| AN MAT A. ING Y FCEN<br>2P 2C 2019<br>UBAXXI<br>TEMA 1 27/11/19 | APELLIDO: | SOBRE Nº: |
|---|---|---|
| | NOMBRES: | Duración del examen: 90' |
| | DNI/CI/LC/LE/PAS. Nº: | CALIFICACIÓN:<br>Apellido del evaluador: |

**El examen consta de ejercicios para completar en los cuales deberá escribir las respuestas en las líneas punteadas y ejercicios de opción múltiple donde se debe marcar la respuesta correcta (una sola respuesta es correcta en cada ejercicio). El desarrollo de los ejercicios se realizará en hoja borrador que no se entregará para su corrección.**

**Ejercicio 1.** Sea una función $f$ con derivadas continuas de orden 3, tal que su polinomio de Taylor de orden 2 centrado en $x_0 = 4$ es $P(x) = 6 - 3(x-4) + 4(x-4)^2$.

Sea $F(x) = 5x + \int_4^{x+2} t.f(t)dt$

a) (1 punto) Calcular F´(x)……………………………………………

b) (1 punto) Calcular el polinomio de Taylor de F de orden 2 centrado en $x_0 = 2$

………………………………………………………………………………………………

Solución:

Se deriva F como una suma de funciones y en el segundo término se aplica el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F'(x) = 5 + (x+2).f(x+2)$$

Se vuelve a derivar para el cálculo del polinomio de Taylor:

$$F''(x) = f(x+2) + (x+2).f'(x+2)$$

Evaluando en el punto pedido:

$$F(2) = 10$$

$$F'(2) = 5 + 4.f(4) = 29$$

(para calcular f(4) se usa el polinomio de Taylor de f )

$$F''(2) = f(4) + 4.f'(4) = -6$$

$$\text{Así: } P_F(x) = 10 + 29(x-2) - \frac{6}{2!}(x-2)^2$$

**Ejercicio 2.** (2 puntos) Sean $f: (0; +\infty) \to R$ definida por $f(x) = 5x.\ln(x)$ y $g: (0; +\infty) \to R$ definida por $g(x) = (x+12).\ln(x)$

El área encerrada entre los gráficos de las funciones $f$ y $g$ se obtiene calculando:

☐ $\int_1^3 (g(x) - f(x))dx$

☐ $\int_1^3 (f(x) - g(x))dx$

☐ $\int_1^3 (g(x) + f(x))dx$

$\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$  $\int_0^3 (f(x) - g(x))dx$  $\int_0^5 (g(x) - f(x))dx$

Solución:
Se buscan los puntos de intersección de las curvas:
$5x \ln x = (x+12)\ln x \quad \rightarrow \quad (4x-12)\ln x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3 \text{ o } x = 1$
Tomando un punto de este intervalo y evaluando ambas funciones se determina que $g(x) > f(x)$ si $x \in (1;3)$
Así el área se calcula haciendo

$$\int_1^3 (g(x) - f(x))dx$$

**Ejercicio 3.** Dada la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{a^n\sqrt{3n+1}}$

a) (1 punto) El valor de $a > 0$ para que la serie tenga radio de convergencia igual a 3 es: ……………………………….

b) (1 punto) Para el valor de $a$ hallado, el intervalo de convergencia es:

$(-\infty;5]$  $[-1;5]$  $(-1;5)$
$[-1;5)$  $(-3;3)$  $(2;+\infty)$

Solución:
Aplicando el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{3^n(x-2)^n}{a^n\sqrt{3n+1}}\right|} = \frac{3|x-2|}{a.\ \sqrt[2n]{3n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3|x-2|}{a} < 1$$

De donde se ve el radio de convergencia $(a > 0)$:

$$|x-2| < \frac{a}{3}$$

Así $a = 9$
Para hallar el intervalo de convergencia: $|x-2| < 3 \ \rightarrow \ -1 < x < 5$
Se debe ver qué sucede en los bordes de este intervalo:
Si $x = 5$, reemplazando en la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n 3^n}{9^n\sqrt{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

Y ésta última diverge, si usamos comparación con la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ que es una serie p, con p = ½
Si $x = -1$ reemplazando en la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(-3)^n}{9^n\sqrt{3n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}}$$

Y ésta última converge, por ser una serie alternada que cumple el criterio de convergencia
Por lo tanto el intervalo de convergencia es $[-1;5)$

**Ejercicio 4.** Calcular las siguientes primitivas:

a) (1 punto) $\int \frac{3x^2+e^{2\sqrt{x}-6}}{\sqrt{x}}dx$

…………………………………………………………………………………………

b) (1 punto) $\int \frac{4x}{x^2+2x-3}dx$

…………………………………………………………………………………………

Solución:

$$\int \frac{3x^2 + e^{2\sqrt{x}-6}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int 3x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int \frac{e^{2\sqrt{x}-6}}{\sqrt{x}}\, dx = 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + e^{2\sqrt{x}-6} + C$$

En la segunda integral se usa la sustitución $u = 2\sqrt{x}$-6

Para el ítem b) se usa el método de fracciones simples:

$$\int \frac{4x}{x^2 + 2x - 3} dx = \int \frac{1}{x - 1} + \frac{3}{x + 3} dx$$

$$= \ln|x - 1| + 3\ln|x + 3| + C$$

**Ejercicio 5.** (2 puntos) El valor de $a > 0$ para que el área encerrada entre la curva de ecuación $y = a\cos(2x)$, el eje x, con $0 \leq x \leq 3\pi/4$ sea igual a $9/2$ es:

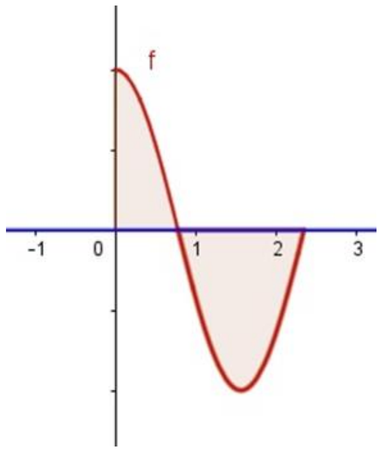
…………………………………………………………………………………………

Solución:

Si graficamos la función $f(x) = a\cos(2x)$ teniendo en cuenta que a es un valor positivo observamos:

$f(0) = a\cos(0) = a$

Y corta al eje x en dos valores: $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$, por lo tanto, el área que nos piden es la que está sombreada en la figura:




Por lo tanto, debemos plantear dos áreas:

$A1 = \int_0^{\pi/4} a\cos(2x)\,dx = \frac{a}{2} sen(2x)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{a}{2}$

Y la otra parte será:

$A2 = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} -a\cos(2x)\,dx =$

$$= -\frac{a}{2} sen(2x)\Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

Sumamos las dos áreas e igualamos a lo pedido:

$$A1 + A2 = \frac{a}{2} + a = \frac{3}{2}a = \frac{9}{2}$$

Despejando, nos queda que a = 3.