi(\partial T) = \varphi(H) + \varphi(S_1) + \varphi(S_2) = \text{rot}(\gamma) - \mu.$$

□

3 Dimostrazione del teorema di Whitney tramite la geometria di contatto

3.1 Curve Legendriane

Introduciamo in questa sezione l'idea di struttura di contatto standard su \mathbb{R}^3 , con lo scopo di dare una dimostrazione alternativa al teorema di Whitney-Graustein.

Definizione 3.1. La *struttura di contatto standard* ξ su \mathbb{R}^3 (vedere Figura 6) è il campo di 2-piani dato da $\xi = \ker(dz + xdy)$.

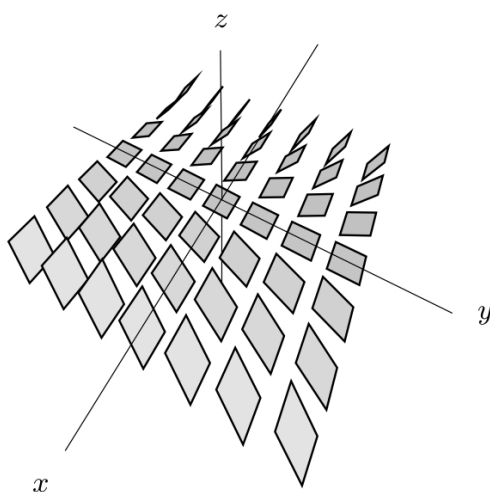


Figure 6: Struttura standard di contatto.

Definizione 3.2. Una curva $\bar{\gamma} : S^1 \rightarrow (\mathbb{R}^3, \xi)$ regolare chiusa è detta *Legendriana* se è ovunque tangente a ξ , cioè se $\bar{\gamma}'(s) \in \xi_{\bar{\gamma}(s)}$ per ogni $s \in S^1$. scrivendo la curva come $\bar{\gamma}(s) = (x(s), y(s), z(s))$, la condizione per $\bar{\gamma}$ di essere Legendriana si traduce in $z' + x \cdot y' \equiv 0$.

La *proiezione frontale* di $\bar{\gamma}$ è la curva piana (non regolare)

$$\bar{\gamma}_F(s) = (y(s), (z(s)));$$

la sua *proiezione Lagrangiana* è la curva

$$\bar{\gamma}_L(s) = (x(s), y(s)).$$

Osserviamo che una curva Legendriana $\bar{\gamma}$ può essere recuperata dalla sua proiezione frontale $\bar{\gamma}_F$, dato che

$$x(s) = -\frac{z'(s)}{y'(s)} = -\frac{dz}{dy}$$

è semplicemente la pendenza negativa della proiezione frontale. Calcolare $x(s)$ in questo modo ha senso quando $y'(s) \neq 0$. Di fatto, gli zeri della funzione $y'(s)$ sono isolati e corrispondono a punti di cuspidi isolati dove $\bar{\gamma}_F$ ha pendenza ben definita. Dato che $x(s)$ è finito ovunque, $\bar{\gamma}_F$ non ha tangenti verticali, e possiamo quindi parlare di cuspidi destre e sinistre.

Similmente, $\bar{\gamma}$ può essere recuperata dalla sua proiezione Lagrangiana $\bar{\gamma}_L$ (unica a meno di traslazione sull'asse z). La coordinata z è data da

$$z(s_1) = z(s_0) - \int_{s_0}^{s_1} x(u)y'(u)du.$$

Osserviamo che integrando lungo una curva chiusa l'integrale $\int xy'du = \int xdy$ misura l'area orientata racchiusa da quella curva. Inoltre, la proiezione Lagrangiana $\bar{\gamma}_L$ di una curva regolare Legendriana $\bar{\gamma}$ è sempre regolare. Infatti, se $y'(s) = 0$, la condizione Legendriana forza $z'(s) = 0$, e quindi per la regolarità di $\bar{\gamma}$ dà $x'(s) \neq 0$. L'idea per dimostrare il teorema di Whitney-Graustein è di assegnare alle curve Legendriane un invariante di omotopia regolare Legendriana. Come nel caso di curve regolari nel piano, l'invariante si chiama indice di rotazione ed il suo valore coincide con l'indice di rotazione della proiezione Lagrangiana della curva. Date due curve regolari chiuse γ_0, γ_1 nel piano, consideriamo i loro sollevamenti Legendriani γ_0, γ_1 ; osservando le proiezioni frontali costruiremo, in maniera combinatoria, un'omotopia regolare tra le due curve. La proiezione Lagrangiana dell'omotopia regolare Legendriana ci darà l'omotopia regolare cercata tra γ_0 e γ_1 .

3.2 Indice di rotazione per curve Legendriane

Il campo di piani ξ è generato dal campo vettoriale $e_1 = \partial_x$ e $e_2 = \partial_y - x\partial_z$. Data curva regolare chiusa Legendriana $\bar{\gamma}$, siano a_1, a_2 le coordinate di $\bar{\gamma}'$ rispetto alla base e_1, e_2 . Consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ s &\longrightarrow (a_1(s), a_2(s)), \end{aligned}$$

e definiamo **indice di rotazione** $rot(\bar{\gamma})$ di $\bar{\gamma}$ come il grado di questa mappa. Il valore di $rot(\gamma)$ è dato dal numero di rotazioni effettuate dal vettore tangente $\bar{\gamma}'$ rispetto alla base orientata e_1, e_2 di ξ . Come nel caso planare, l'indice di rotazione è un invariante di omotopia regolare Legendriana.

Tramite la proiezione $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$, ogni piano $\xi_{\gamma(s)}$ è isomorfo a \mathbb{R}^2 , e la base e_1, e_2 viene mandata nella base standard di \mathbb{R}^2 . Dalle definizioni segue quindi che:

Proposizione 3.3. *L'indice di rotazione di una curva Legendriana in (\mathbb{R}^3, ξ) è uguale all'indice di rotazione della sua proiezione Lagrangiana.*

Quello che ci serve è quindi un modo veloce per calcolare l'indice di rotazione Legendriano. Questo può essere effettuato dalla proiezione frontale γ_F .

Proposizione 3.4. *Sia $\bar{\gamma}$ una curva regolare chiusa Legendriana in (\mathbb{R}^3, ξ) . Guardando la proiezione frontale $\bar{\gamma}_F$ indichiamo con λ_+ e λ_- il numero di cuspidi sinistre orientate verso l'alto e verso il basso, rispettivamente; analogamente chiamiamo ρ_+ e ρ_- rispettivamente il numero di cuspidi destre orientate verso l'alto e il basso. Siano inoltre $c_+ = \lambda_+ + \rho_+$ e $c_- = \lambda_- + \rho_-$ il numero totale di cuspidi orientate verso l'alto e verso il basso, rispettivamente. Allora l'indice di rotazione di $\bar{\gamma}$ è dato da*

$$rot(\bar{\gamma}) = \lambda_- - \rho_+ = \rho_- - \lambda_+ = \frac{1}{2}(c_- - c_+).$$

Dimostrazione: L'indice di rotazione si può ottenere contando il numero di volte che il vettore velocità $\bar{\gamma}'$ attraversa $e_1 = \partial_x$ nel percorrere una volta $\bar{\gamma}$. Poichè $x(s)$ è uguale all'opposto della pendenza della proiezione frontale, il vettore tangente coincide con ∂_x in corrispondenza di cuspidi sinistre orientate verso il basso e cuspidi destre orientate verso l'alto.

In corrispondenza di cuspidi sinistre orientate verso il basso, la componente lungo e_2 del vettore tangente cambia segno da negativo a positivo, dando quindi un contributo positivo all'indice di rotazione. Analogamente, le cuspidi destre orientate verso l'alto danno un contributo negativo all'indice di rotazione. Da questo deriva la formula $rot(\bar{\gamma}) = \lambda_- - \rho_+$. Analogamente, la seconda espressione per l'indice di rotazione si ottiene contando il numero di volte che il vettore tangente attraversa $-e_1$. Dimostrate le prime due formule, la terza segue banalmente. \square

3.3 Dimostrazione del teorema di Whitney-Graustein

Iniziamo classificando le curve regolari chiuse Legendriane sotto omotopia regolare Legendriana.

Proposizione 3.5. *Le classi omotopia regolare Legendriana di curve regolari chiuse Legendriane sono in corrispondenza biunivoca con gli interi. La corrispondenza è data da $[\gamma] \longrightarrow \text{rot}(\gamma)$.*

Dimostrazione: Con l'aiuto delle proposizioni precedenti abbiamo che, fissato un intero k , è possibile costruire una curva $\bar{\gamma}$ con $\text{rot}(\bar{\gamma}) = k$. Dunque, è sufficiente mostrare che due curve regolari Legendriane qualsiasi con uguale indice di rotazione sono regolarmente omotope.

Nella proiezione frontale di una curva Legendriana cuspidi destre e sinistre si alternano; denotiamo con un segno $+$ le cuspidi verso l'alto e con un segno $-$ quelle verso il basso. A meno di omotopia regolare Legendriana, la curva $\bar{\gamma}$ è determinata dalla sequenza di questi segni, partendo, ad esempio, da una cuspidi destra e percorrendo una volta la proiezione frontale. Questo può essere visto attraverso un'omotopia che, partendo da $\bar{\gamma}_F$, allinea le cuspidi sinistre sulla retta $\{y = 0\}$ e le cuspidi destre sulla retta $\{y = 1\}$. Tramite altre omotopie possiamo muovere le cuspidi da entrambi i lati, in modo che siano ordinate su queste rette nell'ordine in cui compaiono percorrendo la curva.

In aggiunta, una coppia $+-$ o $-+$ può essere eliminata dalla sequenza attraverso un'omotopia regolare Legendriana (a patto che la sequenza non sia composta solo da questi due simboli). Tale omotopia può essere osservata in Figura 7 e viene detta *prima mossa di Reidemeister* (si ottiene una mossa analoga ruotando la Figura 7 di 180°).

La sequenza di segni può essere quindi ridotta ad una sequenza contenente solo segni $+$ o solo segni $-$, o ad una sequenza di soli $(+, -)$, o soli $(-, +)$ (esempio in Figura 8). La formula $\text{rot}(\gamma) = \frac{1}{2}(c_- - c_+)$ dà luogo alle seguenti possibilità: se $\text{rot}(\bar{\gamma})$ è positivo (risp. negativo), avremo una sequenza di $2\text{rot}(\bar{\gamma})$ segni $-$ (risp. segni $+$); se $\text{rot}(\bar{\gamma}) = 0$, dobbiamo avere una sequenza $(+, -)$ o $(-, +)$. La dimostrazione si conclude osservando che due curve con sequenze $(+, -)$ e $(-, +)$, rispettivamente, sono regolarmente omotope: basta applicare due volte mosse di Reidemeister di primo tipo. \square



Figure 7: Prima mossa di Reidemeister.

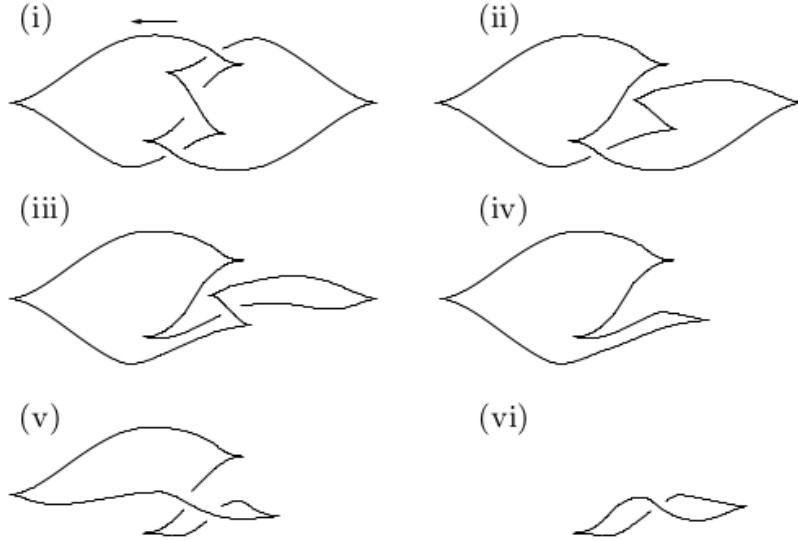


Figure 8: Esempio di omotopia regolare Legendriana.

Dimostrazione del teorema di Whitney-Graustein: Quello che dobbiamo mostrare è che prese due curve regolari chiuse $\gamma_0, \gamma_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (dove pensiamo \mathbb{R}^2 come il piano (x, y)) con $\gamma_0 = \text{rot}(\gamma_1)$, esiste tra loro un'omotopia regolare.

Possiamo supporre che le curve γ_i soddisfino la condizione delle aree $\oint_{\gamma_i} x dy = 0$ e quindi, che si possano sollevare a curve regolari chiuse Legendriane $\bar{\gamma}$. Per la Proposizione 3.3 abbiamo $\text{rot}(\bar{\gamma}_i) = \text{rot}(\gamma_i)$ e, dalla Proposizione 3.5, si ottiene che $\bar{\gamma}_0$ e $\bar{\gamma}_1$ sono regolarmente omotope, in quanto $\text{rot}(\bar{\gamma}_0) = \text{rot}(\gamma_0) = \text{rot}(\gamma_1) = \text{rot}(\bar{\gamma}_1)$. La proiezione Lagrangiana dell'omotopia tra $\bar{\gamma}_0$ e $\bar{\gamma}_1$ è l'omotopia regolare cercata tra γ_0 e γ_1 , dato che la proiezione Lagrangiana di una curva regolare Legendriana è una curva regolare. \square

References

- [1] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Compositio Mathematica, tome 4 (1937), p. 276-284
- [2] H. Geiges, *A contact geometric proof of the Whitney-Graustein theorem*, Enseign. Math. (2) 55 (2009), 93-102
- [3] J.W. Milnor, "Topology from the differential viewpoint", Princeton University Press, 1997