ANALISIS A ING Y FCEN **FINAL 1C 2019** UBAXXI **TEMA 1 - 10 /7/19**	APELLIDO:	SOBRE Nº:
	NOMBRES:	Duración del examen: 90’
	DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº:	CALIFICACIÓN: Apellido del evaluador:

El examen consta de ejercicios para completar en los cuales deberá escribir las respuestas en las líneas punteadas y ejercicios de opción múltiple donde se debe marcar la respuesta correcta (una sola respuesta es correcta en cada ejercicio). El desarrollo de los ejercicios se realizará en hoja borrador que no se entregará para su corrección.

Ejercicio 1. (1 punto) Sea la función f definida por $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$, entonces:

☐	$y = x - 4$ es asíntota oblicua de f	☐	$y = 1$ es asíntota horizontal de f
☒	$y = x + 1$ es asíntota oblicua de f	☐	$\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = \infty$

Solución. En primer lugar, nos fijamos si tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = +\infty$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x-1} = -\infty$$

Por lo tanto, no tiene AH ni del lado derecho ni del izquierdo.

Ahora, nos fijamos si f tiene asíntota oblicua, calculamos $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-x} = 1$

$m = 1$ es la pendiente para la asíntota oblicua, ahora debemos calcular $\lim_{x\to\infty}(f(x) - x) =$ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty}\frac{-4+x}{x-1} = 1$, éste será b, así tenemos asíntota oblicua $y = x + 1$

Ejercicio 2. (1 punto) Sea la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x+1)}{|x^2-2x-3|} & \text{si x} \neq -1 \text{ y x} \neq 3 \\ 1 & \text{si x} = -1 \text{ o x} = 3 \end{cases}$$

☐	f discontinua evitable en x = 3	☒	f es discontinua esencial en x = -1
☐	f posee una asíntota vertical en x = -1	☐	$x = -1$ es un cero de f

Solución. Como $f(-1) = 1$, entonces $x = -1$ no puede ser un cero de f.

$$\lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{sen\,(x+1)}{|x+1|}}_{\to \frac{sen(4)}{4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to \infty} = \infty$$

Por lo tanto, f es discontinua esencial en $\mathrm{x} = 3$ (no es evitable)

Estudiemos que pasa en las cercanías de $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{sen\,(x+1)}{|x+1||x-3|}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \underbrace{\frac{sen\,(x+1)}{-(x+1)}}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to \frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \underbrace{\frac{sen\,(x+1)}{(x+1)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{|x-3|}}_{\to 1/4} = \frac{1}{4}$$

No existe el $\lim_{x\to -1} f(x)$ Por lo tanto, f es discontinua esencial con salto finito en $x = -1$. En consecuencia, no presenta asíntota vertical en $x = -1$.

Ejercicio 3. Sea la función f definida por $f(x) = (x-1)ln(x^2-1)$.

a. (1 punto) La/s ecuación/es de asíntota/s vertical es/son:

- [ ] $x = 1$ y $x = -1$
- [x] $x = -1$
- [ ] $x = 1$
- [ ] No tiene asíntotas verticales.

Solución. En primer lugar, calculamos el dominio de la función, por lo que pedimos que $x^2 - 1 > 0$, Resolviendo la inecuación obtenemos que $Df = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, entonces, las asíntotas verticales podrían estar en los bordes de dichos intervalos, es decir, en $x = 1$ y $x = -1$. Analizamos los límites laterales para cada valor de x:

$$\lim_{x\to -1^-} (x-1)ln(x^2-1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)ln(x^2-1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{ln(x^2-1)}{(x-1)^{-1}} =_{L'H} \lim_{x\to 1^+} \frac{(x^2-1)^{-1}2x}{-(x-1)^{-2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)^{-1}2x}{-(x-1)^{-1}} = 0$$

Luego, la única asíntota vertical es $x = -1$.

b. (1 punto) La derivada primera es:

☐ $f'(x) = \ln(x^2-1) + \frac{x-1}{x^2-1}$	☐ $f'(x) = 1.\frac{2x}{x^2-1}$
■ $f'(x) = \frac{(x+1)\ln(x^2-1)+2x}{x+1}$	☐ $f'(x) = \ln(x^2-1) + \frac{x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2-1}$

Solución.

$$f'(x) = ln(x^2-1) + (x-1)(x^2-1)^{-1}2x$$

$$f'(x) = ln(x^2-1) + (x+1)^{-1}2x = ln(x^2-1) + \frac{2x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\ln(x^2-1)+2x}{x+1}$$

Ejercicio 4. Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ -x^2+2x-1 & x > 0 \end{cases}$

a. (1 punto) Indicar intervalos de crecimiento y decrecimiento

IC = (0, 1) ID = (-inf, 0) U (1, +inf)

....

b. (1 punto) Indicar extremos relativos: dónde se producen y sus valores

Max en x = 1, de valor 0

....

Solución. En primer lugar, calculamos el dominio de la función. $Df = R$. Luego derivamos ambas expresiones:

$$f'(x) = -e^{-x}, \qquad si\ x < 0$$

$$f'(x) = -2x+2, \qquad si\ x > 0$$

En x = 0 no es derivable, ni siquiera es continua.

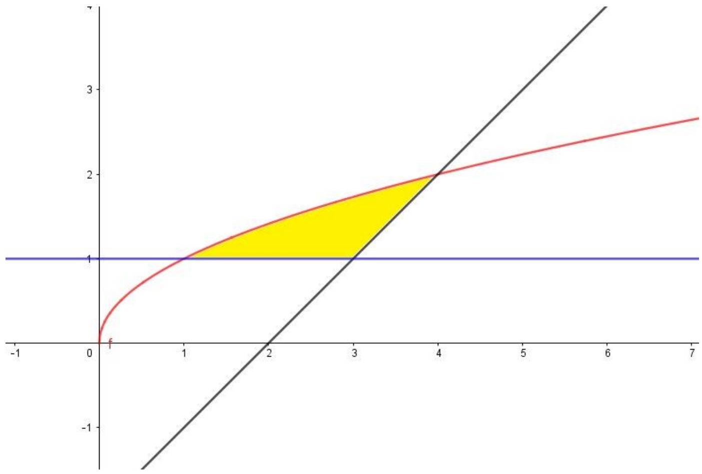
La primera expresión nunca se anula, es siempre negativa, por lo que de ahí surge un intervalo de decrecimiento. La segunda expresión se anula cuando x = 1, que es mayor a cero, por lo tanto, nos quedan armados dos intervalos: (0, 1) y de (1, +inf).

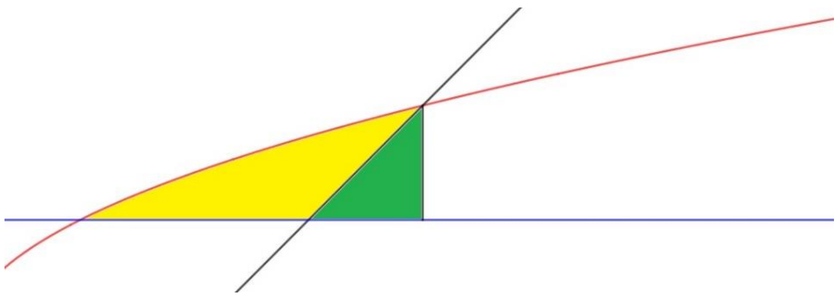
En el primer intervalo la derivada es positiva, por lo que la función es creciente, en el segundo, negativa, por lo tanto, es decreciente. Y en x = 1 hay un máximo local de valor f (1) = 0.

Ejercicio 5. (1 punto) El área que encierran las siguientes tres curvas: $y = \sqrt{x},\ y = x - 2,\ y = 1$ queda determinada por:

- [x] $\int_1^4 (\sqrt{x} - 1)dx - 1/2$
- [ ] $\int_1^3 (\sqrt{x} - 1)dx + 1/2$
- [ ] $\int_0^1 (\sqrt{x} - x + 2)dx + \int_1^3 (3 - x)dx$
- [ ] $\int_0^1 (1 - x)dx + \int_1^3 (3 - x)dx$

Solución. Viendo los gráficos se ve cual es la respuesta correcta porque con la integral se calcula toda el área pintada y se le resta la parte verde que está de más. Y esa área es el área de un triángulo de base y altura 1.





Ejercicio 6. (1 punto) Sean las siguientes series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - 3b_n + \frac{1}{2^n}\right)$ es:

☐	A – 3B	■	A – 3B + 1	☐	A – 3B + 2
☐	∞	☐	A – 3B + $\frac{1}{2}$	☐	A – 3B - 1

Solución. Por propiedades de series podemos dividir el cálculo pedido en el cálculo de tres series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - 3b_n + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty}(-3b_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

Utilizando propiedades:

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n) - 3\sum_{n=1}^{\infty}(b_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n =$$

En la primera sabemos que el resultado es A. En la segunda, es B multiplicado por 3. Y en la tercera tenemos una serie geométrica, por lo que aplicamos la fórmula. Hay que tener cuidado porque no comienza en 0, sino en 1, por lo que hay que restar el primer término: 1.

$$= A - 3B + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = A - 3B + 2 - 1 = A - 3B + 1$$

Ejercicio 7. (1 punto) El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en x = 0 de la función g definida por:

$$g(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt \quad \text{es:}$$

$$Q(x) = 2x + \frac{8}{3}x^3$$

……………………………………………………………………………..

Solución.

$$g(x) = \int_0^{2x} e^{t^2}\,dt \to g(0) = \int_0^{0} e^{t^2}\,dt = 0$$

$$g'\,(x) = e^{4x^2}.2 \to g'(0) = 2$$

$$g''\,(x) = e^{4x^2}.16x \to g'(0) = 0$$

$$g'''\,(x) = e^{4x^2}.128x^2 + \ e^{4x^2}.16 \to g'(0) = 16$$

$$Q(x) = 2x + \frac{16}{3!}x^3 = 2x + \frac{8}{3}x^3$$

Ejercicio 8. (1 punto) Hallar la integral indefinida:

$$\int \frac{x + e^{2\sqrt{x}-4}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{x + e^{2\sqrt{x}-4}}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + e^{2\sqrt{x}-4} + C$$

……………………………………………………………………………………………

Solución.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}}\, dx + \int \frac{e^{2\sqrt{x}-4}}{\sqrt{x}} dx$$

El integrando de la primera integral se puede expresar $x^{\frac{1}{2}}$. En la segunda integral aplicamos el método de sustitución:

$$u = 2\sqrt{x} - 4 \quad du = \frac{2}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Así

$$\int e^u\, du = e^u$$

Finalmente,

$$\int \frac{x + e^{2\sqrt{x}-4}}{\sqrt{x}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + e^{2\sqrt{x}-4} + C$$