ANÁLISIS MATEMÁTICO A
Ingeniería - Ciencias Exactas y Naturales
EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES

Silvina Del Duca

Silvia Vietri

Primer cuatrimestre 2016

Índice general

Notas para Práctica 2

Ejercicios resueltos

2.1. Método de sustitución e integración por partes

Ejercicio 2.1. Mostrar que las integrales siguientes se pueden resolver con cualquiera de los dos métodos, sustitución e integración por partes

a. $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$

b. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

Solución:

a. Para resolver el primer ejercicio aplicamos el **método de Sustitución**:

$$u = \sin(x) \to du = \cos(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \int u du \\
&= \frac{u^2}{2} + cte \\
&= \frac{\sin^2(x)}{2} + cte
\end{aligned}$$

Este ejercicio lo podríamos haber resuelto aplicando el **método Integración por partes** de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
u = \sin(x) &\quad\to\quad du = \cos(x)dx \\
dv = \cos(x) &\quad\to\quad v = \sin(x)
\end{aligned}$$

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx$$

Pasamos la integral sumando al otro miembro:

$$2\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \sin^2(x)$$

Pasamos el 2 dividiendo al otro miembro y obtenemos la integral pedida:

$$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + cte$$

b. Para resolver el segundo ejercicio aplicamos el **método de Sustitución:** Primero resolvemos la integral indefinida y luego aplicamos Regla de Barrow a la primitiva:

$$u = \ln(x) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

Sustituimos para obtener:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x}dx &= \int u\,du \\ &= \frac{u^2}{2} + cte \\ &= \frac{\ln^2(x)}{2} + cte \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \frac{\ln^2(x)}{2}\,\Big|_1^e \\ &= \frac{\ln^2(e)}{2} - \frac{\ln^2(1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Este ejercicio tambien lo podemos resolver por el **método de Integración por partes.** El procedimiento es similar a la integración por partes del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned} u = \ln(x) \quad &\rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx \\ dv = \frac{1}{x} \quad &\rightarrow \quad v = \ln(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \ln^2(x)\,|_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx \\
2\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \ln^2(x)\,|_1^e \\
&= \ln^2(e) - \ln^2(1) \\
&= 1 \\
\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Mostrar que la integral $\int \left[\left(x^2-1\right)(x+1)\right]^{-\frac{2}{3}} dx$ puede resolverse usando cualquiera de las sustituciones siguientes:

a. $u = \frac{x-1}{x+1}$

b. $u = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$

Solución:

a. Resolvemos aplicando la primer sustitución:

$$u = \frac{x-1}{x+1} \quad \to du = \frac{1.(x+1)-(x-1),1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{2}{(x+1)^2}\,dx \quad \to \frac{1}{2}\,du = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Antes de hacer la sustitución, reemplazamos en el integrando la diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned}
\int \left[\left(x^2-1\right)(x+1)\right]^{-\frac{2}{3}} dx &= \int \left[(x-1)(x+1)(x+1)\right]^{-\frac{2}{3}} dx \\
&= \int \left[(x-1)(x+1)^2\right]^{-\frac{2}{3}} dx \\
&= \int (x-1)^{-\frac{2}{3}}(x+1)^{-\frac{4}{3}}\,dx \\
&= \int \frac{(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{(x+1)^{\frac{4}{3}}}\,dx \\
&= \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \int u^{-\frac{2}{3}}\,\frac{1}{2}\,du \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + cte \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} + cte
\end{aligned}$$

b. Utilizamos la segunda sustitución.

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} \\
du &= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1.(x+1)-(x-1),1}{(x+1)^2}\right) dx \\
du &= \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{2}{(x+1)^2}\, dx \\
\frac{3}{2}du &= \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{(x+1)^2}
\end{aligned}$$

Reemplazamos el integrando, como hicimos arriba:

$$\begin{aligned}
\int \left[(x^2-1)\,(x+1)\right]^{-\frac{2}{3}} dx &= \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\frac{2}{3}} \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \int \frac{3}{2}\, du \\
&= \frac{3}{2}\, u + cte \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} + cte
\end{aligned}$$

2.2. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Ejercicio 2.3. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 3 en $x=0$ de:

$$f(x) = \int_0^x (1+t)^3 \ln(1+t)\, dt$$

Solución:

La expresión del polinomio de Taylor de orden 3 es:

$$P_3(x) = f\,(0) \;+\; f\,'(0)\, x \;+\; \frac{f\,''(0)}{2!}\, x^2 \;+\; \frac{f\,'''(0)}{3!}\, x^3$$

Encontramos los valores necesarios para obtener los coeficientes:

$$f\,(0) = \int_0^0 (1+t)^3\, \ln(1+t)\, dt = 0$$

Para hallar la derivada primera de f podemos usar el TFCI, dado que la función

$(1+x)^3 \ln(1+x)$ es continua para $x > -1$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x)^3\ \ln(1+x) \rightarrow f'(0) = (1+0)^3\ \ln(1+0) = 1{,}0 = 0\\
f''(x) &= 3(1+x)^2\ \ln(1+x) + (1+x)^3\ \frac{1}{1+x} = 3(1+x)^2\ \ln(1+x) + (1+x)^2\\
f''(0) &= 3(1+0)^2\ \ln(1+0) + (1+0)^2 = 3{,}1{,}0 + 1 = 1\\
f'''(x) &= 6(1+x)\ \ln(1+x) + 3(1+x)^2\ \frac{1}{1+x} + 2(1+x) = 6(1+x)\ \ln(1+x) + 5(1+x)\\
f'''(0) &= 6(1+0)\ \ln(1+0) + 5(1+0) = 6{,}1{,}0 + 5 = 5
\end{aligned}$$

Ahora podemos construir el polinomio:

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= 0 + 0x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3\\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3\\
&= x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\,x\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4. Determinar la derivada de la siguiente función: (Ej 58 pág 395 Stewart)

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan(t)\ dt$$

Solución:

Antes de hacer la derivada escribimos la función de la siguiente forma, usando la propiedad de la linealidad de integrales definidas:

$$F(x) \;=\; \int_{\sqrt{x}}^{0} \arctan(t)\ dt\ + \int_{0}^{2x} \arctan(t)\ dt$$

Por otro lado, como por propiedad se sabe que

$$\int_{\sqrt{x}}^{0} \arctan(t)\ dt \;=\; -\int_{0}^{\sqrt{x}} \arctan(t)\ dt$$

Entonces, la función nos queda escrita como:

$$F(x) \;=\; -\int_{0}^{\sqrt{x}} \arctan(t)\ dt\ + \int_{0}^{2x} \arctan(t)\ dt$$

Como la función $f(x) = \arctan(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, aplicaremos el TFCI y la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\arctan(\sqrt{x})\ \left(\sqrt{x}\right)' + \arctan(2x)\ (2x)' \\ &= -\arctan(\sqrt{x})\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \arctan(2x)\ 2 \end{aligned}$$

Si lo reescribimos, nos queda:

$$F'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}) + 2\ \arctan(2x)$$

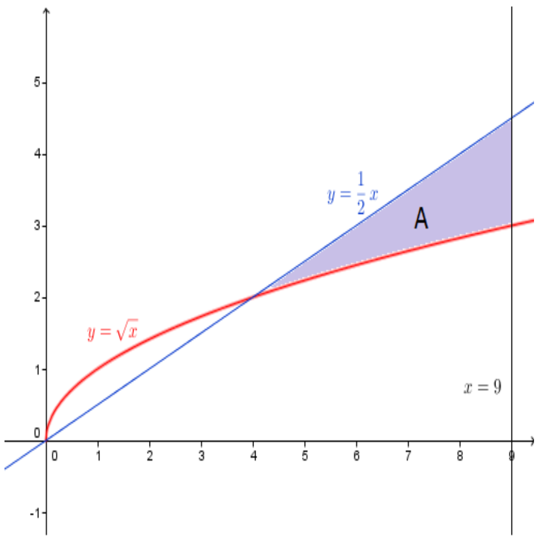
2.3. Cálculo de áreas

Ejercicio 2.5. (Ej 25 pág 427 Stewart) Grafique cada una de las siguientes funciones en un mismo grafico y coloree el area que queda encerrada. Calcule dicha área.

$$y = \sqrt{x};\ y = \frac{1}{2}x \quad ;\ x = 9$$

Solución:

Representando gráficamente, el área encerrada entre las tres curvas es la indicada como Área A:



Dicha área se calcula como $A = \int_a^9 (\frac{1}{2}\ x - \sqrt{x})\, dx$, donde a es el valor de abscisa donde se cortan $y = \sqrt{x}$ e $y = \frac{1}{2}x$. Igualamos las funciones para encontrar el valor de abscisa deseado: $\sqrt{x} = \frac{1}{2}x$. Resolvemos la ecuación: $(\sqrt{x})^2 = (\frac{1}{2}x)^2 \quad \rightarrow x = \frac{1}{4}\ x^2$ $\rightarrow \frac{1}{4}\ x^2 - x = 0$.

Buscamos las raíces de la cuadrática y obtenemos $x = 0$ y $x = 4$ y a partir del gráfico se deduce que $a = 4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_4^9 (\frac{1}{2}\, x - \sqrt{x})dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} \mid_4^9 \\ &= \left(\frac{81}{4} - 18\right) - (4 - \frac{16}{3}) \\ &= \frac{81}{4} + \frac{16}{3} - 22 \\ A &= \frac{43}{12} \end{aligned}$$