ÁLGEBRA A

Nicolás A. Capitelli
Rosa María Escayola
Ximena L. Fernández
Gerardo D. Rossi

EUDEBA

UBA XXI
EDICIÓN
2020

Álgebra A

Universidad de Buenos Aires

Rector	Alberto Edgardo Barbieri
Vicerrector	Juan Pablo Más Vélez
Secretaría de Asuntos Académicos	María Catalina Nosiglia
Subsecretaría de Innovación y Calidad Académica	Marilina Lipsman
PROGRAMA UBA XXI	
Coordinadora General	Claudia Lombardo
Vicecoordinadora	Laura Basabe
Coordinación Desarrollo Pedagógico	María Alejandra Codazzi
	Camila Rodríguez
	Marianela Renzi
Coordinación Producción Transmedia	Liliana Castillo
	Griselda Raffo
	Ariel F. Guglielmo

Álgebra A / coordinación general de Claudia Lombardo.- 1a ed.-
Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba, 2020.
Libro digital, PDF - (UBA XXI)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-23-2970-3

1. Álgebra. 2. Universidades Públicas. I. Lombardo, Claudia, coord.
CDD 512

Eudeba
Universidad de Buenos Aires

Primera edición: marzo de 2020

Editorial Universitaria de Buenos Aires
Sociedad de Economía Mixta
Av. Rivadavia 1571/73 (1033) Ciudad de Buenos Aires
Tel: 4383-8025 / Fax: 4383-2202
www.eudeba.com.ar

Presentación

UBA XXI es un Programa de Educación a Distancia de la Universidad de Buenos Aires, que asume los desafíos de enseñanza del Nivel Superior. Se trata de una propuesta pedagógica con estrategias de enseñanza orientadas a promover y consolidar aprendizajes de calidad en los estudiantes que opten por continuar sus estudios en la UBA.

Álgebra es un texto diferente en el que van a encontrar explicaciones de distintos conceptos con ejemplos básicos, incluidos para acompañarlos, en la compresión de las ideas que se encuentran detrás de las definiciones y los objetos que van a estudiar.

UBA XXI a través de diferentes recursos instala debates para estimular el avance de las comunidades de conocimiento en el marco de nuevos escenarios de enseñanza y aprendizaje, sin perder de vista su complejidad.

Los invitamos a leer *Álgebra* con el deseo de promover nuevas lecturas que les permitan resignificar y contextualizar los temas aquí presentados.

Claudia Lombardo
Coordinadora General
UBA XXI

A mi mujer Melina y mis hijos Agustín y Santiago, con la promesa que nunca estaré en el lado equivocado otra vez.

Nicolás.

A Ale y Tiara, por animarme a volar y cumplir mis sueños. A Analía por alentarme a asumir este proyecto.

Rosa María.

A todas las personas que me crucé y me sigo cruzando en este camino de aprender y enseñar matemáticas.

Ximena.

A Pasio por su ayuda con el lenguaje. A mis viejos y hermanos por todo lo demás.

Gerardo.

Introducción

Este libro es, probablemente, muy diferente a otros libros o apuntes de matemática que hayan leído: aquí encontrarán un importante caudal de explicaciones de conceptos y ejemplos básicos incluidos para ayudarlos a entender las ideas detrás de las definiciones y los objetos que estudiaremos. Muchos textos de matemática presentan las teorías desde un punto de vista formal y abstracto ("la teoría es esta y así funciona") en lugar de explicar el origen y las implicaciones y aplicaciones de la misma, lo que clarifica completamente los conceptos que la conforman, de manera que resulta casi natural su existencia. Asimismo, mucha de la teoría contenida en este libro tiene orígenes (y aplicaciones) geométricas, y se ha hecho énfasis en resaltar estos hechos, dejando en un segundo plano la "abstractización" de la teoría para dar lugar a un enfoque más visual e intuitivo.

El cuerpo del texto está separado en dos partes. En la primera donde se desarrollan aspectos más geométricos, aunque no exentos de álgebra, mientras que en la segunda los aspectos son netamente algebraicos, lo cual no obsta a que se los relacione con los de la primera parte. Al final de esa segunda parte encontrarán las resoluciones de los experimentos.

Para los alumnos que no estén familiarizados con el formato de los libros de matemática, es sugerido que tomen el curso virtual *LECMat,* disponible *gratuitamente* en el campus virtual de UBA XXI.

La siguiente lista muestra los distintos tipos de categorías que contiene el apunte:

1. Definiciones, Teoremas y Proposiciones.
2. Ejemplos.
3. Observaciones.
4. Experimentos.
5. Para pensar (representado por una lamparita).
6. Información complementaria (representada por una letra "i").

Teniendo en cuenta estas disposiciones, el estudiante debe tener presente el siguiente orden de prioridades.

1. PRIORIDAD 1.
   - Definiciones, Teoremas, Proposiciones.
   - Ejemplos.
2. PRIORIDAD 2.
   - Observaciones.
   - Experimentos.
   - Texto en *cursiva*.
3. PRIORIDAD 3.
   - Para pensar.
   - Información complementaria.

Sugerimos que, en una primera lectura, el apunte sea leído en su totalidad. Para el alumno que desee, en lecturas posteriores, utilizar el apunte, puede optar por leer solo las categorías de PRIORIDAD 1 ó de PRORIDAD 1 y 2, según el grado de produndidad que desee encarar.

En próxima página encontrarán ejemplos de los distintos formatos y categorías del apunte.

Página ejemplo

El texto sin formato (estándar) es texto de lectura obligatoria. En él se introducirán objetos, se explicarán conceptos y se resolverán problemas concretos necesarios para el desarrollo de la teoría.

Definición 1 Las definiciones, Proposiciones y Teoremas aparecen con una barra vertical naranja gruesa sobre el margen izquierdo. Esto es indicativo de información esencial de la teoría.

Teorema 1 Los Teoremas, Proposiciones y Lemas aparecen con la barra vertical gruesa también.

■ **Ejemplo 1** Los ejemplos aparecen en letra más pequeña y centrados en la página. Esto ayudará al estudiante a indentificarlos rápidamente dentro del texto. En general, muestran como llevar a cabo cálculos introducidos en la teoría y de qué manera escribir la solución de los ejercicios. ■

Observación 2 *Las observaciones aparecen con una barra vertical naranja finita sobre el margen izquierdo. Esta categoría contiene información y notas importantes que complementan la teoría.*

Experimento 1 Los experimentos son "ejercicios guiados" que se dejan al estudiante para resolver. Esta es la mejor manera de aprender los conceptos introducidos. Muchas veces, cuando se considera que el estudiante tiene las herramientas para entender una definición o una cuenta por su lado, se lo deja planteado para que lo descubra por su cuenta dentro de un experimento. Las resoluciones de los experimentos se encuentran al final del libro. ■

Esta sección "Para pensar..." tiene por objetivo dejarle al estudiante una pregunta relacionada con la teoría que acaba de aprender. Le será áltamente beneficioso tomarse un tiempo para pensar estas preguntas ya que le ayudará a comprender en más profundida muchos de los conceptos desarrollados.

Esta sección "Información complementaria" tiene por objetivo complementar algunos de los conceptos introducidos para una formación más integral del estudiante.

Contenidos

II Parte 2

Parte 1

1. Vectores

Los vectores *constituyen el principal objeto de estudio de la mayor parte del contenido de este libro. Son objetos sencillos que tienen interpretaciones muy concretas, tanto geométricas como algebraicas. En este capítulo vamos a definirlos y estudiar sus propiedades principales.*

1.1 Conjuntos

Comenzaremos viendo algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos que atraviesan el desarrollo de este libro. Es importante tenerlas presentes e interiorizarlas.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo describir conjuntos: por extensión o por comprensión.
- Los conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$.
- Las operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

1.1.1 ¿Qué es un conjunto?

Gran parte de la Matemática que conocemos se cimenta alrededor de la noción de *conjunto*. Un *conjunto* es una colección de *objetos* o *elementos*. Estos objetos o elementos pueden ser de cualquier tipo: concretos (como los útiles en nuestra cartuchera o las hojas de un árbol) o abstractos (como los números que usamos para contar o los puntos en un plano). Un conjunto puede tener cualquier tipo de elementos, concretos o abstractos, y cualquier cantidad de ellos, ya sea finita o infinita.

Habitualmente se utilizan letras mayúsculas (A, B, C) para representar conjuntos y letras minúsculas para representar los objetos o elementos pertenecientes a estos conjuntos. Cuando un elemento x pertenece a un conjunto A escribimos:

$$x \in A$$

Por ejemplo, si X es el conjunto cuyos elementos son el número 1, el símbolo @, una manzana y una naranja entonces podemos escribir $1 \in X$. También, $@ \in X$. Si un elemento no pertenece al conjunto usamos $\notin$. Por ejemplo, $2 \notin X$ y $\sharp \notin X$.

Importante *Un conjunto queda determinado de manera única por sus elementos, de forma que dos conjuntos que tengan los mismos elementos son idénticos. Si A y B son conjuntos con los mismos elementos escribiremos $A = B$.* ■

Muchas veces nos interesará trabajar con algunos de los elementos de un conjunto dado. Por ejemplo, podríamos querer considerar el "conjunto de las frutas que están en X". Es decir, al conjunto formado por la manzana y la naranja. Este es un conjunto Y que está *contenido* o *incluido* en X, ya que los elementos de Y son, en particular, elementos de X. En este caso decimos que "Y es un *subconjunto* de X" y lo escribimos:

$$Y \subseteq X$$

Lo que implica la notación $Y \subseteq X$ es que todo elemento de Y es un elemento de X. De igual manera que antes, utilizamos el símbolo tachado $\nsubseteq$ para indicar que un conjunto no está contenido en el otro. Por ejemplo, si Z es el conjunto de elementos 1, @ y $\sharp$, entonces $Z \nsubseteq X$ ya que $\sharp \notin X$. Observemos que, para que $B \nsubseteq A$, alcanza con que al menos un elemento de B no pertenezca a A.

Observación 1 *La noción de inclusión brinda una manera de determinar cuando dos conjuntos son idénticos: $A = B$ si simultáneamente vale que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En efecto, si $A = B$ entonces es cierto que los elementos de A están en B y viceversa, por lo que es cierto que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por otro lado, si $A \subseteq B$ entonces todos los elementos de A también están en B; y si $B \subseteq A$ entonces todos los elementos de B también están en A. Concluimos que tienen los mismos elementos y, por ende, son iguales.*

El conjunto que no posee ningún elementos se llama *conjunto vacío* y se nota $\emptyset$.

1.1.2 ¿Cómo describir un conjunto?

Existen dos maneras clásicas en las que es posible especificar el contenido de un conjunto; se las denomina *descripción por extensión* y *descripción por comprensión*.

Si el conjunto tiene pocos elementos, se puede escribir la lista entre llaves "{ }". Por ejemplo,

$$X = \{1, @, \text{manzana, naranja}\} \qquad\qquad Y = \{\text{manzana, naranja}\}.$$

Esta manera de describir un conjunto se llama *por extensión*. Cuando describimos un conjunto de esta manera, no importa el orden en el que se presentan los objetos. Es decir, los conjuntos $\{1, @, \text{manzana, naranja}\}$ y $\{\text{naranja}, 1, \text{manzana}, @\}$ representan el mismo conjunto (en este caso, X).

Muchas veces es imposible listar todos los elementos del conjunto o es muy tedioso hacerlo. En este caso, se apela a una propiedad que comparten los elementos del conjunto para describirlo. Por ejemplo, cuando definimos anteriormente el conjunto Y dijimos que Y era "el conjunto de las frutas en X". De esta manera, el conjunto Y quedó determinado por la premisa que entendemos qué es una fruta (o, por lo menos, sabemos distinguir una fruta de algo que no lo es). Esta manera de describir los conjuntos se llama *por comprensión* y su expresión simbólica es:

$$Y = \{x \in X \,:\, x \text{ es una fruta}\}$$

Aquí las llaves significan "el conjunto de" y los dos puntos ":" sustituyen las palabras "tales que". La definición anterior se lee "Y es el conjunto de los x pertenecientes a X tales que x es una fruta". Notemos que al principio de la descripción se especifica de dónde se están tomando los elementos (en este caso en X) y, luego, cuál es su propiedad definitoria (en este caso “ser una fruta”). Es habitual que cuando describimos un conjunto por comprensión utilicemos un conjunto referencial de donde elegimos los elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números reales positivos menores que 10 lo escribimos de la siguiente manera:

$$W = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 10\}$$

Aquí el conjunto referencial es $\mathbb{R}$. En general, se especifica (o deja en claro) el “universo” en donde se “va a trabajar” y se llama *conjunto universal*.

Observación 2 *En Matemática generalmente se trabaja con conjuntos de números que ya tienen nombres asignados:*

- $\mathbb{N}$*, los números naturales;*
- $\mathbb{Z}$*, los números enteros;*
- $\mathbb{Q}$*, los números racionales;*
- $\mathbb{R}$*, los números reales;*
- $\mathbb{C}$*, los números complejos.*

Ejemplos 1 Consideren los siguientes conjuntos.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es múltiplo de } 2 \text{ y } x \leq 10\}$;
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = -1\}$

Podemos escribir por extensión estos conjuntos. El conjunto A es exactamente el conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$; el conjunto B es $\{1, -1\}$. Por otro lado, el conjunto C no tiene elementos ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Es decir, $C = \emptyset$. ■

1.1.3 Subconjuntos del plano y el espacio

En este libro vamos a trabajar principalmente con subconjuntos del plano y del espacio. Lo que se conoce como *plano* es el conjunto de los *pares ordenados* de números reales (x, y) y se nota $\mathbb{R}^2$. Formalmente, se escribe:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

El adjetivo “ordenados” quiere decir que en la expresión “(x, y)” importa el orden de los números x e y (y, por lo tanto, (x, y) e (y, x) son objetos diferentes). El nombre “plano” que se le da a $\mathbb{R}^2$ surge del hecho que uno puede representar un elemento de $\mathbb{R}^2$ como un punto en el esquema de ejes cartesianos (Figura 1.1). Aquí, el número x representa cuánto hay que desplazarse en el sentido del eje horizontal y el número y cuánto en el sentido vertical. De esta manera, a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano y viceversa. Los números x e y se llaman las *coordenadas* del punto (x, y). El punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ se llama *el origen de coordenadas*.

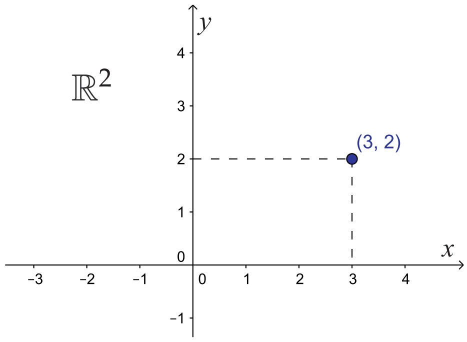


Figura 1.1: Representación en el plano cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplos 2 Consideren los siguientes subconjuntos del plano.

1. $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 10 \text{ y } 2 \leq y \leq 8\}$.
2. $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$.
3. $P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x^2 + 3\}$.

El conjunto P_1 coincide con los puntos dentro de un rectángulo de base 10 y altura 6. El conjunto P_2 son los puntos cuyas coordenadas son iguales. Esto forma una recta en el plano: la recta de ecuación $y = x$. El conjunto P_3 son los puntos cuya segunda coordenada es el cuadrado de la primera más 3. Esto forma una parábola en el plano: la parábola $y = x^2 + 3$. En la Figura 1.2 están representados gráficamente estos conjuntos. ■

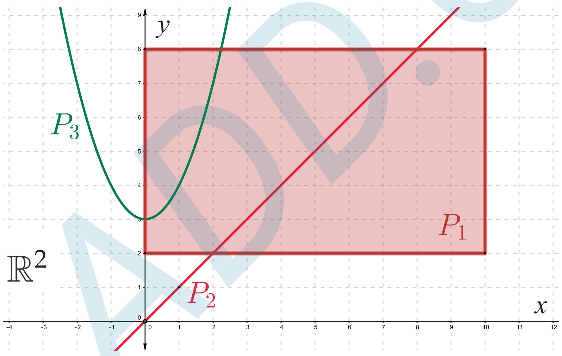


Figura 1.2: El gráfico de los subconjuntos P_1, P_2 y P_3 de $\mathbb{R}^2$.

De manera análoga al plano, se puede considerar $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$; es decir, el conjunto de ternas ordenadas de números reales. Este conjunto se lo llama *espacio* ya que se identifica con un ambiente tridimensional. El objeto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se corresponde con el punto del espacio de tres ejes cartesianos perpendiculares, de manera que el número x dice cuánto hay que desplazarse en la dirección de ese eje, y lo mismo con los números y, z y sus respectivos ejes (Figura 1.3). En este caso, $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ es el *origen de coordenadas*.

Ejemplos 3 Consideren los siguientes subconjuntos del espacio.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4 \text{ y } 1 \leq z \leq 3\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$

El conjunto E_1 coincide con los puntos dentro de un paralelepípedo de lados de tamaño 5, 2 y 2. El conjunto E_2 son los puntos que se encuentran en el plano xy (aquí consideramos el valor de la coordenada z como la “altura” a la que se

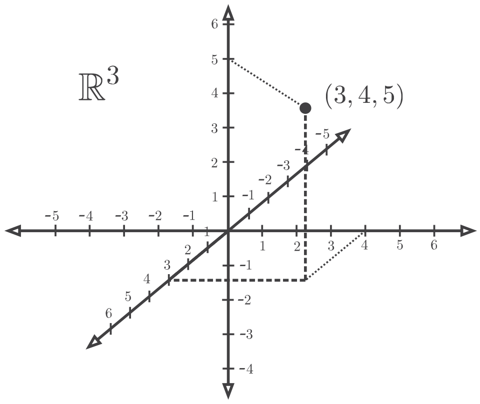


Figura 1.3: Representación en el espacio cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^3$.

encuentran los puntos respecto del “piso” xy). El hecho de que $z = 0$ nos dice precisamente que se trata de los puntos que se encuentran en el “piso”. El conjunto E_3 esta conformado por los puntos tales que sus coordenadas son todas iguales. Esto forma una recta en el espacio. En la Figura 1.4 están representados estos conjuntos. ■

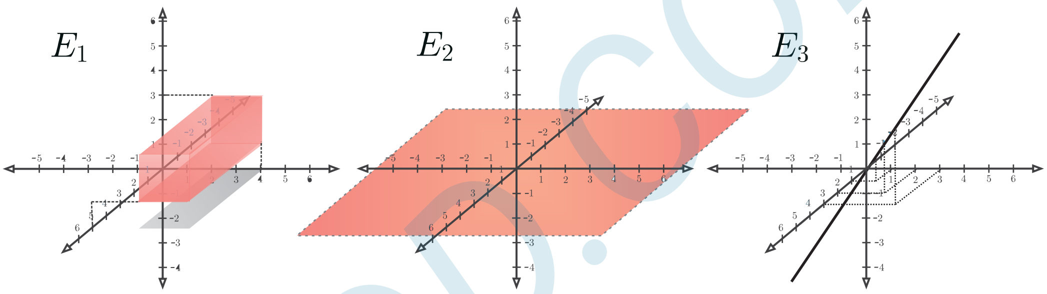


Figura 1.4: El gráfico de los subconjuntos E_1, E_2 y E_3 de $\mathbb{R}^3$.

Generalizando estas ideas, podemos también considerar el conjunto de “tiras ordenadas” de números reales $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Una tira como la que acabamos de describir se la llama *n-upla ordenada de números reales*. Para $n > 3$ ya no podemos representar las n-uplas como puntos en un esquema de ejes cartesianos (el ser humano sólo visualiza hasta tres dimensiones). El espacio $\mathbb{R}^n$ se lo conoce como el *espacio n-dimensional*. El *origen de coordenadas* de $\mathbb{R}^n$ es la n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ de n ceros.

Importante Cuando mencionemos un objeto de $\mathbb{R}^n$ pero no tengamos la necesidad de especificar sus coordenadas, escribiremos solamente $X \in \mathbb{R}^n$ (utilizando letras mayúsculas). Aquí se entiende que $X = (x_1, \ldots, x_n)$ para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. ■

1.1.4 Cómo construir conjuntos a partir de otros

Hay un número de operaciones básicas que es necesario hacer con los conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

Unión de conjuntos. Esta operación consiste en “juntar” el contenido de dos conjuntos.

Definición 1 Si A y B son conjuntos que viven dentro del mismo universo $\mathcal{U}$, entonces, el nuevo conjunto $A \cup B$, llamado *unión entre A y B*, es el que tiene por elementos aquellos que pertenecen a A o a B; es decir, *a* *alguno de los dos*. Simbólicamente se define:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \,:\, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Por ejemplo, con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana, naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ que consideramos anteriormente, tenemos:

- $X \cup Y = \{\text{manzana, naranja}, 1, @\}$
- $Y \cup Z = \{\text{manzana, naranja}, @, \sharp\}$
- $X \cup Z = \{\text{manzana, naranja}, 1, @, \sharp\}$

Observemos que $X \cup Y = X$. Esto se debe a que $Y \subseteq X$, por lo cual los elementos de Y ya son elementos de X y no se agrega nada nuevo al unirlos.

■ **Ejemplo 4** Consideremos ahora un ejemplo numérico. Si $W = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 10\}$ y $V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 \leq x \leq 15\}$ entonces $W \cup V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 15\}$. Notemos que los números reales que están entre 5 y 10 pertenecen tanto a W como a V. ■

Analicen si son válidas las expresiones $A \subseteq (A \cup B)$ y $B \subseteq (A \cap B)$ cualesquiera sean los conjuntos A y B. En particular, estudien qué sucede con la $(A \cup B)$ si $A \subseteq B$. Y qué conjunto es $A \cup \emptyset$ para cualquier conjunto A.

Intersección de conjuntos. Esta operación nos permite construir un conjunto que contenga los elementos que tengan en común los dos conjuntos originales.

Definición 2 El conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B *al mismo tiempo*, se llama la *intersección entre* A y B y se nota $A \cap B$. Simbólicamente, se escribe así:

$$A \cap B = \{x \,:\, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana, naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ tenemos:

- $X \cap Y = \{\text{manzana, naranja}\}$
- $Y \cap Z = \emptyset$
- $X \cap Z = \{@\}$

■ **Ejemplo 5** Con W y V, como en el Ejemplo 4, se tiene que $W \cap V = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 5 \leq x \leq 10\}$. ■

Analicen si es cierto que las expresiones $(A \cap B) \subseteq A$ y $(A \cap B) \subseteq B$ son válidas cualesquiera sean A y B. Determinen qué conjunto es $A \cap B$ si $A \subseteq B$ y qué conjunto es $A \cap \emptyset$ cualquiera sea el conjunto A.

Diferencia de conjuntos. Esta operación consiste en "removerle" a un conjunto A los elementos que sean, a su vez, elementos de un conjunto B.

Definición 3 El conjunto que se obtiene al quedarse con los elementos de A que no están en B se llama la *diferencia entre* A y B y se nota $A \setminus B$. Simbólicamente, se escribe de la siguiente manera:

$$A \setminus B = \{x \,:\, x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

Por ejemplo, $X \setminus Y = \{1, @\}$ y $X \setminus Z = \{1, \text{manzana, naranja}\}$. Notemos que $\sharp \in Z$ pero $\sharp \notin X$. Esto no tiene importancia, porque al escribir $X \setminus Z$ estamos diciendo "el conjunto de los elementos de X que no están en Z"; el hecho que Z tenga un elemento que no esté en X no afecta esta operación.

Por último, definimos un conjunto formado por los elementos que se encuentran *fuera* de un conjunto dado A. Esto da lugar a un nuevo conjunto llamado *complemento de* A, el cual se nota A^c. Pero, ¿qué significa "afuera"? Por ejemplo, ¿qué hay afuera de $Y = \{\text{manzana, naranja}\}$? Esto depende de cuál es el universo en el que estamos trabajando. Si trabajamos con el universo de todas las frutas, entonces Y^c es el conjunto de todas las frutas que no son la manzana y la naranja. Si tomamos el universo dado por el conjunto $X = \{\text{manzana, naranja}, 1, @\}$ entonces $Y^c = \{1, @\}$. Por lo tanto, el complemento de un conjunto *siempre* es en relación al conjunto universal que estamos considerando.

Definición 4 El *complemento* de un conjunto A respecto del universo $\mathcal{U}$ es el conjunto de elementos de $\mathcal{U}$ que no están en A. Simbólicamente, se representa de la siguiente manera:

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A$$

■ **Ejemplo 6** Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces se tiene que:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ es un número par}\}^c = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es un número impar}\}.$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 1.1?

- Repasamos las nociones de pertenencia de un elemento en relación con un conjunto ($\in$) y de inclusión de un conjunto en otro ($\subseteq$).
- Introdujimos el conjunto $\mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reales (y lo identificamos con un plano), el conjunto $\mathbb{R}^3$ de ternas ordenadas de números reales (y lo identificamos con el espacio 3-dimensional) y generalizamos estos conjuntos a las n-uplas ordenadas de números reales, llamado $\mathbb{R}^n$.
- Definimos las operaciones usuales que hacemos con conjuntos: unión de conjuntos ($\cup$), intersección de conjuntos ($\cap$), diferencia de conjuntos ($\setminus$) y complemento de un conjunto respecto del conjunto universal (A^c).

■

1.2 Vectores de $\mathbb{R}^n$

En este apartado estudiaremos los *vectores*. Es probable que tengan la idea intuitiva de que un vector es una flecha, al menos gráficamente. Será de gran utilidad tener presente esta noción para comprender la definición matemática de este concepto.

En este apartado estudiaremos...

- La definición formal de vector.
- La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.
- Las propiedades fundamentales de estas operaciones.

■

1.2.1 La noción de vector

Seguramente ustedes ya han utilizado flechas (segmentos orientados) para representar cantidades físicas, como fuerzas aplicadas sobre un cuerpo o dirección de trayectorias. Una flecha queda determinada por su origen (donde comienza) y su extremo (donde termina). Con estos datos, la flecha obtiene una *dirección* (la recta sobre la cual está contenida), *sentido* (dónde empieza y dónde termina) y *módulo* (la longitud de la flecha). Análogamente, si se elige el origen de la flecha, y especifica su dirección, sentido y módulo, entonces se obtiene el extremo de la misma.

Definición 5 El *segmento orientado* de origen A y extremo B se llama *vector* $\vec{AB}$ y sus elementos son la *dirección* (recta que contiene a los puntos A y B), el *sentido* (desde A hacia B) y el *módulo* (la distancia entre los puntos A y B).

Cuando se dibujan flechas sobre la hoja de papel se están dibujando vectores en $\mathbb{R}^2$, en el sentido que su origen y su extremo son puntos de un plano. Al señalar un avión que está pasando por el cielo, podemos pensar que estamos representando un vector con origen en nuestro hombro y extremo en nuestro dedo índice. Este vector "pertenece" a $\mathbb{R}^3$, ya que son necesarias tres coordenadas para dar la ubicación del hombro y el dedo índice en el espacio. Los vectores que consideraremos en esta materia serán "vectores en $\mathbb{R}^n$", en el sentido que su origen y extremo estarán dados por puntos de $\mathbb{R}^n$.

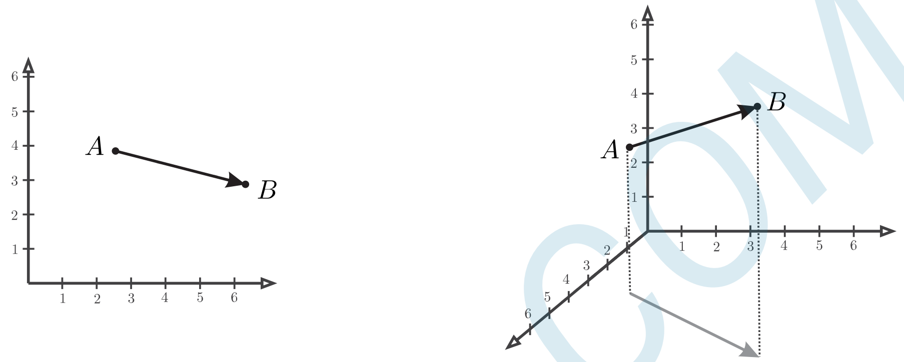


Figura 1.5: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Tengamos en cuenta que la dirección, el sentido y el módulo de un vector son propiedades intrínsecas del mismo; es decir, son independientes del punto origen del vector. El origen y el extremo de un vector dependen de su posición relativa con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, mientras que la dirección, el sentido y el módulo, no. En este libro nos importa estudiar las características propias de los vectores, independientemente de dónde estén ubicados en el sistema de referencia. Por este motivo, *consideramos que todos los vectores de igual dirección, sentido y módulo son* equivalentes*; es decir, para nuestros propósitos es equivalente estudiar cualquiera de ellos.* Sin embargo, tenemos en cuenta que de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ equivalentes a uno dado, el más sencillo de describir es el que tiene su origen en el origen de coordenadas $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, pues de esta manera, para especificar un vector alcanza con dar su extremo.

Importante *En este libro, trabajamos exclusivamente con vectores $\vec{v}$ cuyo origen es el origen de coordenadas $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Es decir que, al indicar el vector $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ nos estamos refiriendo al vector con origen en el punto $(0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ y extremo en el punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.* ■

En particular, el origen de coordenadas también da lugar a un vector: el vector *nulo* (no tiene longitud, ni dirección, ni sentido). Este vector es el único para el cual su origen y extremo coinciden y se nota $\vec{0}$. Observemos que en $\mathbb{R}^2$ el vector nulo es $\vec{0} = (0, 0)$ y en $\mathbb{R}^3$ es $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Cuando escribamos $\vec{0}$, nos referiremos siempre al vector nulo del $\mathbb{R}^n$ en el que estemos trabajando en ese momento.

Hay dos operaciones fundamentales a tener en cuenta durante el trabajo con vectores: "sumar dos vectores" y "escalar un vector por un número real". Estas operaciones tienen un significado en función del contexto en el cual se las utiliza (a veces geométrico y a veces algebraico). Por ejemplo, si hay dos fuerzas aplicadas sobre un cuerpo y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ especifican la dirección y magnitud de cada una de las fuerzas, necesitamos determinar cuál es la fuerza resultante. En este caso, será la *suma* de los vectores anteriores (Figura 1.6). También, si necesitáramos mover más rápido el cuerpo tendríamos que hacer el doble de fuerza en la misma dirección de $\vec{v}$; en este caso, el vector que representa esta "duplicación de fuerza" será el obtenido al *escalar* en 2 el vector $\vec{v}$. De igual manera, si necesitamos contrarrestar una fuerza para que el cuerpo permanezca inmóvil, deberemos hallar una fuerza de la misma intensidad pero de sentido opuesto. Esto corresponderá al vector opuesto a $\vec{v}$, que se obtiene de escalar a este vector por -1 (Figura 1.6). Estas operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar son la base de la teoría que estudiaremos a lo largo del libro.

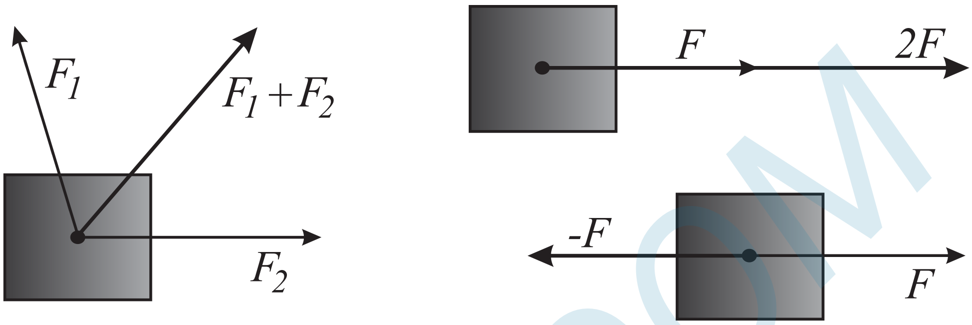


Figura 1.6: Representación de fuerzas con vectores.

1.2.2 Vectores en el espacio n-dimensional

En este apartado, formalizaremos las nociones de "sumar vectores" y "escalarlos por un número real" sugeridas anteriormente. En primer lugar trabajamos con vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ para desarrollar la intuición de su definición y sus propiedades.

A un vector en $\mathbb{R}^2$ lo llamamos un *vector en el plano*, y escribimos $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, $\vec{v}$ queda determinado por un punto (x, y) del plano. Usaremos la notación $\vec{v} = (x, y)$ para referirnos al vector de origen $(0, 0)$ y extremo (x, y).

Definición 6 Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, se define otro vector $\vec{v} + \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. Este nuevo vector es llamado *la suma de $\vec{v}$ y $\vec{w}$* (o *vector suma*). Si $\vec{v} = (x_1, x_2)$ y $\vec{w} = (y_1, y_2)$ entonces:

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

Gráficamente, el vector suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es el vector cuyo extremo es el punto al que se llega partiendo de $(0, 0)$ al recorrer primero el vector $\vec{v}$ y, luego, desde el extremo de $\vec{v}$, el vector $\vec{w}$, o viceversa. Esto se conoce como *la regla del paralelogramo* dado que el vector suma coincide con la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (Figura 1.7).

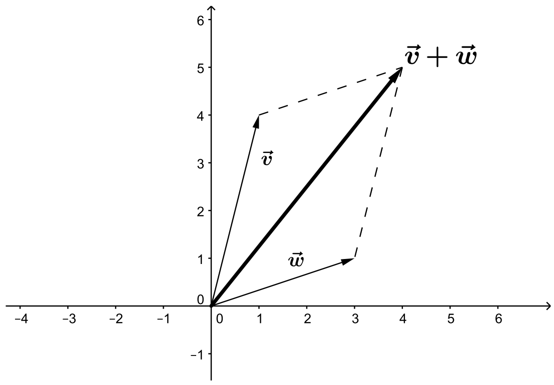


Figura 1.7: Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplo 7** Si $\vec{v}=(2,-5)$ y $\vec{w}=(-3,-2)$ entonces:

$$\vec{v}+\vec{w}=(2,-5)+(-3,-2)=(2-3,-5-2)=(-1,-7)$$

■

Existe otro medio de obtener nuevos vectores: *escalarlo* a partir de uno dado. Esto remite a las ideas de; “alargarlo”, “acortarlo” o “invertirlo”. Suponemos que multiplicar un vector por el número 2 duplicará su tamaño; multiplicarlo por $\frac{1}{2}$, lo reducirá a la mitad; y multiplicarlo por -1, lo invertirá, es decir, le cambiará el sentido (Figura 1.8). Esta operación de multiplicación se llama *producto de un vector por un escalar* y está definida analíticamente de la siguiente manera.

Definición 7 Si $\vec{v}=(x_1,x_2)$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ entonces el *producto del vector $\vec{v}$ por el escalar λ* es el vector

$$\lambda\vec{v}=(\lambda x_1,\lambda x_2)$$

■ **Ejemplo 8** Si $\vec{v}=(2,-5)$ y $\lambda=3$ entonces

$$\lambda\vec{v}=3(2,-5)=(3{,}2,3.(-5))=(6,-15)$$

■

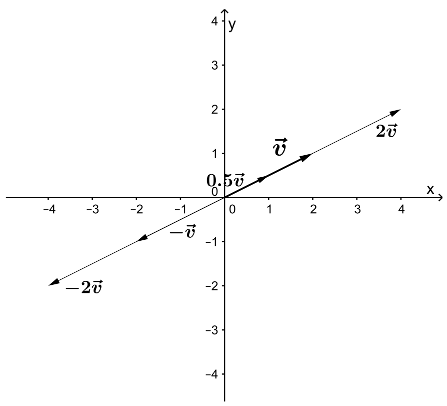


Figura 1.8: Multiplicación de un vector por un escalar en $\mathbb{R}^2$.

Observación 3 *En la teoría de vectores, a los números reales se los conoce como* escalares *pues se utilizan para* escalar *los vectores de la manera recién descripta.*

Observación 4 *Notemos que las operaciones de suma de vectores y producto por escalar están definidas* coordenada a coordenada*. Esto quiere decir que, para hallar la suma del vector $\vec{v}$ con el vector $\vec{w}$, debemos hacer las sumas entre las respectivas coordenadas de estos vectores: la primera coordenada de $\vec{v}$ con la primera de $\vec{w}$ y la segunda de $\vec{v}$ con la segunda de $\vec{w}$. De igual manera sucede con el producto de un vector por un escalar.*

Estas operaciones tienen las siguientes propiedades:

1. $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{u}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$
2. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w}$
4. Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{v} = \lambda_1\vec{v} + \lambda_2\vec{v}$ y $(\lambda_1\lambda_2)\vec{v} = \lambda_1(\lambda_2\vec{v})$
5. $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
6. $1.\vec{v} = \vec{v}$
7. $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$
8. $0.\vec{v} = \vec{0}$

Como mencionamos al principio de la sección, la suma de vectores y el producto de vectores por escalares son las operaciones fundamentales en $\mathbb{R}^2$ que nos permitirán trabajar durante el desarrollo del libro. Proponemos, ahora, explorar algunas propiedades geométricas de estas operaciones. Miren el siguiente Experimento1.

Experimento 1 Dados los vectores $\vec{v} = (3, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 4)$ en $\mathbb{R}^2$:

1. Grafíquenlos en el plano.
2. Calculen y grafiquen los puntos $\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$, $-\vec{v}$, $2\vec{w}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v}$.
3. Representen, en un mismo gráfico, los puntos $-2\vec{v}$, $-\vec{v}$, $\vec{0}$, $\vec{v}$, $2\vec{v}$. ¿Qué notan? ¿Qué características tienen los puntos de la forma $k.\vec{v}$ con $k \in \mathbb{Z}$ cualquiera? ¿Y los puntos $\lambda.\vec{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera?

Notemos que el efecto de multiplicar un vector por -1 invierte el sentido del vector. Se nota $-\vec{v}$ en lugar de $(-1)\vec{v}$. Esta notación tiene sentido ya que $\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{0}$. ¿Cómo se calcula en general $\vec{v} - \vec{w}$? Gráficamente, primero se calcula $-\vec{w}$ (invirtiendo el sentido del vector) y, luego, se suma $\vec{v}$ con $-\vec{w}$ usando la regla del paralelogramo. La resta de dos vectores tiene una interpretación muy importante que veremos en la próxima sección (Experimento 4).

En el siguiente Experimento 2, veremos el efecto de sumar el mismo vector a varios vectores.

Experimento 2 Consideren en $\mathbb{R}^2$ el vector $\vec{t} = (4, 2)$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} = (-4, 1)$, $\vec{w} = (-3, 6)$ y $\vec{u} = (-1, 7)$.

1. Grafiquen todos los vectores en el plano.
2. Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} + \vec{t}$, $\vec{w} + \vec{t}$ y $\vec{u} + \vec{t}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\vec{v} - \vec{t}$, $\vec{w} - \vec{t}$ y $\vec{u} - \vec{t}$. ¿Qué efecto geométrico produce sumar el vector $\vec{t}$ a los puntos de $\mathbb{R}^2$? ¿Y que sucede al restar el vector $\vec{t}$?
3. Grafiquen, con la misma escala, el triángulo cuyos vértices son los extremos de $2\vec{v}$, $2\vec{w}$ y $2\vec{u}$ y el triángulo cuyos vértices son los extremos de $\frac{1}{2}\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{w}$ y $\frac{1}{2}\vec{u}$. ¿Qué efecto geométrico produce multiplicar por 2? ¿Y por $\frac{1}{2}$?

■

Para trabajar en el espacio $\mathbb{R}^3$ se procede de manera idéntica al caso de $\mathbb{R}^2$. En este caso, cada vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ queda determinado por las coordenadas de su extremo (considerando su origen en el $(0, 0, 0)$) y se hará referencia al "vector $\vec{v} = (x, y, z)$" (Figura 1.9). Las operaciones de suma de vectores y producto de un vector por un escalar se definen de forma análoga a las operaciones con vectores en el plano, pero extendiéndolas a una coordenada más.

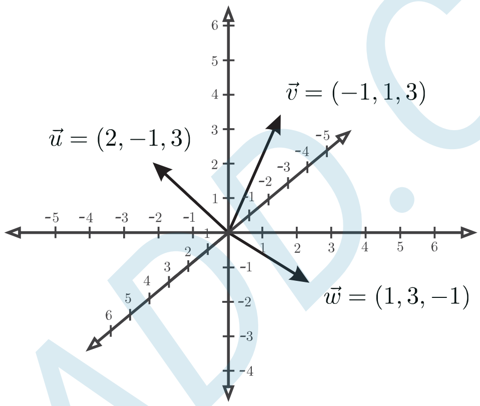


Figura 1.9: Vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definición 8 Si $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{w} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define la *suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$* y el *producto de $\vec{v}$ por el escalar* λ de la siguiente manera:

- $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$

■ **Ejemplo 9** Si $\vec{v} = (1, 2, -5)$, $\vec{w} = (3, -2, 0)$ y $\lambda = -4$ entonces:

- $\vec{v} + \vec{w} = (1, 2, -5) + (3, -2, 0) = (1 + 3, 2 - 2, -5 + 0) = (4, 0, -5)$ y
- $\lambda\vec{v} = (-4).(1, 2, -5) = ((-4).1, (-4).2, (-4).(-5)) = (-4, -8, 20)$.

■

Gráficamente, el efecto de la multiplicación de un vector por un escalar es el mismo que en el caso del plano (alarga, acorta y/o invierte). Por otro lado, la suma de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ conserva la misma interpretación: es el vector a cuyo extremo se arriba partiendo de $(0, 0, 0)$ al recorrer, primero, el vector $\vec{v}$ y, luego, desde el punto extremo de $\vec{v}$, el vector $\vec{w}$. De esta manera, la regla del paralelogramo también puede ser utilizada para interpretar la suma de dos vectores en el espacio, pensando a los vectores como incluidos en el plano que los contiene; es decir, identificando dicho plano con $\mathbb{R}^2$ (Figura 1.10).

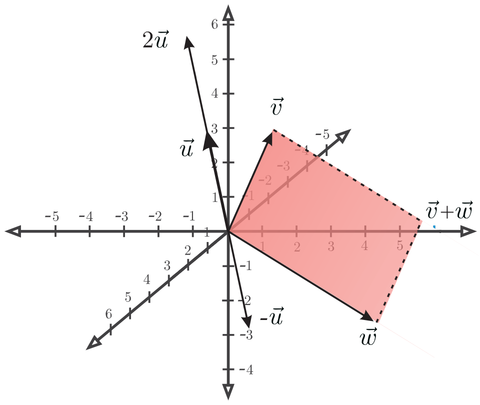


Figura 1.10: Suma de vectores y producto de un vector por un escalar en $\mathbb{R}^3$.

Como es de esperar, todos los conceptos introducidos para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ se pueden extender a cualquier $\mathbb{R}^n$ de *idéntica* manera. Las operaciones para vectores en $\mathbb{R}^n$, se definen de forma completamente análoga a los casos $n = 2$ y $n = 3$.

Definición 9 Si $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{w} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces:

- $\vec{v} + \vec{w} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$

Ejemplos 10

- $(1, 0, 2, 0) + (-1, -1, 2, -3) = (1 - 1, 0 - 1, 2 + 2, 0 - 3) = (0, -1, 4, -3)$ en $\mathbb{R}^4$.
- $(-2).(2, 4, 6, -3, 1) = (-4, -8, -12, 6, -2)$ en $\mathbb{R}^5$.
- $5(1, 2, 3, \ldots, n) + (1, 1, 1, \ldots, 1) = (6, 11, 16, \ldots, 5.n + 1)$ en $\mathbb{R}^n$.

■

La noción gráfica que debe interiorizarse sigue siendo la misma: la multiplicación por escalar estira, acorta y/o invierte el vector, y la suma de vectores responde a recorrer un vector y, a continuación, el otro (aunque ya no puedan visualizar este hecho). Todas las propiedades y conclusiones de los experimentos que hicimos en el caso $n = 2$ valen para todos los $n \in \mathbb{N}$.

¿Qué hicimos en el apartado 1.2?

- Introdujimos la noción de vector de $\mathbb{R}^n$ y nos concentramos en trabajar con vectores con origen en $\vec{0}$.
- Definimos la suma de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^n$ y vimos que el resultado es un nuevo vector $\vec{v} + \vec{w}$, cuyo extremo es la suma lugar a lugar de las coordenadas de los extremos de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Gráficamente, es el vector que coincide con la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
- Definimos el producto de un vector $\vec{v}$ por un escalar (número real) λ y vimos que el resultado es un nuevo vector $\lambda\vec{v}$ cuyo extremo es la multiplicación lugar a lugar de las coordenadas del extremo de $\vec{v}$ con λ. Gráficamente, el resultado es un vector "escalado" por λ.
- Observamos que el vector $\vec{v} - \vec{w}$, es un vector cuya dirección, sentido y módulo es el mismo el vector de origen el extremo de $\vec{w}$ y extremo el extremo de $\vec{v}$.

■

1.3 Producto escalar de vectores

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de vectores se desarrolla en el estudio de la Geometría. En esta sección estudiaremos las nociones matemáticas relacionadas con las herramientas de medición más importantes de esta rama: la regla y el transportador; es decir, vamos a introducir una forma de medir longitudes y ángulos. Esta tarea la realizaremos a través del concepto de *producto escalar de vectores*.

En este apartado estudiaremos...

- El producto escalar de vectores.
- La norma (módulo) de un vector.
- La distancia entre puntos de $\mathbb{R}^n$.
- El ángulo que forman dos vectores.
- Cuando dos vectores son ortogonales (perpendiculares).

1.3.1 Producto escalar, norma y distancia

El producto escalar es una operación que, a cada par de vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, le asocia un número real que condensa información relevante sobre la relación geométrica entre ambos vectores. La definimos a continuación.

Definición 10 Sean $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\vec{w} = (y_1, \ldots, y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Se define el *producto escalar* o *producto interno* entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el número real:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Ejemplos 11

- El producto escalar entre los vectores $(2, -1)$ y $(3, 3)$ de $\mathbb{R}^2$ es:

$$(2, -1) \cdot (3, 3) = 2{,}3 + (-1)3 = 6 - 3 = 3$$

- El producto escalar entre los vectores $(1, 1, 3)$ y $(-1, 3, -4)$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$(1, 1, 3) \cdot (-1, 3, -4) = 1(-1) + 1{,}3 + 3(-4) = -1 + 3 - 12 = -10$$

- El producto escalar entre los vectores $(1, 2, 3, \ldots, n)$ y $(1, 1, 1, \ldots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ es:

$$(1, 2, 3, \ldots, n) \cdot (1, 1, 1, \ldots, 1) = 1{,}1 + 2{,}1 + 3{,}1 + \cdots + n{,}1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

A diferencia de las operaciones vistas en la Sección 1.2, *el producto escalar es una operación entre vectores cuyo resultado no es un vector, sino un número* (de allí su nombre).

El producto escalar de vectores nos permitirá hacer cálculos de longitudes, distancias y ángulos. En efecto, consideremos el producto escalar de un vector de $\mathbb{R}^2$ consigo mismo. Si $\vec{v} = (x_1, x_2)$ entonces:

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2$$

Realicen el siguiente experimento.

Experimento 3 Consideren el triángulo de vértices $(0,0)$, $(x_1,0)$ y (x_1,x_2), para algunos $x_1,x_2 > 0$ genéricos (Figura 1.11). Luego:

1. Noten que dicho triángulo es rectángulo y que el módulo de $\vec{v} = (x_1,x_2)$ es exactamente la longitud de la hipotenusa.
2. Calculen el módulo de $\vec{v}$ utilizando el Teorema de Pitágoras.

■

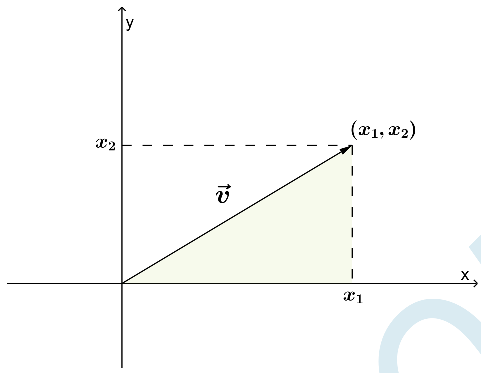


Figura 1.11: El triángulo de vértices $(0,0)$, $(x_1,0)$ y (x_1,x_2).

El resultado del experimento anterior da cuenta de que el módulo de $\vec{v}$ es exactamente $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. ¿Qué sucede con un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$? Se puede mostrar con argumentos similares que el módulo de un vector en $\mathbb{R}^3$ es exactamente $\sqrt{\vec{w}\cdot\vec{w}}$. En el caso general de vectores de $\mathbb{R}^n$, el módulo de un vector se lo conoce como *norma* del vector, y se define:

Definición 11 Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, se define la *norma* del vector $\vec{v}$ como el número real $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$. Es decir, si $\vec{v} = (x_1,\dots,x_n)$ entonces $||\vec{v}|| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.

Por lo tanto, teniendo a disposición el producto escalar tenemos una manera de medir el módulo o norma de los vectores.

■ **Ejemplos 12** Calculemos algunas normas.

- $||(2,-5)|| = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$
- $||(-1,3,-2)|| = \sqrt{(-1)^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$.
- $||(1,1,1,1,1)|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{5}$.

■

Habíamos comentado en la sección anterior que la resta de vectores $\vec{v}-\vec{w}$ tenía una importante interpretación geométrica. Realicen el siguiente Experimento 4.

Experimento 4 Sean $\vec{v} = (x_1,x_2)$ y $\vec{w} = (y_1,y_2)$ en $\mathbb{R}^2$.

1. Comprueben que, gráfica y analíticamente, se verifica la igualdad $\vec{v} = \vec{v}-\vec{w}+\vec{w}$.
2. Interpreten, gráficamente, la igualdad anterior agrupándola de la siguiente manera: $\vec{v} = (\vec{v}-\vec{w})+\vec{w}$. ¿Qué pueden concluir de la dirección del vector $\vec{v}-\vec{w}$? ¿Qué pueden concluir de la normal de vector $\vec{v}-\vec{w}$? Miren la Figura 1.12.

■

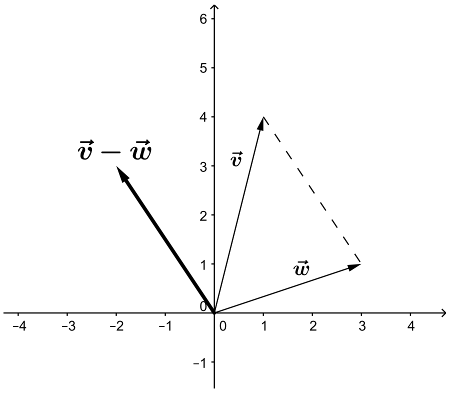


Figura 1.12: La interpretación gráfica de la resta de dos vectores.

Definición 12 Si P y Q son puntos de $\mathbb{R}^n$, se define la *distancia* de P a Q como el número real $d(P,Q) = ||\vec{v}-\vec{w}||$, donde $\vec{v}$ es el vector cuyo extremo es P y $\vec{w}$ es el vector cuyo extremo es Q. Esto es, si $P = (x_1,\dots,x_n)$ y $Q = (y_1,\dots,y_n)$ entonces $d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Ejemplos 13

- La distancia del punto $(2,-5)$ al punto $(-3,-3)$ en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{aligned} d((2,-5),(-3,-3)) &= ||(2,-5)-(-3,-3)|| \\ &= ||(2+3,-5+3)|| \\ &= ||(5,-2)|| \\ &= \sqrt{(5)^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{29}. \end{aligned}$$

- La distancia del punto $(1,1,1)$ al punto $(-1,2,1)$ de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{aligned} d((1,1,1),(-1,2,1)) &= ||(1,1,1)-(-1,2,1)|| \\ &= ||(2,-1,0)|| \\ &= \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(0)^2} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- La distancia del punto $(1,2,3,\dots,n)$ al punto $(1,1,1,\dots,1)$ en $\mathbb{R}^n$ es:

$$\begin{aligned} d((1,2,3,\dots,n),(1,1,1,\dots,1)) &= ||(1,2,3,\dots,n)-(1,1,1,\dots,1)|| \\ &= ||(0,1,2,3,\dots,n-1)|| \\ &= \sqrt{1^2+2^2+3^3+\cdots+(n-1)^2}. \end{aligned}$$

■

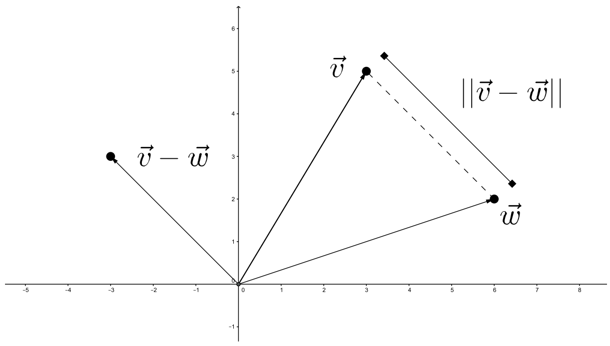


Figura 1.13: Utilización de la teoría de vectores para calcular la distancia entre puntos.

A continuación enumeramos algunas propiedades del producto escalar.

1. $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ (es conmutativo)
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (distribuye respecto de la suma de vectores)
3. $(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$ (si algún vector está multiplicado por un escalar, este puede "sacarse fuera" del producto interno).

Experimento 5 Dados $\vec{v}=(3,-4)$ y $\vec{w}=(1,2)$ en $\mathbb{R}^2$:

1. Calculen
$$||\vec{v}||,\quad ||\vec{w}||,\quad ||\vec{v}+\vec{w}||,\quad ||\vec{v}||+||\vec{w}||,\quad ||2\vec{v}||\quad \text{y}\quad ||\tfrac{1}{2}\vec{v}||.$$
2. ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}||$ y $||2\vec{v}||$? ¿Y entre $||\vec{v}||$ y $||\frac{1}{2}\vec{v}||$?
3. ¿Qué relación hallaron entre $||\vec{v}+\vec{w}||$ y $||\vec{v}||+||\vec{w}||$? ¿Cuál es más grande que el otro? Esto sucede siempre y es conocido como *desigualdad triangular*.

1.3.2 Ángulo entre vectores y ortogonalidad

Con lo desarrollado hasta aquí, ya tenemos una traducción matemática de la noción de "regla", es decir, como podemos medir longitudes y distancias. Como se mencionó al inicio de esta sección, el producto escalar también nos provee la noción de "transportador", que nos permitirá calcular ángulos entre vectores (no nulos).

¿A qué nos referimos cuando hablamos del ángulo entre dos vectores de $\mathbb{R}^2$? A que, *de los dos ángulos que quedan determinados por los vectores, consideramos el más pequeño de los dos; es decir, el que está entre* 0 *y* π (Figura 1.14 lado izquierdo). Si se tienen dos vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces también se tiene determinado un ángulo entre ellos: el ángulo de menor amplitud al cual hay que girar uno de los vectores alrededor de su origen hasta que quede superpuesto con el otro vector. Notemos que este recorrido de un vector hacia el otro en realidad sucede en el plano que contiene a ambos (Figura 1.14 lado derecho). En general, dos vectores en cualquier espacio $\mathbb{R}^n$ están contenidos en un plano, por lo cual medir ángulos de vectores de cualquier dimensión es lo mismo que medirlos en $\mathbb{R}^2$.

Definición 13 Sean $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ *no nulos*. Se define el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como el *único* ángulo θ entre 0 y π tal que:
$$\cos(\theta)=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}$$

Ejemplos 14

- El ángulo entre los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ en $\mathbb{R}^2$ es aquel ángulo θ entre 0 y π tal que $\cos(\theta) = \frac{(1,0)\cdot(0,1)}{||(1,0)||.||(0,1)||}$. Pero $(1,0)\cdot(0,1) = 0$, por lo que $\theta = \frac{\pi}{2}$. O sea, los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ son perpendiculares.
- El ángulo entre los vectores $(1,2,3)$ y $(1,0,-1)$ en $\mathbb{R}^3$ es aquel ángulo θ entre 0 y π tal que

$$\cos(\theta) = \frac{(1,2,3)\cdot(1,0,-1)}{||(1,2,3)||.||(1,0,-1)||} = \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

Tenemos entonces que $\theta = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{7}})$, que equivale aproximadamente a 112^{o}.

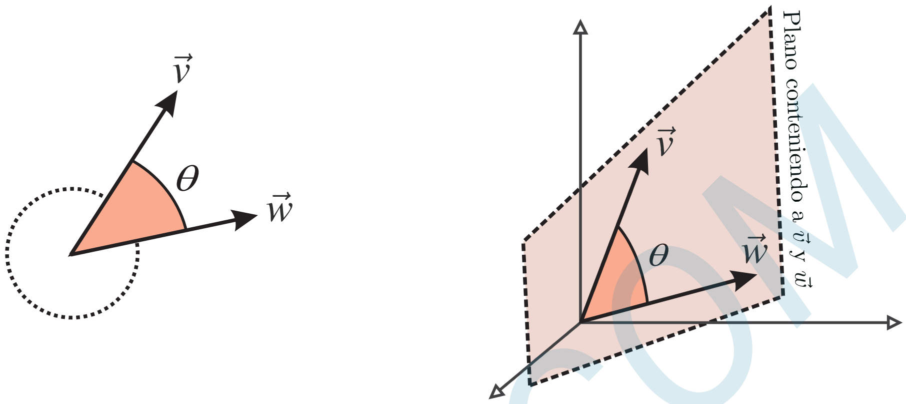


Figura 1.14: El ángulo entre dos vectores.

Observación 5 *Observemos cómo la expresión para hallar el ángulo entre los vectores depende únicamente del producto escalar (pues la norma también está definida a partir del mismo). El hecho que esta fórmula, efectivamente, calcula el ángulo entre los dos vectores es una consecuencia del* Teorema del Coseno.

Como el coseno siempre es un número entre -1 y 1, uno puede deducir de la fórmula del ángulo entre dos vectores que $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq ||\vec{v}||.||\vec{w}||$ para cualesquiera $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$. Esta desigualdad se conoce como desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Por otro lado, de la fórmula del ángulo entre dos vectores se deduce otra expresión para el producto escalar entre vectores. Si $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ y θ es el ángulo entre ambos entonces:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ||\vec{v}||||\vec{w}||\cos(\theta)$$

Por lo tanto, si uno tiene por datos la norma de los vectores y el ángulo entre ellos, puede calcular de manera directa su producto escalar. Esta fórmula nos ofrece un criterio para decidir si dos vectores son perpendiculares. Recordemos que dos vectores $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^2$ son perpendiculares u *ortogonales* si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$. Pero como $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, entonces deducimos de esta fórmula que $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Por otro lado, como el único ángulo en el intervalo $(0,\pi)$ que anula al coseno es $\frac{\pi}{2}$ entonces, si $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$, quiere decir, nuevamente por la fórmula de arriba, que $\theta = \frac{\pi}{2}$; o sea, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales. Por lo tanto, tenemos la siguiente definición que caracteriza a los vectores perpendiculares.

Definición 14 Dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ se dicen *ortogonales* si $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Ejemplos 15

- Los vectores $(2, -5)$ y $(-3, -3)$ no son ortogonales pues $(2, -5) \cdot (-3, -3) = 9$.
- Los vectores $(1, -2)$ y $(4, 2)$ son ortogonales pues $(1, -2) \cdot (4, 2) = 0$.
- El vector $(-1, 1, 1)$ es ortogonal al vector $(-1, -2, 1)$ y también al vector $(1, 1, 0)$.

Experimento 6 Realicen las siguientes búsquedas:

1. Encuentren tres vectores distintos de $\mathbb{R}^2$ que sean ortogonales a $(2, 3)$. ¿Qué relación encuentran entre los vectores hallados?
2. Encuentren *todos* los vectores de $\mathbb{R}^2$ que son ortogonales a $(2, -2)$ y tienen norma 1.
3. Encuentren dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ ortogonales a $(1, 2, 1)$ que no sean paralelos entre sí.
4. Encuentren tres vectores distintos de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a $(1, 2, 1)$ y $(1, -3, 0)$ simultáneamente. ¿Qué relación cumplen entre sí?

¿Qué hicimos en el apartado 1.3?

- Definimos el producto escalar entre dos vectores. Su resultado es un número real que contiene información de la relación entre los vectores involucrados.
- Interpretamos la raíz cuadrada del producto escalar de un vector con él mismo como el módulo de dicho vector. Definimos la norma del vector $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ como $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
- Definimos la distancia entre dos puntos $P = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Q = (y_1, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ como la norma del vector cuyo extremo es $P - Q$. O sea, $d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$.
- Definimos el ángulo entro dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ como el único ángulo θ entre 0 y π tal que $\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}||||\vec{w}||}$.
- Determinamos que dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales sí, y solo sí, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

2. Rectas y planos

En este capítulo utilizaremos el contenido que desarrollamos en el capítulo 1 para estudiar rectas y planos en el espacio. La importancia de estudiar dichos objetos se debe a que, desde el punto de vista algebraico, las rectas y los planos son casos particulares de conjuntos de vectores que tienen propiedades relevantes en relación a la suma de vectores y al producto de un vector por un escalar. Por este motivo, a estos objetos no se los considera simplemente un "conjuntos de puntos" sino un espacio de vectores *o* espacios lineales. *Las propiedades de estos espacios de vectores, que estudiaremos en más generalidad en el capítulo próximo, son la base del Álgebra Lineal.*

2.1 Rectas

Las rectas son los espacios lineales más sencillos, dado que poseen una sola dirección. Si bien nos concentraremos en rectas en el espacio, todas las definiciones son válidas para espacios n-dimensionales.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación vectorial de la recta.
- Cómo determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares.
- La ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$.
- Cómo determinar si un punto pertenece a una recta y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

■

2.1.1 ¿Cómo describir una recta?

Es usual que se enseñe a describir una recta en el plano por medio de una ecuación de la forma $y = mx + b$, donde m (la pendiente) y b (la ordenada) son números reales dados. Formalmente, esta ecuación está diciendo que la recta es precisamente el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = mx + b\}$. Esta manera de describir una recta se basa, entonces, en establecer una "relación entre las coordenadas de sus puntos". Por ejemplo, si la ecuación de la recta es $y = 3x + 2$ entonces el punto $(1, 5)$ pertenece ella, ya que $5 = 3{,}1 + 2$.

Lo curioso es que, si no nos hubieran enseñado a describir a las rectas de esta manera, probablemente no hubiésemos ideado este tipo de descripción. Imaginemos que estamos en una habitación en penumbras y hay un rayo láser que la atraviesa de punta a punta en alguna dirección. ¿Cómo podemos describir la recta que determina el haz? Supongamos que tenemos una vara de madera de 1 metro de largo y que queremos representar el haz por medio de la vara, en el sentido que *queremos ubicar la vara sobre la recta del haz*. Para esto, podemos acercar la vara hasta que corte el rayo y después "enderezarla" para que coincida con este. O mejor aún, podemos *enderezar primero la vara para que quede paralela al rayo* y después, sin cambiar la dirección que tiene, *desplazarla hasta superponerla con el rayo*. Esta última manera se puede se puede traducir al lenguaje de vectores: utilizamos un vector para determinar la dirección de la recta ("enderezar la vara" para hacerla paralela al haz) y, después, utilizar otro vector para determinar por dónde pasa la recta ("trasladar la vara" hasta que quede superpuesta con el haz). La descripción de una recta identificando su dirección y un punto por el que pasa, se conoce como ecuación vectorial de la recta.

2.1.2 La ecuación vectorial de la recta

Para describir una recta vectorialmente, necesitamos un vector $\vec{v}$ que nos brinde la dirección de la recta y un vector $\vec{w}$ que traslade la recta hasta un punto por el cual queremos que pase. Recordemos que todos los múltiplos $t\vec{v}$ de $\vec{v}$ (con $t \in \mathbb{R}$) forman una recta que tiene la dirección de $\vec{v}$. Esta recta pasa por el origen de coordenadas, pues el vector $\vec{v}$ tiene su origen allí. Por lo tanto, esta recta es paralela a la que describiremos y solo nos resta desplazarla en el sentido del vector $\vec{w}$.

Definición 15 Una **ecuación vectorial** para la recta L contenida en $\mathbb{R}^n$ con dirección $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^n$ es:

$$t\vec{v} + \vec{w},$$

donde $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de extremo P, $\vec{v}$ se llama un *vector director* de la recta y $t \in \mathbb{R}$. Una ecuación vectorial para la recta L nos brinda una manera de describir los puntos de la recta, y lo hacemos de la siguiente manera:

$$L = \{X \in \mathbb{R}^n \,:\, X = t\vec{v} + \vec{w},\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Importante La igualdad $X = t\vec{v} + \vec{w}$ utilizada en la definición anterior debe interpretarse como "el punto X es el extremo del vector $t\vec{v} + \vec{w}$". Este abuso de notación aparecerá muy seguido en el texto y esta justificado desde la identificación natural que hay entre vectores de $\mathbb{R}^n$ con origen en $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ y puntos de $\mathbb{R}^n$. ■

Como planteamos, $t\vec{v}$ es la ecuación de una recta con dirección $\vec{v}$ que pasa por el origen de coordenadas. Si recordamos la interpretación de la suma de vectores, observemos que al sumar el vector $\vec{w}$ a cada punto de la recta, lo estamos trasladando en esa dirección (Figura 2.1). En particular, el $\vec{0}$ va a parar al $\vec{w}$. Gráficamente, alcanza con imaginarnos que tomamos con el pulgar y el índice la recta por el origen, la levantamos y la apoyamos en el extremo de $\vec{w}$, sin cambiarle la dirección.

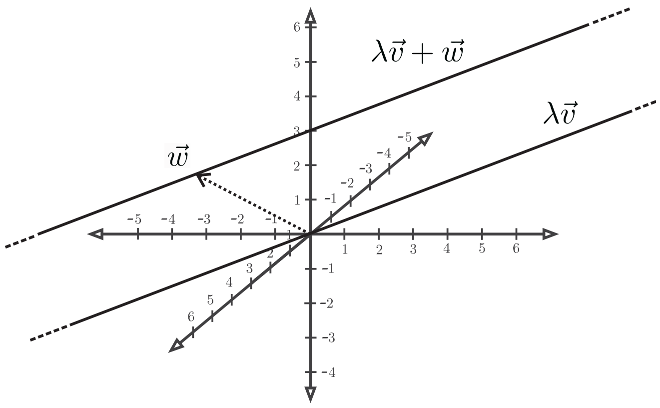


Figura 2.1: Traslado de una recta que pasa por el origen.

Ejemplos 16

- La recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t(1,2) + (3,3), \ t \in \mathbb{R}\}$ es una recta del plano con dirección $(1,2)$ que pasa por el punto $(3,3)$.
- La recta $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(-1,0,3) + (-2,2,7), \ t \in \mathbb{R}\}$ es una recta con dirección $(-1,0,3)$ y que pasa por el punto $(-2,2,7)$.

■

Recordemos que en la definición de ecuación vectorial dijimos "*Una* ecuación vectorial para la recta..." y no "*La* ecuación vectorial para la recta...". Esto se debe a que hay infinitas ecuaciones vectoriales que pueden describir la misma recta. Por un lado, del vector director solo nos importa la dirección que nos provee; ademas ni su sentido, ni su módulo alteran esta dirección. De este modo, las ecuaciones $t\vec{v} + \vec{w}$ y $t(5\vec{v}) + w$ representan *la misma recta* (aquí 5 puede ser reemplazado por cualquier número real distinto de 0). Por otro lado, el vector $\vec{w}$ es trasladar la recta de manera que *el punto de la recta que, originalmente, tocaba el origen de coordenadas es "reubicado" en el extremo de* $\vec{w}$. Pero dado que una recta se extiende infinitamente en ambas direcciones, es lo mismo trasladar este punto que toca el origen a *cualquier otro* punto de la recta (Figura 2.2). Por lo tanto, la elección de $\vec{w}$ para desplazar a la recta tampoco es única.

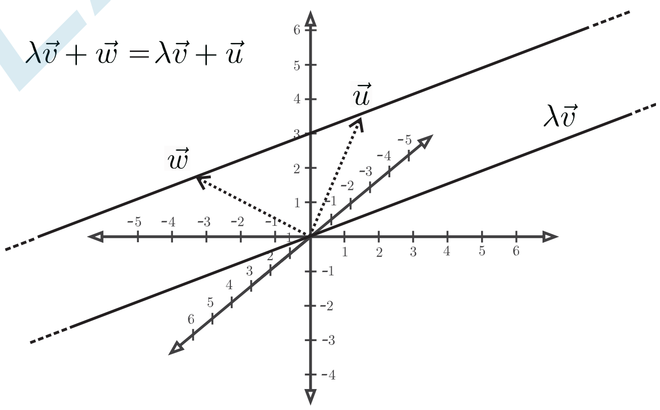


Figura 2.2: Diferentes traslaciones que determinan la misma recta.

■ **Ejemplo 17** Las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2,1,-1) + (1,3,2),\ t \in \mathbb{R}\}$, $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(4,2,-2) + (1,3,2),\ s \in \mathbb{R}\}$ y $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(-6,-3,3) + (3,4,1),\ k \in \mathbb{R}\}$ son iguales. Observen que, si bien los vectores directores de L y L' son distintos, uno es múltiplo del otro, por lo cual determinan la misma dirección. Por otro lado, el vector director de L'' también es múltiplo de los vectores directores de L y L', por lo cual determina la misma dirección que estas, y además pasa por el punto $(3,4,1)$ que pertenece a L y L'. ■

¿Cuándo un punto pertenece a una recta? Si queremos saber si el punto $(3,-2)$ pertenece a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(2,1) + (5,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$, ya vimos que la interpretación geométrica de esta ecuación significa que la recta tiene dirección $(2,1)$ y pasa por el punto $(5,-1)$. ¿Cuál es su interpretación algebraica? La ecuación $X = t(2,1) + (5,-1)$ establece que los puntos de la recta "son de la forma" $t(2,1) + (5,-1)$, para t un número real; o, aquello que es lo mismo, son de la forma $(2t+5, t-1)$ –teniendo presente las definiciones de producto de un vector por un escalar y de suma de vectores–. Esto quiere decir que: *un punto* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pertenece a la recta* L *si y solo si existe un número real* t *tal que* simultáneamente $x = 2t+5$ e $y = t-1$. Cuando queremos que dos ecuaciones se verifiquen simultáneamente, las escribimos abarcadas por una llave "{" de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = 2t+5 \\ y = t-1 \end{cases}$$

En nuestro caso, $(3,-2)$ pertenecerá a L si podemos encontrar un $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} 3 = 2t+5 \\ -2 = t-1 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación nos queda: $t = \frac{3-5}{2} = -1$. Esto determina que, si existe dicho t entonces tiene que ser el -1 (de lo contrario no se verificaría la primera ecuación). Lo que nos resta verificar es si con $t = -1$ se verifica la segunda ecuación (pues buscamos un t que verifique *ambas ecuaciones simultáneamente*). Pero $-2 = -1-1$, por lo cual, con $t = -1$ se verifican ambas ecuaciones y podemos concluir que $(3,-2) \in L$.
¿Qué sucede ahora con el punto $(-1,0)$? ¿Pertenece a L? En este caso buscamos un $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} -1 = 2t+5 \\ 0 = t-1 \end{cases}$$

Para que sea válida la segunda ecuación debemos tener $t = 1$. Pero si reemplazamos con $t = 1$, en la primera ecuación obtenemos $-1 = 2{,}1 + 5 = 7$, lo cual es una contradicción (pues $-1 \neq 7$). En este caso, no existe ningún $t \in \mathbb{R}$ verificando ambas condiciones simultánemanete, por lo que $(-1,0) \notin L$.

Dados dos puntos $P, Q \in R^n$ analicen cuál debe ser la dirección de la recta que pasa por ellos, por qué punto debe pasar y si es única la escritura de suecuación vectorial.

¿Cómo se puede expresar la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$ en general? Lo que debemos hacer es análogo a lo que hicimos en $\mathbb{R}^2$. Observen el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 18** Supongamos que queremos determinar si $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1,3,-1) + (2,5,4),\ t \in \mathbb{R}\}$. Los puntos de L son de la forma $(t+2, 3t+5, -t+4)$, por lo que $(1,2,1) \in L$ si y solo si se verifican simultáneamente las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = t + 2 \\ 2 = 3t + 5 \\ 1 = -t + 4 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación, se tiene $t = -1$. Si reemplazamos $t = -1$ en la segunda ecuación, vemos que efectivamente $2 = 3(-1) + 5$; pero, si reemplazamos esta misma información en la última ecuación, obtenemos $1 = -(-1) + 4 = 5$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, no existe $t \in \mathbb{R}$ que haga que se verifiquen simultáneamente las tres ecuaciones y concluímos que $(1, 2, 1) \notin L$. Por el contrario, $(1, 2, 5) \in L$ como pueden verificar por su cuenta. ■

El procedimiento para rectas en $\mathbb{R}^n$ es completamente análogo.

¿Cuáles rectas son paralelas? ¿Cuáles perpendiculares? La ecuación vectorial de la recta permite decidir cuando dos rectas son paralelas o perpendiculares. En efecto, para determinar esto solo se considera la dirección de la recta (no por donde pase), por lo cual solo debemos verificar cuál es el ángulo entre sus vectores directores (cuestión que ya aprendimos a hacer en el capítulo anterior). Tengamos en cuenta que, para que dos rectas sean paralelas, sus vectores directores deben ser paralelos, pero como son vectores con origen en $\vec{0}$ entonces esto indica que son múltiplos.

Definición 16 Dos rectas L y L' son *paralelas* si los vectores directores de (cualquiera de) sus ecuaciones vectoriales son múltiplos uno del otro; y son *perpendiculares* si dichos vectores directores son ortogonales.

Ejemplos 19

- Las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7, 5, 5) + (0, 0, 2),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = s(14, -10, -10) + (3, 3, 0),\ s \in \mathbb{R}\}$ son paralelas (sus vectores directores son múltiplos).
- Las rectas $\tilde{L} = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(2, -3, -2) + (3, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $\tilde{L}' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = s(2, 2, -1) + (3, -1, 5),\ s \in \mathbb{R}\}$ son perpendiculares (sus vectores directores son ortogonales).

■

2.1.3 Ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$

Más allá de la naturalidad de describir una recta por medio de su ecuación vectorial, en muchas ocasiones, es conveniente tener descriptos sus puntos por medio de la relación entre sus coordenadas. En este apartado veremos cómo describir rectas de $\mathbb{R}^2$ de esta forma. Para rectas en $\mathbb{R}^3$ debemos esperar hasta el tema *intersecciones de plano*. Sabemos que en $\mathbb{R}^2$ una recta queda determinada por una relación de la forma $y = 3x + 2$. A esta ecuación podemos escribirla de manera equivalente como $-3x + y = 2$ (simplemente despejamos todas las coordenadas de un lado y dejamos los números del otro). La manera de describir una recta por medio de este tipo de ecuaciones se llama *ecuación implícita* de la recta.

Definición 17 Una *ecuación implícita* para la recta L en $\mathbb{R}^2$ es una relación de la forma $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, de manera que un punto $(x, y) \in L$ si y solo si sus coordenadas verifican dicha ecuación. La relaciones de esta forma se llaman *lineales*. La recta L queda definida entonces por $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by = c\}$.

Ejemplos 20

- La recta de ecuación $y = 3x + 5$ tiene por ecuación implícita $-3x + y = 5$. También, $3x - y = -5$ y $-6x + 2y = 10$ son ecuaciones implícitas para esta recta. En el primer caso, hemos multiplicado a ambos lados de la ecuación original por -1; en el segundo, por 2. Esto se debe a que multiplicar una igualdad a ambos lados por un *número no nulo* no cambia la relación entre las variables involucradas.

- Una ecuación implícita para la recta $\{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t(1,2) + (3,3),\ t \in \mathbb{R}\}$ es $2x - y = 3$. Es posible verificar esto al graficar la recta.

Observación 6 *Si bien la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$ consta de una ecuación, en dimensiones mayores se necesita más de una ecuación para describir una recta. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ se necesitan* dos *ecuaciones para describir una recta (veremos en el próximo apartado que una sola ecuación en $\mathbb{R}^3$ describe un plano, no una recta).*

¿Por qué se necesitan más ecuaciones para describir implícitamente un recta en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$? Que un conjunto de puntos verifiquen una ecuación es poner una restricción a esos puntos. Cuanto más *restricciones pongamos,* menos *será la cantidad de puntos que las verifiquen. En los espacios de vectores, una restricción* disminuye la dimensión en 1*; esto quiere decir que, si ponemos una restricción (ecuación) a los puntos de $\mathbb{R}^2$ (un espacio de 2 dimensiones), obtenemos un espacio que tiene una sola dimensión: una recta. Si en cambio ponemos una restricción a los puntos de $\mathbb{R}^3$ (espacio de 3 dimensiones), obtenemos un espacio con 2 dimensiones: un plano. Si agregamos ahora una restricción más (2 ecuaciones en total) entonces obtenemos un espacio de otra dimensión menos: una recta.*

Una de las ventajas de tener una recta descripta en forma implícita es que verificar la pertenencia de un punto a la recta es mucho más sencillo. Efectivamente, como la ecuación implícita es simplemente una relación que cumplen las coordenadas de los puntos de la recta, un punto que cumpla dicha relación estará en la recta, y un punto que no la cumpla, no. Por ejemplo, para verificar si $(3, -2)$ pertenece a la recta L' de ecuación $x + 2y = -1$, solo debemos reemplazar $x = 3$ e $y = -2$ en dicha ecuación y ver si se verifica la igualdad. En este caso, $3 + 2.(-2) = -1$, por lo que concluimos cual $(3, -2) \in L'$. También, $(-1, 0)$ pertenece a L', ya que $-1 + 2{,}0 = -1$. Por otro lado, $(1, 1) \notin L'$ pues $1 + 2{,}1 = 3 \neq -1$.

2.1.4 ¿Cómo hallar la ecuación vectorial a partir de la implícita? ¿y viceversa?

Como se pudo haber notado (o sospechado), para hacer ciertas cosas es conveniente trabajar con la ecuación vectorial, y para hacer otras, con la implícita. Por ejemplo, la ecuación vectorial es más fácil para describir geométricamente la recta, mientras que, para chequear la pertenencia de un punto a la recta, es mejor trabajar con la ecuación implícita. Por este motivo, es importante que sepamos cómo pasar de una a otra. Lo hacemos con un ejemplo.

Consideremos nuevamente la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t(2,1) + (5,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$. Vimos que un punto $(x, y) \in L$ si y solo si:

$$\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Para escribir una ecuación implícita para L debemos hallar una relación lineal entre sus coordenadas. Aunque no sea del todo evidente, estas ecuaciones muestran una relación lineal entre x e y; *sólo que lo están haciendo por medio de t*. Es decir, nos dicen cómo depende linealmente tanto x de t como y de t. A partir de estas dependencias de t nuestro trabajo es hallar cómo depende linealmente x de y (algo asi como “eliminar al intermediario”). Esto se obtiene al despejar t de una ecuación y reemplazarlo en la otra. En este caso, al despejar t de la ecuación segunda, nos queda $t = y + 1$; y, al reemplazar t por $y + 1$ en la ecuación primera, obtenemos $x = 2(y + 1) + 5 = 2y + 7$.

Por lo tanto, despejando convenientemente, nos queda la relación lineal $x - 2y = 7$. Esta es la ecuación implícita de la recta L. Es decir, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x - 2y = 7\}$.

■ **Ejemplo 21** Hallemos la ecuación implícita de $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t(-1, 1) + (2, 3),\ t \in \mathbb{R}\}$. Los puntos de L son de la forma $(-t + 2, t + 3)$ con $t \in \mathbb{R}$. Es decir:

$$\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$$

Al despejar t de la primera ecuación encontramos que $t = -x + 2$. Al reemplazar esta información en la segunda ecuación tenemos $y = (-x + 2) + 3 = -x + 5$. De aquí, pasando la x al lado izquierdo obtenemos $x + y = 5$, una ecuación implícita para L. ■

¿Cómo hallamos ahora la ecuación vectorial de una recta dada en forma implícita? Lo hacemos nuevamente con un ejemplo. Supongamos que tenemos la recta L' de ecuación $x + 2y = -1$. De aquí despejamos x, y obtenemos que $x = -2y - 1$; es decir, si la segunda coordenada es y entonces la primera debe ser $-2y - 1$, para cualquier $y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, vemos que los puntos de la recta L' son de la forma $(-2y - 1, y)$, con $y \in \mathbb{R}$. Tal vez hayan notado que estamos cerca, en caso de que tengan dificultades en este punto puede cambiar la variable "y" por la variable "t" para que sea más evidente por donde estamos yendo. Reescribiéndolo de esta forma, observamos que los puntos de la recta L' son de la forma $(-2t - 1, t)$ con $t \in \mathbb{R}$. Este vector tiene la misma forma a la que llegamos luego de agrupar todos los términos de la ecuación vectorial dentro de un mismo vector. Por lo tanto, lo que debemos hacer ahora es "desandar" esta expresión para escribirla como un múltiplo de un vector (el vector director) más otro vector (que traslada la recta al punto por el que pasa). Y la manera de hacerlo es muy sencilla. En primer lugar escribimos $(-2t - 1, t)$ como suma de dos vectores: uno cuyas coordenadas están multiplicadas por t y otro cuyas coordenadas son solo números. En este caso:

$$(-2t - 1, t) = \underbrace{(-2t, t)}_{\text{coord. con } t} + \underbrace{(-1, 0)}_{\text{coord. con números}} .$$

En segundo lugar, "sacamos" el t por fuera del primero de estos vectores de manera que $(-2t, t) = t(-2, 1)$. Por lo tanto, obtenemos:

$$(-2t - 1, t) = t(-2, 1) + (-1, 0),$$

y esta es una ecuación vectorial de L' (con vector director $(-2, 1)$ y punto de paso $(-1, 0)$. En la expresión anterior ¿qué hubiese sucedido si despejábamos y en función de x en lugar de x en función de y? Pues en este caso, como $y = \frac{-1-x}{2}$, vemos que los puntos de L son de la forma $(x, \frac{-1-x}{2})$ con $x \in \mathbb{R}$. Al descomponer este vector, observamos que:

$$\left(x, \frac{-1-x}{2}\right) = \left(x, -\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) = x\left(1, -\frac{1}{2}\right) + \left(0, -\frac{1}{2}\right),$$

y obtenemos la ecuación vectorial $s(1, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$, $s \in \mathbb{R}$. Por supuesto, esta ecuación define la misma recta L. Notemos que los vectores directores, en ambos casos, son múltiplos uno del otro, y se puede verificar que el punto $(-1, 0)$ puede escribirse como $s(1, -\frac{1}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$ (así como el punto $(0, -\frac{1}{2})$ puede escribirse como $t(-2, 1) + (-1, 0)$).

■ **Ejemplo 22** Encontremos la ecuación vectorial de la recta L definida por la ecuación $3x + \frac{1}{2}y = -1$. Al despejar y en función de x, vemos que $y = 2(-1 - 3x) = -2 - 6x$. Por lo tanto, los puntos de L son de la forma $(x, -2 - 6x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Reescribiendo este vector convenientemente tenemos $(x, -2 - 6x) = x(1, -6) + (0, -2)$. Por lo tanto, una ecuación vectorial para L es $t(1, -6) + (0, -2)$. ■

¿Qué hicimos en el apartado 2.1?

- Definimos la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^n$ a partir de una dirección (vector director) y de un punto de paso (un vector que traslada la recta al dicho punto).
- Aprendimos cómo determinar que dos rectas sean paralelas o perpendiculares en función de los vectores directores de sus ecuaciones vectoriales.
- Definimos la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$ como una relación lineal entre las coordenadas de los puntos de la recta. Esta relación determina completamente cuáles puntos forman parte de la recta y cuáles no.
- Estudiamos cómo determinar cuándo un punto pertenecía a una recta y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

■

2.2 Planos

En este apartado se estudiarán planos en el espacio. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre un plano y una recta? Seguramente, ningún estudiante tendrá problema en distinguir entre ambos conceptos, pero contestar esta pregunta podría requerir tiempo para pensar su respuesta. La diferencia fundamental entre un plano y una recta es que una recta solo "contiene" una dirección, mientras que el plano contiene infinitas. Gráficamente, si estamos parados en un punto de una recta y nos queremos desplazar sobre ella, solo tenemos dos opciones: ir a la derecha o ir a la izquierda (de donde estamos). En cambio, si estamos en un plano, podemos movernos en cualquier dirección: derecha, izquierda, adelante, atrás o una combinación de las anteriores (por ejemplo, dos pasos a la derecha y 3 pasos hacia atrás). Pero, ¿es posible sobre un plano movernos *en cualquier dirección*? En realidad, *no*. Porque, por ejemplo, no podemos movernos hacia arriba (nos iríamos del plano). Mientras que en el espacio, sí tenemos esta posibilidad (derecha, izquierda, adelante, atrás, arriba y abajo).

¿Qué es entonces lo que diferencia la recta, el plano y el espacio? *Los grados de libertad*; es decir, la cantidad de direcciones *independientes* en las que nos podemos mover. La *recta* tiene un solo grado de libertad, pues solo tenemos una dirección en la cual movernos (depende el sentido que escojamos será a la derecha o a la izquierda). El *plano* tiene dos grados de libertad, ya que además de derecha-izquierda podemos movernos adelante-atrás. ¿Qué sucede con los movimientos en diagonal? Como mencionamos anteriormente, son *combinación* de movimientos en la dirección derecha-izquierda y adelante-atrás, por lo cual *no* son nuevos grados de libertad: no son independientes de derecha-izquierda y adelante-atrás. Por supuesto, el *espacio* tiene tres grados de libertad.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación vectorial de un plano en $\mathbb{R}^3$.
- La ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$.
- Cómo determinar si un punto pertenece a un plano y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita y viceversa.

■

2.2.1 La ecuación vectorial del plano

El concepto que hay detras del procedimiento para formar una ecuación vectorial para un plano es la misma que para la recta. Para describir un plano, primero determinamos su "inclinación" y después lo trasladamos hasta el punto por donde esperamos que pase. En el caso de las rectas, usamos un vector que nos dé la dirección de la recta. En el caso de los planos, necesitamos *dos* vectores (que no sean múltiplos) para dar la inclinación del plano. Desde el punto de vista geométrico, al elegir dos vectores que no son múltiplos queda determinado un único plano que contiene a ambos (Figura 2.3). Desde el punto de vista algebraico, elegir dos vectores representa determinar en qué dirección serán los grados de libertad que tiene ese plano. Por ejemplo, el plano xy tiene sus grados de libertad en el eje x y el eje y (y, por lo tanto, podemos movernos en las infinitas combinaciones de movimientos sobre el eje x y el eje y). Como el eje x consta de todos los múltiplos de $(1, 0, 0)$ y el eje y del $(0, 1, 0)$ entonces podemos pensar a estos vectores como directores del plano xy. Si bien estos vectores son perpendiculares, esto no es, en general, necesario. Por ejemplo, los vectores $(1, 2, 0)$ y $(-1, 1, 0)$ también determinan el plano xy.

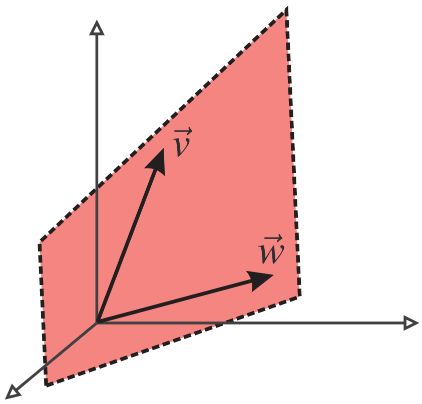


Figura 2.3: Dos vectores (no múltiplos) determinan un único plano.

Definición 18 Una *ecuación vectorial* del plano Π contenido en $\mathbb{R}^n$ con vectores directores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y que pasa por el punto $P \in \mathbb{R}^n$ es:

$$L : t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},$$

donde $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ es el vector de extremo P y $t, s \in \mathbb{R}$. Una ecuación vectorial para el plano Π permite describir los puntos del plano, y lo hacemos de la siguiente manera:

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u}, \, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplos 23

- La ecuación $t(1, 1, 2) + s(-1, 3, 7) + (2, 0, 0)$ con $t, s \in \mathbb{R}$ determina un plano de vectores directores $(1, 1, 2)$ y $(-1, 3 - 7)$ y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$.
- La ecuación $t(-1, 5, 2) + s(2, -10, -4) + (1, 1, 3)$ con $t, s \in \mathbb{R}$ *no* es la ecuación vectorial de un plano ya que $(2, -10, -4) = -2(-1, 5, 2)$; es decir, los vectores directores son múltiplos y, por lo tanto, no determinan dos grados de libertad. En este caso, esta ecuación describe los puntos de una recta de vector director $(-1, 5, 2)$ que pasa por el punto $(1, 1, 3)$. Además describe a dicha recta de manera redundante, ya que sabemos que podemos utilizar un único vector director para hacerlo.

■

Al igual que con las rectas, un plano posee infinitas ecuaciones vectoriales; pero en este caso, la variedad de ecuaciones que uno puede construir es mucho mayor. Realicen el siguiente experimento.

Experimento 7 Consideren el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u}, \, t, s \in \mathbb{R}\}$ que aparece en la Figura 2.4. Luego, calculen gráficamente:

1. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = t(2\vec{v}) + s\vec{w} + \vec{u}, \, t, s \in \mathbb{R}\}$.
2. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = t(2\vec{v}) + s\overrightarrow{-w} + \vec{u}, \, t, s \in \mathbb{R}\}$.
3. el plano $\{X \in \mathbb{R}^3 \, : \, X = t(\vec{v} + \vec{w}) + s\overrightarrow{-2w} + \vec{u}, \, t, s \in \mathbb{R}\}$.

■

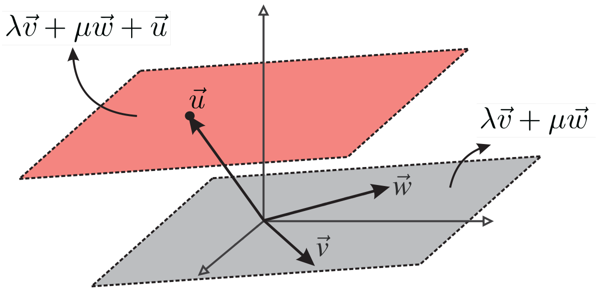


Figura 2.4: El plano de ecuación vectorial $t\vec{v}+s\vec{w}+\vec{u}$.

Observación 7 *Vemos como resultado del Experimento 7 que, a diferencia del caso de las rectas, en el que los vectores directores de distintas ecuaciones vectoriales resultan múltiplos entre sí, ahora los vectores directores de dos ecuaciones vectoriales del plano pueden no estar relacionados de una manera tan directa.*

Al igual que con las rectas, $\{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t\vec{v}+s\vec{w},\ t,s \in \mathbb{R}\}$ es un plano que pasa por el origen de coordenadas, y sumarle $\vec{u}$ tiene la interpretación gráfica de levantar el plano por el origen y moverlo, sin cambiarle la inclinación, hasta apoyar el origen de coordenadas en el extremo de $\vec{u}$.

¿Cuándo un punto pertenece a un plano? El razonamiento es exactamente el mismo que para las rectas. Supongamos que queremos saber si el punto $(1,3,-2)$ pertenece al plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,2,1)+s(0,1,-1)+(2,5,-1),\ t,s \in \mathbb{R}\}$. Interpretamos que esta fórmula establece que los puntos del plano Π son de la forma $t(1,2,1)+s(0,1,-1)+(2,5,-1)$ para t y s números reales. Es decir, son de la forma $(t+2, 2t+s+5, t-s-1)$ con $s,t \in \mathbb{R}$. Esto nos advierte que *un punto* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$*, pertenece al plano* Π *si y solo si existen números reales* t,s *tales que* simultáneamente $x = t+2$, $y = 2t+s+5$ y $z = t-s-1$. Esto lo podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = 2t+s+5 \\ z = t-s-1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $(1,3,-2)$ pertenecerá a Π si podemos encontrar un $t,s \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{cases} 1 = t+2 \\ 3 = 2t+s+5 \\ -2 = t-s-1 \end{cases}$$

De la primera ecuación despejamos $t=-1$. Al reemplazar en la segunda ecuación y al despejar s, nos queda $s=0$. Finalmente, al reemplazar por $t=-1$ y $s=0$ en la última ecuación se tiene, $-2=-2$, lo cual es correcto. Por lo tanto, $(1,3,-2) \in \Pi$, ya que hallamos $t,s \in \mathbb{R}$ que verifican las ecuaciones de arriba, simultáneamente.

2.2.2 Ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$

Cómo comentamos en la observación de la página 44, un plano se puede describir a través de una *única* ecuación que relacione linealmente sus coordenadas.

Definición 19 Una *ecuación implícita* para el plano Π en $\mathbb{R}^3$ es una relación *lineal* $ax+by+cz=d$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ de manera que un punto $(x,y,z) \in \Pi$ si y solo si sus coordenadas verifican dicha ecuación. Lo notamos $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, ax+by+cz=d\}$.

Ejemplos 24

- El plano xy tiene por ecuación implícita la ecuación $z = 0$. Observemos que la característica que tienen en común los puntos de dicho plano es, precisamente, que la cooordenada z es nula.
- El plano cuyos vectores directores son $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$, tiene ecuación implícita $x - y - z = 0$.

Comprobar la pertenencia de puntos a un plano descripto por una ecuación implícita es también más sencillo que si viene dado por una ecuación vectorial, ya que solo debemos corroborar que se verifique la ecuación. Por ejemplo, si $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3z = -7\}$, entonces $(1,2,3) \in \Pi$, pues $2{,}1 - 3{,}3 = -7$. Por otro lado, $(1,0,0) \notin \Pi$ pues $2{,}1 - 3{,}0 = 2 \neq -7$.

2.2.3 ¿Cómo hallar la ecuación vectorial a partir de la implícita, y viceversa?

El procedimiento es el mismo que para las rectas, solo que se suma una variable más con la cual debemos trabajar. Tomemos un ejemplo, considerando de nuevo el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,2,1) + s(0,1,-1) + (2,5,-1),\ t,s \in \mathbb{R}\}$. En el mismo, vimos que un punto (x,y,z) estaba en Π si y solo si:

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + s + 5 \\ z = t - s - 1 \end{cases}$$

Al igual que en el caso de las rectas, estas ecuaciones brindan una relación lineal entre las variables x, y, z, solo que lo están haciendo por medio de s y t. Nuestro objetivo, entonces, es desenmascarar esta relación quitando s y t, Al despejar t y s en función de nuestras coordenadas. Por ejemplo, de la primera ecuación despejamos t y nos queda $t = x - 2$. En la segunda ecuación, al reemplazar este nuevo dato, nos queda $y = 2(x-2) + s + 5$, de donde despejamos s, y obtenemos $s = y - 2x - 1$. Una vez despejadas s y t en función de las coordenadas, solo nos resta reemplazar estos datos en la última ecuación para obtener $z = (x-2) - (y - 2x - 1) - 1$, a partir de la cual conseguimos la ecuación $z = 3x - y - 2$. Al agrupar para que quede en forma implícita, hallamos que $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, -3x + y + z = -2\}$.

Ejemplos 25

- Consideremos el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,0,1) + s(-2,2,3) + (1,-3,-1),\ t,s \in \mathbb{R}\}$. Entonces, los puntos $(x,y,z) \in \Pi$ verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = t - 2s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = t + 3s - 1 \end{cases}$$

  De la primera ecuación obtenemos que $t = x + 2s - 1$. Al reemplazar el valor de t en la tercera ecuación, se tiene que $z = x + 2s - 1 + 3s - 1 = x + 5s - 2$. Si despejamos s de esta última ecuación, obtenemos: $s = \frac{z-x+2}{5}$. Por último, al reemplazar el valor de s en la segunda ecuación, se tiene que $y = 2\frac{z-x+2}{5} - 3$, de lo cual concluimos que $-\frac{2}{5}x - y + \frac{2}{5}z = \frac{11}{5}$. Esta es una posible ecuación implícita para el plano Π. Podemos simplificarla, multiplicando esta última igualdad por 5, es decir, $-2x - 5y + 2z = 11$. Esta también constituye una ecuación implícita para el plano Π.
- Al considerar la ecuación vectorial $t(1,2,-1) + s(-2,-4,2) + (0,0,1)$, observamos que, como los vectores directores son uno múltiplo del otro, dicha ecuación no define un plano. Hagamos el pasaje a la forma implícita y veamos qué ocurre en este caso. Tenemos las siguientes relaciones entre las coordenadas de un punto cualquiera

que verifica la ecuación dada:

$$\begin{cases} x = t - 2s \\ y = 2t - 4s \\ z = -t + 2s + 1 \end{cases}$$

En la primera ecuación obtenemos $t = x + 2s$. Luego, al reemplazaar esta última igualdad en la segunda y tercera ecuación, resulta $y = 2(x + 2s) - 4s = 2x$ y $z = -(x + 2s) + 2s + 1 = -x + 1$, respectivamente. En este caso, tenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = -x + 1 \end{cases}$$

Observemos que estas dos ecuaciones no pueden reducirse a una sola pues tanto y como z dependen de x de manera independiente. Si quisiéramos despejar x de la primera ecuación y reemplazarla en la segunda, de manera de quedarnos solo con la ecuación $z = \frac{y}{2} + 1$, entonces estaríamos perdiendo información, ya que sabríamos cómo depende z de y pero ignoraríamos cómo depende y de x. Por lo tanto, las dos ecuaciones son independientes y no pueden reducirse a una sola.

■

¿Cómo hallamos ahora la ecuación vectorial de un plano dado en forma implícita? Lo hacemos con un ejemplo. Supongamos que tenemos el plano $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x + 2y - z = -1\}$. De aquí obtenemos que $x = -2y + z - 1$. Es decir, la ecuación nos indica que, dados $y, z \in \mathbb{R}$, el punto $(x, y, z) \in \Pi'$ si y solo si $x = -2y + z - 1$. Por lo tanto, los puntos del plano Π' son de la forma $(-2y + z - 1, y, z)$ con $y, z \in \mathbb{R}$. Nuevamente, debemos "descomponer" este vector para escribirlo como un múltiplo de un vector director, más un múltiplo de otro vector director, más otro vector que indica el punto por el que pasa. En primer lugar escribimos $(-2y + z - 1, y, z)$ como suma de tres vectores: uno cuyas coordenadas están multiplicadas por y, otro cuyas coordenadas estén multiplicadas por z y otro cuyas coordenadas son solo números. En este caso:

$$(-2y + z - 1, y, z) = \underbrace{(-2y, y, 0)}_{\text{coord. con } y} + \underbrace{(z, 0, z)}_{\text{coord. con } z} + \underbrace{(-1, 0, 0)}_{\text{coord. con números}}$$

Luego, "sacamos" y por fuera del primero de estos vectores y z por fuera del segundo y, de esta manera, obtenemos:

$$(-2y + z - 1, y, z) = \underbrace{y(-2, 1, 0)}_{(-2y,y,0)} + \underbrace{z(1, 0, 1)}_{(z,0,z)} + (-1, 0, 0),$$

la cual es una ecuación vectorial para Π'. Así mismo, podemos reemplazar las variables y y z en esta expresión para escribir $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \; : \; X = t(-2, 1, 0) + s(1, 0, 1) + (-1, 0, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$.

Estudien cómo se modifica la ecuación del plano si en vez de comenzar despejando la variable x se hubiese despejado la variable y o la z.

■ **Ejemplo 26** Consideremos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; -3x + 7y + z = 0\}$. Despejamos, por ejemplo, la variable z de esta última ecuación y obtenemos $z = 3x - 7y$. Así, un punto (x, y, z) pertenece a Π si y solo si verifica que $(x, y, z) = (x, y, 3x - 7y) = (x, 0, 3x) + (0, y, -7y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -7)$. De esta forma, obtenemos la ecuación implícita $t(1, 0, 3) + s(0, 1, -7)$ para Π. ■

Los planos admiten otra forma de descripción, además, de la ecuación vectorial y la implícita, esta es: *la ecuación normal* que desarrollaremos en el próximo apartado.

¿Qué hicimos en el apartado 2.2?

- Definimos la ecuación vectorial del plano en $\mathbb{R}^3$ a partir de dos direcciones distintas (vectores directores) y un punto de paso (un vector que traslada el plano a dicho punto).
- Definimos la ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$ como una relación lineal entre las coordenadas de los puntos del plano. Esta relación determina completamente cuáles puntos forman parte del plano y cuáles no.
- Estudiamos cómo determinar cuando un punto pertenece a un plano y cómo pasar de la ecuación vectorial a la implícita, y viceversa.

2.3 La ecuación normal de un plano

Veamos otra forma vectorial de describir un plano: la ecuación normal. En este caso, necesitaremos utilizar nuestra herramienta de medición introducida en el capítulo anterior: el producto escalar.

En este apartado estudiaremos...

- La ecuación normal de un plano y su relación con la ecuación implícita del mismo.
- El producto vectorial entre vectores de $\mathbb{R}^3$.

2.3.1 La ecuación normal

Primero veamos una analogía, imaginemos que tenemos una placa plana de vidrio con una sopapa (un palo con ventosa) pegada a (Figura 2.5 lado izquierdo). Supongamos que la placa es "infinita", de manera que podemos pensarla como un plano de $\mathbb{R}^3$. Todos los puntos de la placa tienen una propiedad en común respecto de la sopapa: si pensamos que el lugar donde la sopapa está pegada a la placa es el origen de coordenadas, entonces cada punto de la placa (visto como el extremo de un vector), es perpendicular al vector determinado por la sopapa (Figura 2.5 lado derecho). De hecho, esta propiedad es *definitoria* del plano, en el sentido que un punto está en la placa si y solo si es perpendicular a la ventosa. Es decir, podemos describir (el plano dado por) la placa como "el conjunto formado por todos los puntos perpendiculares (al vector dado por) la sopapa". ¿Cómo escribir esta propiedad formalmente? Sabemos que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Si llamamos Π al plano determinado por la placa y $\vec{N}$ al vector determinado por la sopapa, entonces escribimos:

$$\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, \vec{N} \cdot \vec{X} = 0\}.$$

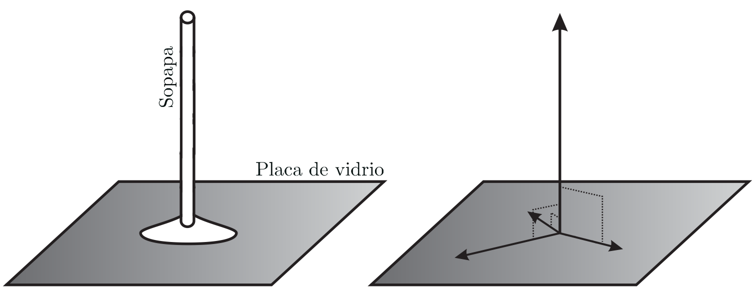


Figura 2.5: Placa de vidrio con sopapa pegada.

Un vector $\vec{N}$ que es perpendicular al plano se llama una *normal del plano*. La forma de describir un plano como el conjunto de vectores ortogonales a una dirección normal dada, se llama la *ecuación normal del plano* y se sintetiza escribiendo $\vec{N} \cdot \vec{X} = 0$, donde $X \in \mathbb{R}^3$. Esta ecuación está diciendo "considero los $X \in \mathbb{R}^3$ que son perpendiculares a $\vec{N}$".

En nuestra deducción de la ecuación normal del plano motivada por la analogía anterior, hemos asumido en un momento que la intersección entre la placa y la sopapa justamente sucedía en el origen de coordenadas. ¿Qué sucede si tenemos un plano que no pasa por el origen de coordenadas? En este caso, no es verdad que el plano sea el conjunto de puntos perpendiculares a un vector normal a él. Esto sucede ya que la perpendicularidad se mide por medio del producto escalar de vectores, y las propiedades de dicho producto valen para vectores con origen en $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Una manera de resolver esto consiste en trasladar el plano hasta que pase por el origen (esto no altera la inclinación del plano ni la de la normal) y así, entonces, plantear la ecuación normal para planos que introdujimos.

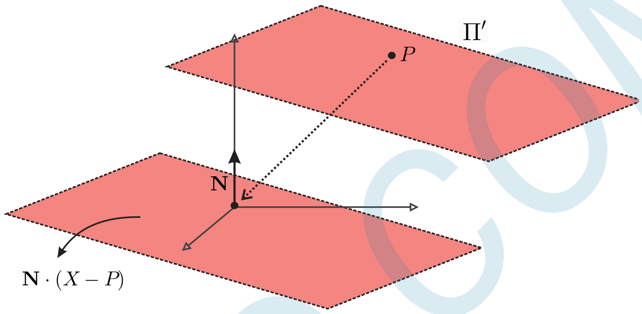


Figura 2.6: Traslado de un plano al origen.

Si Π' es ahora un plano que no pasa por el origen, digamos que pasa por un punto $P \neq \vec{0}$, entonces se puede trasladar el plano Π' al origen desplazándolo por medio del vector $-\vec{P}$ (Figura 2.6). Los puntos de este nuevo plano trasladado son de la forma $X - P$, donde $X \in \Pi'$. Por lo tanto, si $\vec{N}$ es una normal de Π', la frase "el plano Π' es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ tales que, luego de trasladar Π' al origen, resultan perpendiculares a $\vec{N}$", se puede expresar de la siguiente manera:

$$\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0\}.$$

En este caso, lo que se conoce como *ecuación normal del plano* es la fórmula $\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0$. Cuando $P = \vec{0}$, obtenemos la ecuación normal del plano por el origen que vimos antes. Estonos lleva a la siguiente definición:

Definición 20 Una *ecuación normal* de un plano Π es:

$$\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0,$$

donde $\vec{N}$ es una normal del plano (un vector perpendicular a él) y P es un punto de Π (cualquiera).

Ejemplos 27

- El plano xy consta de todos los puntos que son perpendiculares al eje z. Por lo tanto, podemos pensar que son los puntos (x, y, z) que verifican que $(x, y, z) \cdot \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{N}} = 0$.
- El plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(1, 0, 1) + s(1, 1, 0) + (1, 2, 0), \ t, s \in \mathbb{R}\}$ al trasladarlo al origen (por ejemplo,

por medio del vector $-(1,2,0)$) es el plano $= \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t(1,0,1) + s(1,1,0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Es fácil ver que el vector $(-1,1,1)$ es perpendicular a los vectores $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$ simultáneamente y, por lo tanto, a todos los puntos del plano trasladado al origen $\Pi - (1,2,0)$. Así, el vector $(-1,1,1)$ resulta ser un vector normal de dicho plano. Por lo tanto, una ecuación normal para Π es $(-1,1,1) \cdot ((x,y,z) - (1,2,0)) = 0$.

■

¿Cuándo son dos planos paralelos?¿Cuándo es un plano perpendicular a una recta? La noción de "normal de un plano" nos ofrece una manera muy sencilla de contestar estas preguntas. El estudiante podrá interpretar gráficamente estas definiciones.

Definición 21 Dos planos Π y Π' son *paralelos* si sus vectores normales son múltiplos uno del otro. Un plano Π es perpendicular a una recta L si el vector normal de Π es múltiplo del vector director de L.

¡La ecuación normal y la ecuación implícita son lo mismo! Anteriormente cuando hablamos de la ecuación implícita del plano, la presentamos como una manera de describir los puntos del espacio que verifican ciertas restricciones (ecuaciones). Pero ahora podemos ver que, en realidad, la ecuación implícita de un plano se desprende precisamente de la ecuación normal. En efecto, solo basta reescribir la ecuación $\vec{N} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0$ en toda su extensión. Es decir, si para un plano Π escribimos su vector normal $\vec{N} = (a,b,c)$, un punto genérico $X = (x,y,z)$ y un punto fijo del plano $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ entonces, teniendo en cuenta la definición de producto escalar, la ecuación normal del plano se convierte en:

$$(a,b,c) \cdot ((x,y,z) - (\alpha,\beta,\gamma)) = 0,$$

que no es otra cosa que:

$$ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

En esta última ecuación, $a\alpha + b\beta + c\gamma$ es simplemente un número real, por lo que ¡obtenemos una ecuación implícita para el plano!

Observación 8 *Veamos que los coeficientes que acompañanan a las coordenadas x, y, z en una ecuación implícita del plano son siempre las coordenadas de una normal de dicho plano.*

■ Ejemplos 28

- Consideremos el primer ítem de los Ejemplos 27. Vimos que la ecuación normal del plano xy es $(x,y,z) \cdot (0,0,1) = 0$. al desarrollar el producto escalar obtenemos que $x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 1 = 0$. Es decir, hallamos la ecuación implícita $z = 0$ para el plano xy.
- En el segundo ítem de los Ejemplos 27, una ecuación normal para Π era $(-1,1,1) \cdot ((x,y,z) - (1,2,0)) = 0$. Nuevamente, si hacemos el producto escalar, obtenemos que $(-1,1,1) \cdot ((x,y,z) - (1,2,0)) = (-1,1,1) \cdot (x-1, y-2, z) = -x + 1 + y - 2 + z = 0$. Luego obtenemos la ecuación implícita $-x + y + z = 1$ para Π.

■

Entonces la ecuación normal del plano nos provee una manera de interpretar geométricamente la ecuación implícita de un plano. Recuperar la normal de un plano y su ecuación normal, a partir de una ecuación implícita, es sencillo. En efecto, supongamos por ejemplo que tenemos el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 3x + 2y - z = 4\}$. Inmediatamente hallamos que $\vec{N} = (3,2,-1)$, por la Observación 8. Además, como 4 debe coincidir con $-\vec{N} \cdot P$ entonces:

$$(3,2,-1) \cdot \underbrace{(\alpha,\beta,\gamma)}_{P} = 4,$$

de donde $3\alpha + 2\beta - \gamma = 4$. Es decir, P debe ser un punto que verifica esta ecuación; por ejemplo: $P = (0,1,-2)$.

Por lo tanto, una ecuación normal para Π es:

$$(3,2,-1)\cdot((x,y,z)-(0,1,-2))=0.$$

Observación 9 *Observen que tuvimos mucha libertad al elegir el punto P (podíamos elegir cualquiera cuyas coordenadas verificaran la ecuación dada). Esto se debe a que en la ecuación normal de un plano, el punto P puede ser tomado como* cualquier *punto del plano, ya que el objetivo es trasladar el plano al origen y no nos importa de qué manera (Figura 2.7).*

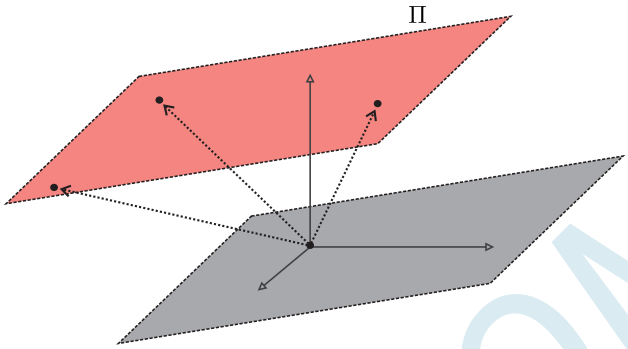


Figura 2.7: Diferentes maneras de trasladar un plano desde el origen para obtener el mismo plano.

La ecuación implícita de un plano se puede deducir a partir de su ecuación normal. La misma permite describir al plano como un conjunto de puntos perpendiculares a una dirección. Deduzcan, a partir de esta premisa, la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^2$ y comprueben que toda recta en el plano que pasa por el origen de coordenadas puede describirse como el conjunto de los puntos perpendiculares a una dirección perpendicular a ella.

2.3.2 El producto vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$

A esta altura, ya hemos notado que es conveniente calcular la normal de un plano (pues a partir de ella encontramos una descripción muy sencilla del mismo). Si el plano está dado en forma vectorial, entonces la normal es un vector que es perpendicular al plano que los vectores directores generan (y que pasa por el origen). En particular, es ortogonal a los dos vectores directores *simultáneamente*. En esta apartado, introduciremos una herramienta para hallar un vector de $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a otros dos vectores dados. Esto es, si $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ no son paralelos, entonces definiremos otro vector $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$, llamado *el producto vectorial entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$*, cuya propiedad principal es que es perpendicular tanto a $\vec{v}$ como a $\vec{w}$. Esto nos permitirá calcular automáticamente la normal de un plano dado en forma vectorial. A diferencia de las demás operaciones entre vectores, el producto vectorial *sólo está definido para vectores de $\mathbb{R}^3$*.

Definición 22 Sean $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$. El *producto vectorial entre los vectores $\vec{v}=(x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{w}=(y_1,y_2,y_3)$, es el vector $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$* definido por:

$$\vec{u}=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1).$$

Se nota $\vec{u}=\vec{v}\times\vec{w}$.

Por ejemplo, $(1,2,0)\times(-1,3,-2)=(2.(-2)-0{,}3,0.(-1)-1.(-2),1{,}3-2.(-1))=(-4,2,5)$. Si ahora chequeamos la ortogonalidad de este vector con los originales encontramos que:

- $(1,2,0) \cdot (-4,2,5) = -4+4+0 = 0$ y
- $(-1,3,-2) \cdot (-4,2,5) = 4+6-10 = 0$,

Se verifica que, efectivamente, el nuevo vector hallado es perpendicular a los dos originales: la propiedad fundamental del producto vectorial.

Es claro que la fórmula que define el producto vectorial es algo complicada, y tratar de memorizar qué término va en cada lugar parece una pérdida de tiempo. Por esta razon, proporcionamos la siguiente "regla" para recordar cómo formar el producto vectorial. Esta regla se basa en un "movimiento" que aparecerá muchas veces en la teoría (por lo cual es una buena idea ir introduciéndolo). El movimiento puede verse en la Figura 2.8:

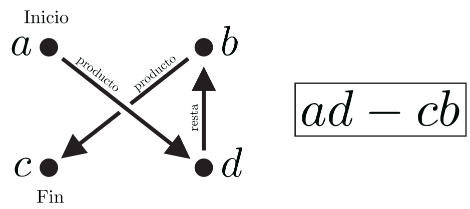


Figura 2.8: Movimiento elemental para calcular el producto vectorial.

El procedimiento para calcular el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{w}$ es el siguiente.

1. Escribir el vector $\vec{w}$ debajo del vector $\vec{v}$, de manera que la primera coordenada (y por consiguiente, la segunda y tercera) de cada uno queden alineadas en la misma columna.
2. Tapar la primera columna (es decir, las primeras coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. Este número es la primera coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.
3. Ocultar la segunda columna (las segundas coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. *El opuesto* de este número es la segunda coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$.
4. Tapar la tercera columna (las terceras coordenadas de cada vector) y realizar el movimiento introducido con el cuadrado determinado por las otras coordenadas. Este número es la tercera coordenada del vector $\vec{v} \times \vec{w}$. La Figura 2.9 muestra un ejemplo de cómo es el procedimiento descripto.

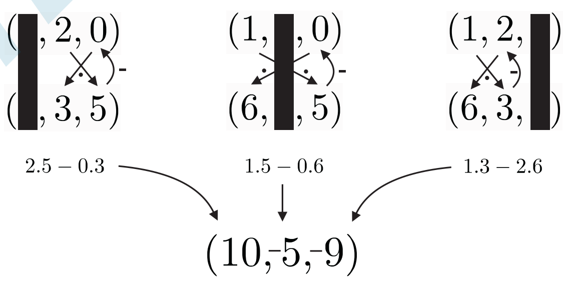


Figura 2.9: Cálculo del producto vectorial entre $(1,2,0)$ y $(6,3,5)$.

2.3.3 Nuevo cálculo de la ecuación implícita a partir de la vectorial, y viceversa

Ahora que pudimos interpretar la ecuación implícita de un plano a partir de su ecuación normal, y teniendo a mano la noción de producto vectorial de vectores, tenemos una forma mucho más sencilla y directa de pasar de la ecuación implícita a la vectorial, y viceversa. En efecto, realicen los siguientes experimentos.

Experimento 8 Consideren un plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \ : \ X = t\vec{v} + s\vec{w} + \vec{u},\, t, s \in \mathbb{R}\}$ dado en forma vectorial. Luego:

- Hallen la normal del plano Π utilizando el producto vectorial entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
- Formen la ecuación implícita de Π, a partir de su ecuación normal, utilizando $\vec{v} \times \vec{w}$ y el extremo de $\vec{u}$ (que es un punto por donde pasa Π).

■

Experimento 9 Consideren un plano $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ ax + by + cz = d\}$, dado en forma implícita. Luego:

- Hallen la normal $\vec{N}$ del plano Π' y algún punto P por el que pase dicho plano (hay muchos).
- Encuentren (“a ojo” o haciendo una cuenta) algún vector $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{N}$ (hay muchos).
- Usen el producto vectorial para hallar un vector $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{N}$ y a $\vec{v}$ simultáneamente.
- Formen la ecuación vectorial de Π' con vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{N} \times \vec{v}$ y el vector de extremo P.

■

Observación 10 *Tengamos en cuenta que, en este último experimento, los vectores directores hallados son ortogonales. Por supuesto, esto no es un requerimiento para una ecuación vectorial del plano, aunque es muchas veces preferible que las direcciones tengan esta propiedad. De todas maneras, al calcular la ecuación vectorial de esta forma (utilizando el producto vectorial), lo que intentamos hacer es mecanizar el procedimiento.*

El nombre espacio lineal *proviene de que estos espacios tienen la propiedad que, cada vez que dos puntos pertenecen al espacio, entonces la (única) recta que pasa por ellos también pertenece a dicho espacio. El lector interesado puede comprobar este hecho de manera directa utilizando ecuaciones vectoriales de las rectas (repasen lo escrito en la sección “Para pensar.” de la página 42).*

¿Qué hicimos en el apartado 2.3?

- Definimos la ecuación normal del plano que permite describirlo como todos los puntos perpendiculares a una dirección dada. A partir de esta ecuación, obtenemos inmediatamente la ecuación implícita del plano.
- Definimos el producto vectorial entre vectores de $\mathbb{R}^3$, cuyo resultado es un vector de $\mathbb{R}^3$ perpendicular a los vectores originales, simultáneamente.

■

2.4 Intersección de subespacios de $\mathbb{R}^3$

En este apartado, calcularemos intersecciones entre rectas y planos en $\mathbb{R}^3$. Esto nos va a permitir, en particular, introducir la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$ (la recta determinada por la intersección de dos planos). *Es importante destacar que la intersección de dos subespacios lineales vuelve a ser un subespacio lineal, por lo que la dicha intersección se puede describir vectorial o implícitamente como lo venimos haciendo, en este capítulo.*

Interpreten que la intersección de subespacios lineales es nuevamente un espacio lineal, a partir de la propiedad que poseen los espacios lineales: si dos puntos pertenecen al espacio entonces toda recta que los atraviesa también.

En este apartado estudiaremos...

- Como calcular la intersección:
  - de dos planos.
  - de un plano y una recta.
  - entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$.
- La clasificación de rectas del espacio.

2.4.1 Intersección de planos

Sabemos que existen tres posibles resultados al buscar la intersección de dos planos:

1. se "atraviesan" a lo largo de una recta,
2. no se intersecan (pues son paralelos) o
3. son el mismo plano (y su intersección es el mismo único plano).

Estas posibilidades pueden verse en la Figura 2.10. Vamos a estudiar cómo hallar la intersección en cada uno de estos planos según como aparezcan descriptos.

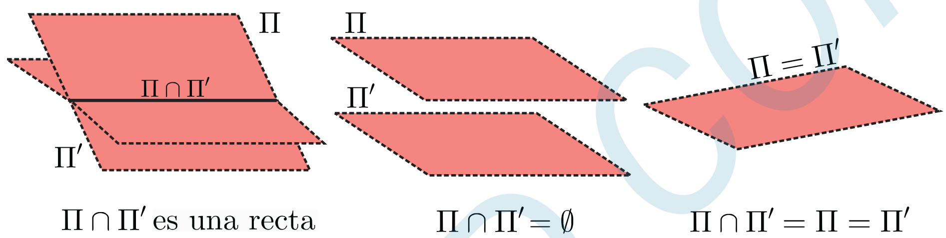


Figura 2.10: Posibilidades de intersección de dos planos en $\mathbb{R}^3$.

Intersección de planos dados en forma implícita La manera más sencilla de calcular la intersección de dos planos es si ambos vienen descriptos por su ecuación implícita.[1] Supongamos que tenemos los planos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$. La interpretación de los puntos de la intersección entre ambos es directa: si los puntos de Π son los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $2x - 3y + 2z = 2$ y los de Π' los que verifican $x - 2y - z = 0$, entonces, para estar en ambos planos, deben corroborarse ambas ecuaciones a la vez. Es decir, buscamos los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Entonces, ¿cuáles son los puntos en $\Pi \cap \Pi'$? Como mencionamos anteriormente, sabemos que dicha intersección tiene tres posibles formas de concretarse, o bien formarán una recta, o bien serán el mismo plano, o bien no habrá ninguno punto en común entre los dos planos. La manera de resolver estas ecuaciones simultáneas es la misma que ya utilizamos anteriormente para resolver otras situaciones análogas. El objetivo es despejar una variable en una ecuación y, luego, reemplazarla en la otra (cuál y de qué ecuación, es indistinto). En este caso, podemos despejar x de la segunda ecuación y obtener $x = 2y + z$. Al reemplazar x por $2y + z$ en la primera ecuación, obtenemos $2(2y + z) - 3y + 2z = 2$; o lo que es lo mismo: $y + 4z = 2$. De esta última ecuación, despejamos de nuevo una variable en función de la otra (esta ecuación solo tiene las variables y y z). Por ejemplo, $y = 2 - 4z$. Con esto,

[1] Esto será evidente cuando estudiemos la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la segunda parte del libro.

observamos que y *depende* de z (y solo de z). ¿Qué sucede con x? Ya habíamos visto que $x = 2y + z$; pero ahora tenemos más información que cuando despejamos x: sabemos que $y = 2 - 4z$. Por lo tanto, reemplazamos y por este valor en la ecuación $x = 2y + z$ para hallar: $x = 2(2 - 4z) + z = 4 - 7z$. De esta manera, vemos que x también depende solo de z. Lo que hemos hallado, entonces, es que se verifica:

$$\begin{cases} x = 4 - 7z \\ y = 2 - 4z \end{cases}$$

Es decir que los puntos en $\Pi \cap \Pi'$ son de la forma $(4 - 7z, 2 - 4z, z)$ para $z \in \mathbb{R}$ cualquiera. Ahora, desarmamos el vector como ya hicimos anteriormente: escribiéndolo como suma de un vector con todas sus coordenadas multiplicadas por z y otro con solo números:

$$(4 - 7z, 2 - 4z, z) = (4, 2, 0) + (-7z, -4z, z) = (4, 2, 0) + z(-7, -4, 1).$$

¡Esta es precisamente la ecuación vectorial de una recta en $\mathbb{R}^3$! Su vector director es $(-7, -4, 1)$ y su punto de paso el $(4, 2, 0)$. Esto nos indica que los planos Π y Π' se intersecan efectivamente y que la recta encontrada está compuesta por los puntos que están en ambos planos. Este es el resultado que debemos esperar siempre que los planos no sean paralelos.

En el ejemplo anterior, al resolver el sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas, se obtuvieron dos ecuaciones en las que tanto x como y dependen del valor de z. Analicen cómo se modifica esta solución si se le agrega una tercera ecuación al sistema.

¿Qué sucede si Π y Π' fuesen paralelos? Por ejemplo, si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y + 2z = 7\}$ entonces al formar el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 7 \end{cases}$$

vemos que al despejar x en la primera ecuación tenemos $x = 1 - y - z$; y al reemplazar en la segunda se tiene $2(1 - y - z) + 2y + 2z = 7$, de lo que se deduce $2 = 7$, lo cual es absurdo. Esto quiere decir que *no existen puntos que satisfagan las ecuaciones de ambos planos simultáneamente*; o sea, $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$ pues los planos son paralelos.

¿Qué sucede si Π y Π' fuesen el mismo plano? Por ejemplo, si $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = -1\}$ y $\Pi' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -3x + 3y - 6z = 3\}$ entonces al formar el sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ -3x + 3y - 6z = 3 \end{cases}$$

observamos que al despejar x en la primera ecuación tenemos $x = -1 + y - 2z$; y al reemplazar en la segunda se tiene $-3(-1 + y - 2z) + 3y - 6z = 3$, a partir de lo cual deducimos $3 = 3$. Es decir que, si la primera ecuación se verifica (o sea, $x = -1 + y - 2z$), entonces la segunda ecuación se verifica *automáticamente*. En otras palabras, la segunda ecuación no impone nuevas restricciones sobre las coordenadas x, y, z: si se verifica la restricción que aporta la primera ecuación, la de la segunda ecuación también se correborará. Es posible chequear que, si hubiésemos despejado alguna variable de la segunda ecuación y reemplazado en la primera, hubiéramos obtenido el mismo resultado. Por lo tanto, ambas restricciones son la misma restricción. Esto nos indica que las ecuaciones implícitas de Π y Π' son ecuaciones implícitas del mismo plano, por lo que $\Pi = \Pi'$.

Estamos en condiciones de explicar cómo es una ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$. Ya mencionamos que necesitamos dos ecuaciones; ¡y estas son precisamente las ecuaciones de dos planos dados en forma implícita cuya intersección es dicha recta! En efecto, si retomamos el primer ejemplo de la carilla 54, vemos que si $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x - 2y - z = 0\}$, entonces su intersección era la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7,-4,1) + (4,2,0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Y los puntos de L eran precisamente los que satisfacían las ecuaciones de los dos planos simultáneamente. Este *sistema de dos ecuaciones* simultáneas es lo que llamaremos una *ecuación implícita para la recta* L. Se expresa de la siguiente manera:

$$L : \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Como sabemos, las ecuaciones implícitas no son únicas y uno tiene, en general, libertad para elegir qué planos "intersecar" para determinar la ecuación implícita. Por ejemplo, la recta recién descripta también se podría obtener como intersección de los planos $5x - 7y + 7z = 6$ y $21x - 44y - 29z = -4$, con lo cual otra ecuación implícita para dicha recta es:

$$L : \begin{cases} 5x - 7y + 7z = 6 \\ 21x + 44y + 29z = 172 \end{cases}$$

■ **Ejemplo 29** Veamos cómo podemos hacer para encontrar esta segunda ecuación implícita para la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7,-4,1) + (4,2,0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Tenemos que encontrar dos planos (distintos) que contengan a dicha recta simultáneamente. En primer lugar, para asegurarnos de que un plano contenga a L, tomamos como uno de los vectores directores del mismo a un vector director de L (por ejemplo, al $(-7,-4,1)$) y pedimos que dicho plano contenga a un punto cualquiera de la recta (por ejemplo, el $(4,2,0)$). Un posible plano es $\Pi_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(-7,-4,1) + s(0,1,1) + (4,2,0),\ t,s \in \mathbb{R}\}$. Notemos que el vector $(0,1,1)$ fue elegido arbitrariamente con la única condición de que no sea múltiplo de $(-7,-4,1)$. La ecuación implícita Π es $5x - 7y + 7z = 6$. En segundo lugar, el otro plano que necesitamos lo construimos de la misma manera, pero teniendo en cuenta que no es posible definir el mismo primer plano que ya contruimos. Es decir, debemos asegurarnos que el segundo vector director que elegimos no determine el mismo plano Π. Una manera de hacerlo de forma segura, es tomando un vector perpendicular al $(-7,-4,1)$ y al $(0,1,1)$, al mismo tiempo; por ejemplo, el producto vectorial $(-7,-4,1) \times (0,1,1) = (-5,7,-7)$. En este caso, obtenemos el plano de ecuación vectorial $t(-7,-4,1) + s(-5,7,-7) + (4,2,0)$. Al calcular su ecuación implícita, se obtiene $21x - 44y - 29z = -4$. Por lo tanto, como queríamos mostrar:

$$L : \begin{cases} 5x - 7y + 7z = 6 \\ 21x - 44y - 29z = -4 \end{cases}$$

Ahora, si bien aquí hemos hallado una ecuación implícita para L por medio de dos planos perpendiculares que se cortan en L, en general, esto no es necesario. De igual manera, podíamos haber construido un segundo plano que no sea perpendicular al primero, eligiendo de manera arbitraria el segundo vector director. Si la casualidad es tal que esta elección en realidad nos devuelve el mismo plano Π, entonces solo debemos volver a sugerir otro vector director (esperando que la nueva elección no determine el mismo plano otra vez). ■

¿Cómo calcular la intersección si uno de los planos está dado en forma vectorial? Supongamos ahora que tenemos los planos $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(2,1,0) + s(2,2,-2) + (0,-1,2),\ t,s \in \mathbb{R}\}$ y queremos encontrar $\Pi \cap \Pi'$. *Ya conocemos una manera de resolver esto*: hallamos la ecuación implícita del plano Π' y, luego, calculamos la intersección como explicamos al comienzo del capítulo. Pero, ¿si no queremos calcular la ecuación implícita de Π'? Como lo venimos haciendo, lo único que debemos tener

presente es *qué nos están diciendo estas formas de representar los planos*: la ecuación implícita nos impone una relación que deben verificar las coordenadas de los puntos del plano, mientras que la ecuación vectorial nos dice "qué forma tienen los puntos del plano". Recordando lo que hicimos en el apartado anterior (2.3), los puntos de Π' son de la forma $(2t+2s, t+2s-1, -2s+2)$ con $t, s \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los puntos en $\Pi \cap \Pi'$ deben ser de esta forma y, además, sus coordenadas x, y, z deben verificar $2x - 3y + 2z = 2$. Pero la forma que tienen los puntos de Π' indican precisamente que la coordenada x es de la forma $2t + 2s$, la y de la forma $t + 2s - 1$ y la z de la forma $-2s + 2$. Por lo tanto, pedir que estas coordenadas verifiquen la ecuación implícita de Π es pedir que:

$$2(\underbrace{2t+2s}_{x}) - 3(\underbrace{t+2s-1}_{y}) + 2(\underbrace{-2s+2}_{z}) = 2.$$

Si desarrollamos esta ecuación, obtenemos $t - 6s + 7 = 2$, a partir de lo cual tenemos $t = 6s - 5$. Lo que sucedió aquí es que, originalmente, en la ecuación dada por la forma vectorial de Π', las variables s y t eran *independientes*, en el sentido que no dependía una de otra. Pero al pedir a los puntos de Π' que además verifiquen la ecuación implícita de Π, hemos descubierto que ahora las variables s y t ya no pueden ser independientes: deben estar relacionadas por una ecuación. En conclusión, de todos los puntos de Π' (que son de la forma $(2t+2s, t+2s-1, -2s+2)$), los que además están en Π son los que verifican $t = 6s - 5$. Por lo tanto, los puntos de $\Pi \cap \Pi'$ son los puntos de la forma:

$$(2(6s-5) + 2s, (6s-5) + 2s - 1, -2s + 2) = (14s - 10, 8s - 6, -2s + 2).$$

Ahora ya sabemos qué hacer en este caso: reescribimos este vector convenientemente como:

$$s(14, 8, -2) + (-10, -6, 2),$$

que es una ecuación vectorial de la recta $\Pi \cap \Pi'$.

¿Qué sucede en el caso de planos paralelos o el mismo plano? Vamos a descubrirlo en el siguiente experimento.

Experimento 10 Consideren los planos $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 13\}$, $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(0,1,1) + s(1,0,-2) + (-3,1,0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(2,2,-2) + l(-1,1,-3) + (5,0,3),\ k, l \in \mathbb{R}\}$. Luego:

1. Calculen $\Pi \cap \Pi'$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que obtuvieron cuando calcularon la intersección de planos paralelos dados en forma implícita.
2. Calculen $\Pi \cap \Pi''$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que consiguieron cuando calcularon la intersección de planos iguales dados en forma implícita.

¿Cómo calcular la intersección si ambos planos están dados en forma vectorial? En esta instancia, ya sabemos cómo encarar este problema. Lo resolvemos con un ejemplo sin ahondar mucho en detalles. Si $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1,0,-1) + s(0,1,1) + (0,0,3),\ t, s \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(1,0,0) + l(0,1,-2) + (1,0,1),\ k, l \in \mathbb{R}\}$, entonces los puntos de Π son de la forma $(t, s, -t+s+3)$ para algún $s, t \in \mathbb{R}$ y los de Π' de la forma $(k+1, l, -2l+1)$ para algunos $k, l \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, los puntos que estén en ambos planos a la vez deben ser de *ambas formas a la vez*. Esto es, deben existir $s, t, k, l \in \mathbb{R}$ tales que $(t, s, -t+s+3) = (k+1, l, -2l+1)$. De aquí, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L : \begin{cases} t = k + 1 \\ s = l \\ -t + s + 3 = -2l + 1 \end{cases}$$

Luego, al reemplazar la primera y segunda ecuación en la tercera, obtenemos que $-k-1+l+3=-2l+1$ y, por lo tanto, $k=3l+1$. Así, los puntos que pertenecen a la intersección de ambos planos son de la forma $(3l+2,l,-2l+1)=(3l,l,-2l)+(2,0,1)=l(3,1,-2)+(2,0,1)$. Es decir, la intersección de Π y Π' es la recta de ecuación $l(3,1,-2)+(2,0,1)$. Observemos que, de la segunda y tercera ecuación, podemos encontar una relación similar entre s y t; más precisamente, $t=3s+2$. Al reemplazar esta información en $(t,s,-t+s+3)$, obtenemos la misma recta. Nuevamente, dejamos para deducir en un experimento qué sucede con estas cuentas en el caso de planos paralelos o iguales.

Experimento 11 Consideren los planos $\Pi=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=t(2,1,-4)+s(-1,0,1)+(2,0,-3),\ t,s\in\mathbb{R}\}$, $\Pi'=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=k(-3,-\frac{1}{2},2)+l(1,1,-3)+(1,3,-1),\ k,l\in\mathbb{R}\}$ y $\Pi'' : r(0,1,-2)+j(-3,-1,5)+(1,0,-2)$. Luego:

1. Calculen $\Pi\cap\Pi'$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que alcanzaron cuando calcularon la intersección de planos paralelos dados en forma implícita.
2. Calculen $\Pi\cap\Pi''$ utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? Recuerden el resultado que consiguieron cuando calcularon la intersección de planos iguales dados en forma implícita.

■

2.4.2 Intersección de un plano y una recta

¿Cómo calcular la intersección de un plano y una recta en $\mathbb{R}^3$? Sabemos que las posibilidades son:

1. la recta interseca al plano en un punto (y la intersección es ese único punto),
2. la recta es paralela al plano (y la intersección es vacía) o
3. la recta está contenida dentro del plano (y la intersección es exactamente toda la recta).

Estas opciones pueden verse en la Figura 2.11. Nuevamente, analizamos en cada caso dependiendo de como estén descriptos el plano y la recta. Como los desarrollos son análogos a los que hicimos en el apartado anterior, (2.4.1), solo mostraremos con ejemplos la resolución, sin hacer mucho hincapié en los detalles.

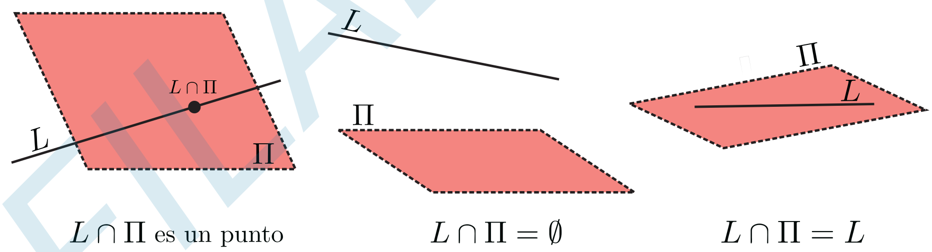


Figura 2.11: Posibilidades de intersección de un plano y una recta en $\mathbb{R}^3$.

Otra vez, la manera más simple de calcular intersecciones de subespacios es cuando estos vienen dados por ecuaciones implícitas: solo debemos juntar sus ecuaciones. Supogamos, entonces, que tenemos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - 3y + 2z = 2\}$ y la recta cuyas ecuaciones implícitas son:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$$

Los puntos de $\Pi \cap L$ son entonces los que verifican:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$

Ahora, resolveremos este sistema de ecuaciones simultáneas. De la segunda ecuación podemos despejar x para hallar que $x = 2z - y$. Al reemplazar en la primera ecuación obtenemos $2(2z - y) - 3y + 2z = 2$; es decir, $-5y + 6z = 2$. De aquí, encontramos que $y = -\frac{2-6z}{5}$. Con esta información, podemos "actualizar" la primera ecuación que hallamos $x = 2z - y$ y obtener $x = 2z - (-\frac{2-6z}{5}) = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$. Finalmente, reemplazamos estas dos ecuaciones en la última ecuación y obtenemos $2(\frac{4}{5}z + \frac{2}{5}) - 4z = 1$; es decir, $-\frac{12}{5}z + \frac{4}{5} = 1$. Despejamos z y conseguimos $z = -\frac{1}{12}$. Y como ya hallamos que $x = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$ e $y = -\frac{2-6z}{5}$, entonces, $x = \frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$. Aquí vemos que el único punto que pertenece a la intersección $\Pi \cap L$ es el punto $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$. O sea, en este caso, la recta atraviesa el plano.

¿Qué sucede en los otros posibles casos de intersección? Lo dejamos para averiguarlo en los siguientes experimentos.

Experimento 12 Consideren el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1\}$ y las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, -1, 0) + (1, 0, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = s(2, 1, -1) + (2, 0, 1),\ s \in \mathbb{R}\}$. Luego, calculen:

1. $\Pi \cap L$
2. $\Pi \cap L'$

utilizando el procedimiento anterior. ¿Qué obtuvieron? ¿Cómo interpretan dicho resultado? ■

¿Qué sucede si ahora la recta viene dada en forma vectorial? Aquellos que ya hayan dominado la técnica para la intersección de planos, no tendrán dificultad en seguir el mismo razonamiento para este caso. Los orientamos en el siguiente experimento.

Experimento 13 Consideren el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 1\}$ y la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1, 3, -1) + (2, 2, 0),\ t \in \mathbb{R}\}$. Luego:

1. Escriban la "forma" que tienen los puntos de L (en función de $t \in \mathbb{R}$).
2. Reemplacen x, y, z en la ecuación implícita de Π utilizando la forma de los puntos de L hallada en el punto anterior. ¿Cuál es la interpretación de este reemplazo?
3. Para el t obtenido en el punto anterior, reemplácenlo en la ecuación vectorial de L para encontrar el punto donde se intersecan el plano y la recta.

■

A esta altura, no tendrán problemas en reconocer o interpretar los resultados de los procedimientos para los casos en los que la recta sea paralela al plano o esté incluída en el mismo.

Si el plano viene dado en su forma vectorial, pueden comprobar que no importa si es la forma de los puntos de L que introducimos en las ecuaciones Π o, como en este caso, la forma de os punto de Π que introducimos en *las ecuaciones de L. En ambos casos lo que se pide es verificar que las dos ecuaciones se verifiquen en forma simultánea. De esta forma se garantiza que se buscan los puntos en los dos subespacios: la recta y el plano.*

Finalmente, el caso en el que tanto la recta como el plano vienen dados en forma vectorial, solo debemos "igualar" la forma de sus puntos. Por ejemplo, si $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,1,0) + s(1,0,1) + (0,1,2),\, t,s \in \mathbb{R}\}$ y $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = k(1,3,-1)+(2,2,0),\, k \in \mathbb{R}\}$, entonces, buscamos $t, s, k \in \mathbb{R}$ tales que $(t+s, t+1, s+2) = (k+2, 3k+2, -k)$. A partir de aquí, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de donde despejamos s, t, k

$$\begin{cases} t+s = k+2 \\ t+1 = 3k+2 \\ s+2 = -k \end{cases}$$

En la segunda ecuación conseguimos $t = 3k+1$ y, de la tercera ecuación, $s = -2-k$. Luego, al reemplazar estos valores en la primera ecuación, deducimos que $3k+1-2-k = k+2$. De esta última igualdad, podemos despejar k y obtener $k = 3$. Luego, al reemplazar este valor de k en $(k+2, 3k+2, -k)$, hallamos que la intersección entre la recta y el plano es el punto $(5, 11, -3)$.

Analicen qué se espera obtener si la recta es paralela al plano o si está contenida en él.

2.4.3 Intersección de rectas

Analicemos los posibles resultados de la intersección entre dos rectas en el espacio. Dichas rectas podrían:

1. cortarse en un punto,
2. no cortarse (lo que en este caso no implica que sean necesariamente paralelas) o
3. ser la misma recta.

La Figura 2.12 muestra estas posibles situaciones.

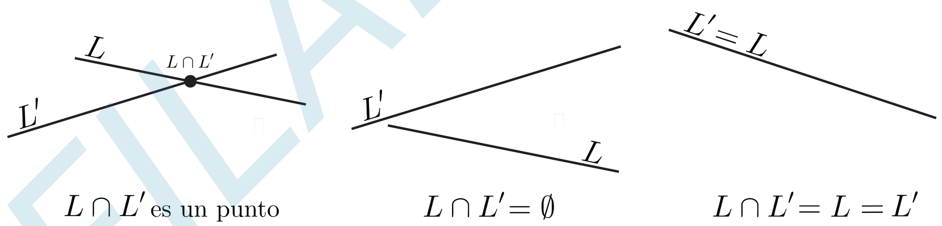


Figura 2.12: Posibilidades de intersección de rectas en $\mathbb{R}^3$.

Veamos todas las posibles formas de describir a estas rectas. Supongamos que L es la recta dada por las ecuaciones implícitas $x+2z = 1$ y $y-z = 1$; L' es la recta dada por las ecuaciones $x+y+3z = 6$ y $2x-3y+z = -13$; L'' la recta de ecuación vectorial $t(1,-4,2)+(3,1,0)$ y L''' la recta de ecuación vectorial $s(2,-1,1)+(-3,3,0)$. Entonces, $L \cap L'$ es el conjunto de soluciones $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ del siguiente sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2z = 1 \\ y-z = 1 \\ x+y+3z = 6 \\ 2x-3y+z = -13. \end{cases}$$

Es la primera vez que nos encontramos con tantas ecuaciones. Si las pensamos como restricciones, nos están indicando que, para que haya al menos un punto en la intersección de ambas rectas, deben verificarse muchas condiciones, lo cual, en principio, parecería díficil que suceda. En realidad, dada la espacialidad de $\mathbb{R}^3$, esto tiene sentido. Si bien en $\mathbb{R}^2$ dos rectas casi siempre se cortan (con la única excepción que sean paralelas), en $\mathbb{R}^3$ es mucho más fácil encontrarse con rectas que no se toquen. ¿Cómo se resuelve entonces un sistema de cuatro ecuaciones? Pues como lo venimos haciendo. Ya vimos en el apartado anterior que, cuando tenemos tres ecuaciones, en general, quedan despejadas todas las variables y conseguimos un punto como la solución del sistema. En general, aquí pasará lo mismo con las primeras tres ecuaciones que utilicemos, pero no debemos perder de vista que, el punto que encontremos con estas tres ecuaciones, también debe satisfacer la cuarta ecuación (que aún no hemos utilizado).

Resolvemos entonces el sistema. De la primera ecuación obtenemos que $x = 1 - 2z$, y de la segunda ecuación, $y = z + 1$. Luego reemplazamos estos resultados en la tercera ecuación, consiguiendo $2 + 2z = 6$; con lo cual $z = 2$. Así, también, despejamos $x = -3$ e $y = 3$. Finalmente, debemos chequear que estos valores que alcanzamos verifican la última ecuación: $2 \cdot (-3) - 3 \cdot 3 + 2 = -13$. Por lo tanto, concluimos que la intersección de ambas rectas es el punto $(-3, 3, 2)$.

Para los otros casos se procede de manera análoga a cómo lo venimos haciendo.

A diferencia de lo que pasa para las rectas en el plano, dos rectas en el espacio que no se tocan no son necesariamente paralelas (como sí era el caso entre planos o entre un plano y una recta). Por esta razón, existe la siguiente *clasificación de rectas en* $\mathbb{R}^3$.

Definición 23 Sean L y L' dos rectas en $\mathbb{R}^3$. Entonces, L y L' se dicen:

- **Concurrentes:** si su intersección no es vacía.
- **Paralelas:** si no son concurrentes y son paralelas.
- **Coincidentes:** si son concurrentes y paralelas.
- **Alabeadas:** si no son concurrentes ni paralelas.

¿Qué hicimos en el apartado 2.4?

- Estudiamos cómo calcular la intersección de:
  1. dos planos.
  2. de un plano y una recta.
  3. dos rectas de $\mathbb{R}^3$.
- Vimos cómo se clasifican dos rectas en: $\mathbb{R}^3$ en concurrentes, coincidentes, paralelas o alabeadas.

2.5 Distancias y ángulos entre rectas y planos

Dado que ya sabemos calcular intersecciones, estamos en condiciones de aprender a medir distancias y ángulos entre espacios lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo calcular:
  1. el ángulo entre dos rectas, entre una recta y un plano y entre dos planos.
  2. la distancia entre un punto y una recta y entre un punto y un plano.
  3. la distancia entre dos planos, entre dos rectas y entre una recta y un plano.

2.5.1 Ángulos entre rectas

¿Cómo medir el ángulo entre dos rectas? Tengamos en cuenta tres puntos. Observemos la situación como se muestra en la Figura 2.13, lado izquierdo. En primer lugar, dos rectas determinan *dos ángulos entre ellas*, uno más pequeño y otro más grande. Vamos a considerar que el ángulo entre dos rectas es el más pequeño entre ambos; es decir, aquel que está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Por otro lado, medimos el ángulo entre dos rectas cualesquiera, *aunque no se corten*. Por ejemplo, para nosotros, dos rectas paralelas distintas forman un ángulo de 0. Cabe destacar, entonces, que *no es necesario que las rectas se corten para poder medirles el ángulo*. Es posible pensar que, si fuera necesario, trasladamos una de las rectas (sin cambiarle la dirección) hasta que interseque a la otra.

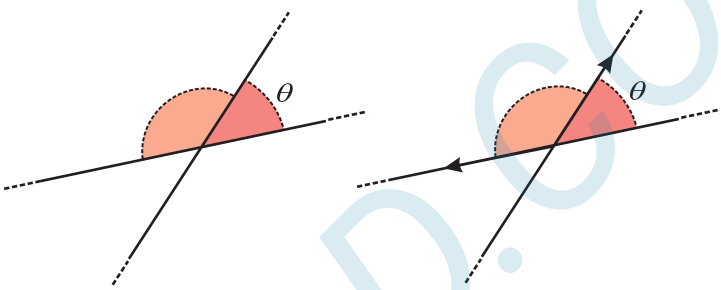


Figura 2.13: Ángulo entre dos rectas.

Entonces, dado que el ángulo depende de la dirección de la recta, ¿alcanza con definir el ángulo entre dos rectas como el ángulo entre los vectores directores de las rectas? *No, pero casi*. Observemos la Figura 2.13, lado derecho. Observemos que el ángulo entre las rectas no coincide con el ángulo entre los vectores directores. Esto sucede ya que es posible elegir infinitos vectores directores, pero, mientras que en la recta no importa el sentido, en los vectores directores sí. Entonces veamos que, en este caso, el ángulo se obtiene midiendo el ángulo entre uno de los vectores directores y el inverso del otro.

Definición 24 Sean $L, L' \in \mathbb{R}^3$ y supongamos que $\vec{v}$ es un vector director para L y $\vec{w}$ un vector director para L'. Si llamamos θ al ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$, entonces el ángulo entre L y L', el cual se denota $\angle(L, L')$, es ángulo más pequeño entre θ y $\pi - \theta$; es decir, el ángulo que está entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ de estos dos.

Independientemente de esta definición, es importante recordar como hacemos para medir ángulos entre rectas: en primer lugar, buscamos el ángulo más pequeño entre ambas rectas (y para calcularlo, debemos elegir convenientemente los vectores directores de ambas; o, en su defecto, elegir vectores directores al azar) y, en segundo lugar, estimar si se forma un ángulo menor al considerar el opuesto de uno de los vectores directores. Veamos esto con un par de ejemplos:

■ **Ejemplos 30**

1. Para calcular el ángulo que forman las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(1,2) + (3,-3),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = s(3,0) + (2,5),\ s \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ debemos, primero, calcular el ángulo entre los vectores $(1,2)$ y $(3,0)$. Este es $\arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{5}}\right) \approx 63{,}43^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$ entonces este es precisamente $\angle(L, L')$.
2. Para calcular el ángulo que forman las rectas $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(-1,2,0) + (1,2,-3),\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s(-5,-4,2) + (2,2,9),\ s \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ debemos, primero, calcular el ángulo entre los vectores $(-1,2,0)$ y $(-5,-4,2)$. Este es $\arccos\left(-\frac{3}{15}\right) \approx 101,5^{\text{o}}$. Como este ángulo es mayor a $\frac{\pi}{2}$ entonces $\angle(L, L')$ es aproximado por $180^{\text{o}} - 101,5^{\text{o}} = 78,5^{\text{o}}$.

■

También podemos medir *ángulos entre dos planos y entre una recta y un plano*. Veremos que el cálculo se reduce al mismo que para medir ángulos entre rectas. Por un lado, la Figura 2.14, lado derecho, muestra que el ángulo formado entre dos planos es el mismo que el ángulo determinado por las rectas con direcciones normales de dichos planos. Por otro lado, la Figura 2.14, lado izquierdo, muestra que el ángulo entre una recta L y un plano Π puede calcularse restando a $\frac{\pi}{2}$ el ángulo entre L y la recta con dirección normal a Π. Tenemos entonces la siguiente definición.

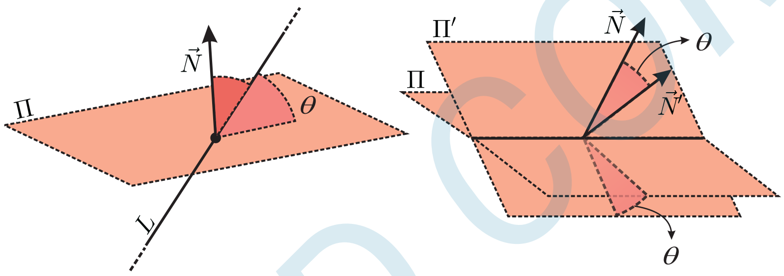


Figura 2.14: Medición ángulos entre planos y entre rectas y planos.

Definición 25 Sean L una recta y Π, Π' planos en $\mathbb{R}^3$. Sean $\vec{N}, \vec{N}'$ vectores normales a Π, Π' respectivamente.

1. El ángulo $\angle(L, \Pi)$ entre la recta L y el plano Π es $\frac{\pi}{2} - \angle(L, L')$, donde $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{N},\ t \in \mathbb{R}\}$.
2. El ángulo $\angle(\Pi, \Pi')$ entre los planos Π y Π' es $\angle(L', L'')$, donde $L' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t\vec{N},\ t \in \mathbb{R}\}$ y $L'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = s\vec{N}',\ s \in \mathbb{R}\}$.

■ **Ejemplos 31**

1. Calculemos el ángulo que forman la recta L de ecuación vectorial $t(1,2,-1) + (0,0,2)$ y el plano $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y - 3z = 2\}$. Por la definición, el ángulo $\angle(L, \Pi)$ es el ángulo $\frac{\pi}{2} - \angle(L, L')$, donde L' es la recta de ecuación vectorial $s\vec{N}$ y $\vec{N}$ es un vector normal al plano. Si miramos la ecuación implícita de Π, sabemos que una normal para Π es $(2,-1,-3)$. Por lo tanto, para hallar $\angle(L, L')$, debemos calcular el ángulo entre los vectores directores $(1,2,-1)$ y $(2,-1,-3)$. Dicho ángulo es $\arccos\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right) \approx 70,89^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$, entonces $\angle(L, L') \approx 70,89^{\text{o}}$. Por lo tanto, $\angle(L, \Pi) \approx 90^{\text{o}} - 70,89^{\text{o}} = 19,11^{\text{o}}$.
2. Calculemos ahora el ángulo entre los planos $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$ y $\Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(0,2,-1) + s(-3,1,1) + (2,-2,5),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. Por definición, $\angle(\Pi, \Pi') = \angle(L, L')$, donde L, L' son las rectas, que pasan por el origen, cuyos vectores directores son las normales de Π, Π' respectivamente. Por un lado, un vector normal para Π es $(1,1,3)$. Por otro lado, un vector normal para Π' es $(0,2,-1) \times (-3,1,1) = (3,3,6)$. El ángulo entre $(1,1,3)$ y $(3,3,6)$ es $\arccos\left(\frac{24}{3\sqrt{66}}\right) \approx 10,02^{\text{o}}$. Como este ángulo es menor a $\frac{\pi}{2}$, entonces

$\angle(\Pi, \Pi') \approx 10,02^{\text{o}}$.

■

2.5.2 Distancia de un punto a una recta

Hemos vimos que el producto escalar nos brinda una manera de medir la distancia entre dos puntos. Ahora bien, veamos cómo proceder para medir distancias en otras situaciones. Comencemos calculando la distancia entre un punto y una recta. ¿Qué significa la distancia entre un punto y una recta? Si imaginamos un deportista de velocidad llegando a la meta en una carrera, ¿a qué nos referimos cuando decimos "el corredor está a 10 m. de la línea de llegada? A *la menor distancia entre el corredor y la línea de llegada*, y, dicha distancia se recorre cuando medimos la posición del corredor en forma *perpendicular* respecto de la línea de llegada. Por lo tanto, al pensar en la posición del corredor como un punto sobre la pista de carrera y la línea de llegada como una recta, la distancia de este punto a esta recta es *la menor distancia entre el punto y todos los puntos de la recta*, entonces deducimos que, además, esta distancia se recorre cuando medimos la distancia en forma perpendicular a la recta. Estudiemos los siguientes casos, teniendo presente estas nociones.

Comencemos por el caso de $\mathbb{R}^2$. Supongamos que tenemos la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \,:\, X = t(2,-3)+(0,5),\ t \in \mathbb{R}\}$ y el punto $P = (1,-3)$. Es necesario medir la distancia del punto P al punto de la recta que se encuentra "perpendicular" a la recta a lo largo de P. Entonces calculamos auxiliarmente la recta L' que es perpendicular a L y que pasa por el punto P. De esta manera, el punto de la recta que se encuentra más cerca de P es $Q = L' \cap L$ (Figura 2.15). Por lo tanto, la distancia de P a la recta L es la distancia de P a Q (Q es el punto de L más cercano a P). Resuelvan este problema a través del siguiente experimento.

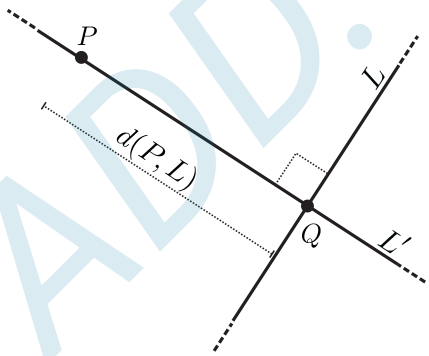


Figura 2.15: Cálculo de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$.

Experimento 14 Con L y P recién definidos, sigan los siguientes pasos para hallar la distancia de L a P:

1. Encuentren la recta L' perpendicular a L que pase por el punto P.
2. Hallen $L' \cap L$, el cual es un punto Q.
3. Calculen $d(P, Q)$. Ésta es la distancia de L a P.

■

¿Cómo hacemos para calcular ahora la distancia de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ a una recta L en el espacio? Aquí la situación es un poco más complicada, aunque el procedimiento es exactamente el mismo al utilizado para el cálculo de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^2$. ¿Cómo calcular el punto de L que se encuentra más cercano al punto P? No es difícil ver que la distancia se establece sobre el segmento que une P con una dirección perpendicular a L, exactamente igual que el caso de $\mathbb{R}^2$. Es posible entonces intentar armar una recta perpendicular a L que pase por P.

El problema con este acercamiento es que *hay infinitas rectas que son perpendiculares a L y pasan por P*. Esto se debe a que hay muchas direcciones perpendiculares a una dada en $\mathbb{R}^3$ (a diferencia de $\mathbb{R}^2$, que solo hay una). En realidad, uno debería armarse la “recta perpendicular a L que pase por P *y que corte* L”. De todas formas, este procedimiento que acabamos de describir es más complicado que el caso de $\mathbb{R}^2$, y en el espacio hay una forma más directa de calcular el punto de L más cercano a P.

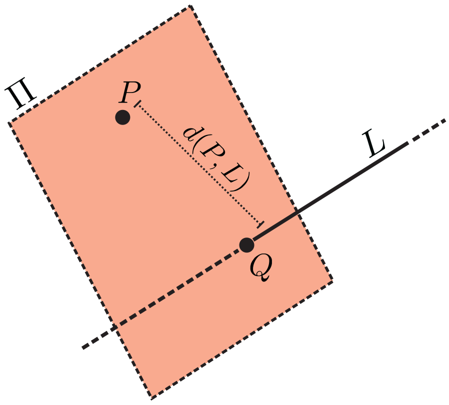


Figura 2.16: Distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$.

Al observar la Figura 2.16, consideramos *el plano perpendicular a L que pasa por P*. Esto es fácil, ya que dicho plano podemos representarlo por medio de la ecuación normal, ¡y la normal del plano puede ser escogida como el vector director de L! Resuelvan este problema en el Experimento 15.

Experimento 15 Sean $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = t(1,2,-3) + (0,1,5),\, t \in \mathbb{R}\}$ y $P = (1,0,1)$.

1. Hallen el plano Π perpendicular a L que pasa por P.[5]
2. Encuentren $Q = L \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$ para hallar la distancia de L a P.

■

2.5.3 Distancia de un punto a un plano

De la misma forma que para el caso de las rectas, si quisiéramos medir la distancia de un punto a un plano, como por ejemplo la distancia de una mosca que se encuentra volando en una habitación a una de las paredes de la misma, estaremos pensando en la menor distancia entre la mosca y la pared, y se recorre cuando consideramos la dirección perpendicular al plano determinado por la pared (Figura 2.17).

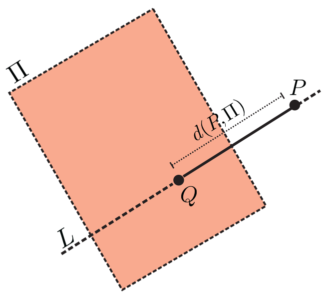


Figura 2.17: Cálculo de la distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$.

Trabajemos con un ejemplo. Sean $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2,2,-1) + s(5,0,-3) + (2,0,0),\ t,s \in \mathbb{R}\}$ y $P = (-1,-2,4)$, busquemos la distancia más corta entre un punto del plano y P. Si vemos la Figura 2.17, notamos que nos alcanza con considerar la recta L perpendicular a Π que pasa por P. Resuelvan el problema en el siguiente experimento.

Experimento 16 Sean Π y P como recién definidos.

1. Hallen la recta L perpendicular a Π que pasa por P.
2. Encuentren $Q = L \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$ para hallar la distancia de Π a P.

Observemos que este caso es inverso al caso de la distancia de un punto a una recta en $\mathbb{R}^3$, ya que aquí construimos una recta para hallar el punto del plano más cercano a P y, en el caso anterior, construimos un plano para encontrar el punto de la recta más cercano a P. Esto se debe a que, en $\mathbb{R}^3$, una recta complementa a un plano y un plano complementa a una recta, porque un plano contiene 2 direcciones y la recta (perpendicular) contiene la dirección que le falta para "ser" todo el espacio (y lo mismo al revés). Por este motivo hay un único plano perpendicular a una recta que pasa por P y una única recta perpendicular a un plano que pasa por P. Precisamente por esta razón, no era conveniente calcular la distancia de un punto P a una recta L en el espacio buscando la recta perpendicular a L que pase por P (porque hay infinitas opciones y solo una nos sirve).

2.5.4 Distancia entre rectas y planos

Finalmente, abordaremos el problema de medir distancias entre dos rectas, dos planos o una recta y una plano. Así como vimos que medir distancias entre una recta y un punto, o un plano y un punto se reduce a medir la distancia entre puntos (el punto dado y el punto más cercano de la recta o el plano), el cálculo de la distancia entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano, puede reducirse al cálculo de la distancia entre un punto y una recta o un punto y un plano. En lugar de explicar cada uno de estos casos, dejaremos que ustedes los deduzcan por su cuenta en los experimentos que siguen. Antes de avanzar, cabe destacar algunas consideraciones. Por un lado, cuando estimamos la distancia entre dos subespacios (recta y recta, recta y plano o plano y plano), si dichos subespacios se intersecan, entonces la distancia es obviamente 0 (si se tocan, están "pegados" y no hay distancia entre ellos). Por lo tanto, al calcular distancia entre dos planos, es bueno verificar primero si los planos son paralelos; si no lo son, sabemos que indefectiblemente se cortarán en una recta y, en particular, se tocarán y estarán a distancia 0 (y no es necesario hacer ningún cálculo más). Lo mismo al buscar la distancia entre un plano y una recta (debemos chequear si son paralelos; de lo contrario se tocan y la distancia es 0). En el caso de la distancia entre dos rectas del espacio, vayamos con un poco más de cuidado. Es indispensable verificar si se intersecan o no, pero sabemos que, aún cuando no se toquen, podrían no ser paralelas (y ser alabeadas). Observen en los experimentos que ambos casos se abordan de modo diferente, por lo que habrá que clasificar ambas rectas antes de resolver su distancia.

Experimento 17 Consideren los planos $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(-2,1,1)+\mu(0,-3,4)+(5,-1,0),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}$ y $\Pi' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 7x+8y+6z=-2\}$.

1. Verifiquen que Π y Π' son paralelos.
2. Construyan una recta L perpendicular a ambos planos y calculen $P = L \cap \Pi$ y $Q = L \cap \Pi'$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa en este problema el número $d(P,Q)$?
4. ¿Es importante saber qué recta perpendicular a Π y Π' construyeron? Expliquen este hecho geométricamente.

■

Experimento 18 Consideren las rectas $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x-y-z=4,\ 4x-y-2z=9\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(1,0,2)+(1,2,-3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L_1 y L_2 son paralelas.
2. Hallen un plano Π perpendicular a L_2 que pase por $P=(1,2,-3)$ y determinen $Q = L_1 \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa el número $d(P,Q)$ en este problema?

■

Experimento 19 Sean Π el plano de ecuación $x+y+z=1$ y L la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(-1,0,1)+(1,1,2),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L es paralela a Π.
2. Hallen una recta L' ortogonal a Π que pase por $P=(1,1,2)$ y determinen $Q = L' \cap \Pi$.
3. Calculen $d(P,Q)$. ¿Qué representa el número $d(P,Q)$ en este problema?

■

Experimento 20 Consideren las rectas $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x-y-z=1,\ x-2y+z=-2\}$ y $L_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \,:\, X = \lambda(2,-3,0)+(0,0,-1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1. Prueben que L_1 y L_2 son alabeadas.
2. Construyan dos planos paralelos Π_1 y Π_2 tales que Π_1 contenga a L_1 y Π_2 contenga a L_2. *Sugerencia: encuentren vectores directores para L_1 y L_2 y úsenlos como vectores directores de los plano Π_1 y Π_2.*
3. Calculen $d(\Pi_1,\Pi_2)$. ¿Qué representa el número $d(\Pi_1,\Pi_2)$ en este problema?

■

¿Qué hicimos en el apartado 2.5?

- Estudiamos cómo calcular:
  1. el ángulo entre dos rectas, entre una recta y un plano y entre dos planos.
  2. la distancia entre un punto y una recta.
  3. la distancia entre un punto y un plano.
  4. la distancia entre dos planos, entre dos rectas y entre una recta y un plano.

■

2.6 Proyecciones y simetrías

Finalmente, nos abocaremos a *proyectar* puntos sobre rectas y planos y, también, a calcular la “imagen simétrica"de un punto respecto de otro punto, de una recta o de un plano.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto, una recta o un plano.
- Cómo calcular la proyección ortogonal de un punto sobre una recta o un plano.

2.6.1 Simetrías

Simetría es una palabra que se encuentra presente en todas las ramas de la matemática y puede tener un significado distinto en cada caso. Sin embargo, en la teoría de espacios lineales, esta noción refiere a la situación más natural de la palabra: es como la imagen que refleja un espejo. Por ejemplo, si hubiese una mosca frente al espejo (no apoyada en él), entonces, la imagen de la mosca “del otro lado del espejo” sería su *simétrico* respecto del espejo. Ahora bien, formalmente, si tenemos un punto en $\mathbb{R}^3$ y un plano (que podemos pensarlo como si fuera un espejado) entonces el simétrico del punto respecto del plano (el espejo) es aquél punto (del otro lado del plano) que marcaría el reflejo de dicho punto. Vamos a ver que es posible calcular el simétrico de un punto respecto de otro punto, y de rectas también. Debemos proceder siempre de la misma manera: el punto, recta o plano actuarán como espejos y nos interesará saber qué punto es el que está “del otro lado”, en el sentido simétrico de la definición. Veamos cómo formalizar estas nociones.

Comencemos analizando la situación que más se parece a nuestra realidad tridimensional: el simétrico de un punto en el espacio respecto de un plano. En este caso, deseamos encontrar cuál es el punto “del otro lado del plano” que sería la imagen simétrica del punto original, pensando al plano como espejado. Por ejemplo, consideremos el plano xy (de ecuación $z = 0$) y el punto $(1, 2, 3)$. ¿Cuál es la imagen reflejada de $(1, 2, 3)$ respecto del plano xy? Seguramente, no tendrán problemas en hallar la respuesta correcta: $(1, 2, -3)$; este es el punto que naturalmente se encuentra “del otro lado” del plano xy (Figura 2.18, lado izquierdo). Si ahora cambiamos la inclinación del espejo para que esté en la dirección del plano $\Pi : x + 2y + 3z = 0$ ¿Cuál es el simétrico del $(1, 2, 3)$ respecto de Π? Al analizar la situación geométricamente, observamos que se trata del punto $(-1, -2, -3)$ (Figura 2.18, lado derecho). ¿Qué hicimos en ambos casos? Pues nos dimos cuenta que, si formamos la recta entre un punto y su simétrico respecto de un plano, entonces esta recta es *perpendicular al plano*. Pero además, *la distancia del simétrico al plano debe ser la misma que la del punto original al plano*. Esto es lo que debe tenerse presente al momento de análizar la definición, que se presenta luego de la Figura.

Definición 26 Sean $P \in \mathbb{R}^3$ y Π un plano. El *simétrico de P con respecto a Π* es el **único** punto $Q \in \mathbb{R}^3$ distinto de P que verifica que el segmento que une a ambos puntos es perpendicular al plano y, además, la distancia de cada uno de dichos puntos al plano es la misma.

Observación 11 *Observemos que si $P \in \Pi$, entonces, su simétrico con respecto a Π es el mismo punto P.*

Ya contamos con todas las herramientas necesarias para calcular un simétrico. Observemos el método para encontrar un simétrico de forma detallada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 32 Consideremos el plano $\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z = 1\}$ y el punto $(1, 1, 0)$. Queremos encontrar el simétrico de dicho punto con respecto a Π. Luego, calculamos la recta L que es perpendicular al plano y que pasa por

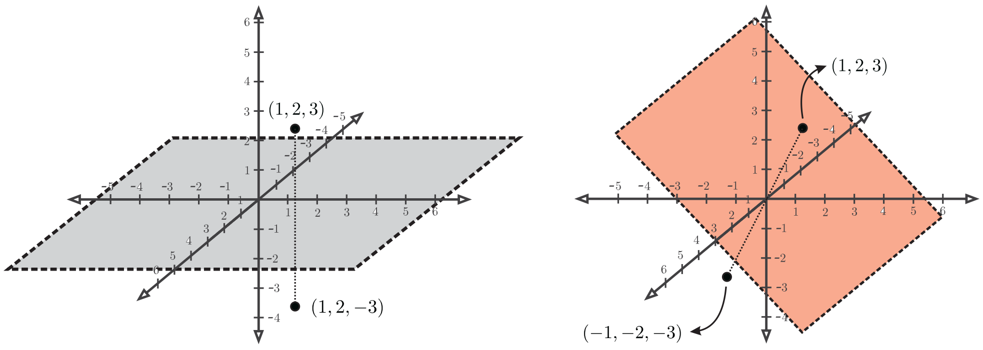


Figura 2.18: El simétrico de un punto respecto de un plano.

el punto $(1,1,0)$. A partir de la ecuación de Π, deducimos que la normal del plano es el vector $(1,1,1)$. Por lo tanto, una ecuación vectorial para L es $t(1,1,1)+(1,1,0)$, $t \in \mathbb{R}$. Para calcular $d(P,\Pi)$ debemos obtener $R = L \cap \Pi$; y, entonces, resolvemos la ecuación $t+1+t+1+t=1$, de la que conseguimos $t=-1/3$. Así, el punto de intersección entre la recta y el plano es $R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Ahora, $d(P,\Pi) = d(P,R) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Finalmente, $Q=(x,y,z)$ es el (único) punto de L distinto de P que verifica $d(Q,\Pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Como $Q \in L$, entonces, Q es de la forma $(t+1, t+1, t)$ para cierto $t \in \mathbb{R}$. Observemos que $d(Q,\Pi) = d(Q,R)$, por lo que buscamos la solución a:

$$\sqrt{(t+1-\frac{2}{3})^2 + (t+1-\frac{2}{3})^2 + (t+\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

o lo que es lo mismo:

$$3(t+\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son $t=0$ y $t=-\frac{2}{3}$. El caso $t=0$ nos devuelve el punto P. El caso $t=-\frac{2}{3}$ nos devuelve el simétrico de P respecto de Π: $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. ■

Existe otra manera (más sencilla) de calcular el simétrico. Solo debemos darnos cuenta de que *el punto medio entre un punto P y su simétrico respecto del plano Π es, necesarimente, un punto del plano Π* (justamente, esto es lo que indica el hecho que la distancia de cada uno de estos puntos al plano sea la misma). Por lo tanto, otra posible manera de calcular el simétrico en esta situación es la siguiente.

Experimento 21 Sean $P=(1,2,3)$ y $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+2y+3z=0\}$ (definidos como recién). Luego:

1. Hallen la recta L perpendicular a Π que pasa por P.
2. Hallen el punto $R = L \cap \Pi$.
3. Sabiendo que R es el punto medio entre P y su simétrico Q, hallen Q.

■

¡Observemos que esta manera de calcular el simétrico de P no involucra el cálculo de distancias!

■ **Ejemplo 33** Con los datos del ejemplo anterior, vimos que la recta L de ecuación vectorial $t(1,1,1)+(1,1,0)$ es perpendicular al plano Π y pasa por $(1,1,0)$ y que $L \cap \Pi$ es $R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$. Como sabemos que R debe ser precisamente el punto medio entre $(1,1,0)$ y su simétrico $Q=(x,y,z)$ podemos plantear $Q=\frac{P+R}{2}$; es decir:

$$\begin{cases} \frac{1+x}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{1+y}{2} = \frac{2}{3} \\ \frac{z}{2} = -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

de donde $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{3}$ y $z=-\frac{2}{3}$. Luego, el simétrico de P respecto de Π es el punto $Q=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$. ■

En $\mathbb{R}^2$, el caso análogo al del encontrar el simétrico de un punto respecto de un plano, es el de encontrar el simétrico de un punto respecto de una recta. Esto se debe a que, si viviéramos en dos dimensiones, los espejos serían segmentos (en lugar de planos como en el espacio tridimensional). Veamos un ejemplo. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el punto $(3,4)$. ¿Cuál es el simétrico de $(3,4)$ respecto del eje x? Nuevamente, no tendremos problemas en convencernos que la respuesta correcta es el punto $(3,-4)$: este es el punto que naturalmente se encuentra "del otro lado" del eje x (Figura 2.19, lado izquierdo). ¿Y el simétrico del $(3,4)$ respecto de la recta de ecuación vectorial $t(1,1)$? Al mirar la Figura 2.19, lado derecho, vemos que se trata del $(4,3)$. Lo que sucede en este caso es idéntico al caso del simétrico de un punto respecto de un plano. La definición es también idéntica.

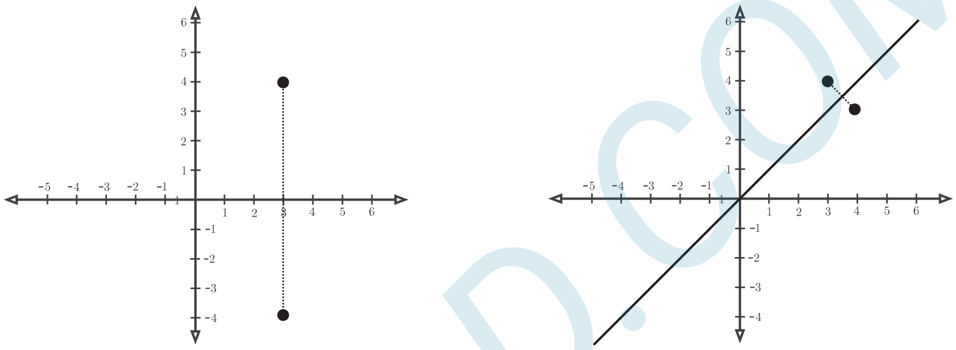


Figura 2.19: El simétrico de un punto respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$.

Definición 27 Dado un punto $P\in\mathbb{R}^2$ y una recta $L\subset\mathbb{R}^2$, el *simétrico* de P respecto de L es el (único) punto $Q\in\mathbb{R}^2$ distinto de P, tal que el segmento que une P con Q es perpendicular a L y la distancia de cada uno de ellos a L es la misma.

Como sucedía con los simétricos respecto de un plano, si $P\in L$, entonces, su simétrico con respecto a L es el mismo punto P. También podemos calcular el simétrico de P respecto de L como apuntamos en el Experimento 16; esto es, teniendo presente que el punto medio entre P y su simétrico es, necesariamente, un punto de la recta L. Si han comprendido los procedimientos hasta aquí desarrollados, no tendrán problema en reproducirlos en este caso más sencillo.

■ **Ejemplo 34** Consideremos la recta $L=\{X\in\mathbb{R}^3 : X=t(1,-1)+(0,2),\ t\in\mathbb{R}\}$ y el punto $P=(1,3)$, y calculemos el simétrico Q de dicho punto con respecto a L. En primer lugar, recordemos que un punto y su simétrico pertenecen a una misma recta que resulta perpendicular a L. Comenzamos, entonces, buscando una ecuación de la recta L' que es perpendicular a L y pasa por $(1,3)$. Luego, elegimos un vector director que sea perpendicular al vector director de L; por ejemplo, una posibilidad es tomar el vector $(1,1)$. Una ecuación vectorial para L' es, entonces, $s(1,1)+(1,3)$. Al calcular la intersección entre ambas rectas, vemos que $L\cap L'=\{(0,2)\}$. Por lo tanto, si $Q=(x,y)$, entonces, debe verificarse $\frac{x+1}{2}=0$ y $\frac{y+3}{2}=2$, a partir de lo cual concluimos que $(x,y)=(-1,1)$. ■

A partir de los conceptos estudiados, analicen con respecto a qué objeto se puede calcular el simétrico de un punto en $\mathbb{R}$, cómo se lo define y qué calculos son necesarios.

También, es posible definir el simétrico de un punto P respecto de otro punto Q, para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (en realidad, la definción vale para cualquier $\mathbb{R}^n$). Como los conceptos y procedimientos son prácticamente los mismos, no surgirán problemas para hallar esta definición natural.

Definición 28 Sean $P, Q \in \mathbb{R}^n$. El *simétrico de P respecto de Q* es el (único) punto $R \in \mathbb{R}^n$ distinto de P tal que R está en la recta determinada por P y Q y la distancia de R a Q es la misma que la distancia de P a Q.

Al igual que en los casos anteriores, el punto R queda determinado por la propiedad tal que el punto medio entre R y P es precisamente Q.

Ejemplos 35

1. Hallemos el simétrico del punto $P = (1, 2)$ respecto del punto $Q = (-3, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Si $R = (x, y)$ representa a dicho simétrico, entonces, debe verificar que $\frac{P+R}{2} = Q$; es decir, $\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right) = (-3, 1)$. De aquí, despejamos fácilmente: $x = -7$ e $y = 0$. Luego, $R = (-7, 0)$.
2. Hallemos ahora el simétrico del punto $P = (0, -1, 4)$ respecto del punto $Q = (2, -3, -2)$ en $\mathbb{R}^3$. Si $R = (x, y, z)$ representa a dicho simétrico, entonces debe verificar $\left(\frac{0+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{4+z}{2}\right) = (2, -3, -2)$. De aquí, despejamos: $x = 4$, $y = -5$ y $z = -8$. Luego, $R = (4, -5, -8)$.

■

Finalmente, podemos definir el simétrico de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ respecto de una recta en $\mathbb{R}^3$.

Definición 29 Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ que no contiene a P, el *simétrico* de P respecto de L es el (único) punto $Q \in \mathbb{R}^3$ distinto de P tal que el segmento que une P con Q es perpendicular a L y la distancia de cada uno de ellos a L es la misma. Si $P \in L$ entonces P es su mismo simétrico.

Observemos que la definición anterior es prácticamente la misma que la del simétrico respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$. Esto no es casualidad: dados el punto P y la recta L, si $P \notin L$, entonces existe un único plano que contiene a P y a L. El simétrico de P va a estar, necesariamente, contenido en este plano, por lo cual, estaremos trabajando en un plano (que podemos identificar con $\mathbb{R}^2$). Una posible manera de calcular el simétrico R del punto P, respecto de la recta L, es la siguiente:

1. Construir el plano Π perpendicular a L que pase por P.
2. Calcular el punto $Q = \Pi \cap L$.
3. Construir la recta L' que une P con Q.
4. Hallar el punto de L', distinto de P, que se encuentre a la misma distancia de Q que P.

También, como en los casos anteriores, el punto R queda determinado por la siguiente propiedad: el punto medio entre R y P es $Q = \Pi \cap L$. Esta suele ser una manera más directa (y más inmediata) de arribar al resultado.

Ejemplo 36 Hallemos el simétrico del punto $P = (-3, -1, 1)$ respecto de la recta de ecuación vectorial $t(1, 1, -1) + (2, 0, -1)$. Primero, construimos el plano Π perpendicular a L que pase por P: una ecuación implícita para este plano es $x + y - z = -5$. A continuación, calculamos $Q = \Pi \cap L$: es un punto de la forma $(t + 2, t, -t - 1)$ tal que $(t + 2) + t - (-t - 1) = -5$. De aquí, despejamos $t = -\frac{8}{3}$. Por lo tanto, $Q = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Finalmente, si llamamos $R = (x, y, z)$ al simétrico buscado, entonces debe verificar $\frac{P+R}{2} = Q$; es decir,

$$\left(\frac{-3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

Por lo tanto, $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{13}{3}$ y $z = \frac{7}{3}$, y hallamos que $R = \left(\frac{5}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right)$. ■

2.6.2 Proyección ortogonal de puntos sobre rectas y planos

¿Qué significa "proyectar" un punto sobre una recta o un plano? La idea es sencilla: retomemos el ejemplo de una mosca en una habitación (oscura, ahora) en la cual encendemos una linterna y apuntamos hacia la mosca. La sombra de la mosca caerá sobre la pared que la mosca tiene detrás. Dicha sombra es una *proyección de la mosca sobre la pared*. Supongamos que la mosca es un punto y la pared es un plano: la sombra representa la *proyección del punto sobre el plano*. Pero, ¿está bien definida esta proyección? *No, pues depende de dónde estemos sosteniendo nosotros la linterna*. Es decir, la proyección de un punto sobre una recta o un plano depende desde donde lo estemos proyectando. En este libro solo estudiaremos el caso de proyecciones que se hagan de manera perpendicular a la recta o al plano. Este tipo de proyecciones se llaman, naturalmente, *proyecciones ortogonales*.

¿Cómo calcular la proyección ortogonal? Supongamos que tenemos un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y un plano $\Pi \subset \mathbb{R}^3$. Queremos proyectar P sobre Π de manera ortogonal. Esto significa que pretendemos que la recta L determinada por el punto P y el punto desde donde estamos proyectando (donde estaríamos sosteniendo la linterna) sea perpendicular al plano (Figura 2.20). Entonces, la proyección ortogonal de P sobre Π sería la intersección $L \cap \Pi$ (tengamos en cuenta que la recta L estaría representando el haz de luz de la linterna). Sin embargo, observemos que la recta L construida es, exactamente, la recta perpendicular a Π que pasa por el punto P. Por lo tanto, para calcular la proyección ortogonal de P sobre Π, no necesitamos saber dónde está ubicada la linterna, pues alcanza con saber que está ubicada en una posición cuyo haz es perpendicular a Π.

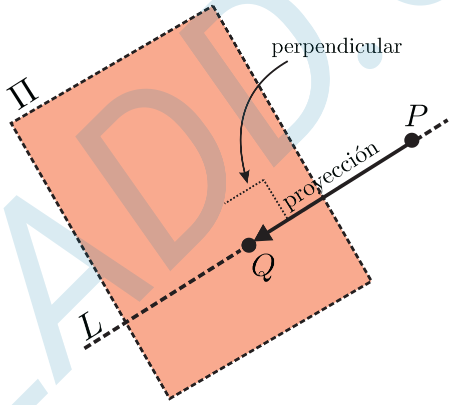


Figura 2.20: Proyección ortogonal sobre un plano.

Al igual que en el ejemplo de cómo calcular el simétrico de un punto, la situación de proyectar un punto $P \in \mathbb{R}^2$ sobre una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ es completamente análoga a la de proyectar un punto sobre un plano. No presentará problemas comprender que se trata del punto Q que se encuentra en la intersección de L y la recta L', perpendicular a L, que pasa por P. ¿Se pueden proyectar puntos sobre rectas en $\mathbb{R}^3$? Claro que sí: es posible proyectar puntos sobre cualquier espacio lineal. ¿Cómo sería la proyección ortogonal de un punto $P \in \mathbb{R}^3$ sobre una recta $L \subset \mathbb{R}^3$? Debemos pedir que la incidencia del haz de luz de la linterna sea perpendicular a la recta. Notemos que esta última premisa dice dos cosas: por un lado, el haz *debe incidir sobre la recta*; y por otro lado, *la incidencia debe ser perpendicular*. Como sabemos, en $\mathbb{R}^3$ hay infinitas direcciones perpendiculares a una recta. En los apartados anteriores, vimos que, la manera más fácil de hallar una dirección perpendicular a una recta L que corte tanto a L como a P, es considerar el plano Π perpendicular a la L que pase por el punto P. De esta forma, el punto

$Q = \Pi \cap L$ será, efectivamente, la proyección ortogonal de P sobre L.

Les presentamos la siguiente definición general de proyección ortogonal.

Definición 30 Sea $P \in \mathbb{R}^n$ y sea S una recta o plano de $\mathbb{R}^n$. La *proyección ortogonal* de P sobre S es el punto Q de S que se encuentra más cercano a P.

Observación 12 *¡Tengamos presente que ya estuvimos calculando proyecciones ortogonales antes! De hecho, todas estas construcciones que acabamos de hacer, precisamente, dan cuenta que la proyección ortogonal entre un punto y una recta o un plano es, en definitiva, el punto de la recta o el plano, respectivamente, que más cerca se encuentra del punto. Esta es la manera más "económica" de definir este concepto.*

Hemos visto, en el apartado 2.5, que la distancia entre un punto P y una recta L (o un plano Π), era la distancia entre el punto P y el punto $Q \in L$ (o $Q \in \Pi$) más cercano a P. Por lo tanto, el punto Q que calculábamos era exactamente la proyección ortogonal de P sobre L (o sobre Π). Esto lo desarrollamos en los siguientes experimentos:

- Experimento 14: la distancia de un punto P a una recta L en $\mathbb{R}^2$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L \cap L'$, donde L' era la recta perpendicular a L que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre L.*
- Experimento 15: la distancia de un punto P a una recta L en $\mathbb{R}^3$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L \cap \Pi$, donde Π era el plano perpendicular a L que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre L.*
- Experimento 16: la distancia de un punto P a un plano Π en $\mathbb{R}^3$ se calculaba como $d(P, Q)$ donde $Q = L' \cap \Pi$, donde L' era la recta perpendicular a Π que pasa por el punto P. Por lo tanto, *Q es la proyección ortogonal de P sobre Π.*

Ejemplos 37

1. Calculemos la proyección ortogonal del punto $P = (1, -3)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^2 : X = t(2, -3) + (0, 5),\ t \in \mathbb{R}\}$. Buscamos primero la recta L' que es perpendicular a L y que pasa por el punto P: una ecuación vectorial para L' es $s(3, -2) + (1, -3)$. La proyección ortogonal de P sobre L será, entonces, $Q = L \cap L'$. Buscamos esta intersección. En segundo lugar, planteamos $(2t, -3t + 5) = (3s + 1, -2s - 3)$; es decir:
$$\begin{cases} 2t = 3s + 1 \\ -3t + 5 = -2s - 3 \end{cases}$$
Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas, hallamos que $s = \frac{13}{5}$ y que $t = \frac{22}{5}$. Reemplazando por este valor de s en $s(3, -2) + (1, -3)$, obtenemos $Q = \left(\frac{44}{5}, -\frac{41}{5}\right)$ (el mismo resultado al que llegamos si reemplazamos $t = \frac{22}{5}$ en $t(2, -3) + (0, 5)$).
2. Calculemos ahora la proyección ortogonal del punto $P = (1, 0, 1)$ sobre la recta $L = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(1, 2, -3) + (0, 1, 5),\ t \in \mathbb{R}\}$. En primer lugar, buscamos el plano Π que es perpendicular a L y que pasa por el punto P: una ecuación implícita para Π es $x + 2y - 3z = -2$. La proyección ortogonal de P sobre L será, entonces, $Q = L \cap \Pi$. En segundo lugar, hallamos esta intersección. Planteamos:
$$\begin{aligned} & \underbrace{t}_{x} + 2\underbrace{(2t+1)}_{y} - 3\underbrace{(-3t+5)}_{z} = -2 \\ \Rightarrow\ & 14t - 13 = -2 \\ \Rightarrow\ & t = \tfrac{11}{14} \end{aligned}$$
Reemplazando por este valor de t en $t(1, 2, -3) + (0, 1, 5)$, obtenemos $Q = \left(\frac{11}{14}, \frac{18}{7}, \frac{37}{14}\right)$.

3. Finalmente, calculemos la proyección ortogonal del punto $P = (-1, -2, 4)$ sobre el plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = t(2, 2, -1) + s(5, 0, -3) + (2, 0, 0),\ t, s \in \mathbb{R}\}$. En primer lugar, buscamos la recta L que es perpendicular a Π y que pasa por el punto P: una ecuación vectorial para L es $r(-6, 1, -10) + (-1, -2, 4)$. La proyección ortogonal de P sobre Π será, entonces, $Q = L \cap \Pi$. En segundo lugar, buscamos la intersección. Para facilitar las cuentas, hallemos una ecuación implícita para Π: una normal es $(2, 2, -1) \times (5, 0, -3) = (-6, 1, -10)$ (esta cuenta ya la habíamos hecho para calcular el vector director de L), por lo que la ecuación normal para Π (utilizando como punto de P el $(2, 0, 0)$) nos queda:

$$\begin{aligned} & (-6, 1, -10) \cdot (x, y, z) = (-6, 1, -10) \cdot (2, 0, 0) \\ \Rightarrow\quad & -6x + y - 10z = -12 \end{aligned}$$

Luego, los puntos de $L \cap \Pi$ son los de la forma $(-6r - 1, r - 2, -10r + 4)$ que verifican

$$\begin{aligned} & -6\underbrace{-6r - 1}_{x} + (\underbrace{r - 2}_{y}) - 10(\underbrace{-10r + 4}_{z}) = -12 \\ \Rightarrow\quad & 137r - 36 = -12 \\ \Rightarrow\quad & r = \tfrac{24}{137} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Q = \left(-\frac{281}{137}, -\frac{250}{137}, \frac{308}{137}\right)$.

■

¿Qué hicimos en el apartado 2.6?

- Estudiamos el concepto de punto simétrico a otro punto de $\mathbb{R}^n$ respecto de puntos, rectas y planos.
- Aprendimos cómo calcular la proyección ortogonal de puntos sobre rectas y planos.

■

3. Espacios vectoriales

En este capítulo analizamos cómo se generalizan las nociones de espacios lineales para vectores de $\mathbb{R}^n$. Los espacios vectoriales son el objeto principal de estudio del Álgebra Lineal. Los ejemplos abundan en todas las ramas de la matemática.

En este libro, solo daremos una breve introducción centrados exclusivamente en espacios vectoriales que viven dentro de $\mathbb{R}^n$; conocidos como subespacios de $\mathbb{R}^n$.

En este capítulo estudiaremos...

1. Subespacios de $\mathbb{R}^n$.
2. Combinaciones lineales de vectores.
3. Dependencia lineal de un conjunto de vectores.
4. Generadores, bases y dimensión de subespacios.

3.1 Subespacios de $\mathbb{R}^n$

En el capítulo 1, estudiamos que las propiedades de los espacios de vectores no dependen de su ubicación, sino de sus características propias (la pendiente de la recta, la inclinación del plano). Por esta razón, la teoría de espacios vectoriales se desarrolla exclusivamente para espacios de vectores que pasen por el origen. Algebraicamente, esto tiene, además, la ventaja de contar con el elemento nulo de la suma: el vector $\vec{0}$.

Importante En esta unidad, todos los espacios lineales que aparecen pasan por el origen.

Desde el punto de vista algebraico, la propiedad característica que tienen las rectas y los planos *que pasan por el origen* es que *son cerrados por suma de vectores y producto de un vector por un escalar*. Esto quiere decir que, si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores cuyos extremos pertenecen a una recta L o a un plano Π, entonces el vector $\vec{v}+\vec{w}$ y todos los vectores $\lambda\vec{v}$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, también pertenecen a L o a Π. La manera de generalizar la noción de espacio lineal a $\mathbb{R}^n$ es la siguiente: se trata de un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ tal que, al sumar dos vectores del conjunto, el resultado es nuevamente un vector del conjunto y, al multiplicar un vector del conjunto por un escalar cualquiera, el resultado es nuevamente un vector del conjunto. Observemos que, dado que la suma y producto por escalar están definidos considerando que el origen de los vectores es el origen de coordenadas, entonces el vector nulo $\vec{0}$ deberá pertenecer necesariamente a dicho conjunto.

Definición 31 Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores $S \subset \mathbb{R}^n$ que tiene las siguientes características:

1. $\vec{0} \in S$,
2. si $\vec{v}, \vec{w} \in S$ entonces $\vec{v} + \vec{w} \in S$ y
3. si $\vec{v} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ cualquiera entonces $\lambda\vec{v} \in S$.

Retomamos lo dicho anteriormente: la suma de vectores del subespacio vuelve a ser un vector del subespacio y el producto de un vector del subespacio por un escalar cualquiera, también es un vector del subespacio. Consideremos el conjunto $S \subset \mathbb{R}^5$ de vectores cuya última coordenada es 0. Afirmamos que S es un subespacio. En efecto, el vector $(0, 0, 0, 0, 0) \in S$, pues su última coordenada es 0. Además, si $(a, b, c, d, 0), (p, q, r, s, 0) \in S$, entonces $(a, b, c, d, 0) + (p, q, r, s, 0) = (a + p, b + q, c + r, d, s, 0 + 0) \in S$, pues su última coordenada sigue siendo 0. Por último, si $(a, b, c, d, 0) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda(a, b, c, d, 0) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, \lambda 0) = \lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, 0) \in S$. Por lo tanto, S es efectivamente un subespacio.

Proponemos realizar el siguiente experimento para comprobar que las rectas y los planos que pasan por el origen tienen estas propiedades:

Experimento 22 Consideren una recta L de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$ y un plano Π de ecuación vectorial $X = s\vec{w} + r\vec{u}$.

1. Muestren que si P y Q son puntos de L y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $P + Q$ y λP también.
2. Muestren que si P y Q son puntos de Π y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $P + Q$ y λP también.

■

3.2 Combinación lineal

Cuando una recta pasa por el origen podemos hallar una ecuación vectorial de la forma $X = t\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector director. Ahora, $P \in L$ si existe un $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = t\vec{v}$ (aquí estamos pensando en el extremo de $\vec{v}$). Es decir, P está en la recta si P es múltiplo del vector director $\vec{v}$. ¿Qué sucede en el caso de un plano Π, que pasa por el origen, dado en forma vectorial? Si escribimos una ecuación vectorial para Π de la forma $X = t\vec{v} + s\vec{w}$ entonces, para ver si $P \in \Pi$, observamos si existían $t, s \in \mathbb{R}$ tales que P tuviese la forma $t\vec{v} + s\vec{w}$. Es decir, $P \in \Pi$ sí, y solo sí, es la suma de múltiplos de los vectores directores del plano. En espacios de mayor dimensión, la idea de que un punto pertenezca o no a un subespacio es la misma: el punto P está en el subespacio S si y solo si P es suma de múltiplos de vectores directores de S.

¿Qué significa, entonces, "vectores directores" de un subespacio y "suma de múltiplos de los vectores directores"? Vamos a cambiar ciertos nombres y definiciones cuando trabajemos en el contexto más general. Cuando $\vec{v}$ es un vector director de una recta L, diremos que $\vec{v}$ *genera* L; y cuando $\vec{w}, \vec{u}$ son vectores directores de un plano Π, diremos que *generan* el plano Π. ¿Y cómo lo hacen? De la manera que venimos viendo: los puntos de L son múltiplos de $\vec{v}$ y los puntos de Π son suma de múltiplos de $\vec{w}$ y $\vec{u}$. Esta noción de "suma de múltiplos" de $\vec{w}$ y $\vec{u}$ se llama *combinación lineal de $\vec{w}$ y $\vec{u}$* y se define en general como sigue:

Definición 32 Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$. Una *combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r}$* es un vector $\vec{w}$ de la forma:

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{v}_r$$

para algunos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$.

¿Cómo hacemos para determinar si un vector es combinación lineal de otros? Pensemos la respuesta a partir de un ejemplo. Supongamos que queremos saber si el vector $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 2)$ y $(-1, 1, -5)$. Esto sucederá sí, y solo sí, existen escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que:

$$(1, 2, 3) = \lambda(1, 0, 2) + \mu(-1, 1, -5) = (\lambda - \mu, \mu, 2\lambda - 5\mu)$$

Es decir, λ y μ deben verificar:

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 1 \\ \mu = 2 \\ 2\lambda - 5\mu = 3 \end{cases}$$

De las dos primera ecuaciones despejamos $\mu = 2$ y $\lambda = 3$. Nos resta, entonces, chequear si con estas igualdades se verifica la última ecuación:

$$2\lambda - 5\mu = 2{,}3 - 5{,}2 = -4 \neq 3$$

Por lo tanto, concluimos que $(1, 2, 3)$ no es combinación lineal de los vectores $(1, 0, 2)$ y $(-1, 1, -5)$.

Veamos, entonces, cómo reescribimos la ecuación vectorial de un plano utilizando la noción de combinación lineal. Al repasar lo que hicimos anteriormente, observamos que si el plano está generado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (es decir, son vectores directores del plano), entonces $P \in \Pi$ si y solo si P es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Esto quiere decir que Π es *exactamente* el conjunto de los puntos que se obtienen de hacer todas las posibles combinaciones lineales entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 33 Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \in \mathbb{R}^n$. El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r}$ se nota:

$$\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$$

Es decir, los vectores que pertenecen al conjunto $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ son aquellos que se pueden escribir como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$.

El conjunto $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ es un subespacio. El estudiante interesado puede comprobar esto verificando que, tanto la suma como el producto por escalar de vectores de $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$, también pertenece a $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r} \rangle$ (es decir, también es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v_r}$).

3.3 Dependencia lineal

Cuando un vector $\vec{v}$ es combinación lineal de vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$, sucede que $\vec{v}$ *depende linealmente* de estos vectores: "depende", porque es combinación de ellos y, "linealmente", pues la combinación es lineal. Cuando tenemos un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\}$, podríamos preguntarnos si alguno de ellos depende linealmente de los otros. En un ejemplo de la capítulo anterior, trabajamos con la ecuación vectorial $X = t(-1, 5, 2) + s(2, -10, -4) + (1, 1, 3)$, y vimos que dicha ecuación no determina un plano (pues los vectores directores son múltiplos). En realidad, determina una recta ya que, como $(2, -10, -4) = -2(-1, 5, 2)$, se puede reescribir $(t - 2s)(-1, 5, 2) + (1, 1, 3)$ y, aquí, $t - 2s$ es un número real cualquiera (no importa que utilicemos dos parámetros para escribirlo; podríamos usar solo uno). Si esta ecuación está describiendo una recta, entonces trabajar con ella hace las cosas más complicadas, ya que estamos empleando dos vectores directores (y dos parámetros), mientras que para describir la recta solo necesitamos uno. Pero justamente, lo que sucede en este caso es que *los vectores* $(-1, 5, 2)$ *y* $(2, -10, -4)$ *son linealmente dependientes* (uno es múltiplo del otro). En general, cuando describimos subespacios, buscamos la manera más económica de hacerlo; y esta es, precisamente, que los vectores que usemos "como directores" sean linealmente independientes: si no lo fueran, entonces, uno de ellos sería combinación lineal de los otros y sería necesario para describir al subespacio. La definición formal de independencia lineal es la siguiente:

Definición 34 Un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_r\}$ se dice *linealmente dependiente* si existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ *no todos nulos* tales que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0$. Es decir, son linealmente dependientes si existe una combinación lineal no trivial (no todos los $\lambda_i = 0$) que da el vector $\vec{0}$. Por lo tanto, el conjunto es linealmente independiente si la única combinación lineal de los $\{v_1, \ldots, v_r\}$ que da 0 es la que tiene a todos los coeficientes de la combinación lineal nulos.

Analicen la definición de dependencia lineal y vean que es equivalente a expresar que un vector puede ser escrito como combinación lineal de otros.

Queremos saber si un conjunto de vectores es o no linealmente dependiente. En el siguiente ejemplo veremos la técnica que permite determinar esto. Consideremos el conjunto:

$$\{(1, 2, 3), (1, 0, 2), (-1, -6, -5)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Este conjunto será linealmente independiente si, y solo si, la única combinación lineal entre todos sus vectores –que da como resultado el vector nulo– es aquella que tiene todos los coeficientes de la combinación nulos. Analicemos, entonces, cómo son las combinaciones lineales de estos vectores que dan como resultado el vector nulo. Consideremos una combinación lineal genérica igualada al vector nulo:

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(1, 0, 2) + \nu(-1, -6, -5) = \vec{0}$$

Esto es lo mismo que escribir:

$$(\lambda + \mu - \nu, 2\lambda - 6\nu, 3\lambda + 2\mu - 5\nu) = (0, 0, 0)$$

Es decir:

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ 2\lambda - 6\nu = 0 \\ 3\lambda + 2\mu - 5\nu = 0 \end{cases}$$

De la ecuación segunda obtenemos $\lambda = 3\nu$. Al reemplazar en la primera ecuación, despejamos $\mu = -2\nu$. Finalmente, reemplazando estas dos informaciones en la tercera ecuación obtenemos $3(3\nu) + 2(-2\nu) - 5\nu = 0$. Es decir, $0 = 0$. Al haber utilizado todas las ecuaciones, solo nos quedan las restricciones $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$. Aquí, la variable ν es libre y puede tomar cualquier valor (no hay restricción sobre ella). Esto nos dice que, sin importar quién es ν, mientras que, para un ν elegido arbitrariamente, se cumpla $\lambda = 3\nu$ y $\mu = -2\nu$, entonces se va a verificar que la combinación lineal de los vectores originales como resultado el vector nulo. Por ejemplo, tomando $\nu = 1$, nos queda $\lambda = 3$ y $\mu = -2$, y hallamos que:

$$3(1, 2, 3) - 2(1, 0, 2) + (-1, -6, -5) = (0, 0, 0)$$

Este desarrollo nos indica que el conjunto $\{(1,2,3),(1,0,2),(-1,-6,-5)\}$ es linealmente dependiente: hallamos una combinación lineal del vector nulo donde no todos los coeficientes son nulos (de hecho, ninguno lo es). Entonces, ¿cuándo es un conjunto linealmente independiente? Cuando la solución del sistema de ecuaciones simultáneas da como resultado $\lambda = 0$, $\mu = 0$ y $\nu = 0$ como única solución.

3.4 Generadores, base y dimensión

Para describir un subespacio $\mathbb{R}^n$, se hace de la misma manera que para planos y rectas. Básicamente se utilizan dos formas: *por ecuaciones* o *por generadores*.

Descripción por ecuaciones Describir un subespacio de $\mathbb{R}^n$ por ecuaciones es como describir una recta o un plano por ecuaciones implícitas: damos una relación lineal entre las coordenadas de los puntos que pertenecen al subespacio. Por ejemplo, un posible subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$$

Este subespacio queda, entonces, determinado por todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas verifican estas ecuaciones simultáneamente. ¿Cómo se puede describir por ecuaciones el subespacio S introducido en la página 80? Simplemente, de la siguiente manera:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x_5 = 0\}$$

Descripción por generadores La otra manera es describir al subespacio exhibiendo generadores del mismo. Recordemos que un subespacio T es, simplemente, un conjunto de vectores que tiene las propiedades 1-3 introducidas en el apartado 3.1. Un *conjunto de generadores* de T es un conjunto finito de vectores $\{v_1, \dots, v_r\}$ tal que, cualquier vector de T, puede escribirse como combinación lineal de $v_1, \dots, v_r$ (de la misma forma como cualquier punto de un plano se podía escribir como combinación lineal de sus vectores directores).

Definición 35 Sea $T \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio. Un *conjunto de generadores* para T es un conjunto finito $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $T = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Al considerar, nuevamente, al subespacio $S \subset \mathbb{R}^5$ conformado por todos los vectores de $\mathbb{R}^5$ cuya última coordenada es 0. Afirmamos que el conjunto (de cuatro vectores):

$$\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}$$

es un sistema de generadores de S. Esto significa que debemos verificar que todos los vectores de S se pueden escribir como combinación lineal de los vectores $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$ y, *además*, que todos los vectores de $\langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$ están en S (recuerden que dos conjuntos A y B son iguales si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$ simultáneamente). Por un lado, los vectores de S tienen la forma $(a,b,c,d,0)$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Pero,

$$(a,b,c,d,0) = a(1,0,0,0,0) + b(0,1,0,0,0) + c(0,0,1,0,0) + d(0,0,0,1,0),$$

es una combinación lineal de los vectores del conjunto en consideración. Esto muestra que:
$S \subset \langle(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$.
Por otro lado, cualquier combinación lineal de los vectores $(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)$ tiene su última coordenada 0, pues:

$$\alpha(1,0,0,0,0) + \beta(0,1,0,0,0) + \gamma(0,0,1,0,0) + \delta(0,0,0,1,0) = (\alpha,\beta,\gamma,\delta,0)$$

Esto muestra que $\langle (1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle \subset S$. Concluimos, entonces, que $S = \langle (1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\rangle$, como queríamos ver.

¿Cómo pasamos de la descripción por generadores a la descripción por ecuaciones y viceversa? De la misma manera que hicimos para pasar de la ecuación implícita a la vectorial de una recta o un plano. Consideremos el subespacio:

$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + 2x_2 = 0,\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$$

Los vectores de T son aquellas 4-uplas (x_1,x_2,x_3,x_4) que verifican:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Al despejar x_1 en la primera ecuación, obtenemos $x_1 = -2x_2$; y despejando x_4 en la segunda ecuación, $x_4 = x_2 + 3x_3$ (notemos que aquí no pudimos reemplazar por el valor despejado en la primera ecuación pues no aparece el x_1 en la segunda ecuación). Como no hay más ecuaciones, toda la información que pudimos extraer es que x_1 depende de x_2 y que x_4 depende de x_2 y x_3. Por lo tanto, los puntos de T son aquellos vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma $(-2x_2, x_2, x_3, x_2 + 3x_3)$. Este vector lo escribimos de la siguiente manera:

$$x_2(-2,1,0,1) + x_3(0,0,1,3)$$

Como x_2 y x_3 no tienen restricciones, entonces son libres, y los vectores de T son las combinaciones lineales de los vectores $(-2,1,0,1)$ y $(0,0,1,3)$. Es decir, $T = \langle (-2,1,0,1),(0,0,1,3)\rangle$.

Si ahora queremos describir por ecuaciones el subespacio $\langle (-2,1,0,1),(0,0,1,3)\rangle$, simplemente debemos plantear que los puntos del subespacio son las combinaciones lineales de ambos vectores. Es decir, los puntos de este subespacio son de la forma:

$$\lambda(-2,1,0,1) + \mu(0,0,1,3)$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Al desarrollar esta última expresión, obtenemos:

$$\lambda(-2,1,0,1) + \mu(0,0,1,3) = (\underbrace{-2\lambda}_{x_1}, \underbrace{\lambda}_{x_2}, \underbrace{\mu}_{x_3}, \underbrace{\lambda + 3\mu}_{x_4})$$

Es decir, podemos escribir:

$$\begin{cases} x_1 = -2\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \lambda + 3\mu \end{cases}$$

En este caso, al igual que en el pasaje hecho para rectas y planos, debemos hallar la relación entre las coordenadas x_1, x_2, x_3, x_4 eliminando los parámetros λ y μ. Por ejemplo, como $x_2 = \lambda$, entonces, la primera ecuación queda $x_1 = -2x_2$. Y al reemplazar estos despejes en la cuarta ecuación nos queda $x_4 = x_2 + 3x_3$. Por lo tanto, hemos usado todas las ecuaciones y hemos hallado las dos ecuaciones $x_1 = -2x_2$ y $x_4 = x_2 + 3x_3$.

3.4.1 Bases

Nuevamente, consideremos el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \,:\, x_5 = 0\}$. Como vimos $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}$ era un sistema de generadores para S. Proponemos realizar el siguiente experimento para hallar otros posibles conjuntos de generadores para S.

Experimento 23 Muestren que cada uno de los siguientes conjuntos es un sistema de generadores para S.

1. $\{(1,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(0,0,3,0,0),(0,0,0,4,0)\}$.
2. $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0)\}$.
3. $\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(1,2,3,4,0)\}$.

¿Qué sucede en el punto 3. del experimento 24? Tanto en el desarrollo de la explicación como en los puntos 1. y 2., vemos que S se puede generar usando cuatro vectores; pero el ítem 3. indica que también podemos hacerlo con cinco. En este caso, sucede que es que el último vector es combinación lineal de los otros, con lo cual no aporta ninguna información nueva. Sin embargo, también es un sistema de generadores de S, pues todo elemento de S es combinación lineal de esos cinco vectores y todo vector que sea combinación lineal de esos cinco vectores está en S. Si trabajamos con un subespacio, lo más conveniente es tenerlo descripto de la manera más sencilla posible. Es decir, ¿por qué usar cinco vectores si podemos describirlo con cuatro? Esta es precisamente la noción de *base* de un subespacio: un sistema de generadores del subespacio lo más pequeño posible. ¿Qué significa "lo más pequeño posible"? Que no haya ningún vector "de más" en el sistema: que con el resto de los vectores del sistema "nos alcanza". Y un vector "está de más" en un sistema de generadores si lo podemos generar con los otros vectores del sistema; vale decir, si es combinación lineal de los otros. La definición forma del base es, entonces, la siguiente:

Definición 36 Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_r\}$ es una *base* de S si es un sistema de generadores de S y es linealmente independiente.

Observemos que si un conjunto de vectores tiene menos vectores *que una base, entonces, no puede ser un sistema de generadores, y si tiene* más vectores *que una base entonces no puede ser linealmente independiente.*

Se puede ver que los conjuntos de generadores de los ítems 1. y 2. del Experimento 23 son bases del subespacio S (es decir, son conjuntos linealmente independientes). Por el contrario, como observamos, el conjunto de generadores del ítem 3. no es una base. Sin embargo, notemos que, si removemos el último vector del sistema, obtenemos una base de S. Esto siempre se le puede hacer a un sistema de generadores: remover sus vectores hasta quedarnos con un conjunto linealmente independiente. Esto se llama *extraer una base* del sistema de generadores. Lo que sucede es que, si X es un sistema de generadores de un subspacio $T \neq \{\vec{0}\}$ que no es base, entonces alguno de sus vectores es combinación lineal de los otros. Por lo tanto, podemos remover este vector al conjunto X y este nuevo conjunto más pequeño, seguirá generando al subespacio T (porque, al haber removido un vector que es combinación lineal de los otros, no perdimos información). Este procedimiento podemos continuarlo hasta obtener un conjunto linealmente independiente que genere T (y, por ende, sea una base de T).

Observen por qué el procedimiento anterior siempre termina en un conjunto linealmente independiente. Analicen cómo son los conjuntos generados por un solo vector.

De manera análoga, si tenemos un conjunto Y de vectores de un subespacio T, que es linealmente independiente, entonces podemos *extenderlo a una base*; es decir, podemos agregarle vectores de T al conjunto Y de manera que, a medida que vamos agregando nuevos vectores, el conjunto siga siendo linealmente independiente. Este proceso podemos continuarlo hasta conseguir un sistema de generadores de T (y por lo tanto, una base de T).

El procedimiento anterior siempre termina en un conjunto de generadores del suvbespacio. Analicen las posibles formas en las que no es posible continuar con el proceso.

Tal como establecimos, hallar bases de subespacios es muy importante, ya que las bases proveen las maneras más fáciles de describir a los subespacios. Miren una de las ventajas de trabajar con bases en el siguiente ejemplo:

■ **Ejemplo 38** Consideren un subespacio $S \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de S. Sabemos que, como $\mathcal{B}$ es un sistema de generadores, entonces todo vector de S es combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$. Pero como $\mathcal{B}$ es una base, demostramos que esta combinación lineal *es única*. Es decir, existe una sola manera de combinar linealmente los vectores de $\mathcal{B}$ para lograr un vector $\vec{w} \in S$ dado. En efecto, supongamos que hubiese dos maneras de expresar a $\vec{w}$ como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$:

$$\vec{w} = \lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_r \vec{v_r} \text{ y } \vec{w} = \mu_1 \vec{v_1} + \cdots + \mu_r \vec{v_r}.$$

Al igualar ambas ecuaciones, tenemos:

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \cdots + \lambda_r \vec{v_r} = \mu_1 \vec{v_1} + \cdots + \mu_r \vec{v_r},$$

y al pasar todos lo términos de la derecha a la izquierda, obtenemos:

$$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{v_1} + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{v_r} = \vec{0}.$$

Esto es una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ que da $\vec{0}$ y, como $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces la única posibilidad es que todos los coeficientes $\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_r - \mu_r$ sean 0 (recuerden la definición 34 dada en la página 82). Por lo tanto, $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ ... $\lambda_r = \mu_r$ y concluimos que las dos combinaciones lineales que en principio parecían distintas, en realidad, son la misma. ■

Por supuesto, hay infinitas bases que podemos construirnos para un subespacio (como hay infinitas posibilidades de crear un sistema de generadores o de elegir vectores directores de un plano). Tengamos en cuenta que las bases que construimos para el subespacio S de vectores de $\mathbb{R}^5$ con la última coordenada nula siempre tienen cuatro vectores. Podríamos preguntarnos si esto es casualidad o no. Es decir, si tenemos dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ para un subespacio S, ¿tienen la misma cantidad de vectores siempre? La respuesta es sí. *Dos bases del mismo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tienen siempre la misma cantidad de vectores*. Este número se llama *dimensión del subespacio S*. En nuestro ejemplo, podemos decir que S tiene dimensión 4.

La noción de dimensión es muy útil también para trabajar con espacios vectoriales. Por ejemplo, si sabemos que S tiene dimensión 4, entonces, ya podemos concluir que un conjunto que no tenga exactamente cuatro vectores no puede ser base de S. También, si se tienen dos subespacios $T, L \subset \mathbb{R}^n$ de la misma dimensión, tales que uno está contenido en el otro (por ejemplo, $L \subset T$), entonces concluimos que son iguales.

La palabra "dimensión" en el contexto de la teoría de subespacios está fuertemente ligada a nuestra noción de esta palabra en la vida cotidiana. Por ejemplo, sabemos que nuestro espacio (de tres grados de libertad) es tridimensional; y tenemos, seguramente, la idea de que un plano tiene dos dimensiones y una recta, una sola. Y esto es precisamente lo que sucede con esta definición de dimensión. Puede probarse que toda base de un plano tiene dos vectores y, por lo tanto, todos los planos tienen dimensión 2. Por ejemplo, el plano xy en $\mathbb{R}^3$ tiene por posible base al $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$. De la misma manera, el espacio $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3, con posible base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Estas bases que parecen tan naturales de considerar se las conoce como bases canónicas.

¿Qué hicimos en el capítulo 3?

- Definimos algebraicamente la noción de *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *a partir de sus propiedades relacionadas con la suma de vectores y el producto por un escalar.*
- Estudiamos las nociones de combinación lineal de vectores y de dependencia lineal de vectores.
- Definimos las nociones de sistema de generadores, de base y de dimensión de un subespacio vectorial.

4. Cónicas

En este capítulo estudiaremos una familia de curvas de $\mathbb{R}^2$*, llamadas* cónicas*. Su nombre proviene de que dichas curvas se obtienen al cortar un cono en el espacio con distintos tipos de planos. Los conjuntos de puntos que determinan estas curvas no forman espacios lineales (como rectas y planos que desarrollamos en el capítulo 2), sino que son* curvados*. En este sentido, no guardan relación con propiedades de la suma y producto por escalar de vectores. Además, las ecuaciones que las definen no son lineales (veremos que tienen las coordenadas elevadas al cuadrado). En la segunda parte del libro, retomaremos el estudio de espacio lineales.*

4.1 Curvas cónicas

Una *sección cónica* o *curva cónica* es una curva que se obtiene al intersecar un cono con un plano que no pasa por el vértice del cono. Según la inclinación del plano, se obtienen distintas curvas: elipse, circunferencia, parábola e hipérbola.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es un cono y qué ecuación lo define.
- Cuáles son las curvas cónicas.

■

4.1.1 ¿Qué es un cono?

Es el conjunto de puntos que se muestra en la Figura 4.1, lado izquierdo. Notemos que, a diferencia de lo que comúnmente se considera un cono (como un cono de helado), en nuestra definición, se contemplan dos "conos de helados" que se tocan por los vértices. Llamemos informalmente a las mitades del cono, *semicono superior* y *semicono inferior*. La manera algebraica de definir un cono es por medio de una ecuación. Los puntos de la curva cumplen que las coordenadas de sus puntos, al reemplazarse en la ecuación dan un resultado verdadero. Tal como adelantamos arriba, esta ecuación *no es lineal*, como las que vimos en los capítulos anteriores, sino que es *cuadrática*: aparecen las coordenadas elevadas al cuadrado.

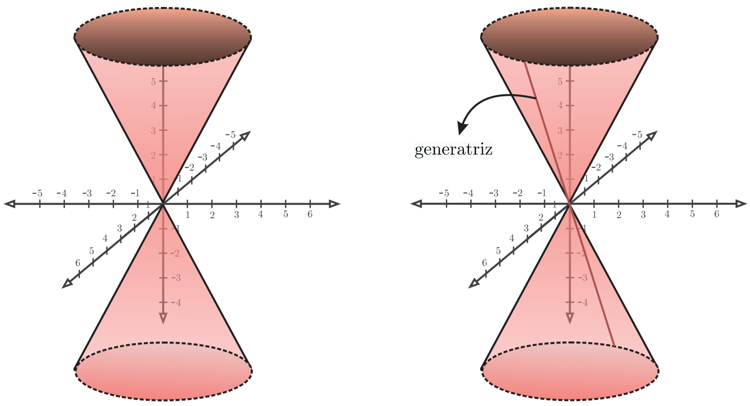


Figura 4.1: El cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Definición 37 Un *cono* en $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

En lo que sigue, notaremos al cono con la letra C. O sea, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.

Cabe destacar que el punto $(0, 0, 0)$ pertenece al cono, y se lo llama *vértice del cono*. Observemos también que el cono contiene infinitas rectas (Figura 4.1, lado derecho). Justamente, es posible darse cuenta que el cono es, en realidad, la unión de estas infinitas rectas y que todas ellas se tocan solo en el vértice. Estas rectas reciben el nombre de *generatrices*.

4.1.2 Corte del cono con distintos planos planos

En el capítulo 2, cortamos dos planos no paralelos de $\mathbb{R}^3$ (es decir, los intersecamos), al hacer esto obtenemos una recta. Ahora veremos qué sucede al cortar el cono con distintos tipos de planos, obtendremos distintos tipos de curvas. ¿Qué tipos de planos utilizaremos para cortar? Consideremos todos los posibles planos pero *que no pasen por el vértice del cono*. Imaginemos que empezamos con un plano horizontal y vamos inclinándolo hasta hacerlo vertical; y vayamos viendo las curvas que vamos obteniendo al intersecar.

Por un lado, cortemos al cono con un *plano horizontal* (es decir, paralelo al plano xy). Si lo hacemos a la altura del vértice (vale decir, el plano $z = 0$), solo obtenemos el vértice del cono (esto no nos brinda mucha información). Entonces, cortemos con el plano Π que está a “altura” 1, es decir, el plano de ecuación $z = 1$. La manera de calcular la intersección entre C y Π es la misma que vimos antes. Los puntos en ambos objetos son los que verifican las ecuaciones de C y las ecuaciones de Π simultáneamente. Por lo tanto, buscamos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Al reemplazar la segunda ecuación en la primera, obtenemos $x^2 + y^2 - 1^2 = 0$ o, lo que es lo mismo, $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Esta es la ecuación de una circunferencia de radio 1 contenida dentro del plano Π. Si ahora cortamos con el plano Π' de ecuación $z = 2$, obtenemos que los puntos de la intersección entre C y Π' verifican $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, que es la ecuación de una circunferencia de radio 2 pensada dentro del plano Π'. En general, al cortar con el plano Π_k de ecuación $z = k$ (con $k \in \mathbb{R}$ cualquiera), obtenemos una circunferencia de radio $|k|$ dentro de dicho plano (Figura 4.2). Si en cualquiera de estos ejemplos, identificamos el plano Π_k con $\mathbb{R}^2$, entonces, todos estos círculos son circunferencias centradas en el $(0,0)$ de radio $|k|$. Como solo nos importa la forma de estas curvas cónicas, vamos a estudiar,en general, circunferencias no necesariamente centradas en el origen. *Las circunferencias, entonces, son un tipo de curvas cónicas.*

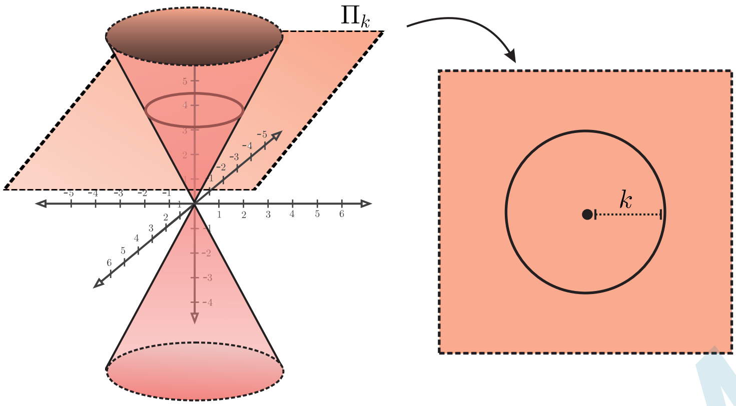


Figura 4.2: La circunferencia como una sección del cono.

Consideremos ahora un plano horizontal con altura positiva en el eje z, e inclinémoslo levemente de manera que *siga atravesando todas las generatrices de C y que lo haga solo del lado positivo de las z*; es decir, que corte solo el semicono superior de C. El conjunto de puntos que se halla en la intersección entre el cono y este plano forman una *elipse* (Figura 4.3). Las elipses admiten una ecuación que las hacen fácilmente identificables pero, en este caso (y en los que siguen), no haremos la deducción de la ecuación a partir del sistema de ecuaciones que determina la intersección, porque involucran una serie de pasos técnicos que no nos interesan considerar a esta altura. *Las elipses, entonces, son un tipo de curvas cónicas.*

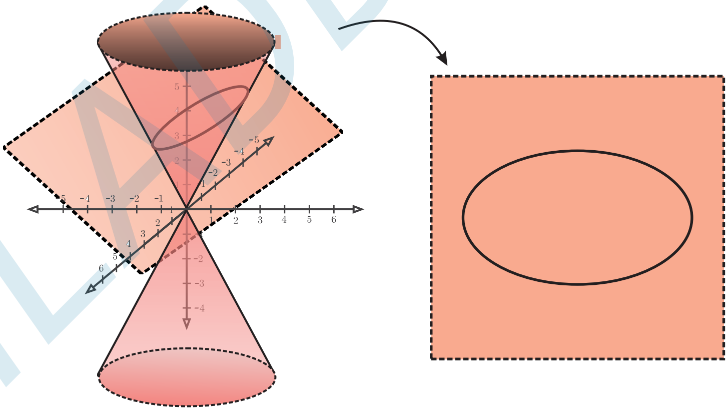


Figura 4.3: La elipse como una sección del cono.

Consideremos un plano que no pase por el vértice del cono y que sea paralelo a alguna directriz. La curva determinada por la intersección de un plano como este y el cono, es una *parábola* (Figura 4.4). Seguramente, la parábola es la cónica más familiar para el estudiante. En este libro la estudiaremos desde un punto de vista más amplio. *Entonces, decimos que las parábolas son un tipo de curvas cónicas.*

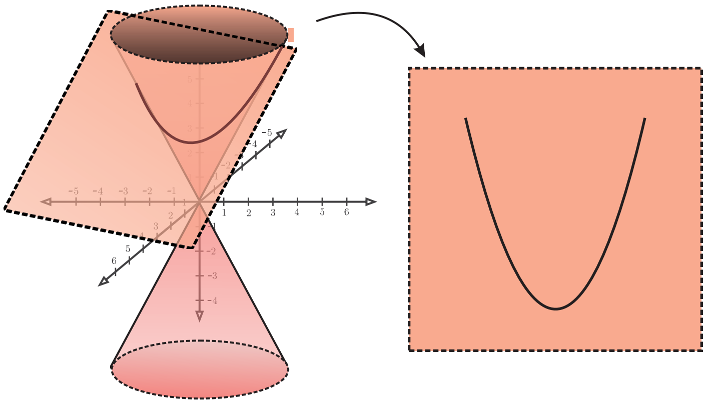


Figura 4.4: La parábola como una sección del cono.

Finalmente, cortemos el cono con un plano que no pase por su vértice y que interesecte a ambos semiconos del cono pero que no sea paralelo a ninguna generatriz. La curva que queda determinada por esta intersección, se llama *hipérbola* (Figura 4.5), y a diferencia de las otras cónicas que veremos, posee dos *ramas*. Esto implica que es una curva desconectada: para recorrerla completamente en algún momento debemos “saltar” hacia la otra rama. *Las hipérbolas son el último tipo de curvas cónicas.*

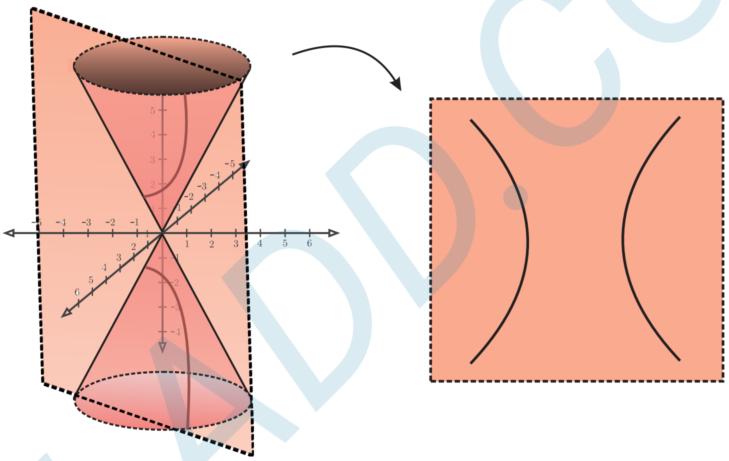


Figura 4.5: La hipérbola como una sección del cono.

4.2 La circunferencia

Vimos que una circunferencia se obtiene al cortar un cono con un plano horizontal. En este apartado vamos estudiar cómo definirla como *lugar geométrico* (es decir, como los puntos que verifican cierta propiedad de distancia respecto de otro/s punto/s o recta/s), y analizaremos en detalle las propiedades de estas curvas.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la circunferencia como *lugar geométrico* de puntos.
- Las propiedades principales de este tipo de curvas.

4.2.1 La circunferencia como lugar geométrico

La siguiente definición de *circunferencia* les resultará conocida.

Definición 38 Una *circunferencia* es un conjunto que consta todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que están a una distancia fija, r, de un punto dado P. El punto P recibe el nombre de *centro* de la circunferencia y la distancia r, el *radio*.

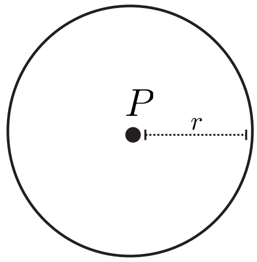


Figura 4.6: La circunferencia de centro P y radio r.

Esta manera de definir circunferencia se conoce como "dar la circunferencia como lugar geométrico". Notemos que el radio r de una circunferencia *siempre* es un número positivo, ya que está representando una distancia, y no puede haber distancias negativas.

Veamos esta definición aplicada a un centro y un radio particulares:

Ejemplo 39 Supongamos que queremos encontrar a todos los puntos del plano que están a una distancia de 4 unidades del punto $Q = (3, -1)$. Si llamamos $P = (x, y)$ a un punto cualquiera que se encuentra a una distancia de 4 unidades del punto Q, podemos plantear la siguiente igualdad:

$$d(Q, P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} = 4.$$

Si elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado, resulta:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$

Es decir,

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 16$$

La expresión que obtuvimos es la que define el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a 4 unidades de distancia del punto $Q = (3, -1)$; es decir: la ecuación de la circunferencia de centro $Q = (3, -1)$ y radio $r = 4$. ■

A partir del ejemplo anterior, podemos pensar en escribir una fórmula que defina el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a una distancia r de un punto fijo llamado centro $Q = (x_0, y_0)$. El razonamiento es análogo al del ejemplo. Tomemos un punto genérico de la circunferencia $P = (x, y)$. Podemos plantear que la distancia entre el punto P y Q debe ser siempre igual a r. Es decir:

$$d(Q, P) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$$

Cuando elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad resulta:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

Esta es la *ecuación canónica de la circunferencia de centro* $Q = (x_0, y_0)$ *y radio* r.

En muchas situaciones nos encontraremos con ecuaciones distintas a la canónica que, sin embargo, describen circunferencias. Veamos esta fórmula $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, a pesar de no corresponderse a simple vista con las fórmulas que hemos trabajado hasta ahora los puntos que cumplen esta igualdad son los puntos de una circunferencia.

En la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (1), restamos F en ambos miembros y completamos cuadrados en el primero obtenemos:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

y, por tanto,

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Definiendo $G = \frac{D^2+E^2-4F}{4}$, la última ecuación queda escrita como:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = G$$

Como esta última ecuación $0 \leq G$ (pues G es suma de cuadrados), entonces, podemos considerar $r = \sqrt{G}$, y obtener:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = r$$

Entonces hemos transformado la ecuación (1) en la ecuación canónica de un círculo de centro $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio r. Cuando ningún punto satisface la fórmula (1), por ejemplo como en el caso $x^2 + y^2 + 4 = 0$, para evitar tener que considerar diferentes casos, decimos que el vacío (que es el conjunto solución de la ecuación anterior) es un círculo degenerado.

Denominamos a las fórmulas de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ecuación general de una circunferencia.

Veamos un caso particular de esta ecuación:

■ **Ejemplo 40** Tomemos la siguiente fórmula $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$. Como lo hicimos antes, al completar cuadrados obtenemos $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 1$, pues lo único que tuvimos que hacer fue sumar en ambos miembros 1 y reordenar el primer miembro. Esta última expresión puede reescribirse $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$, con lo cual tenemos que esta ecuación describe una circunferencia de centro $(-1, 3)$ y radio $r = 1$. ■

¿Qué hicimos en el apartado 4.2?

- Estudiamos a la circunferencia como lugar geométrico de puntos, es decir, como el conjunto de puntos que distan de otro punto (el centro) en cierta magnitud (radio).
- Introdujimos las ecuaciones canónicas y generales de una circunferencia.

■

4.3 La elipse

Ya hemos mencionado que la elipse es la cónica que se obtiene cortando al cono con un plano que no pasa por su vértice y que corta a todas las generatrices. Al igual que la circunferencia, la elipse puede definirse como lugar geométrico.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la elipse como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las elipses: focos, semiejes, excentricidad, ecuación cartesiana.

Importante En este libro, solo trabajaremos con elipses cuyos focos se encuentran sobre una recta paralela al eje x o al eje y.

4.3.1 La elipse como lugar geométrico

Recuerden que la circunferencia tiene la propiedad definitoria de constar de los puntos del plano que distaban del centro en una magnitud determinada. Como lugar geométrico, la elipse tiene una propiedad similar pero en lugar de estar referida a su centro, está referida a dos puntos llamados *focos*. La propiedad definitoria es la siguiente:

Definición 39 Sean $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos fijos. Una *elipse* E asociada a F_1 y F_2 es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de sus distancias a F_1 y F_2 es una magnitud constante. Es decir, hay un número real positivo $k \in \mathbb{R}$ fijo tal que $E = \{P \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(P, F_1) + d(P, F_2) = k\}$.

Para comprender qué implica esta definición, busquemos el lugar geométrico de los puntos para los cuales la suma de sus distancias a $F_1 = (5, 0)$ y a $F_2 = (-5, 0)$ es igual a 26.

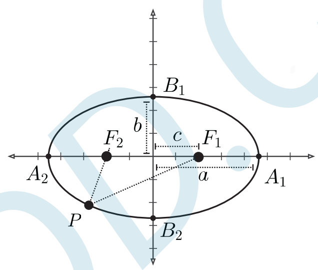


Figura 4.7: La elipse de focos F_1 y F_2.

Decimos que $P = (x, y)$, es un punto de dicho lugar geométrico. Entonces, tenemos que sumar las distancias de F_1 a P y de F_2 a P, es decir:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 26$$

Dado que la fórmula de la distancia entre dos puntos es $d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$, entonces para los puntos en cuestión tenemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (y-0)^2} = 26$$

Lo cual, al "distribuir los cuadrados" nos da:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 26$$

Luego de despejar y "elevar al cuadrado", obtenemos:

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} = 26 - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$(\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2})^2 = (26 - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 676 - 52\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2$$

Al dejar solamente la raíz en el miembro derecho y, nuevamente, “elevando al cuadrado”:

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 701 - (x^2 + 10x + y^2) = -52\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$-2(10x + 338) = -52\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$10x + 338 = 26\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$(10x + 338)^2 = (26\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$100x^2 + 6760x + 114244 = (26\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$100x^2 + 6760x + 114244 = 676x^2 + 6760x + 16900 + 676y^2$$

Al despejar las variables en el miembro izquierdo obtenemos:

$$-576x^2 - 676y^2 = -97344$$

Al dividir ambos miembros por -97344 queda:

$$\frac{x}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

es decir,

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$$

4.3.2 La ecuación de la elipse

En el apartado anterior, vimos cómo podemos describir una elipse a través de una ecuación. Para esta deducción partimos de la definición de la elipse como lugar geométrico (tal como hicimos para la circunferencia) y llegamos a una fórmula.

Nuevamente, consideremos una elipse genérica *alrededor del origen* como hicimos en el apartado anterior (Figura 4.7), aunque no necesariamente con el semieje mayor sobre el eje x (podría estar sobre el eje y). Es decir, los focos equidistan del origen pero pueden estar sobre el eje x o el eje y. Además, sigamos representando a a y b como la longitud del semieje sobre el eje x y sobre el eje y, respectivamente (alguno de ellos será el mayor y el otro el menor). Entonces, *la ecuación canónica de la elipse de centro* $(0, 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tengamos en cuenta cómo en la ecuación aparecen explícitamente las longitudes de los semiejes mayor y menor (sean cuales sean). Más aún, el valor a, que corresponde a la longitud del semieje sobre el eje x, aparece dividiendo la variable x y el valor b, que corresponde a la longitud del semieje sobre el eje y, a la variable y.

Entonces, en en el caso que vimos más arriba, $a = 13$ y $b = 12$. Es decir que, el lugar geométrico de los puntos para los cuales la suma de sus distancias al punto $F_1 = (5, 0)$ y al punto $F_2 = (-5, 0)$ es igual a 26 es la elipse de centro $(0, 0)$ con ecuación $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$.

A partir de este caso, es muy sencillo obtener la ecuación canónica de una elipse que no esté necesariamente centrada en el origen. En efecto, si "trasladamos" su centro a cualquier punto (x_0, y_0), siendo los ejes de la elipse paralelos a los ejes x e y respectivamente, la ecuación resulta:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

esta es llamada *ecuación canónica de la elipse de centro* (x_0, y_0).

Apliquemos esta última ecuación a algunos casos particulares:

Ejemplos 41

1. La elipse E_1 de focos $F_1 = (-3, 0)$ y $F_2 = (3, 0)$ y longitud de semieje mayor igual a 5 tiene su centro en el origen de coordenadas y puede verse en la Figura 4.8, lado izquierdo.
2. La elipse E_2 de focos $F_1 = (-1, 1)$ y $F_2 = (5, 1)$ y longitud de semieje mayor igual a 7 puede verse en la Figura 4.8, centro. El centro de esta elipse es el punto $(2, 1)$.
3. La elipse E_3 de focos $F_1 = (-6, -2)$ y $F_2 = (-6, 8)$ y longitud de semieje mayor igual a 10 puede verse en la Figura 4.8, lado derecho. El centro es el punto $(-6, 3)$ y el semieje mayor es perpendicular al eje y (a diferencia de los dos ejemplos anteriores).

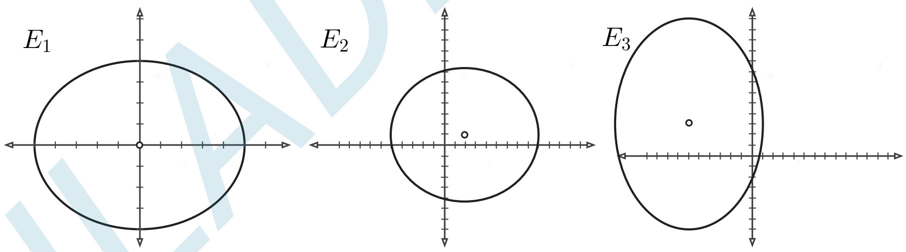


Figura 4.8: Las elipses de los Ejemplos 41.

Observación 13 *Cabe destacar que para definir una elipse, no alcanza con dar los focos. Además, debemos brindar algún otro parámetro (como, por ejemplo, la longitud del semieje mayor). Una manera sencilla de observar esto es considerar el caso $F_1 = F_2$ (en el que la elipse es realmente una circunferencia). En ese caso, saber los focos no determina la circunferencia: debemos especificar su radio.*

¿Cómo podemos hallar los elementos de la elipse a partir de sus focos y semieje mayor? Veamos cómo encontrar B_1, B_2, y por ende b, a partir de F_1, F_2 y a. Observervermos la Figura 4.7. Como B_1 es un punto de la elipse entonces $d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a$. Pero, como $d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2)$, se cumple que $2d(B_1, F_1) = 2a$; es decir, $d(B_1, F_1) = a$. Además, como el triángulo de vértices O,B_1 y F_1 es rectángulo, el Teorema de Pitágoras asegura que:

$$d(B_1, F_1)^2 = d(B_1, O)^2 + d(O, F_1)^2$$

Es decir, $a^2 = b^2 + c^2$. Concluimos que a es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos de longitud b y c. De esta igualdad podemos entonces calcular el valor de b. Entonces, B_1, B_2 serán los puntos que se encuentran sobre la recta perpendicular a la recta que contiene a F_1 y F_2 que están a distancia b del centro de la elipse (el punto medio entre F_1 y F_2).

Experimento 24

1. Vuelvan a ver los Ejemplos 41 e interpreten cómo fueron dibujadas las elipses E_1, E_2 y E_3, a partir de los focos y longitud del semieje mayor.
2. Supongan que les brindan como dato el centro de la elipse y la longitud de los semiejes mayor y menor. Hallen la ubicación de los focos.

4.3.3 Excentricidad de una elipse

Vimos en el párrafo anterior que $a^2 = b^2 + c^2$. En particular, tengamos en cuenta que $a > c$; por lo que $\frac{c}{a} < 1$. Este cociente tiene un nombre.

Definición 40 El cociente $\frac{c}{a}$ se denomina la *excentricidad* de la elipse. Se nota $e = \frac{c}{a}$.

Observemos que *la excentricidad de la elipse siempre es un número menor a* 1. ¿Qué nos dice la excentricidad de la elipse? Recordemos que c es la distancia de los focos al origen y a la longitud del semieje mayor (es decir, la distancia del punto donde la elipse corta al eje x al origen). Cuanto más cerca estén los focos de este punto de intersección más parecidos serán c y a y, por lo tanto, la excentricidad será más cercana a 1. Como resultado la elipse será más "chata" o "aplastada". Mientras que más lejos estén estas magnitudes, la excentricidad será más pequeña (acercándose a 0) y la elipse será más "redondeada". La situación extrema es, por supuesto, cuando $c = 0$, en cuyo caso los focos están *en* el origen, por lo cual la elipse es en realidad una circunferencia. La excentricidad mide entonces qué tan lejos está la elipse de ser una circunferencia, donde los valores más cercanos a 0 indican que es muy parecida, y los valores cercanos a 1 que no (Figura 4.9).

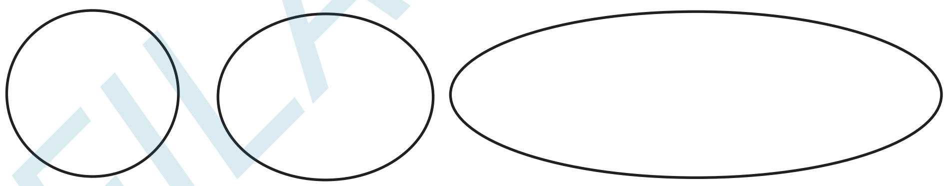


Figura 4.9: La excentricidad de la elipse.

Ejemplos 42 Hallemos las excentricidades de las elipses del Ejemplo 41.

1. Para la elipse E_1 teníamos $a = 5$ y $c = d(F_1, O) = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$. La excentricidad de esta elipse es, entonces: $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.
2. Para E_2, teníamos que el centro era $(2, 1)$, $a = 7$ y
$$c = d((2,1), (-1,1)) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (1-1)^2} = 3$$
Por lo tanto, la excentricidad de la elipse es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{7}$.

3. En E_3, la elipse tiene como centro al punto $(-6,3)$, $a=10$ y $c=d((-6,3),(-6,-2))=\sqrt{(-6-(-6))^2+(3-(-2))^2}=$ 5. La excentricidad en este caso es $e=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

¿Cuál de estas elipses es más achatada? ¿Cuál más redondeada? ■

Observación 14 *Recordando la observación de la página 103, vemos que el Experimento 24 establece que una elipse también queda determinada por las longitudes de los semiejes, siempre y cuando especifiquemos el punto medio entre ambos focos.*

■ **Ejemplos 43** Vamos a hallar las ecuaciones canónicas de las elipses del Ejemplo 41.

1. Según la fórmula hallada en el párrafo anterior, podemos construirnos la ecuación de una elipse si conocemos las longitudes de sus semiejes mayor y menor. En el caso de la elipse E_1, ya sabemos que $a=5$, por lo que solo nos resta hallar b. Pero vimos que siempre vale $a^2=b^2+c^2$, donde c es la distancia de los focos al centro de la elipse. En este caso, $c=3$; por lo tanto, $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=25-9=16$. Luego, concluimos que la ecuación canónica de la elipse E_1 es $1=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}$. De todas formas, mostraremos cómo pueden obtenerse.
2. En el caso de E_2, tenemos que $a=7$ y $c=3$, por lo que $b^2=a^2-c^2=40$. Aquí tenemos otro centro: el $(2,1)$. Por lo tanto, la ecuación canónica de E_2 es:
$1=\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}$.
3. Finalmente, para E_3 se tiene $a=10$ y $c=4$, por lo que $b^2=a^2-c^2=84$. La ecuación es: $1=\frac{(x+6)^2}{10}+\frac{(y-3)^2}{84}$.

■

Otra manera de representar una elipse por medio de ecuaciones es lo que se conoce como *ecuación general de la elipse*. Esta tiene la forma $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma x+\delta y+\epsilon=0$, donde $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\in\mathbb{R}$. Aquí, los coeficientes no guardan relación directa con los elementos de la elipse (como sí sucede en el caso de la ecuación canónica). Para hallar la ecuación general a partir de la ecuación canónica solo debemos desarrollar los términos que aparecen elevados al cuadrado y "pasar" todos los términos de un lado de la igualdad. Por ejemplo, consideremos la elipse de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}=1$. Al desarrollar, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(x-2)^2}{49}+\frac{(y-1)^2}{40}= \\ &= \frac{x^2-4x+4}{49}+\frac{y^2-2y+1}{40}= \\ &= \frac{40x^2-160x+49y^2-98y+209}{1960} \end{aligned}$$

Al pasar, el 1960, multiplicando al otro lado de la igualdad, y luego ese mismo número restando nuevamente, obtenemos la ecuación general:

$$40x^2-160x+49y^2-98y+209-1960=0$$

El pasaje de la ecuación general a la canónica es un tanto más laborioso. Antes de hacer un ejemplo, comentemos el procedimiento que utilizaremos: se llama "completar cuadrados" y es el procedimiento inverso a desarrollar el cuadrado de la suma de dos términos. Si tenemos una expresión de la forma x^2+4x+4, es equivalente a $(x+2)^2$. Pero si tenemos la expresión x^2+4x, no podemos hacer lo mismo (ya que nos falta el término 4 sumado para poder escribir la igualdad con el cuadrado de una suma). En estos casos, haremos lo siguiente sumamos el 4 que necesitamos para poder armar el cuadrado de una suma y luego le restamos el mismo 4 para no cambiar la expresión (pues equivaldría a sumar 0). Con el 4 que agregamos, podemos ahora armar el cuadrado de $x+2$ y nos queda un

-4 suelto afuera. Es decir, escribiremos:

$$x^2 + 4x = x^2 + 4x + (4 - 4) = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x + 2)^2 - 4$$

Este procedimiento es lo que se conoce como "completar cuadrados". Veamos ahora con un ejemplo cómo calcular la ecuación canónica a partir de la ecuación general. Consideremos la elipse de ecuación general $64x^2 + 100y^2 - 256x - 200y - 1244 = 0$. Como para la ecuación canónica vamos a buscar expresiones de la forma $(x - \alpha)^2$ e $(y - \beta)^2$, entonces completaremos cuadrados entre las x, por un lado, y las y, por el otro. Además, queremos que estas variables aparezcan con coeficiente 1. Por lo tanto, reescribimos la ecuación general de la elipse de la siguiente manera:

$$64(x^2 - 4x) + 100(y^2 - 2y) = 1244$$

Aquí agrupamos las x, por un lado, y las y, por otro lado. También sacamos factor común en cada grupo para dejar que los coeficientes de las variables x e y sean 1, y pasamos el término independiente 1244 hacia el otro lado de la igualdad (para que la fórmula se asemeje a la ecuación canónica de la elipse). Ahora, podemos completar cuadrados dentro de cada paréntesis:

- $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x - 2)^2 - 4$
- $y^2 - 2y = y^2 - 2y + 1 - 1 = (y - 1)^2 - 1$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned} 1244 &= 64(x^2 - 4x) + 100(y^2 - 2y) = \\ &= 64((x - 2)^2 - 4) + 100((y - 1)^2 - 1) = \\ &= 64(x - 2)^2 - 256 + 100(y - 1)^2 - 100 \end{aligned}$$

De aquí, despejamos:

$$\begin{aligned} & 64(x - 2)^2 + 100(y - 1)^2 = 1600 \\ \Rightarrow \; & \frac{64(x - 2)^2 + 100(y - 1)^2}{1600} = 1 \\ \Rightarrow \; & \frac{64(x - 2)^2}{1600} + \frac{100(y - 1)^2}{1600} = 1 \\ \Rightarrow \; & \frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{16} = 1 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación canónica de la elipse.

¿Qué hicimos en el apartado 4.3?

- Estudiamos a la elipse como lugar geométrico de puntos. Es decir, como el conjunto de puntos para los que la suma de las distancias a los focos de la elipse es constante.
- Definimos los semiejes mayor y menor de la elipse, y vimos que la constante antes citada es dos veces la longitud del semieje mayor.
- Definimos la excentricidad de la elipse.
- Introducimos la ecuación canónica y la ecuación general de una elipse.

4.4 La hipérbola

La hipérbola es la única cónica que no es *conexa*; ya que consta de dos ramas desconectadas. En este apartado la analizaremos en detalle.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la hipérbola como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las hipérbolas: focos, semiejes, excentricidad, asíntotas y ecuación canónica.

4.4.1 La hipérbola como lugar geométrico

Los elementos asociados a una hipérbola son los mismos que los asociados a una elipse (semiejes mayor y menor, focos, excentricidad). En particular, la hipérbola también se define a partir de dos focos.

Pero antes de entrar en esos detalles analicemos la siguiente situación: busquemos la ecuación que describa los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos $F_1 = (5, 0)$ y $F_2 = (-5, 0)$, es igual a 6. La idea es muy similar a la que desarrollamos para la elipse. Llamemos $P = (x, y)$, entonces:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 6$$

Al desarrollar la distancia y usar las coordenadas de los puntos tenemos:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-(-5))^2 + (y-0)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2} - \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} = 6$$

Al despejar y tomar cuadrados en ambos miembros obtenemos:

$$(\sqrt{x^2 - 10x + 25 + y^2})^2 = (6 + \sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 36 + 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2} + x^2 + 10x + 25 + y^2$$

Es decir,

$$-20x - 36 = 12\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2}$$

$$(-10x - 18)^2 = (6\sqrt{x^2 + 10x + 25 + y^2})^2$$

$$100x^2 + 360x + 324 = 36x^2 + 360x + 900 + 36y^2$$

al despejar:

$$64x^2 - 36y^2 = 576$$

Dividimos ambos miembros por 576, y obtenemos:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

4.4.2 La ecuación de la hipérbola

En el apartado anterior, desarrollamos una de las formas de presentar la ecuación de la hipérbola.

En primer lugar, consideremos una hipérbola genérica *centrada del origen*, como en el problema que acabamos de resolver. Podemos representar la situación con el gráfico siguiente:

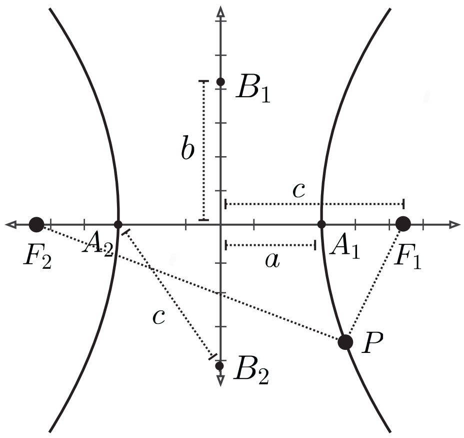


Figura 4.10: La hipérbola de focos F_1 y F_2.

Aquí, los focos F_1 y F_2 están ubicados sobre el eje de las x, equidistantes del origen de coordenadas $O = (0,0)$, y las magnitudes a y b tienen un sentido menos claro que la elipse. Sin embargo, nos permiten relacionar la fórmula con la ubicación de los focos sobre el eje a partir de la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la distancia del centro de la hipérbola a los focos. Entonces, la ecuación canónica de la hipérbola de centro $(0,0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Observemos como, al igual que en el caso de la elipse, las longitudes de los semiejes aparecen dividiendo precisamente a la variable correspondiente al eje sobre el que descansan. Si ahora la hipérbola tiene centro en un punto $C_0 = (x_0, y_0)$ y sus focos están sobre una recta paralela al eje x, entonces su ecuación es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Por otro lado, si la hipérbola tiene centro en un punto $C_0 = (x_0, y_0)$ y sus focos están sobre una recta paralela al eje y, entonces su ecuación es:

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1.$$

Importante En este libro, solo trabajaremos con hipérbolas cuyos focos se encuentran sobre una recta paralela al eje x o al eje y. ■

Apliquemos estas ecuaciones en algunos casos particulares:

■ **Ejemplos 44**

1. La hipérbola H_1 de focos $F_1 = (-5,0)$ y $F_2 = (5,0)$ y longitud de semieje mayor igual a 4 tiene su centro en el origen de coordenadas y puede verse en la Figura 4.11, lado izquierdo. Para esta hipérbola, los focos están sobre una recta paralela al eje x y con centro en el origen, tenemos $a = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$. Por lo tanto, la ecuación canónica de la misma es $1 = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$.
2. La hipérbola H_2 de focos $F_1 = (-3,1)$ y $F_2 = (7,1)$ y longitud de semieje mayor igual a 2 puede verse en

la Figura 4.11, centro. El centro de esta hipérbola es el punto $(2, 1)$, y también tiene sus focos sobre una recta paralela al eje x. Como además $a = 2$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 2^2 = 21$, entonces la ecuación canónica es $1 = \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{21}$.

3. La hipérbola H_3 de focos $F_1 = (2, -6)$ y $F_2 = (2, 4)$ y longitud de semieje mayor igual a 3 puede verse en la Figura 4.11, lado derecho. El centro es el punto $(2, -1)$ y el semieje mayor es perpendicular al eje y (a diferencia de los dos ejemplos anteriores). Como $a = 3$ y $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 9 = 16$ entonces la ecuación canónica de H_3 es $1 = \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{16}$.

■

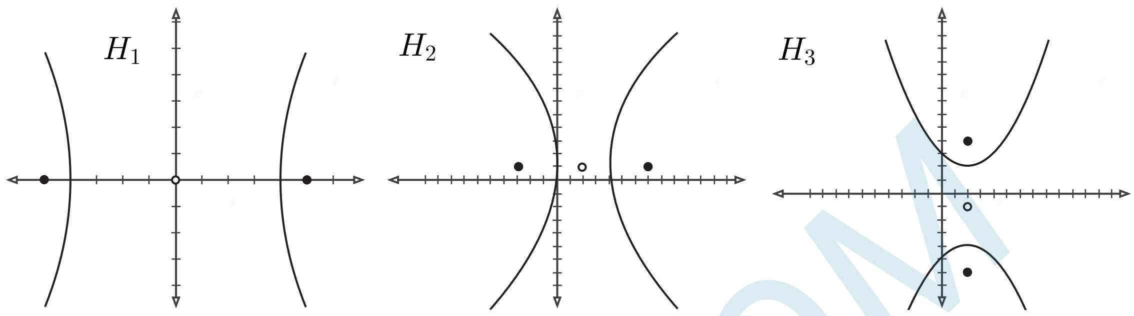


Figura 4.11: Las hipérbolas de los Ejemplos 44.

Al igual que en el caso de la elipse, podemos desarrollar los cuadrados de la ecuación canónica para obtener una expresión de la forma $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \epsilon = 0$, con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \in \mathbb{R}$. Pero a diferencia de la ecuación general de la elipse, *los signos de los coeficientes α y β serán necesariamente opuestos*. Esto se debe a que en la ecuación canónica de una elipse, uno de los paréntesis tiene signo positivo y el otro negativo. Esta característca es, en particular, lo que nos indica si una ecuación general de la forma $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y + \epsilon = 0$, corresponde a una elipse o una hipérbola (sólo debemos comparar los signos de los coeficientes que multiplican a x y a y). Por ejemplo, ecuación general de la hipérbola de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ es $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$. Les presentamos un experimento para que, a través del mismo, muestren cómo obtener una ecuación de la otra.

Experimento 25 Utilicen el procedimiento de "completar cuadrados", deriven la ecuación general $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$ para la elipse de ecuación canónica $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$. ■

Observación 15 *Al igual que en la elipse, para definir una hipérbola no nos alcanza con brindar los focos: debemos dar algún otro parámetro (como longitud de algún semieje).*

4.4.3 La excentricidad de la hipérbola

Como la distancia c de los focos al centro de la hipérbola es mayor que a, entonces el cociente $\frac{c}{a}$ es mayor que 1. Esta es la noción de excentricidad en este caso.

Definición 41 El cociente $\frac{c}{a}$ se denomina la *excentricidad* de la hipérbola. Se nota también $e = \frac{c}{a}$.

Por lo tanto, *la excentricidad de la hipérbola siempre es un número mayor a* 1. ¿Cuál es la interpretación de la excentricidad en este caso? Pues también nos da información sobre la forma de la hipérbola: más "abierta" o más "cerrada". Por ejemplo, si e es muy grande entonces la hipérbola tiene sus curvas más cerradas, mientras que si e es más cercano a 1, tiene sus curvas más abiertas (Figura 4.12).

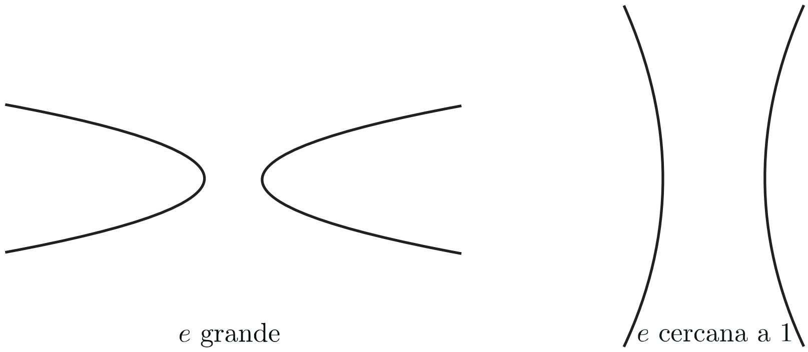


Figura 4.12: La excentricidad de la hipérbola.

■ **Ejemplos 45** Vamos a hallar las excentricidades de las hipérbolas de los Ejemplos 44.

1. Para la hipérbola H_1, teníamos $a = 4$ y $c = d(F_1, O) = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$. La excentricidad de esta hipérbola es, entonces, $e = \frac{5}{4}$.
2. Para H_2, teníamos que el centro era $(2, 1)$, $a = 2$ y
$$c = d((-3, 1), (2, 1)) = \sqrt{(-3-2)^2 + (1-1)^2} = 5$$
Por lo tanto, la excentricidad de la hipérbola es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$.
3. En H_3, la hipérbola tiene como centro al punto $(2, -1)$, $a = 3$ y
$$c = d((2, -6), (2, -1)) = \sqrt{(2-2)^2 + (-6-(-1))^2} = 5$$
La excentricidad en este caso es $e = \frac{5}{3}$.

■

4.4.4 Asíntotas de la hipérbola

La hipérbolas son las únicas cónicas que tienen *asíntotas*. Recuerden que una asíntota de una curva es una recta a la que la curva se acerca indefinidamente. Ya que no presuponemos que el estudiante tenga conocimiento de la noción de límite, solo mencionaremos que las ramas de una hipérbola de centro (x_0, y_0) y longitud de semiejes a y b se acercan indefinidamente a las rectas L_1 y L_2 de ecuaciones $y = \frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0)$ y $y = -\frac{b}{a}x + (y_0 - \frac{b}{a}x_0)$, respectivamente (Figura 4.13). Aquí, $\pm\frac{b}{a}$ es la pendiente de la recta y $y_0 - \frac{b}{a}x_0$ es la ordenada al origen de la recta. También podemos representar estas rectas de manera implícita como hicimos en el capítulo 2:

- $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x_0 - y_0\}$
- $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{b}{a}x - y = \frac{b}{a}x_0 - y_0\}$

Estas rectas son las *asíntotas de la hipérbola*.

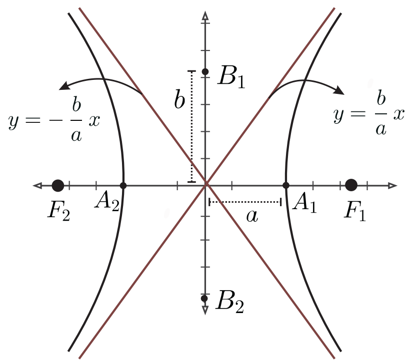


Figura 4.13: Las asíntotas de la hipérbola.

Ejemplos 46 Hallemos las asíntotas de las hipérbolas de los Ejemplos 44.

1. Para H_1, de centro en el origen, teníamos $a = 4$ y $b = 3$. Por lo tanto, las asíntotas de H_1 son las rectas $y = \frac{3}{4}x$ e $y = -\frac{3}{4}x$.
2. H_2 tiene su centro en $(2, 1)$ y $a = 2$ y $b = \sqrt{21}$. Por lo tanto, las asíntotas de H_2 son las rectas $y = \frac{\sqrt{21}}{2}x + (1 - \sqrt{21})$ e $y = -\frac{\sqrt{21}}{2}x + (1 - \sqrt{21})$. De manera implícita: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\sqrt{21}}{2}x - y = 1 - \sqrt{21}\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{21}}{2}x - y = 1 - \sqrt{21}\}$.
3. Finalmente, H_3 tiene su centro en $(2, -1)$ y $a = 3$ y $b = 4$. Sus asíntotas son $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{3}x - y = \frac{5}{3}\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{4}{3}x - y = \frac{5}{3}\}$.

¿Qué hicimos en el apartado 4.4?

- Estudiamos la hipérbola como lugar geométrico de puntos: es decir, como el conjunto de puntos para los que el módulo de la diferencia de las distancias a los focos de la hipérbola es constante.
- Definimos los semiejes mayor y menor de la hipérbola y vimos que la constante, antes citada, es dos veces la longitud del semieje mayor.
- Definimos la excentricidad de la hipérbola y las asíntotas, y aprendimos a calcularlas.
- Introducimos la ecuación canónica y la ecuación general de una hipérbola.

4.5 La parábola

La parábola es seguramente la curva cónica más conocida ya que este tipo de curvas, se estudian extensamente en la escuela secundaria. Por este motivo, solo introduciremos los elementos propios de esta curva que no suelen estudiarse allí.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo definir la parábola como lugar geométrico de puntos.
- Los elementos principales de las parábolas: foco, directriz y ecuación canónica.

4.5.1 La parábola como lugar geométrico

A diferencia de las cónicas ya estudiadas, donde la definición como lugar geométrico dependía parcialmente de la ubicación de dos focos, en la parábola depende de una recta L y un punto F no perteneciente a L. Veamos esto en una situación particular. Encontremos el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $F = (0, 2)$ y la recta l cuya ecuación es $y = -2$.

Para esto llamemos $P = (x, y)$ a un punto genérico del lugar geométrico en cuestión. A diferencia de las situaciones desarrolladas para elipse e hipérbola acá tenemos dos fórmulas para distancias: una para distancias entre dos puntos y otra para distancias entre un punto y una recta. Sin embargo, el punto a destacar es que ambas distancias deben ser iguales. En la situación que estamos analizando, la distancia de cualquier punto genérico (x, y) del plano a la recta de ecuación $y = -2$, es la distancia entre los puntos (x, y) y $(x, -2)$. Entonces:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-2))^2}$$

En esta ecuación, del lado izquierdo tenemos la distancia del foco $(0, 2)$ al punto genérico (x, y) y, del lado derecho, la distancia de ese mismo punto genérico al punto más cercano de la recta $y = -2$, que tiene coordenadas $(x, -2)$. Al elevar y desarrollar al cuadrado ambos miembros obtenemos:

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4$$

$$x^2 = 8y$$

Es decir, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $(0, 2)$ y de la recta $y = -2$ satisfacen la ecuación $x^2 = 8y$.

Definición 42 Sea $F \in \mathbb{R}^2$ y sea $L \subset \mathbb{R}^2$ una recta que no pase por F. La parábola T asociada a F y L es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que equidistan del punto F y de la recta L. Es decir, $T = \{P \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(P, F) = d(P, L)\}$.

Recordemos que $d(P, L)$, representa la distancia del punto P a la recta L (concepto que estudiamos en el capítulo 2). El punto F se llama *foco* de la parábola y la recta L, *directriz* de la parábola. El *vértice* de la parábola es el punto medio del segmento perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Se encuentra a igual distancia del foco que de la directriz.

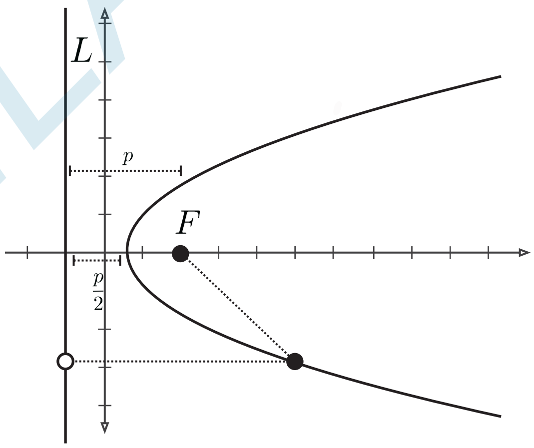


Figura 4.14: La parábola de foco F y directriz L.

Importante Al igual que para las otras cónicas, en este libro solo trabajaremos con parábolas cuya directriz sea paralela al eje x o al eje y. ■

Observación 16 *Como en el caso de la hipérbola, las parábolas tienen un* eje de simetría*, que consiste en la recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y el foco.*

4.5.2 Ecuación canónica de la parábola

La ecuación que conocemos de la parábola (con directriz horizontal) $y = ax^2 + bx + c$, se puede despejar para obtener:

$$ax^2 + bx - y + c = 0$$

y que se la conoce como la *ecuación general de la parábola*. Ya que esta ecuación es familiar, nos concentraremos en la ecuación canónica. Representemos, entonces, una parábola genérica asociada a F y L, de manera que L sea paralelo al eje y, que el foco esté sobre el semieje positivo de las x y que el vértice de la parábola sea el origen de coordenadas (Figura 4.14). Sea p la distancia del punto F a la recta L, de modo que F resulta ser el punto $(\frac{p}{2}, 0)$. Si $P = (x, y)$ es un punto de la parábola, entonces, debemos tener que $d(P, F) = d(P, L)$. Pero,

$$d(P,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \text{ y } d(P,d) = x + \frac{p}{2},$$

de donde:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado obtenemos:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2,$$

de donde:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

es decir;

$$x^2 + y^2 - x^2 = px + \frac{p^2}{4} + px - \frac{p^2}{4}.$$

Entonces, encontramos la ecuación $y^2 = 2px$ que se la conoce como *la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen*. Tengamos en cuenta que el parámetro p, que es la distancia entre el foco y la directriz, es el que lleva la propiedad definitoria de las características de la parábola. También, es posible observar, que podemos reescribir esta ecuación canónica como $x = \frac{1}{2p}y^2$, cuya forma es la misma de la ecuación que conocemos de la escuela secundaria, salvo el hecho que tiene intercambiadas las variables x e y (pues estamos considerando una parábola “acostada”).

Esta ecuación canónica con vértice en el origen corresponde entonces a una parábola con la directriz paralela al eje y y foco perteneciente al semieje positivo de las x. Las ecuaciones canónicas con vértice en el origen para casos más generales de directriz y foco son las siguientes:

- Si el foco esta a la “derecha” de la directriz (paralela al eje y) entonces la ecuación es $y^2 = 2px$.
- Si el foco esta a la “izquierda” de la directriz (paralela al eje y) entonces la ecuación es $y^2 = -2px$.
- Si el foco esta “arriba” de la directriz (paralela al eje x) entonces la ecuación es $x^2 = 2py$.
- Si el foco esta “abajo” de la directriz (paralela al eje x) entonces la ecuación es $x^2 = -2py$.

Observación 17 *La variable que aparece elevada al cuadrado es la que nos dice a qué eje es paralela la directriz.*

También, al igual que el caso de la circunferencia, la elipse o la hipérbola, si el vértice de la parábola no está en el origen de coordenadas, sino que está en el vértice (x_0, y_0), entonces la ecuación canónica es la misma que la ecuación para parábolas con vértice en el origen pero reemplazando x por $x - x_0$ e y por $y - y_0$, respectivamente. Por ejemplo, la ecuación canónica de una parábola con vértice (x_0, y_0), directriz paralela al eje x y foco en el semieje positivo de las y es:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Cabe destacar que, de esta ecuación, deducimos la ecuación general que conocemos de la parábola. En efecto, si desarrollamos esta ecuación obtenemos:

$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 = 2py - 2py_0$. Al reordenar los términos:,

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \left(\frac{x_0^2}{2p} - y_0\right).$$

Esta ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$ mediante las identificaciones $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ y $c = \frac{x_0^2}{2p} - y_0$. Observemos que, al igual que las ecuaciones canónicas de la elipse y la hipérbola, la ecuación canónica de una parábola contiene la información de todos sus elementos. En efecto, aparecen las coordenadas del vértice (x_0, y_0) y el valor p nos permite deducir la ubicación del foco y la directriz. Por ejemplo, si la ecuación es $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$, entonces sabemos que la directriz es paralela al eje x, por lo que el foco debe ser el punto $(x_0 + \frac{p}{2}, y_0)$ y la directriz debe ser la recta de ecuación $x = x_0 - \frac{p}{2}$ (miren la Figura 4.14).

Experimento 26 De manera análoga a como fue hecho en el apartado busquen los focos y la directriz a partir de las otras posibles ecuaciones canónicas de las parábolas:

- $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$.
- $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$.
- $(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$.

¿Cómo hacemos para obtener la ecuación canónica de una parábola? Lo mostramos en varios ejemplos. En primer lugar, supongamos que tenemos la parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 6$ y hallamos la ecuación canónica. Nuevamente, la idea es “completar cuadrados”.

$$\begin{aligned} & y = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 6 \\ \Rightarrow\ & y - 6 = \tfrac{1}{4}x^2 - 2x \\ \Rightarrow\ & y - 6 = \tfrac{1}{4}(x^2 - 8x) \end{aligned}$$

Completamos cuadrados dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} & y - 6 = \tfrac{1}{4}[(x^2 - 8x + 16) - 16] \\ \Rightarrow\ & y - 6 = \tfrac{1}{4}[(x - 4)^2 - 16] \\ \Rightarrow\ & y - 6 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 - 4 \\ \Rightarrow\ & y - 6 + 4 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 \\ \Rightarrow\ & y - 2 = \tfrac{1}{4}(x - 4)^2 \\ \Rightarrow\ & 4(y - 2) = (x - 4)^2 \end{aligned}$$

Hemos arribado, entonces, a la expresión canónica de la parábola. De aquí, inmediatamente vemos que el vértice es el punto $(4, 2)$. Sabemos que, como el valor 4 es el que multiplica a la expresión $(y - 2)$ (que no está elevada al cuadrado), entonces $2p = 4$. Luego, $p = 2$ y, por ende, $\frac{p}{2} = 1$ es la distancia entre el foco y el vértice y entre el vértice y la directriz. Como la variable que está elevada al cuadrado es la x entonces, sabemos que la directriz será paralela al eje x. Por lo tanto, para hallar las coordenadas del foco simplemente hacemos $F = (4, 2 + \frac{p}{2}) = (4, 2 + 1) = (4, 3)$ y la ecuación de la directriz nos queda, $y = 2 - \frac{p}{2} = 2 - 1 = 1$.

Ahora bien, supongamos que queremos hallar la ecuación de la parábola cuyo foco es $F = (-6, -4)$ y cuya directriz es la recta de ecuación $x = -2$. Sabemos que el vértice se encuentra en la recta perpendicular a la directriz que contiene al foco, a igual distancia del foco que de la directriz. Las rectas perpendiculares a $x = -2$ son las de la forma $y = \lambda$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Como queremos que pase por F entonces debe ser $y = -4$. Esta recta interseca a la directriz en $(-2, -4)$, por lo que el vértice es el punto medio entre $(-2, 4)$ y F; es decir, el vértice de la parábola es $(-4, -4)$. Para hallar p, utilizamos que la distancia del foco (o la directriz) al vértice es $\frac{p}{2}$. Como $d((-4, -4), (-6, -4)) = 2$ entonces, $p = 4$. Por lo tanto, $2p = 8$ y, como el foco está en el semieje negativo de las x, la ecuación canónica de esta parábola es $(y + 4)^2 = -8(x + 4)$.

Observación 18 *El pasaje de ecuación general a ecuación canónica, y viceversa, se realiza de idéntica manera al procedimiento desarrollado para circunferencias, elipses e hipérbolas.*

4.5.3 Excentricidad de la parábola (y del resto de las cónicas)

Anteriormente las excentricidades que medimos eran la razón entre la longitud de los semiejes y la distancia de los focos al origen (para una curva centrada en el origen de coordenadas). Por un lado, consideramos como el semieje de la parábola al segmento perpendicular a la directriz, que une la directriz con el origen de coordenadas (Figura 4.14). Ya vimos que la longitud de este segmento es $\frac{p}{2}$ (donde p es la distancia de la directriz al foco). Por otro lado, la distancia del foco al origen también es $\frac{p}{2}$. Por lo tanto, la excentricidad de la parábola es 1, cualquiera sea la parábola. Ahora podemos precisar un poco mejor qué mide realmente la excentricidad. Observen la Figura 4.15. Allí se muestra como va cambiando la forma de la curva a medida que aumenta la excentricidad. *La excentricidad mide como es la* curvatura *de la curva cónica, en relación a la de una circunferencia*. La única cónica con excentricidad 0 es la misma circunferencia, lo cual nos indica que es la curvatura "perfecta" (la curva siempre "va doblando" el mismo ángulo en cada paso cuando la recorremos). La excentricidad también nos permite clasificar las cónicas. En efecto, si es 0 entonces es una circunferencia. Si está estrictamente entre 0 y 1, entonces la curva es necesariamente una elipse. Si es exactamente 1 entonces es una parábola; y si es mayor estricto que 1, es una hipérbola.

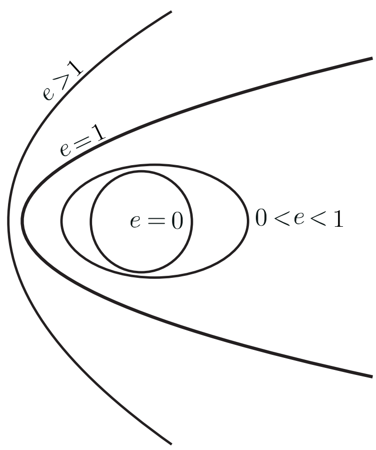


Figura 4.15: El cambio de las cónicas a medida que crece la excentricidad.

¿Qué hicimos en el apartado 4.5?

- Estudiamos a la parábola como lugar geométrico de puntos: o sea, como el conjunto de puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto (el foco) y una recta (la directriz) dados.
- Introducimos las ecuaciones canónicas de una parábola general.

II

Parte 2

5. Ecuaciones lineales, matrices y determinantes

En este capítulo estudiaremos cómo resolver eficientemente sistemas de ecuaciones lineales. Los sistemas de ecuaciones lineales aparecen naturalmente en una inmensa cantidad de contextos, no solo en las teorías de las ciencias exactas, sino también en otras ramas que van desde la Biología hasta la Economía.
La resolución de los sistemas de ecuaciones lineales se puede mecanizar mediante el uso de la teoría de matrices y de determinantes, que son herramientas muy potentes del Álgebra Lineal. En particular, en este marco se puede desarrollar software eficiente para resolver sistemas lineales muy complejos.

5.1 Sistemas de ecuaciones lineales

Comencemos identificando y clasificando los posibles sistemas de ecuaciones lineales y mecanizando su resolución.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es un sistema de ecuaciones lineales.
- Cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Cómo se clasifican los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a la existencia de su/s solución/es.

5.1.1 ¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales?

Vimos en el capítulo 2 que una ecuación que involucra las variables x, y se dice *lineal* si es de la forma $ax + by = c$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Esto es: cada variable aparece multiplicada por un número real, estos términos sumados y esta suma igualada a otro número real. La misma idea vale para ecuaciones de tres variables x, y, z. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 43 Una *ecuación lineal* en las variables $x_1, \dots, x_n$ es una relación de la forma:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,$$

donde $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. A las variables $x_1, \dots, x_n$ también se las llama las *incógnitas* de la ecuación y a los números $a_1, \dots, a_n$ que aparecen multiplicando a las variables se los llama *coeficientes* de la ecuación.

Cuando hablamos de *resolver* una ecuación lineal estamos intentando encontrar números $c_1, \dots, c_n$ que verifiquen la ecuación; es decir, que al reemplazar x_i con c_i se obtenga la igualdad $a_1c_1 + \cdots + a_nc_n = b$. En este caso, decimos que $c_1, \dots, c_n$ *son solución de la ecuación*. Cabe destacar que *importa* el orden en el que escribimos los c_i, ya que no es lo mismo reemplazarlos en cualquier variable (pues los a_i no son en general iguales). Por este motivo conviene escribirlo como una n-upla $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ y decir que *el vector* $(c_1, \dots, c_n)$ *es solución de la ecuación*. Por ejemplo, la ecuación implícita de un plano es una ecuación lineal que nos dice qué puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ pertenecen al plano (estos puntos son la solución de dicha ecuación implícita).

Como su nombre lo indica, un *sistema de ecuaciones lineales* es una colección de ecuaciones lineales *que nos interesa resolver simultáneamente*. Vale decir, estamos buscando vectores $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen *varias ecuaciones al mismo tiempo*. Por ejemplo, la ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^3$ es precisamente un *sistema de dos ecuaciones lineales*, y los puntos de la recta son exactamente los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que son solución de *ambas ecuaciones simultáneamente*. Definamos este concepto en general.

Definición 44 Un *sistema de m ecuaciones lineales en las variables $x_1, \dots, x_n$* es una colección de m ecuaciones lineales que queremos resolver simultáneamente. Se escribe:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

donde $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. Nuevamente, nos referimos a las variables $x_1, \dots, x_n$ como las *incógnitas* del sistema y a los números a_{ij} como los coeficientes del sistema. Los números b_i se llaman los *coeficientes libres del sistema* (son los que no acompañan a ninguna variable).

Pero, ¿qué es esta notación con tantos subíndices? Aunque no lo parezca a primera vista, es la manera más sencilla de escribir un sistema de ecuaciones lineales de manera general. En efecto, cuando teníamos una sola ecuación en n variables podíamos simplemente escribir:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

donde el subíndice i en el número a_i indicaba que dicho número se encontraba multiplicando a la variable x_i. Si ahora tenemos un sistema de dos ecuaciones, entonces la variable x_i va a estar multiplicada por un número a_i en la primera ecuación y por un número b_i en la segunda ecuación. En este caso, podemos escribir el sistema como:

$$\begin{cases} a_1x_1 & + & \cdots & + & a_nx_n & = & d_1 \\ b_1x_1 & + & \cdots & + & b_nx_n & = & d_2 \end{cases}$$

Si hubiera tres ecuaciones podríamos usar a_i, b_i, c_i. ¿Pero qué haríamos si hubiera cincuenta ecuaciones? Como no alcanzan las letras del abecedario, deberíamos utilizar otros símbolos para representar a los coeficientes. Pero aún cuando hiciéramos esto, ¿cómo podemos especificarle al lector que el símbolo @ corresponde a los coeficientes de la ecuación 37 (ó cualquiera de ellas)? La manera más sencilla, entonces, es no utilizar distintas letras (o símbolos) para los coeficientes de cada ecuación, sino usar la misma letra (o símbolo) para todas las ecuaciones pero agregando un nuevo subíndice numérico que aclare cuál es la ecuación a la que pertenece dicho coeficiente. Por lo tanto, cuando escribimos a_{36} estamos diciendo que este es el número que multiplica a x_6 en la ecuación número 3. En general, el primer subíndice de a_{ij} indica el número de ecuación a la que nos estamos refiriendo y el segundo subíndice indica a qué variable está multiplicando. Por lo tanto, el coeficiente a_{ij} es el número que multiplica a x_j en la i-ésima ecuación. Observemos que, por este motivo, el subíndice i se mueve entre 1 y m y el subíndice j, entre 1 y n.

5.1.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Como habrán notado, ¡ya estuvimos resolviendo sistemas de ecuaciones lineales! Las ecuaciones implícitas de las rectas y los planos forman un sistema de ecuaciones lineales (a veces de una sola ecuación), cuya solución son precisamente los puntos de la recta o el plano correspondiente. Además, cuando buscamos la intersección entre dos rectas, dos planos o una recta y un plano, lo que estamos haciendo es armarnos un sistema de ecuaciones lineales cuya solución, justamente, sean los puntos que se hallan en la intersección. El procedimiento que estudiamos para resolver sistemas de ecuaciones lineales en capítulos anteriores, consistía en *despejar* una incógnita de una ecuación y reemplazarla en la ecuación siguiente, donde con la nueva información, podíamos despejar otra incógnita para seguir reemplazando en las siguientes ecuaciones. Existen otras "estrategias" que ahora vamos a analizar. Todas estas maneras de resolver un sistema de ecuaciones lineales se dice que son "a mano" o "por la fuerza bruta", ya que uno ataca el problema de la manera que se le ocurre (que puede no ser necesariamiente eficiente). En el siguiente apartado, vamos a simplificar los procedimientos para resolver este tipo de ecuaciones y hacerlos eficientes.

Vamos a mostrar las diferentes maneras de encarar la búsqueda de la solución por medio de un ejemplo. Supongamos que tenemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Si utilizamos la estrategia que usamos en la primera parte del, podemos despejar x de la primera ecuación y obtener $x = 5 - 2y$. Reemplazando esta nueva información en la segunda ecuación obtenemos $2(5 - 2y) - 3y = -1$; es decir, $10 - 7y = -1$. Por lo tanto, depejando y se tiene $y = \frac{11}{7}$ y, reemplazando esta información en $x = 5 - 2y$, obtenemos $x = \frac{13}{7}$. Concluimos que el sistema tiene una única solución: el vector $(\frac{13}{7}, \frac{11}{7})$. Este método se suele llamar *método de sustitución*.

Abordemos ahora el problema de otra manera. Como la variable x aparece en ambas ecuaciones (podría no aparecer en alguna), al despejarla en ambas ecuaciones simultáneamente, obtenemos:

$$\begin{cases} x = 5 - 2y \\ x = \frac{-1+3y}{2} \end{cases}$$

Este es el mismo sistema (sólo hemos reordenado los términos). Como la primera ecuación nos dice que x es igual a una "cosa" y la segunda que x es igual a otra "cosa", entonces en particular, las "cosas" deberían ser iguales entre sí. Por lo tanto, debe suceder que $5 - 2y = \frac{-1+3y}{2}$. Si pasamos el 2 del denominador de la fracción de la derecha multiplicando a la izquierda, tenemos $10 - 4y = -1 + 3y$. Al mover los números para un lado y las "y's" para el otro, tenemos $11 = 7y$; de donde $y = \frac{11}{7}$, como habíamos hallado con el otro método. Nuevamente, al reemplazar esta información en $x = 5 - 2y$ o en $x = \frac{-1+3y}{2}$, nos da $x = \frac{13}{7}$. Este método se suele llamar *método de igualación*.

Finalmente, veamos una última estrategia de resolución. Es probable que no sea la primera en la que pensemos, pero, sin embargo, es la más importante para nuestro propósito, ya que la usaremos para desarrollar una manera mecánica de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Comencemos nuevamente con nuestro sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Esta estrategia se basa en la siguiente observación trivial: si $a = 5$ y $b = 7$, entonces $a + b = 5 + 7 = 12$. Siguiendo esta idea, dado que $x + 2y = 5$ y que $2x - 3y = -1$, entonces si sumamos $x + 2y$ con $2x - 3y$ nos dará $5 + (-1) = 4$. Es decir:

$$(x + 2y) + (2x - 3y) = 4$$

Pero $(x+2y)+(2x-3y) = 3x-y$, por lo cual, sumando la primera ecuación del sistema con la segunda obtenemos una nueva ecuación $3x - y = 4$. ¿Y qué relación tiene esta ecuación con las originales? Igual al caso donde $a = 5$ y $b = 7$ forzaban a que $a + b = 12$, lo que dice $x + 2y = 5$ y $2x - 3y = -1$ es que, necesariamente, $3x - y = 4$. Es decir, *si* $x + 2y = 5$ *y* $2x - 3y = -1$, entonces, $3x - y = 4$. ¿Por qué nos interesa tener esta información? Porque al "sumar dos ecuaciones" obtenemos una nueva ecuación *que es válida* y que puede tener un formato más sencillo para poder despejar las variables. Por ejemplo, despejando y de esta última ecuación hallada, tenemos $y = 3x - 4$, que es mucho más ameno que despejar y de las ecuaciones originales (donde aparecen necesariamente fracciones). Pero hay algo más que podemos hacer para obtener todavía una ecuación más sencilla. Y, nuevamente, está basada en una observación trivial: si $a = 5$ entonces $2a = 2{,}5 = 10$. En este caso, como $x + 2y = 5$ entonces $2(x + 2y) = 2{,}5 = 10$; es decir, $2x + 4y = 10$. Otra vez, hallamos otra ecuación que sigue siendo válida para cualquier solución de la ecuación original (en el sentido de que si un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema, entonces también debe verificar esta nueva ecuación que construimos a partir de las originales). *Tengamos en cuanta, de todas formas, que esto es cierto si estamos multiplicando a una ecuación por un número distinto de* 0 (multiplicar una ecuación por 0 a ambos lados, simplemente, "mata" la ecuación). Al igual que el caso de la suma de ecuaciones, multiplicar una ecuación por un número no nulo puede simplificar la ecuación y hacernos más fácil la tarea de despejar variables: por ejemplo, la ecuación $\frac{3}{10}x + \frac{5}{6}y = -2$ puede simplificarse mucho al multiplicarla por 30. Pero, en definitiva, es una combinación de ambas operaciones (sumar ecuaciones y multiplicarlas por un número no nulo) que nos va a ayudar a resolver el sistema de manera más directa. En efecto, comencemos multiplicando la primera ecuación por -2 para obtener $-2x - 4y = -10$. Ya dijimos que esta ecuación tiene que ser cierta (ya que las originales lo eran). Y ahora, sumemos esta nueva ecuación con la segunda ecuación original:

$$(-2x - 4y) + (2x - 3y) = -10 - 1$$

Es decir, $-7y = -11$ (los términos que contienen a la variable x se cancelaron en la suma). De aquí, despejamos muy sencillamente que $y = \frac{11}{7}$. ¿Qué es lo que hicimos? Primero multiplicamos por -2 la primera ecuación para hacer que aparezca un -2 multiplicando a la x. Esto lo hicimos con la intención de que, al sumarle luego la segunda ecuación, la variable x desaparezca (ya que aparece acompañada de un 2 en dicha ecuación). De esta manera, hemos despejado y, *operando con las ecuaciones*. ¿Se les ocurre qué operaciones podríamos aplicarle a las ecuaciones del sistema para eliminar la variable y en lugar de la x? Una posibilidad es multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por 2.Así, la variable y aparece con coeficiente 6 en la primera nueva ecuación y con coeficiente -6 en la segunda. Al sumarlas, se cancelarán y podremos despejar x. Este método se lo suele llamar *método de eliminación* y será el que utilizaremos para mecanizar el proceso de resolución de ecuaciones. A continuación, lo desarrollaremos más en detalle.

Como vimos más arriba, si tenemos un sistema de ecuaciones lineales y hacemos algunas operaciones sobre sus ecuaciones (multiplicarlas por algún número y sumarlas o restarlas entre sí) obtenemos nuevas ecuaciones que *son válidas*.

Importante Cualquier ecuación que se pueda obtener de las ecuaciones de un sistema con las operaciones recién descriptas, es una ecuación válida, en el sentido que las soluciones de la ecuación original deben verificar también estas nuevas ecuaciones. ■

Si empezamos a armar nuevas ecuaciones, que en principio serán más sencillas que resolver que las originales, tendremos muchas ecuaciones que se irán agregando (las originales más las nuevas que vamos armando). La pregunta es ¿son necesarias considerar todas? Si revisamos el ejemplo que resolvimos utilizando el método de eliminación, luego de armar la nueva ecuación, la sumamos a la segunda ecuación del sistema original (para poder despejar y) y, luego, usamos la primera ecuación para reemplazar por $y = \frac{11}{7}$ y despejar x. Observemos que no volvimos a usar la segunda ecuación después de hacer la suma de ecuaciones. Es decir, terminamos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -7y = -11 \end{cases}$$

En general, esto es lo que vamos hacer: ir *reemplazando* las "viejas" ecuaciones por "nuevas" ecuaciones más sencillas, de manera de transformar el sistema original que teníamos en otro sistema (con nuevas ecuaciones), y que este nuevo sistema *tenga la misma cantidad de ecuaciones (o menor) y, además, que las soluciones de este nuevo sistema sean las mismas que las del sistema original*. Cuando dos sistemas de ecuaciones lineales tienen las mismas soluciones se dice que son *equivalentes*. Por la misma definición, es igual resolver cualquiera de los dos sistemas (ambos dan idénticas soluciones). Lo que vamos a hacer, entonces, es ir construyendo sistemas equivalentes al original que sean más sencillos de resolver. En resumen:

- Dos sistemas de ecuaciones lineales que tienen las mismas soluciones se llaman equivalentes (podemos elegir cualquiera de los dos para resolver).
- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo deja un sistema equivalente al original (en el sentido que *reeplazamos* una ecuación por la ecuación que se obtiene de la original multiplicando a ambos lados por el mismo número no nulo).
- Sumar dos ecuaciones y reemplazar alguna de las ecuaciones originales que sumamos por dicha suma deja un sistema equivalente al original (por ejemplo, si sumamos las ecuaciones i y j, podemos reemplazar la ecuación i por esta nueva ecuación obtenida de la suma entre las ecuaciones i y j).

¿Se les ocurre alguna otra operación entre ecuaciones que no altere las soluciones? Hay una que es tan obvia que a veces se nos puede pasar:

- ¡Intercambiar la posición de dos filas en el sistema de ecuaciones deja un sistema equivalente!

Es decir, al escribir la ecuación i en el lugar donde estaba escrita la ecuación j y escribir la ecuación j donde estaba escrita la ecuación i, deja un sistema equivalente (así como el sistema no cambia si lo escribimos en la computadora, en una hoja de papel o pizarrón). Esta operación natural será sumamente útil a la hora de mecanizar el proceso de resolución en los próximos apartados.

Observación 19 *Destacamos que dos sistemas equivalentes no tienen porqué tener las misma cantidad de ecuaciones. Por ejemplo, si a un sistema le agregamos una ecuación que resulte de la suma de dos ecuaciones anteriores, entonces, el nuevo sistema sigue siendo equivalente al original (pues la ecuación que agregamos se deduce de los anteriores, por lo que no es realmente una nueva restricción) pero tiene una ecuación más* *que el original. Cuando nosotros hablamos de conseguir sistemas equivalentes "que tengan la misma cantidad de ecuaciones que el original" pensamos en* simplificar *el procedimiento para resolver el sistema (por eso* reemplazamos *ecuaciones y no solo las* agregamos*). Algo mejor aún que mantener la cantidad de ecuaciones original es* reducir *dicha cantidad. ¡Y esto se puede hacer en muchos casos! Por ejemplo, consideren el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1 \\ -x + 3y = 4 \\ -5x + 4y = 13 \end{cases}$$

Multipliquemos la primera ecuación por -1 *y la segunda ecuación por* 3*:*

$$\begin{cases} -2x - 5y = 1 \\ -3x + 9y = 12 \\ -5x + 4y = 13 \end{cases}$$

Ahora, reemplacemos la segunda ecuación por la suma de las primeras dos:

$$\begin{cases} -2x - 5y = 1 \\ -5x + 4y = 13 \\ -5x + 4y = 13 \end{cases}$$

¡Hemos obtenido una ecuación que ya teníamos! Y esto lo hicimos "operando" con las primeras dos ecuaciones. Esto nos indica que la tercera ecuación en realidad no era una nueva restricción del sistema, sino que ya estaba contemplada en las dos primeras ecuaciones. En este sentido, la tercera ecuación original "está de más" y podríamos removerla. Para pensarlo más analíticamente, podemos seguir haciendo operaciones entre las ecuaciones para "eliminarla". En efecto, multipliquemos ahora la segunda ecuación por -1*:*

$$\begin{cases} -2x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -13 \\ -5x + 4y = 13 \end{cases}$$

Si ahora reemplazamos la última ecuación por la suma de las ecuaciones 2 y 3, obtenemos:

$$\begin{cases} -2x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -13 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Aquí vemos que, efectivamente, podemos hacer desaparecer la última ecuación (notar que una ecuación de la forma @=@, donde @ representa cualquier fórmula *no indica ningún tipo de restricción, ya que* siempre algo es igual a sí mismo*). En este caso, podemos olvidarnos de esta expresión* $0 = 0$ *y quedarnos con el sistema:*

$$\begin{cases} -2x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -13 \end{cases}$$

Un tipo importante de sistemas de ecuaciones lineales son los que tienen todas sus ecuaciones igualadas a 0.

Definición 45 Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es *homogéneo* si todas las ecuaciones del sistema se encuentran igualadas a cero.

Estos sistemas están relacionados con las soluciones de *todos* los sistemas de ecuaciones lineales (no necesariamente homogéneos). No entraremos en detalle de esta relación aquí. Simplemente mencionaremos que los sistemas lineales homogéneos siempre tienen al $(0, 0, \ldots, 0)$ como solución.

5.1.3 Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Cuando buscábamos intersecciones entre subespacios lineales, en algunas ocasiones los objetos estudiados no se cortaban: plano paralelos, plano y recta paralelos, rectas paralelas o alabeadas. Desde el punto de vista algebraico, lo que sucedía con los sistemas de ecuaciones lineales que se armaron para buscar la intersección, es que al resolverlos, nos devolvían una inconsistencia que era indicativa de que *no había solución simultánea para las ecuaciones del sistema*. La primera clasificación entre sistemas de ecuaciones lineales es si tienen o no solución. Un sistema de ecuaciones lineales que no tiene solución se llama un *sistema incompatible*. Por supuesto, la expresión proviene del hecho de que las ecuaciones que forman parte del sistema son incompatibles entre ellas (no "compatibilizan" en ningún punto). Por el contrario, los sistemas que admiten *al menos* una solución se llaman entonces *sistemas compatibles*. Vimos también que cuando buscamos la intersección de un plano y una recta no paralelos entonces la intersección es un punto solo. En este caso, algebraicamente despejamos todas las variables y obtenemos el punto en cuestión. Por otro lado, cuando buscamos la intersección de dos planos no paralelos, dicha intersección es necesariamente una recta (y, algebraicamente, obtenemos una ecuación vectorial para esa recta). En particular, había infinitos puntos en la intersección (todos los puntos de la recta). Desde el punto de vista algebraico, esto quería decir que había infinitos puntos que eran solución del sistema de ecuaciones lineales que armamos para estudiar la intersección (que consistía en las ecuaciones implícitas de los planos involucrados). Por lo tanto, hay una clasificación más específica para los sistemas compatibles: *tienen una única solución o tienen infinitas soluciones*. En el primer caso, los sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución se llaman sistemas compatibles *determinados*, y los que tienen infinitas, sistemas compatibles *indeterminados*. Por supuesto, el término "determinado" proviene del hecho que la solución a dicho sistema está completamente determinada: hay una sola. Por el contrario, un sistema compatible indeterminado tiene solución (pues es compatible) pero no está unívocamente determinada: hay infinitas. A continuación, resumimos esta clasificación.

Definición 46 Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

- **Compatible determinado:** si tiene una *única* solución.
- **Compatible indeterminado:** si tiene *infinitas* soluciones.
- **Incompatible:** si *no* tiene soluciones.

Observación 20 *Por lo visto a partir de la definición 45, los sistemas homogéneos no pueden ser incompatibles: o tienen como única posible solución el vector nulo, o tiene infinitas soluciones*

La única manera de clasificar un sistema es resolverlo. Y ya tenemos mucha experiencia resolviendo sistemas de ecuaciones: la que adquirimos en el capítulo 2.

En los siguientes ejemplos vamos a mostrarles cómo clasificar y hallar las soluciones de un sistema de ecuaciones. Si bien en estos casos no se está representando rectas o planos, el procedimiento algebraico es el mismo, por lo que podrán seguir los razonamientos y entender los resultados.

■ **Ejemplos 47** Vamos a clasificar distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales (en compatibles determinados, compatibles indeterminados e incompatibles).

1. Consideremos el sistema:
$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$
De la segunda ecuación podemos despejar $x = 2z - y$. Al reemplazar en la primera ecuación, obtenemos $-5y + 6z = 2$, de donde $y = -\frac{2-6z}{5}$. Podemos actualizar el despeje original de x con esta nueva información: $x = \frac{4}{5}z + \frac{2}{5}$. Finalmente, reemplazamos los despejes de x e y en la última ecuación para obtener $-\frac{12}{5}z + \frac{4}{5} = 1$. Despejamos z y conseguimos $z = -\frac{1}{12}$. Al reemplazar esta información en los despejes de x e y, obtenemos $x = \frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, el único vector solución de este sistema es $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{12})$. Concluimos que el sistema es compatible determinado.
2. Consideremos ahora el sistema:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$
Este sistema es homogéneo, por lo que seguro es compatible. Debemos determinar si es determinado (única solución $(0, 0, 0)$) o indeterminado. De la tercera ecuación, despejamos $z = -2x$. Al reemplazar esta información en la segunda: $5x + y = 0$, de donde $y = -5x$. Finalmente, si reemplazamos estos despejes en la primera ecuación: $x - (-5x) + 3(-2x) = 0$; es decir, $0 = 0$. Como no hay más restricciones para imponer, entonces la variable x queda libre, por lo que un vector de la forma $(x, -5x, -2x)$ es solución del sistema, para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, $(1, -5, -2)$ verifica las tres ecuaciones. El sistema es compatible indeterminado.
3. Consideremos finalmente el sistema:
$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y - z = 1 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2x - 3y + z = -4. \end{cases}$$
De la primera ecuación, $x = 1 - 2z$ y, de la segunda, $y = 1 + z$. Si reemplazamos esta información en la tercera ecuación, hallamos $2 + 2z = 6$, de donde $z = 2$. Por lo tanto, $x = -3$ e $y = 3$. Debemos verificar que el vector $(-3, 3, 2)$ es solución también de la última ecuación; pero $2(-3) - 3{,}3 + 2 = -13 \neq 4$. Por lo tanto, el sistema es incompatible.

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.1?

- Introducimos los sistemas de ecuaciones lineales y estudiamos métodos "a mano" para resolverlos de manera directa.
- Definimos lo que significa que dos sistemas sean equivalentes (que tengan las mismas soluciones) y vimos algunas operaciones que se pueden realizar sobre las ecuaciones de un sistema para obtener otros sistemas equivalentes al original.
- Clasificamos los sistemas de ecuaciones lineales en compatibles determinados (poseen una única solución), compatibles indeterminados (poseen infinitas soluciones) e incompatibles (no poseen solución).

■

5.2 Matrices

Vamos ahora a estudiar cómo mecanizar el problema de clasificar y/o resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Las matrices de coeficientes reales.
- Cómo utilizar matrices para clasificar y resolver sistemas de ecuaciones lineales usando el método de triangulación.

■

5.2.1 ¿Qué es una matriz?

A grandes rasgos, una matriz es un "arreglo rectangular de números" como en el siguiente caso:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & \sqrt{2} & -5 \\ -12 & \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este arreglo tiene tres filas y cuatro columnas. En cada cruzamiento entre una fila y una columna hay un número, que se llama *entrada* (no pueden quedar "huecos" vacíos). Por lo tanto, una matriz de n filas y m columnas siempre tiene nm entradas. En este caso, tenemos 12 entradas. La manera de especificar una entrada determinada es dando su ubicación en el arreglo, es decir, a qué fila y columna pertenece. En este ejemplo, la entrada $1-2$ (primera fila, segunda columna) es el número 4 y la entrada $3-3$ (tercera fila, tercera columna), es el número 0. Si recordamos lo visto en el apartado anterior, esta manera de especificar una entrada en una matriz es la misma que utilizamos para especificar un coeficiente en un sistema de ecuaciones lineales. Esto, por supuesto, no es casualidad. Entonces, ¿cómo podemos escribir genéricamente una matriz de n filas y m columnas? De la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1m-1} & a_{n-1m} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Aquí, el símbolo a_{ij} representa la entrada $i-j$; es decir, el número en la i-ésima fila y j-ésima columna (como hacíamos para los coeficientes de los sistemas lineales). Como hay n filas y m columnas entonces i toma los valores entre el 1 y el n, y j los valores entre 1 y m. Una matriz de n filas y m columas se llama, abreviadamente, una *matriz de* $n \times m$. En este libro solo estudiaremos matrices donde las entradas son número reales. El conjunto de todas las matrices de $n \times m$ con entradas reales se nota $\mathbb{R}^{n\times m}$ y comenzaremos a escribir $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ para decir que A *es una matriz de* n *filas y* m *columnas*.

■ **Ejemplo 48** Al pensarlas como "arreglos rectangulares", las matrices pueden tener muchas formas. El ejemplo que dimos antes el resultado es un rectángulo "acostado"; es decir, de más columnas que filas. Pero podemos tener una matriz con la forma de un rectángulo "parado": por ejemplo, la siguiente matriz de 4 filas y 2 columnas:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & \sqrt{2} \\ \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

También, una matriz puede tener una única fila (o una única columna). En el primer caso, la matriz se parece a un vector (sin las comas entre los coeficientes); y en el segundo caso, a un vector parado:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la derecha se encuentra en $\mathbb{R}^{1\times 5}$ y la de la derecha en $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Finalmente, un tipo especial de matriz es la *matriz cuadrada*: las que tienen igual cantidad de filas que de columnas. Más adelante veremos que este tipo de matrices son muy importantes en la teoría de sistemas de ecuaciones lineales. ■

Analicen qué representan las matrices de $\mathbb{R}^{1\times 1}$

5.2.2 ¿Cómo se relacionan las matrices con los sistemas lineales?

De forma muy sugerente, la especificación de entradas de una matriz es la misma que la de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales, por lo que no debería sorprendernos que lo que haremos será ubicar a los coeficientes del sistema en una matriz (respetando su ubicación como coeficiente) y trabajar directamente (y solamente) con la matriz. Retomemos el ejemplo utilizado en el apartado anterior para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

En esa ocasión, multiplicamos la primera ecuación por -2 y, después, la sumamos a la segunda ecuación para obtener una ecuación que no tuviera la incógnita x (la *eliminamos*). Si lo pensamos gráficamente sucede lo siguiente: después de multiplicar la primera ecuación por -2 obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Ahora bien, cuando sumamos, lo que hacemos es sumar los coeficientes correspondientes a las x, por un lado, primero, a los correspondientes a las y, por otro, y a los coeficientes libres, por otro.

$$\begin{array}{ccccccc} & -2x & + & (-4)y & = & -10 \\ + & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2x & + & (-3)y & = & -1 \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 0x & + & (-7)y & = & -11 \end{array}.$$

Cabe destacar que, en realidad, en este esquema geométrico de la suma de las ecuaciones, *no estamos realmente utilizando las incógnitas x e y, solo los coeficientes que las acompañan*. Esto se debe a que, dentro de cada ecuación, hemos escrito a los términos que contienen la variable x “a la izquierda” y los que contienen a las variable y “a la derecha”; por lo cual se podría simplemente decir: “sumemos entre sí los términos que se encuentran en la columna de la izquierda (en cada ecuación) y entre sí lo que se encuentran en la columna de la derecha (en cada ecuación)”. De la misma forma, si tuviéramos un sistema con dos ecuaciones y tres incógnitas x, y, z. A cada ecuación, la vamos a escribir de manera que el término de las x lo ubicaremos siempre primero (de izquierda a derecha), seguido del de las y y, por último, el de las z. Entonces, cuando sumemos las ecuaciones, alcanza con sumar el primero coeficiente de la primera ecuación con el primero de la segunda (y el resultado va a ser el coeficiente que acompañe a la incógnita x en la nueva ecuación), el segundo coeficiente de la primera ecuación con el segundo de la segunda (que será el coeficiente que acompañe al de las y en la nueva ecuación) y el tercero de la primera con el tercero de la segunda (el coeficiente que acompañe a z). Por supuesto, "del otro lado del igual" sumamos los coeficientes libres entre sí. Por ejemplo, si queremos sumar las ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} -x+3y-4z=1 \\ 2x-2y+z=-2 \end{cases}$$

podemos olvidarnos de las variables y escribir:

$$\begin{array}{cccccccccc} & -1 & + & 3 & + & (-4) & = & 1 \\ + & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2 & + & (-2) & + & 1 & = & -2 \\ \hline & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 1 & + & 1 & + & (-3) & = & -1 \end{array},$$

de donde obtenemos que la nueva ecuación es $x+y-3z=-1$. Esta manera de ver la suma de ecuaciones pone en evidencia la relación entre los sistemas lineales y las matrices: para resolver un sistema lineal podemos utilizar el método de eliminación (que consiste en multiplicar las ecuaciones por números no nulos y sumar las ecuaciones entre sí); y si acomodamos las variables en orden, no necesitamos representar las incóngnitas para hacer estas operaciones, nos alcanza con los coeficientes. Por lo tanto, podemos condensar la información de un sistema de ecuaciones lineales en una matriz, la *matriz de los coeficientes del sistema*, y trabajar más cómodamente solo con estos números. Veamos esto en un ejemplo. Consideremos nuevamente el sistema:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-1 \end{cases}$$

Aquí tenemos a la variable x ubicada en la primera posición (empezando desde la izquierda) de todas las ecuaciones. Al considerar todas las ecuaciones al mismo tiempo podemos decir que *las x están en la primera columna del sistema*. Por otro lado, las y quedan necesariamente en la segunda ecuación del sistema, y los coeficientes libres en una tercera columna (del otro lado del igual). Por lo tanto, podemos asignarle a este sistema la siguiente matriz *ampliada*:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Aquí, la barra | que separa la segunda y tercera columna de la matriz está marcando que la columna a la derecha corresponde a los coeficientes "del otro lado del igual"; es decir, los que no son coeficientes de ninguna incóngnita. Esta matriz se llama la *matriz ampliada asociada al sistema*. El término "ampliada" proviene del hecho de que es una matriz con los coeficientes del sistema *y además* con los coeficientes libres (que se anotan del otro lado de la barra). La matriz sin los coeficientes libres es lo que se conoce como *matriz asociada al sistema* (a secas). Más adelante, veremos que la información pertinente del sistema está contenida en la matriz del sistema. ¿Cómo se lee la matriz ampliada en relación con el sistema de ecuaciones lineales original? Pues como lo armamos:

- Cada fila corresponde a cada ecuación del sistema: está formada por los coeficientes que acompañan a las incógnitas (y los coeficientes libres en el caso de la ampliada).
- Las entradas en la misma columna corresponden a los coeficientes *de la misma incógnita*.

- La barra vertical nos está diciendo que las entradas a la derecha de la barra son los que corresponden a los coeficientes libres del sistema.

Por ejemplo, si nos dan la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 4 & 0 \\ 11 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

entonces estamos pensando en el sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 11x - y = -2. \end{cases}$$

De esta manera, podemos ir de la teoría de sistema de ecuaciones lineales a la teoría de matrices, y viceversa. Pero ¿para qué quisimos lograr esto? Porque de esta manera, *las operaciones entre las ecuaciones se transforman en operaciones entre las filas de la matriz*. En efecto, multiplicar una ecuación por un número real no nulo equivale a multiplicar la fila correspondiente a dicha ecuación por este número (donde multiplicar una fila por un número consiste simplemente en multiplicar por dicho número cada entrada *de esa fila únicamente*), y sumar dos ecuaciones corresponde a sumar las dos filas correspondientes a esas ecuaciones (sumando las entradas en la misma columna entre esas dos filas). De esta manera, queda mecanizado el método de eliminación. Partamos una vez más de la ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Cuando resolvemos por eliminación este sistema, primero multiplicamos por -2 la primera ecuación. En este contexto, debemos multiplicar por -2 la primera fila. Así, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

Finalmente, sumamos las dos ecuaciones resultantes y reemplazamos la segunda ecuación por la suma de las dos ecuaciones que teníamos. En este caso, dicha operación entre ecuaciones corresponde a sumar ambas filas y reemplazar la fila 2 por esta suma. De esta manera, obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

En función de los trabajado en el apartado anterior sobre sistemas de ecuaciones equivalentes, esta matriz corresponde a un sistema de ecuaciones lineales que es *equivalente al original*. Observemos, de hecho, que la ecuación que se desprende de la segunda fila de la matriz es precisamente $-7y = -11$, como habíamos despejado originalmente. Por lo tanto, el sistema asociado a esta matriz es:

$$\begin{cases} -2x - 4y = -10 \\ -7y = -11 \end{cases}$$

que ya vimos que es más fácil de resolver. El procedimiento utilizado recién se puede notar:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{multiplicar fila 1 por 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazar fila 2 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right).$$

Por lo tanto, al hacer *operaciones de filas* en la matriz asociada a un sistema, encontramos otro sistema equivalente al original. Para terminar con este apartado, vamos a mostrar cómo se puede llevar "hasta el final" esta metodología de hacer operaciones en las filas de una matriz para resolver completamente el sistema original. Retomemos donde dejamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

Ahora, multipliquemos la segunda fila por $-\frac{1}{7}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right)$$

Mutipliquemos ahora la segunda fila por 4:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right)$$

y a continuación reemplacemos la primera fila por la suma de ambas filas:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -\frac{26}{7} \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right)$$

Finalmente, multiplicamos la primera fila por $-\frac{1}{2}$ y, la segunda, por $\frac{1}{4}$, para obtener:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right)$$

Pero, ¿cuál es el sistema asociado a esta matriz? Simplemente, es el siguiente:

$$\begin{cases} x = \frac{13}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases}$$

Es decir, ¡usando operaciones de fila en la matriz ampliada asociada al sistema hemos resuelto completamente el sistema! La notación del procedimiento que hicimos fue la siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{multiplicar fila 1 por 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reemplazar fila 2 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{mult. fila 2 por } -\frac{1}{7}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right) \xrightarrow{\text{mult. fila 2 por 4}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -4 & -10 \\ 0 & 41 & \frac{44}{7} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{reempl. fila 1 por fila 1+fila 2}} \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -\frac{26}{7} \\ 0 & 4 & \frac{44}{7} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{y fila 2 por } \frac{1}{4}]{\text{mult. fila 1 por } -\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{array}\right).$$

En el siguiente apartado veremos que en este procedimiento hemos hecho un montón de cuentas y pasos de más de los que realmente necesitamos (en este ejemplo concreto, con cuatro pasos puede obtenerse la matriz final). Lo hicimos de esta manera para poner en evidencia las ideas que existen detrás de este método de resolución.

5.2.3 Triangulación de matrices

En este apartado, se establecerán las bases de la mecanización de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando matrices. A este proceso se denomina *triangulación* de la matriz.

Más arriba vimos que la idea para resolver un sistema de ecuaciones lineales era contruir la matriz asociada al sistema y realizar operaciones entre las filas hasta hallar una matriz que represente un sistema de ecuaciones equivalente, más sencillo para resolver. Pero ¿qué tanto más sencillo? Al final del apartado anterior, vimos cómo obtener una matriz con unos "1" en la diagonal, lo que traducido al campo de las ecuaciones, daba directamente las soluciones. Esta es, obviamente, la ecuación más útil pero a veces, lograr que una matriz tenga esta forma implica muchos cómputos. Existe una situación intermedia en la que no hay que hacer tantas operaciones de fila pero, sin embargo, la matriz que obtenemos nos provee un sistema fácil de terminar de resolver. Para ver cuál es, consideren el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ -y + 5z = -13 \\ 3z = -9 \end{cases}$$

Este es un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas x, y, z. Tiene la peculiaridad que, en la segunda ecuación, no aparece la variable x (o, en realidad, el coeficiente a_{21} que acompaña a la variable x en la segunda ecuación es 0) y en la tercera ecuación no aparecen ni la variable x ni la y (los coeficientes a_{31} y a_{32} son 0). Notemos que este sistema puede resolverse por sustitución de manera directa. En efecto, de la última ecuación simplemente podemos despejar $z = -3$ y reemplazar esto en la segunda ecuación para obtener $-y + 5(-3) = -13$, de donde podemos despejar $y = 2$. Finalmente, al reemplazar por $z = -3$ e $y = 2$ en la primera ecuación, obtenemos $2x - 6 - 6 = 4$, de donde $x = 8$. ¿Cómo es la matriz (no ampliada) asociada a un sistema de esta forma? En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Veamos que *debajo de la diagonal formada por las entradas* a_{11}, a_{22}, a_{33} *hay solo ceros*. Esta diagonal (de arriba a la izquierda a abajo a la derecha), se llama *diagonal principal de la matriz*. Una matriz de esta forma se denomina *matriz triangular*, pues debajo de la diagonal queda gráficamente un triángulo de ceros. Llevamos nuestra matriz del sistema a una matriz triangular, en consecuencia obtenemos un sistema que es muy directo de resolver (como explicamos recién mediante el método de sustitución). Por este motivo el método de resolución que vamos a desarrollar se llama *triangulación*: porque vamos a "triangular" la matriz es decir, llevarla a una matriz triangular.

5.2.4 ¿Cuáles son las operaciones que podemos hacer con las filas de una matriz?

Antes de empezar a triangular matrices debemos tener en claro cuáles son las operaciones que podemos aplicar a las filas de una matriz de manera tal que, los sistemas asociados a las nuevas matrices, sigan siendo equivalentes al sistema original. Ya vimos que es posible multiplicar una matriz por un número no nulo y reemplazar una fila por la suma de otras filas. Vamos a hacer bien precisas y más generales estas operaciones y, además, incluir la posibilidad de intercambiar ecuaciones. Estas operaciones se llaman *operaciones elementales de fila*:

Importante Sea A una matriz de n filas y m columnas y llamemos $F_1, \ldots, F_n$ las n filas de A (F_1 es la primer fila, F_2 la segunda, etc). Las siguientes operaciones en las filas de A no cambian la equivalencia del sistema de ecuaciones lineales asociado:

1. *Intercambiar dos filas.* Para cualquier elección de $1 \leq i, j \leq n$, cambiamos la matriz A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B está la fila F_j de A y en la fila j de B está la fila F_i de A.
2. *Multiplicar una fila por un número* no nulo. Para cualquier número $\lambda \in \mathbb{R}$ **distinto de cero** y cualquier elección de $1 \leq i \leq n$, cambiamos la matriz A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B aparece la fila F_i de A multiplicada por λ.
3. *Cambiar una fila por ella misma más un múltiplo de otra fila.* Para cualquier elección de $1 \leq i, j \leq n$ y cualquier número $\lambda \in \mathbb{R}$, cambiamos A por la matriz B que es igual a A, salvo que en la fila i de B está la fila que se arma haciendo la cuenta $F_i + \lambda F_j$ (es decir, donde antes estaba la fila F_i en A ahora aparece dicha fila pero sumado λ veces la fila j de A).

■

Algunos comentarios importantes. En primer lugar, la primera operación que definimos sobre intercambiar dos filas de la matriz, que no veníamos utilizando, es la que traduce a este contexto la idea de “intercambiar la posición de las ecuaciones” en el sistema de ecuaciones. En segundo lugar, ya vimos que multiplicar una ecuación por un número *no nulo* no alteraba la ecuación. Esto es precisamente lo que dice la segunda operación. Finalmente, la tercera operación válida para operar con las filas de una matriz es un poco diferente a lo que veníamos haciendo. El motivo es que la escribimos de una manera más general (para poder ahorrarnos cuentas a futuro). Vamos a explicar esto: lo que dice la tercera operación es que podemos *reemplazar una fila por “ella misma” sumada a un “múltiplo de otra fila”*. Si repasan el sistema que resolvimos al final del apartado anterior, habíamos comenzado multiplicando la primera fila por -2 para lograr que apareza un -2 en la entrada a_{11} con el objetivo de que, al sumar luego las filas F_1 y F_2, se eliminara la entrada en la posición a_{21} (que era un 2). Pero cabe destacar que, en realidad, no nos importa poner un -2 en el lugar a_{11} para que quede allí; solo lo ponemos temporalmente para poder eliminar el 2 de a_{21} (fíjense de hecho que al final del proceso con la matriz terminamos multiplicando la fila 1 por $-\frac{1}{2}$ para volver a obtener el 1 que teníamos en a_{11} al principio). Justamente, la tercera operación que acabamos de definir nos permite la eliminación del a_{21} sin modificar la fila F_1. En efecto, lo que podemos hacer es *reemplazar la fila F_2 por ella misma más -2 veces la fila F_1*. Tengamos en cuenta que esta operación solo afecta la fila F_2. Es decir, estamos reemplazando F_2 por $F_2 - 2F_1$. De esta manera, condensamos dos pasos en uno solo. Esta operación es la más importante de las tres, ya que es la que nos permitirá eliminar entradas para llegar a triangular la matriz).

Para simplificar la escritura del proceso de triangulación de una matriz, vamos a escribir las diferentes operaciones de la siguiente manera:

- Intercambiar las filas F_i y F_j, se nota $F_i \times F_j$.
- Multiplicar la fila F_i por λ, se nota λF_i.
- Reemplazar la fila F_i por $F_i + \lambda F_j$, se nota $F_i \to F_i + \lambda F_j$.

Veamos con un ejemplo el proceso de triangulación de una matriz. Consideremos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ahora, interpreten las operaciones que le vamos haciendo a la matriz para triangularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + (-1)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Y hemos llegado a una matriz triangulada.

A continuación, explicaremos en detalle el procedimiento que hicimos. Recuerden que el objetivo es lograr ceros debajo de la diagonal principal. En primer lugar, conseguimos los ceros de la primera columna (debajo de la entrada a_{11}), luego, ceros de la segunda columna (debajo de la entrada a_{22}) y así, en adelante. Empezamos buscando poner un 0 en la posición a_{21}; para esto, alcanza con restarle a la fila F_2 la fila F_1 (ya que las entradas en la columna 1 son 1 para las dos filas). Por lo tanto, le sumamos a la fila F_2 la fila F_1 multiplicada por -1 (esta es la manera de restar: sumar multiplicando por -1). Observemos que el resto de las filas quedan iguales: solo modificamos la fila F_2. A continuación, y siguiendo nuestro plan, necesitamos conseguir un 0 en el lugar a_{31}, donde hay un -2. Entonces, podemos sumarle a la fila F_3 el doble de la fila F_1: $F_3 \to F_3 + 2F_1$ pues $2F_1$ tiene un 2 en el primer lugar y sumado al -2 del primer lugar de F_3 nos da el 0 buscado. Bien, hemos conseguido ceros debajo de la primera columna. Ahora debemos buscar el cero debajo de la segunda columna (hay uno solo que ubicar, el del lugar a_{32}). Pero antes de hacer esto, nosotros hicimos un par de operaciones que nos facilitarán las cuentas por venir. En efecto, la siguiente operación llevada a cabo es multiplicar la fila F_2 por $\frac{1}{2}$. El objetivo es simplificar los números de la matriz: como *todas* las entradas de la fila F_3 eran múltiplos de 2 podemos dividir todos por 2 y obtener números más pequeños. Además de este ajuste, también hacemos el intercambio de filas F_2 y F_3. El objetivo de este intercambio es dejar un 1 en la posición a_{22}, de manera tal que nos permita que la última operación, que ubica un 0 en la posición a_{32}, sea $F_3 \to F_3 + 3F_1$. Cabe destacar que si hubiéramos querido conseguir un cero en dicha posición sin intercambiar las filas, tendríamos que haber utilizado la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{pmatrix}.$$

Al intercambiar filas, evitamos hacer cuentas con fracciones. Finalmente, conseguimos un 0 en la posición a_{32} al reemplazar la última fila por ella misma más tres veces la segunda (observemos que tener un 1 en la posición a_{22} hace que esta operación sea directa y no involucre fracciones). Tengamos en cuenta que, si bien ya obtuvimos la matriz triangulada, podemos multiplicar la fila 3 por $\frac{1}{14}$ para obtener una matriz con unos (1) en la diagonal (para la que sería mucho más fácil de resolver el sistema lineal asociado).

En los ejemplos presentados, triangulamos matrices de 2×2 y 3×3, que son casos de matrices cuadradas. El proceso de triangulación puede llevarse a cabo para cualquier tipo de matriz (aunque no sea cuadrada), pero el concepto de qué significa una matriz triangular que no sea cuadrada quizá no esté claro aún. Por esta razón, a continuación, precisaremos las nociones de triangulación.

Definición 47 Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

- La diagonal determinada por las entradas a_{11}, a_{22}, etc... se llama *diagonal principal* de la matriz.
- A se dice *triangular* si solo hay ceros debajo de la diagonal principal; es decir, las entradas a_{ij} son 0 para $i > j$.

Observación 21 *La diagonal principal es la diagonal que empieza en la entrada que está en la primera fila y en la primera columna, y que se mueve hacia la derecha y hacia abajo en cada paso. Si la matriz no es cuadrada, no va a terminar en la esquina inferior derecha: si A tiene más filas que columnas, la diagonal se "choca con el piso de la matriz"; si tiene más columnas que filas, se "choca con el paréntesis derecho de la matriz".*

Es importante tener en cuenta que consideramos que una matriz es triangular si tiene los ceros debajo de la diagonal *independientemente de las entradas que tenga en la diagonal o arriba de ella* (podría tener ceros (0) en la diagonal principal, o arriba de ella). Cerramos este apartado, dando ejemplos de triangulación de varios tipos de matrices.

■ **Ejemplos 49** Las siguientes matrices están trianguladas:

1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 5}$ dada por:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$
2. $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ dada por:
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ dada por:
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & \sqrt{2} & \pi & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 \end{pmatrix}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.2?

- Definimos una matriz con entradas reales.
- Analizamos cómo asociar una matriz a un sistema de ecuaciones lineales: la matriz de coeficientes del sistema.
- Estudiamos cómo triangular una matriz: llevarla a una matriz triangular (con ceros debajo de la diagonal principal) utilizando las operaciones de filas permitidas (que no alteran la equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a estas matrices).

■

5.3 Resolución y clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver y clasificar sistema de ecuaciones lineales, retomemos los aspectos teóricos que acabamos de desarrollar. Veremos que, para clasificar un sistema, no necesitamos calcular las soluciones: al terminar el proceso de triangulación de la matriz, será posible determinar de qué tipo se trata.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo resolver y clasificar sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de triangulación.
- Cómo resolver sistemas con parámetros.

■

5.3.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

A continuación, mostraremos cómo se resuelven algunos sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de triangulación. Comencemos por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada asociado al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Luego, triangulamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 4F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -7 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema asociado a esta matriz triangulada es:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = -1 \\ -3x_2 + 7x_3 = 0 \\ 7x_3 = 4 \end{cases}$$

De la última ecuación podemos despejar $x_3 = \frac{4}{7}$. Si reemplazamos esta igualdad en la segunda ecuación, obtenemos $-3x_2 + 7(\frac{4}{7}) = 0$; donde podemos despejar $x_2 = \frac{4}{3}$. Finalmente, reemplazando en la primera ecuación los valores hallados para x_2 y x_3, obtenemos $x_1 - \frac{4}{3} - 2 \cdot \frac{4}{7} = -1$; donde $x_1 = -1 + \frac{4}{3} + \frac{8}{7} = \frac{31}{21}$. Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y su única solución es $(\frac{31}{21}, \frac{4}{3}, \frac{4}{7})$.

Consideremos ahora el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada asociado al sistema y triangulamos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, armamos el sistema asociado a esta matriz triangulada:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

La última ecuación nos dice $x_3 = 1$. Al reemplazar esta información en la segunda ecuación hallamos que $-2x_2 + 3 + x_4 = 4$, donde podemos despejar $x_4 = 2x_2 + 1$. Esto nos dice que x_4 depende de x_2 (por lo que si conocemos x_2, el valor de x_4 quedará determinado de manera unívoca). Finalmente, reemplacemos toda la información que tenemos en la primera ecuación (es decir, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2x_2 + 1$) para obtener $x_1 + 3x_2 - 1 = -2$. De aquí, podemos despejar $x_1 = -3x_2 - 2$. Lo que hemos conseguido hasta aquí es que $x_3 = 1$, y que tanto x_1 y x_4 dependen de x_2 de cierta manera. Y como no tenemos más ecuaciones que fuercen a x_2 a ser algún número en particular, esto quiere decir que no hay restricciones sobre esta variable. Es decir, *para cualquier $x_2 \in \mathbb{R}$, mientras que $x_1 = -3x_2 - 2$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 2x_2 + 1$, el vector (x_1, x_2, x_3, x_4) será solución del sistema*. Vale decir, los vectores que son solución son de la forma $(-3x_2 - 2, x_2, 1, 2x_2 + 1)$ para cualquier $x_2 \in \mathbb{R}$. Notemos que podemos reescribir a un vector de esta forma como $x_2(-3, 1, 0, 2) + (-2, 0, 1, 1)$, como hacíamos en el capítulo 2 al buscar la ecuación vectorial de una recta a partir de su ecuación implícita. En general, escribiremos la solución de un sistema compatible indeterminado de esta manera. Formalmente, el conjunto de soluciones del sistema es entonces $\{\lambda(-3, 1, 0, 2) + (-2, 0, 1, 1) \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Por supuesto, se trata de una recta en $\mathbb{R}^4$.

Veamos otro ejemplo. Consideremos ahora el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Armemos la matriz asociada y triangulemos:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -8 & 0 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Aquí obtenemos una contradicción en la ecuación asociada a la última fila: $0 = -1$. Por lo tanto, el sistema original es incompatible.

Resolver sistemas de ecuaciones homogéneos es un poco más sencillo que sistemas no homogéneos porque *no hace falta ampliar la matriz con una columna de términos independientes*. Esto se debe a que ninguna operación elemental de filas altera una columna de ceros “0”, y pueden chequearlo ustedes mismos. Veamos entonces como resolver un sistema homogéneo.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Armamos la matriz (no ampliada) asociada y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta última matriz es:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación podemos despejar $x_3 = -2x_2 - 3x_4$; y al reemplazar esta igualdad en la primera ecuación obtenemos $x_1 + x_2 + (-2x_2 - 3x_4) + x_4 = 0$. Es decir, $x_1 - x_2 - 2x_4 = 0$. Al despejar, por ejemplo, $x_1 = x_2 + 2x_4$, tenemos que x_1 y x_3 dependen de x_2 y x_4, y estas últimas incógnitas no tiene restricciones. Por lo tanto, los vectores de $\mathbb{R}^4$ que son solución del sistema son de la forma $(x_2 + 2x_4, x_2, -2x_2 - 3x_4, x_4)$ con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Este vector lo escribimos como $x_2(1, 1, -2, 0) + x_4(2, 0, -3, 1)$, por lo que el conjunto de soluciones es $\{\lambda(1, 1, -2, 0) + \mu(2, 0, -3, 1) \, : \, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Observemos que, geométricamente, los vectores que son solución pertenecen a un plano que pasa por el origen.

Finalmente, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Y resolvemos por triangulación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_4 \to F_4 - \frac{1}{2}F_2]{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + \frac{5}{2}F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este modo, hemos arribado a una matriz triangular. Vemos que la última ecuación ha desaparecido (poniendo en evidencia que era una ecuación que se deducía de las otras, por lo que no introducía nuevas restricciones al sistema). El sistema asociado a esta última matriz (que sabemos que es equivalente al original) es:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

De aquí es fácil despejar que la única solución es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

5.3.2 Clasificando sistemas de ecuaciones lineales

Solo consideraremos sistemas de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas.

Supongamos que tenemos un sistema S, que armamos la matriz asociada (ampliada) al sistema y que la triangulamos. Trabajemos con el siguiente ejemplo de matriz triangulada:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Por lo que el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = 4 \\ 5y + 2z = 2 \\ -8z = -7 \end{cases}$$

Anteriormente, arribamos a sistemas como este último y observamos que es posible ir despejando las variables “de abajo hacia arriba” (primero z, después y y finalmente x) de manera de obtener una única solución al sistema. Estamos en condiciones de hacerlo porque *las entradas en la diagonal principal de la matriz son no nulas*. Esto nos permite “pasar dividiendo” cada uno de los coeficientes que multiplican a las incógnitas (si fuesen 0, no podríamos hacer dicha división). Tengamos en cuenta que *no importa cuáles son los términos independientes del sistema*; este despeje *siempre* se puede hacer. Esto nos indica que la información sobre si el sistema es compatible determinado está contenida en la matriz *no ampliada* del sistema. Con lo visto recién podemos arribar a la primera conclusión.

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y, al triangular la matriz no ampliada asociada al sistema, todos los términos de la diagonal principal son no nulos, entonces el sistema es compatible determinado (independientemente de cuales sean los coeficientes independientes). ■

De esta manera, es posible clasificar (en parte) un sistema sin necesidad de calcular las soluciones del mismo: triangulamos la matriz asociada al sistema y vemos si aparece algún 0 en la diagonal principal. Si no aparece ninguno, el sistema es compatible determinado. Veamos entonces qué podemos decir si aparece un 0 en dicha diagonal. Supongamos que la matriz triangulada asume alguna de las siguientes formas:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \quad A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \quad A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 5 & 2 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right)$$

Aquí hemos puesto coeficientes independientes genéricos $a, b, c \in \mathbb{R}$. A_1 tiene un 0 en la primera entrada de la diagonal (coeficiente a_{11}), A_2 tiene un 0 en la segunda entrada de la diagonal a_{22} y A_3 en la última a_{33}. Observemos qué sucede en cada caso y analicemos en primer lugar, el caso de A_3. Aquí, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ 5y + 2z = b \\ 0 = c \end{cases}$$

Notemos que caben dos posibilidades:

- Si $c = 0$, entonces, la última fila desaparece y nos queda una matriz con una fila menos. En este caso, el sistema asociado es:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ 5y + 2z = b \end{cases}$$

Si despejamos z de la segunda ecuación obtenemos $z = \frac{b-5y}{2}$; y al reemplazar con esta información en la primera ecuación obtenemos $2x + 7y - \frac{b-5y}{2} = a$. Al reordenar, $2x + \frac{19y}{2} = a + \frac{b}{2}$. A partir de esto, podemos despejar x y hallar $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} - \frac{19y}{4}$. Y ya no nos quedan más ecuaciones para despejar y. Es decir, hemos hallado que z depende de y y que x depende de y, pero *no hay restricciones para* y. Por lo tanto, para cada $y \in \mathbb{R}$ podemos armarnos una solución de la forma $(\frac{a}{2} + \frac{b}{4} - \frac{19y}{4}, y, \frac{b-5y}{2})$, entonces, hay infinitas soluciones.

- Si $c \neq 0$, entonces, llegamos a una contradicción, lo que nos indica que el sistema no tiene ninguna solución. Por lo tanto, es incompatible.

Veamos que sucede con el caso de A_2. Tengamos en cuenta que podemos “seguir triangulando” la matriz A_2 para obtener un sistema mucho más sencillo que el que nos da directamente. En efecto, haciendo el reemplazo $F_3 \to F_3 - 3F_2$, obtenemos:

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & -1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c-3b \end{array}\right)$$

Aquí nuevamente caben dos posibilidades:

- Si $c - 3b = 0$, entonces, desaparece la última fila y el sistema asociado queda:

$$\begin{cases} 2x + 7y - z = a \\ z = b \end{cases}$$

  Al reemplazar por $z = b$ en la primera ecuación, obtenemos $2x + 7y - b = a$, a partir de la cual tenemos $x = \frac{-7y+a+b}{2}$. Nuevamente, y queda a libre elección y el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $c - 3b \neq 0$ entonces el sistema es incompatible.

Finalmente, en el caso de A_1, también podemos seguir triangulando y simplificar la matriz haciendo :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 3 & c \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{array}\right)$$

Otra vez, analizamos las dos posibilidades.

- Si $c - b + 2a = 0$, nuevamente perdemos una ecuación y nos quedará una variable libre. Entonces el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $c - b + 2a \neq 0$, el sistema es incompatible.

Por lo tanto, concluimos lo siguiente:

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y, al triangular la matriz no ampliada asociada al sistema, algún término de la diagonal principal es nulo, entonces el sistema es compatible indeterminado o incompatible. Para saber de cuál de los dos casos se trata, debemos analizar el sistema teniendo en cuenta los coeficientes independientes. ■

Por supuesto que, si el sistema original es homogéneo, entonces nunca puede darse una situación de un sistema incompatible. En este caso, la clasificación es mucho más sencilla.

Importante Si tenemos un sistema de ecuaciones lineales *homogéneo* de igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas y triangulamos su matriz asociada, se pueden presentar las siguientes situaciones:

- Si ninguna entrada de la diagonal principal es nula, entonces, el sistema es compatible determinado.
- Si alguna entrada de la diagonal principal es nula, entonces, el sistema es compatible indeterminado.

5.3.3 Sistemas con parámetros

Los sistemas con parámetros son sistemas lineales donde no se conocen todos los coeficientes del sistema; esto es, uno o más coeficientes no están determinados, ya que son variables. Veamos cómo resolver y clasificar sistemas con parámetros por medio de varios ejemplos. Comencemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 & = & 0 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$. Los coeficientes a_{12}, a_{32} y a_{33} son desconocidos, aunque sabemos que son todos iguales (son iguales a cierto número real k). Para resolver el sistema, seguimos los mismos pasos que aprendimos: en primer lugar, armamos la matriz asociada al sistema (que en este caso no hace falta ampliarla pues el mismo es homogéneo) y, en segundo lugar, triangulamos. Al parámetro k lo tratamos como un número real más:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & k & k \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -2k & -1 \\ 0 & -k & k-2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & k-2 \\ 0 & -2k & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & -k & k-2 \\ 0 & 0 & -2k+3 \end{pmatrix}$$

De esta manera hemos arribado a una matriz triangulada. Como vimos en el apartado anterior, si ninguna entrada en la diagonal es nula entonces el sistema es compatible determinado, *independientemente del resto de las entradas de la matriz*. Las únicas maneras de que se anule una entrada de la diagonal es que $-k = 0$, que anula la entrada a_{22}, o que $-2k + 3 = 0$, que anula la entrada a_{33}. En el primer caso, $k = 0$, y en el segundo, $k = \frac{3}{2}$. Por lo tanto, *ya podemos concluir que, salvo para los casos $k = 0$ y $k = \frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado*. Observemos que no nos importa que en $k = 2$ se anula la entrada a_{23}, pues no está en la diagonal y, por lo tanto, no va a influir en el tipo de sistema. Con este procedimiento, hemos reducido el problema: ya sabemos el tipo de sistema para todo los valores reales que puede tener k a excepción de estos dos valores puntuales. Como el sistema es además homogéneo, sabemos que para los casos $k = 0$ y $k = \frac{3}{2}$ el sistema es compatible indeterminado. Tengamos en cuenta que, simplemente triangulando la matriz, ya podemos clasificar completamente el sistema para cada posible $k \in \mathbb{R}$. Hallemos las soluciones para cada k. Como el sistema es homogéneo, para los casos en los que el sistema queda compatible determinado, sabemos que la única solución es $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Solo nos resta exhibir las soluciones para los k que lo hacen indeterminado.

- Si $k = 0$ entonces el sistema original sería:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & = & 0 \end{cases}$$

de donde rápidamente podemos despejar que $x_1 = 0$ y $x_3 = 0$. Como x_2 no aparece en las ecuaciones quiere decir que no hay restricciones para esa variable. Por ende, las soluciones de este sistema es el conjunto $\{\lambda(0,1,0) \;:\; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Notemos que, en este caso, el sistema original con $k = 0$ nos quedó muy fácil de resolver. Pero esto no tiene porqué ser siempre así. Por eso, hay una manera más eficiente de encarar el problema de resolver el sistema para un k determinado. Observemos que, cuando triangulamos el sistema original, "arrastramos" el k por todas las cuentas, ya que como no sabíamos qué número era, lo tratamos como un número genérico. Esto quiere decir que *la triangulación que hicimos con el parámetro k desconocido vale para cualquier $k \in \mathbb{R}$*. Por lo tanto, si reemplazamos el k por un valor determinado a en el sistema y después lo triangulamos, vamos a obtener exactamente la misma matriz que obtuvimos al triangular con el k, solo que en lugar de k aparecerá a. Con esto queremos decir que, para resolver el sistema con $k = 0$, podemos trabajar con la matriz que obtenemos al reemplazar el valor k por 0 en la triangulación. En este caso, la matriz triangulada quedaría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y el sistema asociado:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & 0 \\ -2x_3 & = & 0 \\ 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

A partir de esto, podemos hallar el conjunto de soluciones como hicimos anteriormente.

- Si $k = \frac{3}{2}$ entonces el sistema original queda:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 & = & 0 \end{cases}$$

mientras que la matriz obtenida al reemplazar el valor de k en la matriz triangulada nos deja:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo sistema asociado es:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + x_3 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 & = & 0 \end{cases}$$

A partir de esto último queda en evidencia la conveniencia de evaluar el k en la matriz triangulada en lugar del sistema original. La segunda ecuación nos dice $x_3 = -3x_2$, y al reemplazar en la primera ecuación, hallamos que $x_1 = -\frac{9}{2}x_2$. Las soluciones en este caso son $\{t(-\frac{9}{2}, 1, -3) \;:\; t \in \mathbb{R}\}$.

Sigamos ahora con otro ejemplo. Resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + k^2 x_3 = -1 \\ x_1 + kx_2 + (k-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

Cabe destacar que en este sistema, el parámetro k aparece de varias maneras (sólo, restado por 2 y elevado al cuadrado). Armamos la matriz ampliada y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ -1 & 1 & k^2 & -1 \\ 1 & k & k-2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & 1 \\ 0 & 1+k & k^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \end{array}\right)$$

El sistema ya quedó triangulado sin necesidad de más operaciones. La diagonal se anula en $k = 1$ y $k = -1$, por lo cual, para todo $k \in \mathbb{R}$ distinto de estos valores, el sistema será compatible determinado. Como este sistema no es homogéneo, no sabemos a priori si para los casos $k = 1$ y $k = -1$, el sistema resulta compatible indeterminado o incompatible. Debemos analizar cada caso por separado.

- Si $k = -1$ entonces al reemplazar en la matriz triangulada obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

  cuyo sistema asociado es:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_3 = 1 \end{cases}$$

  De aquí despejamos $x_3 = -\frac{1}{2}$ y $x_1 = \frac{1}{2} + x_2$. Por lo tanto, las soluciones son de la forma $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{2} + x_2, x_2, -\frac{1}{2}) = x_2(1,1,0) + (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, con $x_2 \in \mathbb{R}$. Es decir, son el conjunto $\{t(1,1,0) + (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$.

- Si $k = 1$ la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Tengamos en cuenta que la última ecuación del sistema asociado es $0 = 1$, lo cual es un absurdo. Esto quiere decir que, en este caso, el sistema es incompatible.

A veces podemos encontrar parámetros en los coeficientes independientes. Por ejemplo, resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 2x_3 - x_4 = k+2 \\ x_2 - 7x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 + kx_2 - 2x_3 = 2 \\ -4x_3 + k^2 x_4 = -3k - 2 \end{cases}$$

Armamos y triangulamos la matriz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 1 & k & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & k^2 & -3k-2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2 \\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -k \\ 0 & 0 & -4 & k^2 & -3k-2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_4\to F_4-F_3}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & k & 2 & -1 & k+2\\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 0 & k^2-1 & -2k-2 \end{array}\right)$$

Este sistema solo puede anularse en la entrada a_{44} si $k=1$ o $k=-1$. Analizamos ambos casos.

- Si $k=-1$,la matriz queda:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Como el término independiente $-2k-2$ se anula también en -1 el resultado es que se ha anulado una ecuación, pero no hemos creado ninguna inconsistencia. Es fácil ver ahora que el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k=1$ la matriz queda:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -7 & 1 & -4\\ 0 & 0 & -4 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

  En este caso, el término $-2k-2$ no se anula en $k=1$ por lo que obtenemos una inconsistencia $0=-4$ en la última ecuación y el sistema resulta incompatible.

Finalmente, supongamos que queremos clasificar un sistema con dos parámetros como el siguiente:

$$\begin{cases} (a+1)x+y+z &= 1\\ x+(a+1)y+z &= b\\ x+y+(a+1)z &= b^2 \end{cases}$$

Cabe destacar que será necesario considerar todas las posibilidades para $a,b\in\mathbb{R}$ por separado y ver cómo interactuan entre sí en cada caso. Armamos entonces la matriz (ampliada) asociada al sistema y triangulamos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & a+1 & 1 & b\\ 1 & 1 & a+1 & b^2 \end{array}\right)\xrightarrow{F_1\updownarrow F_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2\\ 1 & a+1 & 1 & b\\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2\\ 0 & a & -a & b-b^2\\ a+1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3-(a+1)F_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2\\ 0 & a & -a & b-b^2\\ 0 & -a & -a^2-2a & 1-(a+1)b^2 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2\\ 0 & a & -a & b-b^2\\ 0 & 0 & -a^2-3a & 1-(a+1)b^2+b-b^2 \end{array}\right)\longrightarrow$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & b^2 \\ 0 & a & -a & b-b^2 \\ 0 & 0 & -a(a+3) & 1-(a+2)b^2+b \end{array}\right)$$

La diagonal se anula en $a = 0$ (en dos lugares) y $a = -3$, por lo cual ya sabemos que si a no es ninguno de esos números, entonces, el sistema es compatible determinado. Con esto ya hemos reducido drásticamente el problema a tres posibilidades para el número a. Para b aún estamos considerando todas las posibles opciones. Estudiemos los distintos casos para a.

- Si $a = 0$ queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2b^2+b \end{array}\right)$$

  Para que el sistema sea compatible debe suceder (al mismo tiempo) $b - b^2 = 0$ y $-2b^2 + b + 1 = 0$. Como $b - b^2 = (1-b)b$ y $-2b^2 + b + 1 = -2(b + \frac{1}{2})(b-1)$, entonces, el sistema es compatible solo si $b = 1$. Como nos queda una única ecuación (no nula) y tres incógnitas, en este caso, el sistema es (compatible) indeterminado.

- Si $a = -3$ queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b+1 \end{array}\right)$$

  Para que el sistema sea compatible debe suceder $b^2 + b + 1 = 0$. Pero $b^2 + b + 1 > 0$ para todo $b \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, en este caso, el sistema es incompatible para todo b.

Arribamos a nuestra respuesta:

- El sistema es compatible determinado cuando $a \neq 0, -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.
- El sistema es compatible indeterminado cuando $a = 0$ y $b = 1$.
- El sistema es incompatible cuando $a = 0$ y $b \neq 1$, y cuando $a = -3$ y $b \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Cuando estudiemos "Determinantes", veremos una manera más directa y mecánica de clasificar sistemas con parámetros.

¿Qué hicimos en el apartado 5.3?

- Estudiamos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de triangulación.
- Vimos cómo clasificar sistemas de ecuaciones lineales, evaluando la existencia de entradas nulas en la diagonal principal de la matriz triangulada.
- Resolvimos sistemas de ecuaciones lineales con parámetros.

■

5.4 La teoría de matrices

El conjunto de matrices posee operaciones de suma y multiplicación de matrices y dichas operaciones son también muy útiles a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo sumar matrices y multiplicarlas por números reales.
- Cómo multiplicar matrices entre sí e interpretar matricialmente los sistemas de ecuaciones.
- Cómo calcular la inversa de una matriz inversible y resolver sistemas utilizando la matriz inversa.
- El rango de una matriz.

5.4.1 Operaciones con matrices

Así como los vectores de $\mathbb{R}^n$ se pueden sumar entre sí y multiplicar por escalares $\lambda \in \mathbb{R}$, las matrices también. Y la definición es prácticamente la misma: lo hacemos "coordenada a coordenada".

Definición 48 Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos la *suma entre A y B* y la *multiplicación de A por λ* de la siguiente manera:

$$\bullet\ A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz $A + B$ vuelve a ser una matriz de n filas por m columnas y la entrada ij de esta matriz es la suma de la entrada ij de la matriz A con la entrada ij de la matriz B. Por otro lado, la matriz λA también vuelve a ser una matriz en $\mathbb{R}^{n\times m}$ cuya entrada ij es la entrada ij de A multiplicada por λ. *Es importante remarcar que dos matrices se pueden sumar solo si tienen el mismo tamaño.*

Ejemplos 50

- La suma de las matrices $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 3+3 & -1-1 \\ -5+0 & 0+1 & 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

- El producto de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ por el número $\lambda = 7$ es:

$$7\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 & 7{,}3 \\ 7(-5) & 7{,}8 \\ 7{,}1 & 7{,}3 \\ 7(-2) & 7{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 \\ -35 & 56 \\ 7 & 21 \\ -14 & 7 \end{pmatrix}$$

Vimos en el capítulo 3, que los subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$ consistían en conjuntos de vectores con la propiedad que establece que la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar daban como resultado vectores del mismo conjunto. Acabamos de verificar que el conjunto de matrices de $n \times m$ también posee operaciones de suma y producto por escalar. ¿Habrá subconjuntos de matrices que tengan las mismas propiedades de los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$? ¡La respuesta es sí! Las matrices de $\mathbb{R}^{n\times m}$ también poseen subespacios *en este mismo sentido. En realidad, un* espacio vectorial genérico *es un conjunto de objetos (no necesariamente vectores de $\mathbb{R}^n$) con las operaciones de "suma de objetos" y "multiplicación de un objeto por un escalar" que, además, cumplen ciertas propiedades. Por ejemplo, tomando a las matrices como objetos y las operaciones que acabamos de definir, se puede mostrar que $\mathbb{R}^{n\times m}$ es un espacio vectorial. Si bien en esta cursada solo estudiamos espacios vectoriales definidos para el caso en el cual los objetos son vectores de $\mathbb{R}^n$, la teoría es inmensamente más rica.*

Así como existe un vector nulo en $\mathbb{R}^n$, también existe una *matriz nula* en $\mathbb{R}^{n\times m}$ para cada n y m fijos. Esta matriz se nota $\mathbf{0}$, y sus entradas son todas 0. Las propiedades de las operaciones de matrices recién introducidas son las mismas que las de las operaciones para vectores. Las enunciamos a continuación para matrices $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
4. Si $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ y $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $(\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A$ y $(\lambda_1\lambda_2)A = \lambda_1(\lambda_2 A)$
5. $\mathbf{0} + A = A$
6. $1A = A$
7. $A + (-1)A = \mathbf{0}$
8. $0A = \mathbf{0}$

Les proponemos corroborar estas propiedades para matrices elegidas al azar (por ejemplo, las matrices en $\mathbb{R}^{2\times 3}$ del ejemplo anterior).

5.4.2 Producto de matrices

En este apartado, vamos a definir una manera de multiplicar matrices entre sí, de forma que el resultado de la multiplicación sea nuevamente una matriz. Por un lado, si bien esta operación guarda alguna correlación con el producto entre números reales, no comparte la mayoría de las propiedades de la multiplicación que conocemos. Por ejemplo, no cualesquiera dos matrices pueden ser multiplicadas entre sí (existen ciertas restricciones de tamaño para poder multiplicar dos matrices). Por otro lado, la matriz que resulta de la multiplicación, no tiene en general el mismo tamaño que ninguna de ellas. Por último, el producto de matrices no es conmutativo. Por esta razón, tendremos especial cuidado al trabajar con la multiplicación de matrices.

Comencemos estableciendo cuál es la condición necesaria para poder multiplicar una matriz A con una matriz B. Lo único que necesitamos es que *la cantidad de columnas de A se igual a la cantidad de filas de B*, es decir: que $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, para algunos $n, m, r \in \mathbb{N}$. A partir de la definición de multiplicación de matrices, esta condición es necesaria.

Definición 49 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Llamemos a_{ij} a las entradas de A y b_{ij} a las entradas de B. Entonces, el *producto de A con B* es la matriz $A \cdot B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, cuya entrada en el lugar ij es el número $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$.

Esto puede parecer muy complicado a primera vista pero en realidad no lo es. Lo explicaremos en detalle. En primer lugar, lo que nos dice la definición es que el resultado de multiplicar una matriz de tamaño $n \times m$ por una de tamaño $m \times r$, es una matriz de tamaño $n \times r$. Es decir, *tiene la misma cantidad de filas que A y la misma cantidad de columnas que B*. ¿Cómo se arma entonces esta matriz de $n \times r$? Progresivamente, primero completando las entradas de la primera fila, luego de la segunda, y así hasta la última fila. Llamamos c_{ij} a las entradas de la matriz $A \cdot B$ ¿Cómo averiguamos cuál es la entrada c_{ij}? Si vemos la formula de la definición, observamos que es una combinación de algunas entradas de A y algunas entradas de B. Pero, ¿qué entradas? y ¿qué combinación? Pues, el primer subíndice de c_{ij} nos indica que consideremos la i-ésima fila de A y, el segundo subíndice, la j-ésima columna de B; y la combinación es simplemente multiplicar la primera entrada de la fila i de A con la primera entrada de la columna j de B, la segunda entrada de la fila i de A con la segunda entrada de la columna j de B, y así hasta multiplicar la última entrada de la fila i de A con la última entrada de la columna j de B (las filas de A y las columnas de B tienen el mismo largo: m). Una vez que hicimos estas multiplicaciones por separado, las sumamos todas para obtener un único número: ese número es c_{ij}. Veamos un ejemplo.

Supongamos que queremos calcular el producto $A \cdot B$ entre las siguientes dos matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La multiplicación se puede llevar a cabo ya que A tiene tres columnas y B tiene tres filas. Vamos armando las entradas c_{ij} de $A \cdot B$. Como A tiene dos filas y B dos columnas, entonces $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Debemos calcular c_{11}, c_{12}, c_{21} y c_{22}. ¿Qué entrada es c_{11}? Consideramos la primera fila de A $(1 \quad 3 \quad -2)$ y la primera fila de B $(-5 \quad -1 \quad 2)$. Y ahora, multiplicamos lugar a lugar estas filas/columnas:

$$\begin{matrix} (1 & 3 & -2) \\ (-5 & -1 & 2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (-5) & 3(-1) & (-2)2 \end{matrix}$$

Finalmente, sumamos todos estos números: $-5 - 3 - 4 = -12$. Por lo tanto, $c_{11} = -12$. Vamos a calcular c_{12}: tomemos la primera fila de A $(1 \quad 3 \quad -2)$ y la segunda columna de B $(2 \quad 7 \quad 1)$, y multiplicamos sus entradas lugar a lugar:

$$\begin{matrix} (1 & 3 & -2) \\ (2 & 7 & 1) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 21 & -2 \end{matrix}$$

Por lo tanto, $c_{12} = 2 + 21 - 2 = 21$. Al aplicar el mismo procedimiento, para c_{21} consideramos la segunda fila de A $(4 \quad 0 \quad 5)$ y la primera columna de B $(-5 \quad -1 \quad 2)$ y tenemos $c_{21} = 4(-5) + 0(-1) + 5{,}2 = -10$. Finalmente, $c_{22} = 4{,}2 + 0{,}7 + 5{,}1 = 13$. Entonces hemos calculado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -12 & 21 \\ -10 & 13 \end{pmatrix}$$

¿Pueden darse cuenta qué estamos haciendo al multiplicar lugar a lugar las entradas de las filas de A con las columnas de B y después sumarlas? ¿No les recuerda a una operación que hicimos anteriormente con vectores? ¡Sí, el producto escalar de vectores! Si consideramos a las filas y columnas como vectores, entonces, la cuenta que estamos haciendo es el producto escalar entre una fila/vector de A y una columna/vector de B. Es decir, en la entrada c_{ij} de $A \cdot B$ va el producto escalar entre la fila i de A y la columna j de B (considerando a estas filas y columnas como vectores). En el ejemplo anterior, $c_{11} = (1, 3, -2) \cdot (-5, -1, 2)$, $c_{12} = (1, 3, -2) \cdot (2, 7, 1)$, $c_{21} = (4, 0, 5) \cdot (-5, -1, 2)$ y $c_{22} = (4, 0, 5) \cdot (2, 7, 1)$. Esta es otra manera de recordar cómo se calculan las entradas de la matriz producto.

Ejemplos 51

- El producto entre las matrices $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ y $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -3 & 25 \\ -20 & 0 & 32 \\ 14 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

- El producto entre las matrices $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 8 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 5 & 16 \\ 22 & 3 & -9 & -32 \end{pmatrix}$$

■

Como comentamos al comienzo del apartado, el producto de matrices no tiene las mismas propiedades que el producto de números reales que conocemos. En primer lugar, no siempre podemos hacer el producto entre dos matrices cualesquiera (la cantidad de columnas de la primera matriz debe coincidir con la cantidad de filas de la segunda). En particular, esto nos indica que el producto de matrices *no es conmutativo*. Es decir, no es cierto que $A \cdot B = B \cdot A$ pues $B \cdot A$ podría no ser posible de calcular al no cumplirse los requisitos de la cantidad de columnas de B con las de A. Por ejemplo, si $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, entonces el producto $A \cdot B$ se puede llevar a cabo pero el producto $B \cdot A$ no. Pero este no es el único motivo por el que no es conmutativo el producto: puede suceder que tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$ sean operaciones válidas pero ¡podrían no ser matrices del mismo tamaño! (mucho menos iguales). Por ejemplo, si $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ y $B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$, entonces, tanto $A \cdot B$ como $B \cdot A$, son válidas. Pero $A \cdot B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \cdot A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Hay además otro motivo por el cual el producto no es conmutativo: podría suceder que $A \cdot B$ y $B \cdot A$ sean operaciones válidas y que den lugar a matrices del mismo tamaño, pero que de todas formas $A \cdot B \neq B \cdot A$. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Más allá de esto, el producto de matrices sí posee la propiedad distributiva respecto de la suma. Es decir, para $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ se tiene:

- $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$
- $C\cdot(A+B) = C\cdot A + C\cdot B$

Es importante remarcar que, cuando hacemos la distribución de C dentro del paréntesis, *nos aseguramos de ubicar a C del mismo lado que estaba fuera del paréntesis*. Es decir, si C esta a la derecha del paréntesis (como en la primera ecuación de arriba), entonces cuando distribuimos C queda multiplicando a A y B *a la derecha*. Esto por supuesto es fundamental tenerlo presente ya que, como vimos recién, el producto no es conmutativo. Por este motivo consideramos dos formulas de distribución (para C multiplicando a derecha y a izquierda por separado).

Para las matrices $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, de distinto tamaño, estudien los resultados de las multiplicaciones $A\cdot B$ y $B\cdot A$.

5.4.3 Matrices cuadradas

Un tipo muy especial de matrices son las matrices cuadradas: aquellas que tienen igual cantidad de filas y de columnas. Dada esta coincidencia, a una matriz cuadrada de n filas por n columnas se la suele llamar simplemente *matriz cuadrada de tamaño n*. Una de las ventajas de trabajar con matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es que pueden ser siempre multiplicadas entre sí; y, además, el resultado vuelve a ser una matriz de tamaño n. Entonces cuando se trabaja con matrices cuadradas, se presenta una situación más parecida a trabajar con números, en el sentido que todas las operaciones entre matrices vuelven a dar matrices del mismo conjunto. Otra ventaja de estas matrices es que admiten un elemento neutro para la multiplicación (el equivalente al 1 en los números reales). Esta matriz se llama *matriz identidad* y es la matriz *cuadrada* que tiene todas sus entradas 0 salvo en la diagonal principal, que tiene todos 1. A continuación, la definimos con mayor precisión.

Definición 50 La *matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$*, también llamada *matriz identidad de $n\times n$*, es la siguiente matriz I_n de n filas y n columnas:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay una matriz identidad de tamaño n. Las primeras cuatros son:

$$I_1 = 1 \in \mathbb{R} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

En general, no especificaremos el tamaño de la matriz identidad que estamos considerando con el subíndice “n” correspondiente y solamente escribiremos I para respresentarla (el tamaño que tiene quedará claro del contexto en el que estemos trabajando). Pueden chequear fácilmente que, si $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $A \cdot I = A$, y que $I \cdot A = A$ para toda matriz cuadrada de tamaño n. En particular, la matriz identidad conmuta con todas las matrices de $n \times n$.

5.4.4 Matrices inversibles

Todos los números reales, a excepción del 0, tienen un inverso multiplicativo; esto es, para todo $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $xy = 1$. Como sabemos que este número y es único, lo solemos escribir x^{-1} $\left(\text{o} \frac{1}{x}\right)$. En la teoría de matrices sucede algo parecido, aunque *no para todas las matrices*. Para algunas matrices cuadradas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe otra matriz del mismo tamaño $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I$. Se las conoce como *matrices inversibles* y tienen propiedades muy útiles.

Definición 51 Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *inversible* si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A \cdot B = I$ y $B \cdot A = I$.

Importante Las matrices inversibles son siempre matrices cuadradas. ■

Que una matriz sea inversible nos brinda mucha información sobre el sistema de ecuaciones lineales asociado. Por ejemplo, indica que es compatible determinado. También, en algunos casos, permite resolver ecuaciones matriciales de manera muy efectiva. Ambas situaciones las estudiaremos en los siguientes apartados.

Recién afirmamos que no todas las matrices cuadradas no nulas son inversibles. Por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

no tiene inversa. En efecto, una inversa para A debería ser otra matriz B tal que $A \cdot B = I$. Al no conocer B, podemos escribir genéricamente $B = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Por lo tanto, $A \cdot B = I$ quiere decir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calculamos el producto entre A y B tenemos que es $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Es decir, siempre la segunda fila de $A \cdot B$ es nula (cualquiera sea B). En particular, ningún producto de A por otra matriz va a dar como resultado un 1 en la posición a_{22}. Por lo tanto, no hay manera de multiplicar a A por otra matriz y obtener la identidad. Esto muestra que A no tiene inversa.

Veamos cómo calcular la inversa de una matriz inversible. Supongamos que queremos encontrar la inversa de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

En principio no tenemos porqué saber si A es o no inversible. El procedimiento que vamos a llevar a cabo nos devolverá la inversa de A (si existe) o nos avisará que A no es inversible. A partir de la matriz A, construirnos una matriz *ampliada* donde agregamos la identidad del otro lado de la barra. Es decir, consideramos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, utilizaremos las operaciones de filas que conocemos para llevar la matriz original a la matriz identidad del lado izquierdo de la barra (aplicando las mismas operaciones a la matriz identidad del lado derecho de la barra). *Las* *operaciones de filas que transforman una matriz A en la matriz identidad son exactamente las operaciones de fila que debemos hacerle a la matriz identidad para tranformarla en la inversa de A.* Por este motivo, ampliamos la matriz original con la identidad: en lugar de tener que ir anotando las operaciones que le vamos a hacer a A para transformarla en la identidad (para después aplicárselas a I), ¡hacemos todo al mismo tiempo! A continuación, les mostramos de qué modo.

En primer lugar, hay que llevar la matriz A a la matriz identidad, al igual que al triangular. De hecho, comenzaremos triangulando la matriz (poniendo ceros debajo de la diagonal) y, luego, agregaremos ceros arriba de la diagonal. Empezamos triangulando la parte derecha de la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tengamos presente, cómo hemos aplicado las operaciones de fila a toda la matriz ampliada (también a la identidad de la derecha).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 4F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

Aquí ya tenemos la matriz A triangulada. Ahora buscamos los ceros arriba de la diagonal. Para facilitar las cuentas, nos conviene multiplicar la última fila por $\frac{1}{8}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{8}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Así como usábamos la entrada a_{11} para generar los 0 debajo de la diagonal principal en la primera columna, ahora utilizaremos la entrada a_{33} para generar los ceros arriba de la diagonal principal en la tercera columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 \to F_1 + F_3]{F_2 \to F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

Finalmente, hemos alcanzado la identidad en el lado izquierdo de la matriz ampliada. Lograr esta transformación nos muestra que la matriz A es inversible. Y la inversa es precisamente la matriz que aparece del lado derecho de la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

La manera de saber si hemos llevado a cabo bien las cuentas es chequear si efectivamente esta matriz es la inversa de A; es decir, chequear que el producto de A por esta matriz da la identidad de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Vayamos a otro ejemplo de este procedimiento para una matriz que no es inversible. Consideremos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Armamos entonces la matriz ampliada y empezamos a triangular la matriz B dentro de esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \to F_3 + 2F_1]{F_2 \to F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Pero aquí debemos deternernos. *Si durante el procedimiento aparece una fila de ceros quiere decir que la matriz* no es inversible. La explicación de este fenómeno la brindaremos más adelante, cuando veamos el *rango de una matriz*. En conclusión, este procedimiento de ampliar la matriz con la matriz identidad y triangular la matriz original, devolverá la inversa de la matriz (si existe), o producirá una fila de ceros durante la triangulación (que indica que la matriz no era inversible en primer lugar).

Experimento 27 Este experimento explica porqué funciona el procedimiento para hallar la inversa que explicamos recién. Lo aplicamos sobre el primer ejemplo que vimos. La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si uno no tiene más información o herramientas, la manera más directa y “a mano” de encarar el problema de hallar la inversa de una matriz es considerar una matriz genérica:

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

y tratar de ver cómo tienen que ser sus entradas para que resulte la inversa de A. Es decir, queremos ver quiénes tienen que ser $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ para que $A \cdot B = I$. Al resolver la cuenta, buscamos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les proponemos que calculen el producto de matrices de la izquierda, de manera de obtener una igualdad entre dos matrices (la de la izquierda, llena de letras, y a la derecha, la identidad). Como dos matrices son iguales si sus entradas son iguales, entonces igualando entrada a entrada vamos a obtener un sistema de 9 ecuaciones y 9 incógnitas. Por ejemplo, la ecuación correspondiente a la igualación de las entradas a_{11} es $a + 2d - g = 1$, y la correspondiente a la igualación de las entradas a_{32} es $b + h = 0$. Analicemos con detenimiento este sistema.

Si bien parece muy grande, en realidad, las únicas ecuaciones que utilizan las incógnitas a, d, g son las tres ecuaciones correspondientes a la igualación de las entradas de la primera columna de $A \cdot B$. Lo mismo sucede con las incógnitas b, e, h (sólo aparecen en las tres ecuaciones correspondientes a la igualación de las entradas de la segunda columna de $A \cdot B$) y con c, f, i (tres ecuaciones correspondientes a la tercera columna). Por lo tanto, este sistema podemos pensarlo como *tres sistemas separados de tres ecuaciones y tres incógnitas cada uno* en lugar de concebirlo como un gran sistema de 9×9. Pero hay algo más: veamos los tres sistemas que acabamos de separar. ¿Cómo són las matrices asociadas a estos sistemas? ¿Pueden darse cuenta ahora por qué funciona el razonamiento? (no es tan directo, requiere pensarlo). ■

Importante No debe confundirse la escritura de la matriz inversa con la de la matriz transpuesta.

Definición 52 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ se dice *transpuesta* cuando resulta de intercambiar las filas con las columnas de otra matriz. Es decir $(A^t)_{ij} = A_{ji}$. Se escribe A^t.

■

Veamos algunos ejemplos:

■ Ejemplos 52

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

■

5.4.5 Rango de una matriz

En Matemática es muy común asignarle números a objetos que nos brinden información sobre los mismos. Por ejemplo, la norma de un vector es un número que le asignamos a cada vector y que nos informa sobre su longitud. Un caso muy importante en la teoría de matrices, tan importante que le dedicamos el próximo apartado entero, es el *determinante* de una matriz, que nos dice, entre otras cosas, si las matriz es o no inversible (sin tener que pasar por el cálculo de la inversa que estudiamos recientemente). En este apartado, vamos a introducir otro de este tipo de números: el *rango* de una matriz.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ -x + 3y + 4 = 0 \\ -5x + 4y + 13 = 0 \end{cases}$$

Veamos qué sucede al tratar de resolverlo por el método de triangulación. La matriz del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema asociado a esta matriz tiene una ecuación menos que el sistema original. Pero, ¿qué nos indica esta fila de ceros en la matriz (respecto de la matriz en sí)? Pensemos a las filas de la matriz original como vectores. En este caso, vectores de $\mathbb{R}^3$. Los llamamos $\vec{v}_1 = (2, 5, -1)$, $\vec{v}_2 = (-1, 3, 4)$ y $\vec{v}_3 = (-5, 4, 13)$. Ahora bien, volvamos a realizar la triangulación de la matriz pero llevando cuenta de las operaciones que estamos haciendo implícitamente entre estos vectores (representado a la derecha de cada matriz).

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{array} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 13 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 + (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) \end{array}$$

Las operaciones que figuran a la derecha de las matrices van mostrando cómo fueron cambiando las filas, vistas como vectores, a lo largo de la triangulación. En la matriz triangulada, la interpretación de lo que está en la fila 2 es que $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = (0, 11, 7)$. Y, en particular, la fila 3 dice $\vec{v}_3 - 5\vec{v}_2 + (\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2) = (0, 0, 0)$. Es decir:

$$\vec{v}_3 - 3\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$$

Si "despejamos" el vector $\vec{v}_3$ en esta ecuación obtenemos que:

$$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

¡Entonces $\vec{v}_3$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$! Cuando triangulamos una matriz y se anula una fila lo que está sucediendo es que la fila que se anuló es "combinación lineal de las otras filas" (viendo a las filas como vectores). Y la anulación de una fila de una matriz asociada a un sistema nos indica que la ecuación correspondiente a dicha fila desaparece (puede removerse sin alterar las soluciones del sistema); es decir, la ecuación removida es "combinación lineal de las otras ecuaciones" del sistema.

Observemos que saber cuántas filas de la matriz son independientes es de gran utilidad. Este número es lo que se conoce como *rango* de una matriz.

Definición 53 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. El *rango* de A es la cantidad de filas de A linealmente independientes. Se nota $rg(A)$.

Notemos que $rg(A)$ es un número entero positivo (que solo es cero para la matriz nula). En el ejemplo que vimos recién, el rango de la matriz asociada al sistema es 2. Veamos algunos otros ejemplos.

Ejemplos 53

- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ es 1 (sus filas son múltiplos).
- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es 2 (sus filas son linealmente independientes).
- El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$ es 3. (Las filas 1, 2 y 4 son linealmente independientes entre sí.)

Cuando una matriz tiene una fila que es combinación lineal de las otras, dicha combinación podemos encontrarla utilizando el procedimiento antes descripto (de nombrar a las filas $v_1, \dots, v_n$ y seguir las operaciones que vamos realizando en la triangulación al costado de la matriz). Lo importante de las operaciones elementales de filas es que *no alteran el rango de la matriz*. Es decir, el rango de una matriz antes y después de hacerle una operación elemental de fila es el mismo. Se lo dejamos para mostrar en el próximo experimento.

Experimento 28 Muestren que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \dots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces los siguientes conjuntos también son linealmente independientes.

1. $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.
2. $\{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ distinto de cero.
3. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

¿Cuál es la manera de calcular el rango de una matriz? Notemos que, para conocer el rango, solo nos interesa saber *cuántas* filas linealmente independientes tiene, no cuáles son ni cuál es la combinación lineal que las relaciona. Por lo tanto, *para calcular el rango de una matriz nos alcanza con triangular la matriz y, cuando obtengamos una matriz triangular, contar cuántas filas no nulas nos quedan.*

Ejemplos 54

- Calculemos el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  Como las dos filas de la matriz triangulada son linealmente independientes, entonces $rg(A) = 2$.

- Calculemos el rango de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 3}$. Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_5 \to F_5 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_2]{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_5 \to F_5 - F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \times F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $rg(B) = 3$.

■

La cantidad de filas linealmente independientes de una matriz cualquiera de $\mathbb{R}^{n\times m}$ es igual a la cantidad de columnas linealmente independientes de la misma. Por esta razón, el rango puede definirse también como la cantidad de columnas linealmente independientes.

El rango de matrices cuadradas

El rango es un dato especialmente útil cuando trabajamos con matrices cuadradas. Recordemos que, para hallar la inversa de una matriz de $n \times n$ (si la tuviere), debíamos triangular la matriz hasta convertirla en la identidad $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pero acabamos de ver que las operaciones de filas que utilizamos para triangular no alteran el rango de la matriz. Como el proceso termina en la matriz identidad de $n \times n$, cuyo rango es n, concluimos que, *si una matriz de $n \times n$ es inversible, entonces su rango debe ser necesariamente n*. De igual manera, *si una matriz de $n \times n$ tiene rango n entonces es necesariamente inversible*. Para chequear que esto último es válido observemos que, al tener rango n, todas las filas son linealmente independientes. Por lo tanto, triangulando nunca se nos anulará ninguna fila y podremos alcanzar una matriz triangular con entradas no nulas en la diagonal principal. A partir de aquí, no es difícil continuar la triangulación "de la parte de arriba de la matriz" y poner unos (1) en la diagonal, de manera de obtener la matriz identidad. El estudiante puede hacer un ejemplo concreto, con una matriz de 3×3 por ejemplo, para convencerse que *siempre que llegue a una matriz cuadrada triangular sin entradas nulas en la diagonal puede seguir triangulando hasta obtener la identidad*.

El rango es entonces una excelente manera de determinar si una matriz cuadrada es o no inversible *sin tener que hacer muchas cuentas*. Por ejemplo, la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

no puede ser inversible, pues la última fila es -2 veces la primera (por lo que el rango de la matriz no es 3; en este caso, es 2). La matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tampoco es inversible, pues las últimas dos filas son combinación lineal de la primera (son idénticas de hecho). En este caso, el rango es 1. La matriz:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -1 & 12 & 7 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

tiene rango 2 (la segunda fila es combinación lineal de las otras dos filas), por lo que tampoco puede ser inversible.

Como último resultado sobre el rango, mencionamos una propiedades que nos puede resultar útil a la hora de calcularlo: *el rango de una matriz no se altera si la multiplicamos por otra matriz que es inversible (a derecha o izquierda)*. Es decir, si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y B es inversible, entonces, $rg(A \cdot B) = rg(A)$ y $rg(B \cdot A) = rg(A)$. Esto no es cierto si la matriz B no es inversible. Por ejemplo, si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ y $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, entonces, $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En este caso, $rg(A) = 2$ pero $rg(A \cdot B) = 1$ (B no es inversible: su rango es 1).

Estudien qué sucede con el rango de la matriz A^n si A es una matriz inversible. Tengan en cuenta que A^n representa la potencia n-ésima de la matriz A.

5.4.6 Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales

La teoría de matrices tiene muchas aplicaciones y puede utilizarse en el Álgebra para interpretar muchas situaciones. Aquí hemos visto cómo podemos utilizar matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero podemos también "enmarcar" la teoría de sistemas de ecuaciones lineales dentro de la teoría de matrices. En consecuencia, retomemos el sistema que consideramos al principio del capítulo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

Este sistema puede representarse a nivel matricial (haciendo uso del producto de matrices) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En efecto, la matriz de coeficientes es de 2×2 y podemos definir una "matriz de las incógnitas $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$" de 2×1 de manera tal que sea posible llevar a cabo la multiplicación. El resultado será una matriz de 2×1. Si realizamos el producto, vemos que en el lugar $1 - 1$ de la misma irá la entrada $x + 2y$ y, en el lugar $2 - 1$, la entrada $2x - 3y$. Como este sistema tiene la primera expresión igualada a 5 y la segunda, a -1, entonces podemos simplemente igualar el producto a "la matriz de términos independientes $\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$". Y esto es precisamente lo que dice la ecuación de más arriba. Esta ecuación se conoce como *ecuación matricial de un sistema de ecuaciones lineales*. Esto siempre se puede hacer. Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

se representa matricialmente de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 11 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

está representando al siguiente sistema:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 0 \\ 11x - y = -2. \end{cases}$$

Dada esta identificación, podemos considerar a los sistemas de ecuaciones lineales como *ecuaciones con matrices*. Interpretar un sistema de ecuaciones de esta manera es, en general, muy conveniente dado que, por un lado, convierte un sistema de varias ecuaciones en una única ecuación y, por otro, nos deja a disposición las herramientas algebraicas que posee la teoría de matrices. Muchas veces, esto nos permitirá usar razonamientos parecidos a los utilizados cuando resolvemos ecuaciones en los reales. En efecto, si tenemos que resolver la ecuación $5x = 3$, entonces "pasamos dividiendo" el 5 para hallar $x = \frac{3}{5}$. Esto es posible porque *podemos dividir por* 5; es decir, 5 tiene inverso. Consideremos ahora una ecuación matricial:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Si la matriz A es inversible*, entonces, podemos multiplicar a izquierda, a ambos lados de la igualdad, por la inversa A^{-1} de A, de forma de obtener:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como $A^{-1} \cdot A = I$, entonces obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, ¡despejamos la solución como hacíamos en el caso de las ecuaciones reales! Esto nos dice, por un lado, que si la matriz asociada al sistema es cuadrada e inversible, entonces el sistema es compatible determinado (pues tiene una única solución que debe ser $A^{-1}B$) y, por otro lado, que podemos hallar dicha solución calculando la inversa A^{-1} de la matriz y multiplicando a izquierda a la matriz B de términos independientes por esta inversa. Esto nos ahorra el tener que triangular y despejar "a mano" las soluciones del sistema.

■ **Ejemplo 55** Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 2 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 1 \end{cases}$$

La forma matricial de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Llamemos A a esta matriz. Triangulemos A:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 2F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_2 \updownarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aquí vemos que el $rg(A) = 3$, por lo que es inversible. La inversa de A es $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, por lo que la solución del sistema es:

$$A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 5.4?

- Estudiamos las operaciones básicas entre matrices: la suma y el producto por escalar.
- Introducimos la multiplicación de matrices y vimos sus propiedades más importantes. Particularmente, no es conmutativa.
- Estudiamos las matrices cuadradas e introducimos la matriz identidad.
- Definimos qué significa que una matriz cuadrada sea inversible y aprendimos a calcular la inversa de una matriz inversible (o detectar si la matriz no es inversible).
- Definimos el rango de una matriz y vimos su relación con la inversibilidad de la matriz (en el caso que sean cuadradas).
- Vimos cómo escribir matricialmente un sistema de ecuaciones lineales y, además, aprendimos a resolver un sistema cuadrado cuya matriz asociada es inversible.

■

5.5 Determinantes

A una matriz cuadrada podemos asociarle un número llamado el *determinante* de la matriz. Esta magnitud es una de las herramientas más importantes de la teoría de matrices y nos provee muchísima información sobre estas.

En este apartado estudiaremos...

- Qué es el determinante de una matriz y cómo calcularlo.
- Las propiedades del determinante.
- Cómo utilizar la información que nos provee el determinante para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

■

5.5.1 ¿Qué es el determinante?

En el apartado anterior, vimos que toda matriz tiene asociado un número llamado *rango* del que podemos extraer información de la matriz. El determinante es otro tipo de número que nos da información sobre las *matrices cuadradas*. La característica principal (que utilizaremos con más frecuencia) es la siguiente: una matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante es un número distinto de 0. En próxima unidad estudiaremos otras características del determinante.

Importante En este apartado, todas las matrices son cuadradas. ■

El determinante se calcula a partir de una fórmula que involucra sumas y multiplicaciones de las entradas de la matriz. Esta fórmula no es, en principio, ni sencilla ni natural, pero veremos que, de todas formas, es fácil de calcular recordando unos pocos procedimientos. Comenzaremos definiéndolo para las matrices más pequeñas primero.

5.5.2 El determinante de una matriz de 2×2

Al tener en cuenta que queremos que el determinante sea distinto de cero exactamente para las matrices inversibles, ¿podemos deducir cuál debería ser este número en el caso de matrices de 2×2? Consideremos una matriz genérica $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Cuando estudiamos rango de matrices cuadradas, vimos que una matriz de $n \times n$ es inversible sí, y solo sí, su rango es n. Por lo tanto, A será inversible si tiene rango 2. Veamos, entonces, cuándo tiene A rango 2. Supongamos primero que $a \neq 0$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{c}{a}F_1} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{pmatrix}$$

Para que $rg(A) = 2$ no tiene que anularse la segunda fila. Es decir, $rg(A) = 2$ sí, y solo sí, $d - \frac{c}{a}b \neq 0$. Notemos que $d - \frac{c}{a}b = \frac{ad-bc}{a}$; y un cociente es 0 si el numerador es cero. Concluimos que $rg(A) = 2$ sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Hemos visto que una matriz (para la cual la entrada a_{11} es no nula) es inversible sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Justamente, buscábamos un número que caracterice de esta forma la inversibilidad de matrices. Veremos en breve que, precisamente, $ab - bc$ es el determinante de una matriz de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Qué sucede en caso que la entradad $1 - 1$ sea 0? Pues hay dos opciones.

- Si $c \neq 0$ entonces, para triangular, podemos primero intercambiar las filas y después proceder de idéntica manera:
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_2} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{a}{c}F_1} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b - \frac{a}{c}d \end{pmatrix}.$$
Luego, A es inversible sí, y solo sí, $b - \frac{a}{c}d \neq 0$. Pero $b - \frac{a}{c}d = \frac{bc-ad}{c}$, por lo que es cero sí, y solo sí, $bc - ad = 0$. A su vez, $bc - ad = 0$ sí, y solo sí, $ad - bc = 0$. Por lo tanto, para matrices con $a = 0$ pero $c \neq 0$, la misma fórmula $ad - bc$ determina la invertibilidad de la matriz.
- Si $c = 0$, entonces es fácil ver que la matriz no puede tener rango 2, por lo que no es inversible en este caso. Pero $ad - bc = 0d - b0 = 0$, por lo que la misma fórmula es coherente con lo que buscamos de ella.

Vimos entonces que, para cualquier matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se tiene que A es inversible sí, y solo sí, $ad - bc \neq 0$. Este número es lo que llamamos el *determinante de la matriz* A.

Definición 54 El determinante de una matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es el número $\det(A) = ad - bc$. También se nota $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right|$.

Observemos que la fórmula del determinante para matrices de 2×2 surge de hacer el mismo "movimiento elemental" que hacíamos para calcular el producto vectorial de vectores en $\mathbb{R}^3$. Lo transcribimos en la Figura 5.1 nuevamente para rápida referencia.

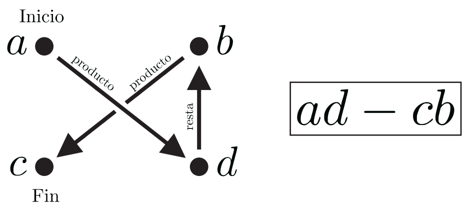


Figura 5.1: Movimiento elemental para calcular el determinante de una matriz de 2×2.

Estudien cómo se define el determinante de una matriz de dimensión 1×1 *para que verifique que la matriz es inversible, sí y solo sí, dicho número no es nulo.*

5.5.3 El determinante de una matriz de 3×3

En general, hay varias maneras de definir el determinante de una matriz. Por supuesto, todas ellas dan lugar al mismo número (el determinante de una matriz es único). En este libro estudiaremos la que se llama *desarrollo por filas o columnas* y consiste en reducir el problema de calcular el determinante de una matriz de $n \times n$ al de calcular varios determinantes de matrices de $(n-1) \times (n-1)$. En el caso de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, veremos que podemos expresarlo como una combinación de determinantes de "submatrices" de A de tamaño 2×2 (para las cuales ya sabemos calcularlo). ¿Cómo es este procedimiento? Lo mostramos en un ejemplo para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo que primero tenemos que saber es que *a cada entrada de la matriz le corresponde un "signo",* $+$ *o* $-$*, dependiendo de su ubicación*. Esto es lo que debemos considerar mientras hacemos la cuenta del determinante. La distribución de los signos en una matriz de 3×3 es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

¿En qué consiste entonces la fórmula del determinante de una matriz de 3×3? Pues primero debemos elegir *al azar* una fila o una columna de A. Supongamos que elegimos la fila F_1. Ahora, vamos a ir recorriendo las entradas de la fila (en alguna dirección que elijamos); por ejemplo, de izquierda a derecha. Comenzamos: la primera entrada es 2. El signo asociado a esta entrada es $+$. Este signo indica que **no** debemos cambiarle el signo al número. Lo que hacemos, a continuación, es "tachar" la fila y la columna en la que está ubicada nuestra entrada actual: en este caso, como estamos en la posición a_{11}, debemos tachar la primera fila y la primera columna. Observemos que, al hacer esto, queda naturalmente una matriz de 2×2 en la esquina inferior derecha. En nuestro ejemplo, se trata de $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Lo que hacemos, entonces, es *multiplicar el número* 2 *de la entrada* a_{11} *(que en este caso no fue modificado por el signo que le corresponde a la ubicación) por el determinante de esta submatriz menor* $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \ldots$$

Ahora pasamos a la segunda entrada de la fila F_1. En este caso, se trata de un -3. El signo que le corresponde a esta ubicación es $-$. Esto nos dice que *debemos cambiarle el signo a dicha entrada*. Por lo cual, consideraremos el número 3 para este paso. Ahora, nuevamente, tachamos la fila y la columna a la que pertenece la entrada. Es decir, tachamos la fila 1 y la columna 2. Nuevamente, obtenemos una submatriz de A de tamaño 2×2: aquella que se forma al quedarnos con las entradas de la matriz que no tachamos (en el mismo orden que aparecen). En nuestro ejemplo, es la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, multiplicamos el número 3 que teníamos en la entrada a_{12} (le habíamos cambiado el signo por orden del $-$ que le corresponde a dicha ubicación) por el determinante de esta matriz de 2×2, y sumamos este resultado a la cuenta que ya teníamos antes:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \ldots$$

El último que paso que falta es idéntico a los anteriores. Consideramos la entrada siguiente de la fila, la a_{13}, que es el número 5 y no le alteramos el signo pues el que le corresponde a dicha ubicación es $+$. Tachamos la primera fila y la tercera columna y nos queda la submatriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. Multiplicamos 5 por el determinante de esta matriz y sumamos el resultado al cálculo que veníamos haciendo:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$$

Como terminamos de recorrer toda la fila que habíamos elegido, entonces esto concluye el procedimiento. Notemos que el determinante de A quedó expresado como suma (de múltiplos) de determinantes de tamaño más pequeño. Solo nos resta calcular estos determinantes:

- $\left|\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{smallmatrix}\right| = 3(-1) - 0{,}7 = -3$
- $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right| = 1(-1) - 0(-2) = -1$
- $\left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 1{,}7 - 3(-2) = 13$

Concluimos entonces que:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 2(-3) + 3(-1) + 5{,}13 = 56$$

Observemos que hicimos varias elecciones arbitrarias en este procedimiento: elegimos libremente una fila (también podríamos haber optado por una columna) para recorrer y, también, en qué sentido recorrerla. La elección que hicimos se llama *desarrollar el determinante por la primera fila*. Pero podríamos haber elegido cualquier otra fila o columna. Esta libertad está justificada pues *el mismo procedimiento, realizado para cualquier otra fila y/o columna y para cualquier recorrido de la misma en cualquier dirección, da el mismo resultado*. Como ejemplo, veamos qué sucedería si hubiéramos desarrollado el determinante por la columna 3 recorriéndola de abajo hacia arriba. En primer término, consideramos la entrada a_{33}, que es -1. Como el signo que le corresponde a esta posición es $+$, mantenemos el -1. Al tachar la fila 3 y columna 3 nos queda la submatriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, por lo que:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \ldots$$

Ahora subimos al lugar a_{23}, que tiene un 0. Aquí el signo que le corresponde es $-$, por lo que habría que cambiarle el signo a la entrada. Pero, como es un 0, no hay que hacer nada. La submatriz que obtenemos al tachar es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$, por lo cual:

$$\text{Cálculo del determinante de } A\text{: } (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} \ldots$$

Finalmente, a la entrada 5 no hay que cambiarle el signo y la submatriz queda $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right)$. Concluimos entonces que:

$$\det(A) = (-1)\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{=9} + 0\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}_{=20} + 5\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}}_{=13} = (-1)9 + 5{,}13 = 56.$$

Les proponemos hacer otros ejemplos (eligiendo otras filas o columnas) para ver que siempre se obtiene el mismo número. En general, hay elecciones de filas o columnas que hacen las cuentas más sencillas. En efecto, notemos en este último desarrollo que hicimos (por la última columna) que, cuando estábamos en la posición a_{23}, tuvimos que hacer $0\left|\begin{smallmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 7 \end{smallmatrix}\right| = 0$. Es decir, como la entrada a_{23} es nula entonces el término correspondiente que le corresponde al determinante en el desarrollo es 0. En conclusión, *si estamos desarrollando el determinante por alguna fila o columna y en uno de los pasos la entrada es* 0*, ¡entonces podemos saltearla y seguir con la próxima entrada (no nula)!* En el ejemplo anterior, simplemente podríamos haber calculado:

$$\det(A) = (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 56$$

Concluimos, entonces, que, *nos conviene siempre desarrollar un determinante por una fila o columna que tenga muchas entradas nulas*. En el ejemplo anterior, también podríamos haber desarrollado por la segunda fila (que tiene un 0 en la posición a_{23}). Como una observación fundamental de este hecho, observemos que es muy sencillo (casi inmediato) calcular el determinante de las matrices triangulares. Les proponemos descubrirlo en el siguiente experimento.

Experimento 29 Supongan que tienen una matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

¿Por qué fila o columna conviene desarrollar el determinante? ¿Cuál es el resultado que obtienen? ¿Qué pueden concluir del determinante de las matrices de esta forma? ■

5.5.4 El determinante de una matriz de $n \times n$

Vamos ahora a generalizar lo hecho para el caso 3×3. El procedimiento es exactamente el mismo: elegimos una fila (o columna), la recorremos en cualquier dirección y vamos multiplicando cada entrada de esa fila (o columna), modificada por el signo que le corresponde dada su ubicación, por el determinante de la matriz de un tamaño más pequeño que obtenemos al tachar la fila y columna a la que pertenece la entrada en cuestión. La asignación del signo en el caso general es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \cdots & \mp \\ + & - & + & \cdots & \pm \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pm & \mp & \pm & \cdots & \pm \end{pmatrix}$$

Aquí, el símbolo $\pm$ indica que irá un $+$ o un $-$: será un $+$ si el signo anterior en la fila es un $-$ y será un $-$ si el signo anterior es un $+$ (lo mismo se puede decir del signo siguiente de la columna; por este motivo, el signo de la posición a_{2n} aparece como $\mp$, en lugar de $\pm$, para remarcar que es el signo opuesto). Observemos que, en cada fila o columna, los signos van alternándose. ¿Cómo recordar esta distribución? El lugar a_{11} siempre tiene un $+$, a partir de ahí ya sea que nos movamos sobre la fila o sobre la columna los signos se alternan.

Otra manera de saber qué signo va en cada lugar es la siguiente *regla*: el signo que va en la posición a_{ij} es "$+$" si $i+j$ es un número par y es "$-$" si $i+j$ es un número impar. Por ejemplo, a la posición a_{32} le corresponde un "$-$" pues $3+2=5$ es impar. La posición a_{13} le corresponde un "$+$" pues $1+3=4$ es par. Tengamos en cuenta que a las entradas de la diagonal siempre le corresponden el signo $+$.

Antes de mostrar la fórmula general del determinante, hagamos un ejemplo para una matriz de tamaño 4×4. Supongamos que queremos calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Al igual que el caso de matrices de 3×3, nos conviene desarrollar por una fila o columna que tenga la mayor cantidad de entradas nulas. Por ejemplo, podemos elegir la segunda fila. Entonces:

$$\det(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio} \\ \text{de signo}}}{3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cambio} \\ \text{de signo}}}{4} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

El determinante de A nos queda entonces en función de determinantes de matrices de 3×3. Los calculamos:

- $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 2\left|\begin{smallmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right| - 2\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2(-8) - 13 - 2(-1) = -27$
- $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 2\left|\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right| = 2{,}13 - 2 = 24$
- $\left|\begin{smallmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right| = 2(-1) - 4 = -6$

En el primer determinante desarrollamos por la primera fila y, en los últimos dos, por la primera columna (que poseía un cero en la posición $3-1$). Por lo tanto, hemos hallado que:

$$\det(A) = 3(-27) - 4{,}24 - 6 = -183$$

Hasta aquí vimos que, cuanto más grande la matriz, más difícil es calcular su determinante. Por ejemplo, en una matriz de 5×5, el procedimiento descompone el determinante en suma de múltiplos de varios determinantes de 4×4, y tendremos que calcular estos determinantes de 4×4 descomponiendo cada uno en suma de múltiplos de determinantes de 3×3 (que a su vez se descomponen en suma de múltiplos de determinantes de 2×2). Más adelante, estudiaremos algunas propiedades del determinante que nos permitirán simplificar el cálculo del mismo sin tener que hacer todas estas cuentas.

¿Cómo se define, en general, el determinante de una matriz de $n\times n$? Supogamos, que tenemos $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ y llamemos A_{ij} a la submatriz de A de tamaño $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene al sacar la fila i y la columna j de A

(y dejar el resto de las filas y columnas en su ubicación original). Es decir:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aquí, los a_{ij} son las entradas de la matriz A. Entonces, eligiendo la fila 1 para desarrollar, el determinante de A es el número:

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) + \dots \pm a_{1n}\det(A_{1n})$$

El símbolo $\pm$ al final dice que el signo $+$ o $-$ será determinado por el tamaño de la matriz: si n es impar, entonces, será un $+$ y si n es par será un $-$. Esto se debe simplemente a que estamos modificando cada entrada de la primera fila teniendo en cuenta el signo que le corresponde por su ubicación. Una manera más formal de decirlo es que la entrada a_{ij} aparece multiplicada por $(-1)^{i+j}$. Por supuesto, podemos desarrollar por cualquier fila o columna y obtendremos el mismo resultado. En general, si desarrollamos por la fila k entonces el determinante es la suma de los términos $(-1)^{k+j}a_{kj}A_{kj}$ para todos los j entre 1 y n. Es decir:

$$\det(A) = (-1)^{k+1}a_{k1}\det(A_{11}) + (-1)^{k+2}a_{k2}\det(A_{12}) + \dots + (-1)^{k+n}a_{kn}\det(A_{kn})$$

Escriban la fórmula del determinante si se lo desarrolla por la columna k.

Observación 22 *Notemos que el determinante de la matriz identidad (de cualquier tamaño) es* 1. *También, al igual que el resultado del Experimento 29, el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas de la diagonal.*

5.5.5 Propiedades del determinante

Vamos a estudiar algunas propiedades del determinante. Esto nos permitirá, en general, simplificar el cálculo de este número y, a veces, evitarlo completamente. Queremos estudiar *¿cómo cambia el determinante luego de una operación elemental de fila?*

Vimos que el rango de una matriz no se altera al hacer una operación elemental de fila (o columna). En el caso del determinante, sí se altera y es posible decir exactamente de qué manera.

- *Intercambio de filas:* Si B es la matriz que se obtiene de A al intercambiar las posición de dos filas, entonces, $\det(B) = -\det(A)$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- *Multiplicación de fila por un real no nulo:* Si B es la matriz que se obtiene de A al multiplicar una fila por un $\lambda \neq 0$, entonces, $\det(B) = \lambda \det(A)$. Es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- *Suma a una fila un múltiplo de otra:* Si B es la matriz que se obtiene de A al sumar a una fila un múltiplo de otra, entonces $\det(B) = \det(A)$; vale decir, en este caso *el determinante no cambia*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Las mismas propiedades valen si intercambiamos la palabra "fila" por "columna" en los items anteriores.

Calculen el determinante de la matriz λA para $\lambda \in \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que todas las entradas de la matriz λA están multiplicadas por λ.

Estas operaciones pueden utilizarse para simplificar el cálculo del determinante. Por ejemplo, consideren la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Esta matriz tiene números muy grandes y va a ser incómodo hacer cuentas con estos números. Observemos que las entradas de la primera fila son todos múltiplos de 7. Por lo tanto, podemos utilizar la segunda propiedad enunciada arriba para escribir:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7{,}2 & 7{,}3 & 7{,}6 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix}$$

Ahora, como restar a una fila un múltiplo de otra no altera el determinante, entonces podemos hacer las operaciones $F_2 \to F_2 - 16F_1$ y $F_3 \to F_3 - 9F_1$ y obtener:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix}$$

Este último determinante es más sencillo de calcular; podemos desarrollar por la primera columna y obtener:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -12 & -16 \end{vmatrix} = 2(-64 - 72) = -272$$

Por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7(-272) = -1904$$

Tengamos en cuenta que, en el ejemplo recién visto, apuntamos a conseguir ceros en la primera columna para poder desarrollar por allí y ahorrarnos cuentas (al solo tener que calcular un determinante de 2×2). Una posible estrategia para calcular el determinante de una matriz puede ser la siguiente: triangular la matriz (utilizando las operaciones elementales de filas) *llevando la cuenta de cómo va cambiando el determinante según la operación que utilicemos*. Como el determinante de una matriz triangular es, simplemente, el producto de las entradas en la diagonal, solo debemos multiplicar este último determinante por los factores que fueron alterando el determinante original mientras hacíamos las operaciones de filas. Por ejemplo, en el ejemplo anterior habíamos visto que:

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & -12 & -16 \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, a la última matriz que obtuvimos del ejemplo anterior, podemos hacerle $F_3 \to F_3 + 3F_2$ y obtener el determinante de una matriz triangular (nuevamente, esta operación no cambia el determinante que teníamos):

$$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 42 \\ 32 & 52 & 90 \\ 18 & 15 & 38 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -34 \end{vmatrix} = 7{,}2{,}4.(-34) = -1904$$

Ejemplifiquemos cómo fueron los pasos que hicimos para tener presente cómo y cuándo fue cambiando el determinante original. Notaremos con A_i a las matrices que vamos obteniendo en cada paso de la triangulación. Observemos que “sacar el factor 7” de la primera fila de la matriz original equivale a multiplicar por $\frac{1}{7}$ la primer fila de dicha matriz:

$$A \xrightarrow{\frac{1}{7}F_1} A_1 \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 9F_1]{F_2 \to F_2 - 16F_1} A_2 \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 3F_2} A_3$$

Como A_3 está triangulada, entonces su determinante es el producto de sus entradas en la diagonal. ¿Cómo se relacionan el determinante que buscamos (el de A) con el de A_3? Analizamos los pasos que hicimos para triangular A. El primer paso consistió en multiplicar F_1 por $\frac{1}{7}$. Esto quiere decir, precisamente, que la primera fila de A es 7 veces la primera fila de A_1. Por lo tanto, $\det(A) = 7\det(A_1)$, según nos dice la propiedad del determinante respecto de esta operación elemental. Por otro lado, a partir de A_1, las operaciones siguientes que hicimos no alteran el determinante. Por lo tanto, $\det(A_1) = \det(A_2) = \det(A_3)$. Concluimos que $\det(A) = 7\det(A_1) = 7\det(A_3)$. Como el determinante de A_3 es $2{,}4.(-34) = -272$, entonces, $\det(A) = -1904$.

Hagamos un ejemplo más de cómo calcular el determinante triangulando la matriz. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -15 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

La triangulamos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & -15 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}}_{A} \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & -15 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}}_{A_1} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 5F_1]{F_2 \to F_2 - 3F_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & -11 & -33 \\ 0 & -20 & -28 \end{pmatrix}}_{A_2} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}F_3]{-\frac{1}{11}F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}}_{A_3} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 5F_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}}_{A_4}$$

Hemos llegado, entonces, a una matriz triangulada y es sencillo ver que su determinante es -8. Analicemos cómo fue cambiando el determinante durante las operaciones de la triangulación. Veremos que es conveniente empezar desde atrás.

- Como la operación $A_3 \to A_4$ no altera el determinante, entonces, $\det(A_4) = \det(A_3)$.
- Como A_2 se obtiene de A_3 al multiplicar la fila F_2 por -11 y la fila F_3 por -4, entonces, $\det(A_2) = (-11)(-4)\det(A_3)$.
- Como las operaciones en $A_1 \to A_2$ no alteran el determinante, entonces, $\det(A_2) = \det(A_1)$.
- Como en $A \to A_1$ intercambiamos filas, entonces, $\det(A) = -\det(A_1)$.

"Desandando" toda esta información de abajo hacia arriba, obtenemos:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\det(A_1) = -\det(A_2) = -(-11)(-4)\det(A_3) \\ &= -(-11)(-4)\det(A_4) = -(-11)(-4)(-8) = 352 \end{aligned}$$

Experimento 30 Analicen las siguientes preguntas respecto del determinante:

1. ¿Cuál es el determinante de una matriz que tiene una fila (o columna) de ceros?
2. ¿Cúal es el determinante de una matriz que tiene dos filas (o dos columnas) iguales?
3. ¿Cuál es el determinante de una matriz de $n \times n$ que tiene rango menor a n?

Desde un comienzo precisamos que la propiedad que más nos importa del determinante es que el mismo establece cuándo una matriz es inversible. Lo dejamos anunciado:

Proposición 23 Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible sí, y solo sí, $\det(A) \neq 0$.

Esto ya lo trabajamos para matrices de 2×2. Una manera de convencerse que también es válido para matrices de cualquier tamaño es la siguiente: en el apartado anterior vimos que, si triangulamos una matriz, entonces el determinante de la matriz triangulada es modificado por algunos cambios de signo y por productos por números reales *no nulos*. Observemos que estas modificaciones no afectan si el determinante es o no 0; es decir, si el determinante de la matriz original es no nulo, entonces el de la matriz triangulada también; y viceversa. Sabemos que el determinante de una matriz triangular es el producto de las entradas de la diagonal y, cuando estudiamos rango, vimos que una matriz es inversible sí, y solo sí, cuando la triangulamos, no le quedan entradas nulas en la diagonal. Por lo tanto, ¡una matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante es no nulo!

Ejemplo 56 ¿Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ es inversible $\begin{pmatrix} 4+k & k & 7 \\ 3 & k & 6 \\ 3-k & 0 & k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$? La matriz es inversible sí, y solo sí, su determinante no es 0. Calculamos el determinante (desarrollando por la columna 2):

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4+k & k & 7 \\ 3 & k & 6 \\ 3-k & 0 & k \end{vmatrix} &= -k(3k-6(3-k))+k((4+k)k-7(3-k)) \\ &= -k(9k-18)+k(k^2+11k-21) = k(-9k+18+k^2+11k-21) \\ &= k(k^2+2k-3) = k(k-1)(k+3).\end{aligned}$$

Este determinante se anula para $k=0$, $k=1$ y $k=-3$. Esto quiere decir que la matriz es inversible para todo k distinto de esos valores. ■

La última propiedad que vamos a estudiar del determinante es cómo se comporta respecto de la multiplicación de matrices.

Proposición 24 Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entonces $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(B)$.

Es decir, "el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de dichas matrices". Esto tiene muchas consecuencias que les dejamos para que averigüen en el siguiente experimento.

Experimento 31 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Usando la Proposición 24, respondan las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es el determinante de A^k, la potencia k-ésima de A? Aquí $k \in \mathbb{N}$.
2. Si A es inversible, ¿cuál es el determinante de A^{-1}? Recuerden que $AA^{-1} = I$.
3. Si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no es inversible, ¿qué pueden decir de $A\cdot B$ y de $B\cdot A$?
4. Si $A\cdot B$ es inversible, ¿qué pueden decir de A y de B?

■

5.5.6 Utilizando el determinante para clasificar sistemas lineales

Ya sabemos que un sistema de ecuaciones lineales con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado sí, y solo sí, su matriz asociada es inversible. Podemos entonces concluir que *un sistema de ecuaciones lineales con igual cantidad de ecuaciones que de incógnitas es compatible determinado sí, y solo sí, su matriz asociada tiene determinante no nulo*. Por lo tanto, para clasificar un sistema, el determinante nos indica de manera directa si es o no compatible determinado. En caso que el determinante sea nulo, tendremos que estudiarlo de otra manera para determinar si se trata de un sistema compatible indeterminado o un sistema incompatible.

El determinante es espacialemente útil a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales *con parámetros*. En efecto, consideremos nuevamente el sistema de la página 135:

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + kx_2 + kx_3 &= 0 \end{cases}$$

En lugar de triangular este sistema y analizar para qué valor de k se anula alguna entrada de la diagonal, podemos directamente calcular el determinante (por la segunda columna, por ejemplo):

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & k & k \end{pmatrix} = -k(2k-2) - k(1-2) = -k(2k-2-1) = -k(2k-3).$$

El número $-k(2k-3)$ se anula para los valores $k=0$ y $k=-\frac{3}{2}$. Por lo tanto, para los valores de k distintos de 0 y $-\frac{3}{2}$, el sistema es compatible determinado. Observemos qué sencillo fue hallar estos valores de k, sin necesidad de triangular la matriz con el k como entrada. Por supuesto, debemos aún analizar los casos $k=0$ y $k=-\frac{3}{2}$ por separado para determinar si en esos casos el sistema es incompatible o compatible indeterminado.

Hagamos un último ejemplo. Clasifiquemos nuevamente el sistema con dos parámetros de la página 138 utilizando determinantes:

$$\begin{cases} (a+1)x+y+z &= 1 \\ x+(a+1)y+z &= b \\ x+y+(a+1)z &= b^2 \end{cases}$$

Ya sabemos que, para que el sistema sea compatible determinado, depende solo de la matriz (no ampliada) asociada al sistema. Por lo tanto, calculamos el determinante (desarrollando por la primera fila):

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix} &= (a+1)((a+1)^2-1)-((a+1)-1)+(1-(a+1)) \\ &= (a+1)(a^2+2a)-2a = a(a+1)(a+2)-2a \\ &= a((a+1)(a+2)-2) = a(a^2+3a) = a^2(a+3) \end{aligned}$$

El determinante de la matriz asociada se anula, entonces, en $a=0$ y $a=-3$, por lo que ya podemos concluir que para los valores de a distintos de estos dos, el sistema es compatible determinado. Por último, nos resta analizar los casos $a=0$ y $a=-3$ reemplazando en la matriz ampliada asociada:

Caso $k=0$ Caso $k=-3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & b^2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{array}\right)$$

En el primer caso, las tres ecuaciones asociadas a la matriz son la misma ecuación. Por lo tanto, para que el sistema no sea incompatible, lo que está del otro lado de la igualdad (los coeficientes independientes) deben ser iguales. Es decir, para que el sistema sea compatible indeterminado debe suceder $1=b=b^2$, cuya única solución es $b=1$. Para $b\neq 1$, el sistema es incompatible. En el segundo caso, ya no es tan inmediato darse cuenta quien tiene que ser b para que el sistema no sea incompatible. Debemos triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \updownarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 1 & -2 & 1 & b \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_3\to F_3+2F_1]{F_2\to F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b-b^2 \\ 0 & 3 & -3 & 1+2b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\to F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b^2 \\ 0 & -3 & 3 & b-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b+1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, el sistema será compatible indeterminado sí, y solo sí, $b^2+b+1=0$. Pero como este número siempre es mayor a cero (cualquiera sea el $b\in\mathbb{R}$), entonces el sistema es incompatible siempre. De esta manera, arribamos a las mismas conclusiones que en nuestra resolución original (de la página 139), solo que haciendo menos cuentas.

¿Qué hicimos en el apartado 5.5?

- Definimos el determinante de una matriz cuadrada.
- Aprendimos a calcular el determinante de una matriz mediante el desarrollo por filas o columnas.
- Estudiamos las propiedades básicas del determinante: su relación con las operaciones elementales de filas (o columnas) y su relación con la inversibilidad de la matriz.
- Utilizamos el determinante para clasificar y resolver sistemas de ecuaciones lineales (con y sin parámetro).

6. Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son un tipo de funciones entre espacios vectoriales, que preservan su geometría lineal. Las mismas sirven para modelar una gran variedad de operaciones geométricas, tales como rotaciones, simetrías, proyecciones, etc. En este capítulo estudiaremos su definición, propiedades y aplicaciones.

6.1 La transformación lineal

Comencemos entendiendo la propiedad definitoria de las transformaciones lineales, sus características principales y la manera de representarlas.

En este apartado estudiaremos...

- La definición transformación lineal.
- Ejemplos de varias transformaciones lineales.
- Las propiedades básicas de estas funciones.
- La representación funcional y la representación matricial de una transformación lineal.
- Cómo construir transformaciones lineales.

■

6.1.1 ¿Que caracteriza a una transformación lineal?

La idea fundamental de una transformación lineal es que envía un espacio lineal a otro espacio lineal, respetando las operaciones (de suma y producto por escalar) definidas en estos espacios. Por ejemplo, envía una recta L a otra recta L', pero lo hace de forma tal que, entre otras cosas, si el punto $P \in L$ es enviado al punto $P' \in L'$ y, el punto $Q \in L$, a $Q' \in L'$, entonces el punto medio entre P y Q es enviado al punto medio entre P' y Q'. ¿Qué característica de una función nos garantiza tener esta propiedad? Sabemos que el punto medio entre P y Q se calcula $\frac{P+Q}{2}$. Tengamos en cuenta que, si solicitamos que la función en cuestión envíe “sumas en sumas” (en el sentido que a un punto $P + Q$ lo envíe a $P' + Q'$) y que, además, envíe “múltiplos en múltiplos” (en el sentido que a un múltiplo λP lo envíe a $\lambda P'$), entonces tendremos garantizado que el punto medio entre P y Q también sea enviado al punto medio entre P' y Q'. En efecto, $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(P+Q)$, por lo cual es enviado al múltiplo de $\frac{1}{2}$ del destino de $P+Q$, que es precisamente $P'+Q'$. Estas propiedades de respetar la suma y el producto por escalar son, entonces, las propiedades características de las transformaciones lineales.

Definición 55 Una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una *transformación lineal* si cumple las siguientes dos condiciones:

1. $T(\lambda\vec{v}) = \lambda T(\vec{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
2. $T(\vec{v}+\vec{w}) = T(\vec{v}) + T(\vec{w})$ para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Observación 25 *Las dos propiedades definitorias de las transformaciones lineales (contenidas en la definición anterior) pueden expresarse informalmente diciendo que "sacan escalares afuera" y "abren sumas".*

Como una transformación lineal es una función entre un espacio $\mathbb{R}^n$ y un espacio $\mathbb{R}^m$, entonces, a cada punto $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, le asigna un punto $(y_1,\dots,y_m) \in \mathbb{R}^m$. Si llamamos T a la transformación lineal, entonces $T(x_1,\dots,x_n)$ respresenta al punto $(y_1,\dots,y_m)$ (al igual que $f(x)$ suele representar la imagen del punto x por la función real f). Al igual que las funciones de valores reales, el espacio de salida $\mathbb{R}^n$ se lo llama el *dominio* de la transformación lineal y al espacio de llegada $\mathbb{R}^m$, el *codominio*. Como $(y_1,\dots,y_m)$ depende de quién es $(x_1,\dots,x_n)$, entonces cada coordenada de $(y_1,\dots,y_m)$ depende de las coordenadas $x_1,\dots,x_n$. Veremos en breve que esta dependencia es por medio de una relación lineal. Por ejemplo, la función $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 5x_2, 3x_1-2x_2)$, es una transformación lineal entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. El punto $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ es enviado al punto:

$$T(\underbrace{1}_{x_1},\underbrace{2}_{x_2}) = (\underbrace{1+2}_{x_1+x_2},\underbrace{5{,}2}_{5x_2},\underbrace{3{,}1-2{,}2}_{3x_1-2x_2}) = (3,10,-1) \in \mathbb{R}^3$$

Ejemplo 57

- Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida por $T(x_1,x_2,x_3) = (2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)$, entonces T es una transformación lineal. Veamos que cumple las dos condiciones de la definición. Para saber que saca escalares afuera, veamos cuánto es $T(\lambda(x_1,x_2,x_3))$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1,x_2,x_3)) &= T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \\ &= (2\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - 4\lambda x_3) \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es ver que esta última expresión es igual a $\lambda T(x_1,x_2,x_3)$. Para ello, saquemos λ de factor común:

$$\begin{aligned} T(\lambda(x_1,x_2,x_3)) &= (2\lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3, \lambda x_1 - 4\lambda x_3) \\ &= \big(\lambda(2x_1+x_2-x_3), \lambda(x_1-4x_3)\big) \\ &= \lambda(2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3) \\ &= \lambda T(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

Esto prueba que T cumple la primera condición para ser transformación lineal. Veamos ahora que T también abre sumas:

$$\begin{aligned} T((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) &= T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ &= \big(2(x_1+y_1)+(x_2+y_2)-(x_3+y_3), (x_1+y_1)-4(x_3+y_3)\big) \\ &= (2x_1+2y_1+x_2+y_2-x_3-y_3, x_1+y_1-4x_3-4y_3) \end{aligned}$$

Debemos comprobar que esta última expresión es igual a $T(x_1,x_2,x_3)+T(y_1,y_2,y_3)$. Para ello, agrupemos, por un lado, las coordenadas con x_1, x_2 o x_3 y, por el otro, las que tienen y_1, y_2 o y_3. Entonces:

$$\begin{aligned} T((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) &= (2x_1+2y_1+x_2+y_2-x_3-y_3, x_1+y_1-4x_3-4y_3) \\ &= (2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)+(2y_1+y_2-y_3, y_1-4y_3) \\ &= T(x_1,x_2,x_3)+T(y_1,y_2,y_3). \end{aligned}$$

Con esto, hemos terminado de probar que T es una transformación lineal.

- Si $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ está ahora definida por $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-x_3+1, x_1-4x_3)$, entonces T **no** es una transformación lineal. Por ejemplo, no se cumple la segunda condición: $T((0,0,0)+(0,0,0))=T(0,0,0)=(1,0)$. Pero $T(0,0,0)+T(0,0,0)=(1,0)+(1,0)=(2,0)$.
- Por último, si $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ está definida por $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-x_3, x_1^2-4x_3)$, entonces T *tampoco* es una transformación lineal. No se cumple, por ejemplo, la primera condición: $T(2(1,0,0))=T(2,0,0)=(4,4)$, pero $2T(1,0,0)=2(2,1)=(4,2)$. O sea $T(2(1,0,0))\neq 2T(1,0,0)$.

■

Los siguientes son ejemplos de funciones, estudiadas en la escuela secundaria, que siempre son transformaciones lineales:

■ Ejemplo 58

- La *función nula* $\mathbf{0}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, dada por $\mathbf{0}(\vec{v})=\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$.
- La *función identidad* $\mathrm{id}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, dada por $\mathrm{id}(\vec{v})=\vec{v}$ para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$.
- La *función lineal con ordenada al origen cero* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=ax$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

■

Experimento 32 Muestren que una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ cumple las siguientes propiedades:

- $T(\vec{0})=\vec{0}$;
- $T(-\vec{v})=-T(\vec{v})$ para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$;
- $T(\vec{v}-\vec{w})=T(\vec{v})-T(\vec{w})$ para todo $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$;
- $T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_r\vec{v_r})=\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_rT(\vec{v_r})$ para todo $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in\mathbb{R}$ y $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v_r}\in\mathbb{R}^n$.

■

Observación 26 *La última propiedad del experimento anterior dice que las transformaciones lineales mandan una combinación lineal de los $v_1,\ldots,v_r$ en* la misma combinación lineal *en los $T(v_1),\ldots,T(v_r)$ (en el sentido que los coeficientes son los mismos).*

6.1.2 Forma funcional y matricial de una transformación lineal

Analicemos la tranformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ del primer ejemplo del apartado anterior con más detalle. Recordemos la fórmula: $T(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2-x_3, x_1-4x_3)$. Esta es la *forma funcional* de la transformación lineal (está escrita en forma de función). Recordemos que la base canónica de $\mathbb{R}^n$ es la base de este espacio compuesta por los vectores $\{(1,0,0,\ldots,0,1),(0,1,0,\ldots,0,1),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)\}$. En particular, la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Veamos qué hace T con los vectores de esta base.

- $T(1,0,0)=(2{,}1+0-0{,}1-4{,}0)=(2,1)$,
- $T(0,1,0)=(2{,}0+1-0{,}0-4{,}0)=(1,0)$,
- $T(0,0,1)=(2{,}0+0-1{,}0-4{,}1)=(-1,-4)$.

En general, para un punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ cualquiera, tenemos:

$$\begin{aligned} T(x_1,x_2,x_3) &= T(x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)) \\ &= T(x_1(1,0,0))+T(x_2(0,1,0))+T(x_3(0,0,1)) \\ &= x_1T(1,0,0)+x_2T(0,1,0)+x_3T(0,0,1) \\ &= x_1(2,1)+x_2(1,0)+x_3(-1,-4) \\ &= (2x_1,x_1)+(x_2,0)+(-x_3,-4x_3) \\ &= (2x_1+x_2-x_3,x_1-4x_3). \end{aligned}$$

¿Qué pasó al final? ¡Volvimos a la fórmula original! *Es que, al saber lo que hace una transfomación lineal en una base del dominio, se puede deducir lo que hace con un vector cualquiera.* Volveremos sobre esta idea en el siguiente apartado. Por otra parte, observemos que la última expresión se puede reescribir en *forma matricial* de la siguiente manera:

$$(2x_1+x_2-x_3,x_1-4x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ es la *matriz asociada* a la transfomación lineal T. En sus columnas tiene, en orden, las imágenes de los vectores de la base canónica. Notemos que, como T va de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$, entonces $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

Definición 56 Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, existe una única matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que T puede escribirse en la forma:

$$T(x_1,\ldots,x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o de modo equivalente,

$$T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v},$$

donde el vector $\vec{v} = (x_1,\ldots,x_n)$. La representación $T(\vec{v}) = A \cdot \vec{v}$ se llama *expresión matricial canónica* de T y a la matriz A se la denomina la *matriz de la transformación lineal* T. La matriz A tiene en la columna i-ésima a vector $T(\vec{e_i})$, con $\vec{e_i}$ el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ (es decir, el vector que tiene un 1 en la coordenada i y 0 en el resto de las coordenadas).

Si ahora consideramos una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y definimos una función $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por medio de la fórmula:

$$T(x_1,\ldots,x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

, entonces es fácil ver que T resulta una transformación lineal. Por lo tanto, *a cada transformación lineal le corresponde una matriz (su matriz asociada canónica) y a cada matriz le corresponde una transformación lineal (la determinada por la multiplicación de un vector por la matriz)*. Por lo tanto, la forma funcional y la forma matricial son maneras equivalentes de representar una misma transformación lineal.

Ejemplos 59

- La matriz asociada a la transformación lineal $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2, 5x_2, 3x_1-2x_2)$ es: $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$. Por lo tanto, la forma matricial de T es:

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

- La transformación lineal asociada a la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ tiene por forma funcional a $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_3, 5x_1 + 3x_2 - 2x_4)$.

■

Observación 27 *Observemos que, cuando la transformación lineal es dentro del mismo espacio $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz asociada es cuadrada.*

6.1.3 Cómo construir transformaciones lineales

Tal como establecimos en el apartado anterior, una transformación lineal queda completamente determinada por los valores que toma en una base de su dominio. Veamos un ejemplo. Hallemos, si es posible, una transformación lineal T que vaya de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (1,0,1)$ y $T(0,1) = (1,2,3)$. Luego, buscamos la expresión funcional de T. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, se puede escribir:

$$(x_1, x_2) = x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

Si aplicamos T a ambos lados de la igualdad, tenemos:

$$T(x_1, x_2) = T(x_1(1,0) + x_2(0,1))$$

Como estamos buscando una transformación lineal, entonces debemos requerir que T abra sumas y saque escalares afuera. Por lo tanto, si abrimos primero la suma y, luego, sacamos los escalares x_1, x_2 afuera, obtenemos lo siguiente:

$$T(x_1, x_2) = x_1 T(1,0) + x_2 T(0,1)$$

Dado que $T(1,0)$ y $T(0,1)$ son datos, entonces, queda:

$$T(x_1, x_2) = x_1(1,0,1) + x_2(1,2,3) = (x_1, 0, x_1) + (x_2, 2x_2, 3x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2, x_1 + 3x_2)$$

Esta es la forma funcional de una transformación lineal. Observemos que T quedó unívocamente determinada por los valores $T(1,0)$ y $T(0,1)$: la transformación lineal tiene que ser necesariamente $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_2, x_1 + 3x_2)$. Esto tiene que ver con que tenemos el dato de cuanto vale T en los vectores de una base. ¿Qué hubiera sucedido si nos hubieran dado los valores de T en una base que no es canónica? Miren el siguiente ejemplo.

■ **Ejemplo 60** Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (1,0,1)$ y $T(-1,1) = (1,2,3)$. En este caso, nos dan como dato los valores de la transformación lineal en la base $\{(1,1),(1,-1)\}$, que no es la base canónica. Pero esto no representa inconveniente alguno, ya que podemos realizar el mismo razonamiento que acabamos de hacer más arriba. Dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, como $\{(1,1),(1,-1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, se puede escribir:

$$(x_1, x_2) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1)$$

En este caso, hay que trabajar un tanto más pues debemos hallar α_1 y α_2. Si desarrollamos la expresión anterior, queda:

$$(x_1, x_2) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2).$$

Si igualamos coordenada a coordenada, obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas del que queremos despejar α_2 y α_2:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x_1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = x_2 \end{cases}$$

Observamos que $\alpha_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $\alpha_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$. Entonces, podemos escribir:

$$(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}(1,1) + \frac{x_1 - x_2}{2}(1,-1).$$

Si aplicamos T a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \tfrac{x_1+x_2}{2}T(1,1) + \tfrac{x_1-x_2}{2}T(1,-1) = \\ &= \tfrac{x_1+x_2}{2}(1,0,1) + \tfrac{x_1-x_2}{2}(1,2,3) = \\ &= \left(\tfrac{x_1+x_2}{2}, 0, \tfrac{x_1+x_2}{2}\right) + \left(\tfrac{x_1-x_2}{2}, 2\tfrac{x_1-x_2}{2}, 3\tfrac{x_1-x_2}{2}\right) = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{1}{2}x_2, x_1 - x_2, \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2\right) = \\ &= (x_1, x_1 - x_2, 2x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Y esta es la fórmula de la transformación lineal pedida. ■

El razonamiento que hicimos en el ejemplo anterior se puede realizar en una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ general: si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de la base:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_n\vec{v}_n.$$

Si aplicamos T a ambos miembros y usamos las propiedades definitorias de las transformaciones lineales, obtenemos:

$$T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_n T(\vec{v}_n).$$

Por lo tanto, para calcular $T(\vec{v})$, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, solo necesitamos conocer $T(v_1)$, $T(v_2)$, …, $T(v_n)$.

Teorema 28 Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y $w_1, w_2, \ldots, w_n$ son vectores (no necesariamente distintos) en $\mathbb{R}^m$, entonces hay una *única* transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \ldots, T(v_n) = w_n$.

Tengamos en cuenta que, en el enunciado del teorema anterior, no hay restricciones sobre quienes pueden ser los $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}^n$. Pueden ser vectores cualesquiera. Por ejemplo, hallemos, si es posible, una transformación lineal T tal que $T(1,0,0) = (1,1,2)$, $T(0,1,0) = (-1,2,3)$ y $T(2,2,1) = (0,1,2)$. Este caso es análogo a la construcción que realizamos en el ejemplo anterior, dado que $\{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ es un elemento cualquiera, entonces:

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(2,2,1)$$

Les proponemos verificar que se obtiene del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 &= x_1 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 &= x_2 \\ \alpha_3 &= x_3 \end{cases}$$

La única solución de este sistema es $\alpha_1 = \dfrac{x_1 - 2x_3}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{x_2 - 2x_3}{2}$ y $\alpha_3 = x_3$. Por lo tanto,

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - 2x_3}{2}(1,0,0) + \frac{x_2 - 2x_3}{2}(0,1,0) + x_3(2,2,1).$$

Si aplicamos T a ambos lados, resulta:

$$\begin{aligned} T(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{x_1-2x_3}{2}T(1,0,0)+\tfrac{x_2-2x_3}{2}T(0,1,0)+x_3T(2,2,1)= \\ &= \tfrac{x_1-2x_3}{2}(1,1,2)+\tfrac{x_2-2x_3}{2}(-1,2,3)+x_3(0,1,2)= \\ &= \left(\tfrac{x_1-x_2}{2},\tfrac{x_1+2x_2-4x_3}{2},\tfrac{2x_1+3x_2-6x_3}{2}\right) \end{aligned}$$

Esta es la forma funcional de T.

Importante Si los datos no están formulados sobre una base de $\mathbb{R}^n$, pueden pasar varias cosas: o bien no existe una transformación lineal que verifique los datos pedidos, o bien existe, pero no es es única. ■

■ Ejemplos 61

- Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0,0)=(1,1,2)$, $T(0,1,0)=(-1,2,3)$ y $T(2,2,0)=(0,1,3)$. Notemos que $\{(1,0,0),(0,1,0),(2,2,0)\}$ *no* es una base de $\mathbb{R}^3$. En efecto,

$$(2,2,0)=2(1,0,0)+2(0,1,0).$$

  Si existiera una transformación lineal que verifique los datos proporcionados debería, por las propiedades de las transformaciones lineales, preservar esa relación:

$$T(2,2,0)=2T(1,0,0)+2T(0,1,0).$$

  Sin embargo, tenemos:

$$T(2,2,0)=(0,1,3)\neq(0,6,10)=2(1,1,2)+2(-1,2,3)=2T(1,0,0)+2T(0,1,0).$$

  Concluimos que *no existe* una transformación lineal verificando los datos proporcionados: *las condiciones impuestas son incompatibles*.
- Hallemos ahora, y si es posible, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que: $T(1,0,0)=(1,1,2)$, $T(0,1,0)=(-1,2,3)$ y $T(2,2,0)=(0,6,10)$. Observemos que los datos para construir la transformación lineal, en este caso, son idénticos a los del ejemplo anterior, salvo que, ahora, el vector $(2,2,0)$ va a parar al $(0,6,10)$ (en lugar del $(0,1,3)$). Si revisamos el ejemplo anterior, vemos que *ahora sí* es compatible el valor que toma $(2,2,0)$ con los valores que asumen los otros dos vectores dato. ¿Qué sucede en este caso? El último dato no nos aporta información ni restricciones sobre la transformación lineal T que estamos buscando. Como vimos antes, podría determinar que no exista la transformación lineal (si fuese incompatible con las otras), pero si es compatible, no nos dice nada. Entonces, ¿cómo definimos una T que satisfaga los datos requeridos? La forma más fácil de definir una transformación lineal es decir qué valores toma en una base. Extendamos, entonces, el conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ (que son los vectores linealmente independientes de los cuales podemos utilizar los datos proporcionados) a una base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, a la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Dado que $T(1,0,0)=(1,1,2)$ y $T(0,1,0)=(-1,2,3)$, nos falta determinar $T(0,0,1)$. Pero el valor de $T(0,0,1)$ lo podemos elegir sin restricciones. Esto indica que existen infinitas posibles transformaciones lineales que verifiquen lo pedido: las condiciones impuestas son compatibles pero no la determinan de manera única. Por ejemplo, podemos decidir $T(0,0,1)=(0,0,0)$. En ese caso, nos quedaría la transformación lineal:

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2,x_1+2x_2,2x_1+3x_2-x_3),$$

  .

■

¿Qué hicimos en el apartado 6.1?

- Aprendimos la idea detrás de la noción de transformación lineal: una función que preserva la estructura de los espacios lineales.
- Trabajamos la definición formal de transformación lineal: "abre sumas" y "saca escalares afuera".
- Conocimos las propiedades básicas de las transformaciones lineales.
- Desarrollamos la forma funcional y la forma matricial de una transformación lineal.
- Vimos cómo construir transformaciones lineales.

6.2 Imagen y núcleo

Muchas propiedades de una transformación lineal se pueden estudiar a partir de su comportamiento respecto de ciertos subespacios del dominio o del codominio.

En este apartado estudiaremos...

- Las definiciones de imagen y de núcleo de una transformación lineal.
- La clasificación de transformaciones lineales según sean inyectivas, suryectivas o biyectivas.

6.2.1 Imagen

Consideremos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, llamamos al vector $T(\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$ la *imagen* de $\vec{v}$ por la transformación lineal T. En general, si $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, podemos calcular $T(S)$, la *imagen de S por T*, que se obtiene calculando, "todas juntas", las imágenes por T de todos los vectores $\vec{v} \in S$. Es decir,

$$T(S) = \{T(\vec{v}) : \vec{v} \in S\} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m : w = T(\vec{v}) \text{ para algún } \vec{v} \in S\}.$$

$T(S)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Para verificar si un vector dado $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ pertenece a $T(S)$, debemos hallar un $\vec{v} \in S$ de modo que $\vec{w} = T(\vec{v})$ (en este caso, $\vec{v}$ se llama la *preimagen* del vector $\vec{w}$). Este procedimiento es muy parecido al que se realiza cuando se busca hallar la imagen de una función.

Definición 57 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, la *imagen de T* es el conjunto:

$$Im(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^m : \vec{w} = T(\vec{v}) \text{ para algún } \vec{v} \in \mathbb{R}^n\}$$

La imagen de una transformación lineal es, entonces, el conjunto de todos los valores que puede tomar T.

Experimento 33 Muestren que, si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $T(S)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

El experimento anterior nos dice que una transformación lineal manda subespacios en subespacios. En particular, dado que $\mathbb{R}^n$ es un subespacio de sí mismo, entonces $Im(T) = T(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

¿Cómo hallar la imagen de una transformación lineal? Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$. Por definición, un elemento $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $Im(T)$ si, y sólo si, se puede escribir como $(y_1, y_2, y_3) = T(x_1, x_2, x_3)$ para algún $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Como $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$, entonces buscamos los $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_1 - 3x_2 + x_3)$$

Pero:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2, x_2-x_3, 2x_1-3x_2+x_3) &= (x_1,0,2x_1)+(x_2,x_2,-3x_2)+(0,-x_3,x_3)\\ &= x_1(1,0,-2)+x_2(1,1,-3)+x_3(0,-1,1)\end{aligned}$$

Entonces, concluimos que $(y_1,y_2,y_3) = x_1(1,0,-2)+x_2(1,1,-3)+x_3(0,-1,1)$; es decir, $(y_1,y_2,y_3) = \langle(1,0,-2),(1,1,-3),(0,-1,1)\rangle = \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle$, pues $(1,0,-2)-(1,1,-3) = (0,-1,1)$. Por lo tanto, hemos hallado que $Im(T) = \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle$.

Podemos dar otra manera de calcular $Im(T)$. Consideremos la definición de imagen siguiente:

$$Im(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{T(x_1,x_2,x_3) : (x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^n\}$$

Sabemos que $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y todo vector $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ se escribe como combinación lineal de esta base de la siguiente manera:

$$(x_1,x_2,x_3) = x_1(1,0,0)+x_2(0,1,0)+x_3(0,0,1)$$

Si aplicamos la transformación lineal a ambos lados, obtenemos:

$$T(x_1,x_2,x_3) = x_1T(1,0,0)+x_2T(0,1,0)+x_3T(0,0,1);$$

es decir, ¡los vectores de la imagen son las combinaciones lineales de $\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}$! Por lo tanto:

$$\begin{aligned}Img(T)=T(\mathbb{R}^n) &= \langle T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\rangle\\ &= \langle(1,0,-2),(1,1,-3),(0,-1,1)\rangle\\ &= \langle(1,0,-2),(1,1,-3)\rangle\end{aligned}$$

Este último procedimiento para calcular la imagen de una transformación lineal se puede realizar en forma general, a partir de la definición del siguiente teorema:

Teorema 29 Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, una transfomación lineal. Si $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)\}$ es un sistema de generadores de $Im(T)$.

Importante Si $B=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_n\}$ es una base, entonces $\{T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\cdots,T(\vec{v}_n)\}$ *no necesariamente es una base* de $Im(T)$; los vectores $T(\vec{v}_1),\dots,T(\vec{v}_n)$ podrían resultar linealmente dependientes. ■

Si $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es una transformaicón lineal, analicen si es posible que $\dim(Im(T))=3$. *Y, en general, cuál puede ser la máxima dimensión de la imagen. Estudien esta misma característica si $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$*

■ **Ejemplo 62** Sean S y W dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por $S=\langle(1,2,-1),(0,1,3)\rangle$ y $W=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0, x_3-2x_4=0\}$. Hallemos, si existe, una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ que verifique $T(S)=W$. En primer lugar, busquemos la descripción por generadores de T:

$$\begin{aligned}V &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0, x_3-2x_4=0\}\\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=-x_2, x_3=2x_4\}\\ &= \{(-x_2,x_2,2.x_4,x_4)\in\mathbb{R}^3 : x_2,x_4\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x_2(-1,1,0,0)+x_4(0,0,2,1) : x_2,x_4\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle(-1,1,0,0),(0,0,2,1)\rangle\end{aligned}$$

Para definir una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, basta especificar los valores que toma en una base del dominio (en este caso, $\mathbb{R}^3$). Como queremos asegurarnos que $T(S)=W$, debemos "manipular" convenientemente las imágenes de los vectores de la base de S. Extendemos la base de S a una base de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, $\mathcal{B} = \{(1, 2, -1), (0, 1, 3), (0, 0, 1)\}$ es una posible base de $\mathbb{R}^3$. Ahora, definimos:

- $T(1, 2, -1) = (-1, -1, 0, 0)$
- $T(0, 1, 3) = (0, 0, 2, 1)$,

lo cual nos garantiza que $T(S) \subset W$. ¿Qué sucede con $T(0, 0, 1)$? Dado que $(0, 0, 1) \notin S$, no hay restricciones para determinar $T(0, 0, 1)$. Podemos elegir, por ejemplo, $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$. Dado que:

$$T(S) = \langle T(1, 2, -1), T(0, 1, 3)\rangle = \langle(-1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\rangle = W,$$

la transformación lineal así definida satisface $T(S) = W$. ■

Experimento 34 Consideren una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con expresión funcional $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$. Verifiquen que la matriz canónica asociada a T tiene, en sus columnas, a las imágenes por T de los vectores de a base canónica de $\mathbb{R}^2$. ■

Observación 30 *Notemos que, del experimento anterior, podemos concluir que $Im(T)$ está generada por los vectores columna de A_T y que $\dim(Im(T)) = rg(A_T)$.*

6.2.2 Núcleo

Para una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y un vector $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$, nos interesará averiguar qué vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tienen como imagen a $\vec{w}$; es decir, $T(\vec{v}) = \vec{w}$. Recordemos que este conjunto se llama la *preimagen de w* por T, y se define por:

$$T^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) = \vec{w}\}.$$

En general, si $W \subseteq \mathbb{R}^m$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, la *preimagen de W* por T es el conjunto de vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ cuya imagen pertenece a W. Es decir:

$$T^{-1}(W) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) \in W\}.$$

En particular, nos interesará calcular el conjunto de vectores del dominio donde la transformación lineal se anula. Este conjunto se denomina *núcleo de T*, y se puede pensar como el "conjunto de ceros" de la función T.

Definición 58 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, el *núcleo* de T es el conjunto:

$$Nu(T) = T^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \,:\, T(\vec{v}) = \vec{0}\}.$$

Experimento 35 Comprueben que, si W es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $T^{-1}(W)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. ■

Observemos que, del experimento anterior, dado que $\{0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$, entonces $Nu(T) = T^{-1}(0)$ es siempre un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

■ **Ejemplo 63** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3)$. Entonces:

$$\begin{aligned} Nu(T) &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : T(x_1,x_2,x_3) = (0,0)\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 - x_2, x_2 - x_3) = (0,0)\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\,, x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2, x_3 = x_2\} \\ &= \{(x_2,x_2,x_2) \in \mathbb{R}^3 : x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,1) \rangle \end{aligned}$$

Observemos que, para hallar $Nu(T)$, tuvimos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

que proviene de igualar a cero cada coordenada de la expresión de T. La expresión matricial de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

¡Notemos que la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ es la matriz A_T asociada a T! ■

La situación del ejemplo anterior ocurre en general. Lo enunciamos en la siguiente observación.

Observación 31 *Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal y A_T es la matriz canónica asociada a T, entonces $Nu(T)$ es el espacio de soluciones del sistema homogéneo $A_T \cdot \vec{x} = \vec{0}$.*

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, $Nu(T)$ es un subespacio del dominio e $Im(T)$ es un subespacio del codominio; es decir, estos subespacios "viven" en lugares distintos. Sin embargo, hay una relación muy fuerte entre sus dimensiones:

Teorema 32 *[Teorema de la dimensión]* Para cualquier transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, vale que:

$$\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = n$$

Es decir, la suma de la dimensión del núcleo y la dimensión de la imagen coincide con la dimensión del dominio de la transformación lineal.

6.2.3 Clasificación de transformaciones lineales

Vamos a estudiar cómo se clasifican las transformaciones lineales según sean suryectivas, inyectivas o biyectivas.

Definición 59 Decimos que una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es:

- *Monomorfismo* si es inyectiva, esto es, si verifica que si $T(\vec{v}) = T(\vec{w})$ entonces $\vec{v} = \vec{w}$.
- *Epimorfismo* si es suryectiva, esto es, si $Im(T) = \mathbb{R}^m$.
- *Isomorfismo* si es biyectiva, es decir, si es monomorfismo y epimorfismo.

Verificar la inyectividad en una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cualquiera puede resultar bastante complicado, pues hay que verificar que a cada vector de la imagen de f proviene de un único vector del dominio. En otras palabras, la función f es inyectiva si, para cada $\vec{w} \in Im(f)$, $f^{-1}(\vec{w})$ tiene un único elemento.

Para las transformaciones lineales, verificar la inyectividad es más simple. Sabemos que toda transformación lineal T tiene al vector nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ en la imagen, y que $T(\vec{0}) = \vec{0}$. Si T es monomorfismo, entonces $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ debe ser el *único* vector del dominio que llegue a $\vec{0}$. Es decir, $T^{-1}(0) = Nu(T)$ debe ser igual al subespacio nulo $\{\vec{0}\}$. Pero aún nos faltaría verificar que $T^{-1}(\vec{w})$ tiene un único elemento para el resto de los vectores $\vec{w}$ en la imagen. La buena noticia es que, para transfomaciones lineales, esto no es necesario.

Proposición 33 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces T es monomorfismo sí, y solo sí, $Nu(T) = \{\vec{0}\}$.

No es difícil demostrar esta proposición. Es claro que, si T es monomorfismo, entonces $Nu(T) = \{\vec{0}\}$. Para ver la otra implicación, supongamos que $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ pero que existe un vector no nulo $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ que es imagen de dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ distintos. ¿Qué sucede con el vector $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$? ¿Cuál es su imagen? Usando las propiedades de la tranformación lineal tenemos:

$$T(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) - T(\vec{v}_2) = \vec{w} - \vec{w} = \vec{0}.$$

Es decir, el vector $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 \in Nu(T)$. Pero este vector no es el vector nulo, pues estábamos asumiedo que $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ eran distintos. Esto contradice que $Nu(T) = \{\vec{0}\}$, que era una de nuestras hipótesis. Esto prueba la proposición anterior.

Anteriormente, vimos que si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ es linealmente independiente, entonces no necesariamente $\{T(\vec{v}_1)$, $T(\vec{v}_2)$,. . ., $T(\vec{v}_r)\}$, resulta linealmente independiente. Se puede mostrar que, si la transformación lineal es un monomorfismo, entonces sí se verifica esta condición:

Proposición 34 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Si T es monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_r)\}$ es linealmente independiente. En particular, $\dim(Im(T)) = n$.

Observemos que, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es monomorfismo y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es una base de $Im(T)$. Si, además, T es epimorfismo, entonces $Im(T) = \mathbb{R}^m$. En este caso, necesariamente, debe ocurrir que $n = m$ y que $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ es, en realidad, una base de $\mathbb{R}^n$. Podemos enunciarlo de la siguiente manera:

Proposición 35 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces T es isomorfismo sí, y solo sí, T manda bases en bases; es decir, si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \ldots, T(\vec{v}_n)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^n$.

- **Ejemplos 64**
  - Hallemos, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Nu(T) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$ e $Im(T) = \langle(1, 0, 1)\rangle$. Escribamos un sistema de generadores de $Nu(T)$:

$$\begin{aligned} Nu(T) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x_1 - x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2x_1 = x_2\} \\ &= \{(x_1, 2x_1) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle(1, 2)\rangle \end{aligned}$$

Definamos la transformación lineal buscada exhibiendo las imágenes por T de una base del dominio. Extendamos $\{(1, 2)\}$ a una base de $\mathbb{R}^2$; por ejemplo, $\{(1, 2),(0, 1)\}$. Dado que $(1, 2) \in Nu(T)$ y $(1, 0, 1) \in Im(T)$, podemos decir:

- $T(1, 2) = (0, 0, 0)$
- $T(0, 1) = (1, 0, 1)$

Sabemos que, entonces, existe una única transfomación lineal que cumple estas asignaciones. Verifiquemos que se cumplen las condiciones pedidas. Por un lado, tenemos:

$$Im(T) = \langle T(1,2), T(0,1)\rangle = \langle (0,0,0), (1,0,1)\rangle = \langle (1,0,1)\rangle.$$

Por otro lado, veamos que $Nu(T) = \langle (1,2)\rangle$. Por definición, $(1,2) \in Nu(T)$ y, entonces, $\langle (1,2)\rangle \subseteq Nu(T)$. ¿Puede ocurrir que $Nu(T)$ sea "más grande" que el subespacio $\langle (1,2)\rangle$? Si recordamos el Teorema de la dimensión (en la página 177), se tiene que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$. Dado que $\dim(Im(T)) = 1$, resulta necesariamente $\dim(Nu(T)) = 1$. Por lo tanto, $\langle (1,2)\rangle = Nu(T)$.

- Hallemos ahora, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que T sea epimorfismo y $Nu(T) = \langle (1,1,2)\rangle$. En este caso, si existiera una tal transformación lineal, debería verificarse, nuevamente, por el Teorema de la dimensión, que $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 3$. Pero en las condiciones pedidas, $\dim(Nu(T)) = 1$, y como T debe ser epimorfismo, $Im(T) = \mathbb{R}^3$, es decir, $\dim(Im(T)) = 3$. De esta manera, obtendríamos $\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = 1 + 3 = 4$, lo cual es imposible. Por lo tanto, podemos concluir que no existe la transformación lineal pedida.

■

Supongamos que tenemos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; es decir, con el mismo codominio que dominio. ¿Qué sucede si T es monomorfismo? En este caso, $Nu(T) = \{\vec{0}\}$ o, lo que es equivalente, $\dim(Nu(T)) = 0$. El Teorema de la dimensión nos dice que $0 + \dim(Im(T)) = n$. Pero como $Im(T) \subset \mathbb{R}^n$ y ambos subespacios tienen la misma dimensión entonces $Im(T) = \mathbb{R}^n$. Por lo tanto, concluimos que T es epimorfismo. ¿Qué sucede si, ahora, supiéramos que T es epimorfismo? El mismo razonamiento nos muestra que, entonces, $\dim(Nu(T)) = 0$, y esto quiere decir que T es monomorfismo. Notamos entonces que estas características están muy ligadas entre sí para transformaciones lineales con el mismo dominio y codominio. Lo enunciamos a continuación:

Proposición 36 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces son equivalentes, ya que T es:

- Monomorfismo.
- Epimorfismo.
- Isomorfismo.

¿Qué hicimos en el apartado 6.2?

- Introducimos la definición de imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como el conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^m$ que provienen de un vector de $\mathbb{R}^n$ por T.
- Definimos el núcleo de una transformación lineal, que consta de todos los vectores del dominio que son mandados al 0 por la transformación lineal.
- Estudiamos la clasificación de transformaciones lineales en epimorfismos (suryectivas), monomorfismos (inyectivas) e isormofismos (biyectivas) y su relación con el núcleo y la imagen de la transformación.

■

6.3 Interpretación geométrica del efecto de una transformación lineal

Muchas de las construcciones que estudiamos como proyecciones y simetrías en el capítulo 2 son realmente tranformaciones lineales. Por otro lado, algunas transformaciones lineales T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ pueden interpretarse geométricamente como rotaciones, proyecciones, simetrías, etc. En este apartado veremos cómo construirlas y clasificarlas.

En este apartado estudiaremos...

- La interpretación de las simetrías y las proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, como transformación lineal.
- La interpretación geométrica de ciertas tranformaciones lineales: rotaciones, simetrías, proyecciones, homotecias, deslizamientos cortantes.
- El efecto de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ sobre el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$.
- La interpretación geométrica del determinante de una matriz cuadrada.

Comencemos por las *Rotaciones en* $\mathbb{R}^2$. Consideremos un instante las agujas de un reloj. Si miramos el reloj en dos momentos distintos, el movimiento de cada aguja se puede modelar con una transformación lineal. Basta imaginar que la aguja es un vector y el reloj, el plano $\mathbb{R}^2$. Supongamos, entonces, que queremos rotar el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un ángulo $\theta > 0$ *en el sentido contrario a las agujas del reloj*, y que el vector obtenido luego de la rotación es el (x', y'). Si $||(x, y)|| = r$ y α es el ángulo entre el vector (x, y) y el vector $(r, 0)$ entonces, por trigonometría,

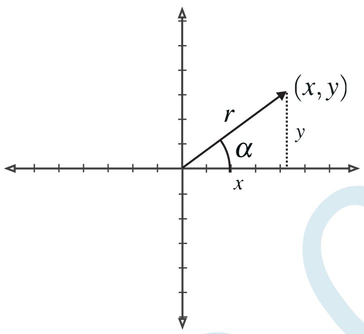


Figura 6.1: Rotación de un vector en $\mathbb{R}^2$.

$\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ y $\sin(\alpha) = \frac{y}{r}$ (Figura 6.1). Es decir:

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$$

Por otra parte, *rotar no cambia longitud del vector*, por lo que $||(x', y')|| = r$. Haciendo un razonamiento análogo al anterior, tenemos que $\cos(\alpha + \theta) = \frac{x'}{r}$ y $\sin(\alpha + \theta) = \frac{y'}{r}$. Es decir:

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha + \theta) \\ y' = r\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

Si ahora usamos algunas identidades trigonométricas obtenemos, por un lado:

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\alpha + \theta) \\ &= r\big(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)\big) \\ &= r\cos(\alpha)\cos(\theta) - r\sin(\alpha)\sin(\theta) \\ &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \end{aligned}$$

y, por otro lado:

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(\alpha + \theta) \\ &= r\big(\cos(\alpha)\sin(\theta) + \sin(\alpha)\cos(\theta)\big) \\ &= r\cos(\alpha)\sin(\theta) + r\sin(\alpha)\cos(\theta) \\ &= x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos hallado que:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

Esto podemos escribirlo en notación matricial y obtener:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El razonamiento anterior motiva, entonces, la siguiente definición:

Definición 60 Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que representa la rotación de ángulo $\theta > 0$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj, entonces la matriz canónica asociada a T es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

¿Qué sucede ahora si queremos rotar *en el sentido de las agujas del reloj*? En este caso, decimos que rotamos en un ángulo $-\theta$. Es decir, el signo del ángulo indicará la orientación de la rotación.

Rotar el vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un ángulo $\theta > 0$ en el sentido de las agujas de reloj, para obtener (x', y') corresponde entonces a la siguiente operación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Experimento 36 ¿Cuál es la matriz de la transformación lineal que rota un vector (x, y) en $\frac{\pi}{4}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj? ¿En qué vector se transforma el vector $(1, 1)$ luego de dicha rotación? Represéntelo también gráficamente. ■

¿Qué sucede con rotaciones en $\mathbb{R}^3$? Imaginemos nuevamente un reloj pero, esta vez, considerémoslo como habitando el espacio tridimensional; es decir, pensémoslo colgado sobre una pared en una habitación. En este caso, las agujas también rotan, pero lo hacen *respecto del eje perpendicular al reloj*. Es decir, si pensamos a las agujas como contenidas en el plano xy, la dirección que sale perpendicularmente del reloj correspondería al eje z; y la rotación de las agujas es respecto de este eje. En este libro, sólo estudiaremos rotaciones tridimensionales respecto de uno de los ejes. Para este caso, la interpretación de este efecto como transformación lineal es muy sencilla, ya que, realmente, sólo se modifican las coordenadas x e y de los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (la coordenada z queda inalterada). Además, la manera cómo se tranforman las coordenadas x e y es, exactamente, como una rotación del plano xy. En definitiva, arribamos a la siguiente definición:

Definición 61 Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal que representa la rotación de ángulo $\theta > 0$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj *respecto del eje* z, entonces la matriz canónica asociada a T es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A_T se interpreta de la siguiente manera: en la "submatriz" cuadrada de entradas a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22}, aparece una rotación en un plano que contiene a las coordenadas x, y y, el coeficiente 1 en el lugar a_{33}, nos dice que la coordenada z no es alterada.

Siguiendo el mismo razonamiento, podemos ver que la matriz asociada a una rotación tridimensional de ángulo θ, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, respecto del eje x es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mientras que la matriz asociada a una rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo θ, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, respecto del eje y es:

$$A_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ahora, estudiaremos las transformaciones lineales asociadas a las *simetrías en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ ya vistas en el capítulo 2.

Importante Las simetrías que pueden ser caracterizadas por transformaciones lineales son aquellas que se definen con respecto de rectas y planos que pasan por el origen. Esto es debido a que las transformaciones lineales son funciones entre subespacios vectoriales y, como vimos en el capítulo 3, los espacios vectoriales contienen el "cero", que en la geometría del plano y el espacio es el origen. ■

Comencemos estudiando las simetrías en el plano $\mathbb{R}^2$. Sea $L = \{X \in \mathbb{R}^2 \ : \ X = t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}\}$, la recta en $\mathbb{R}^2$ de vector director $\vec{v}$ que pasa por el origen, queremos hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforme cada vector de $\mathbb{R}^2$ en el vector simétrico respecto de la recta L (Figura 6.2).

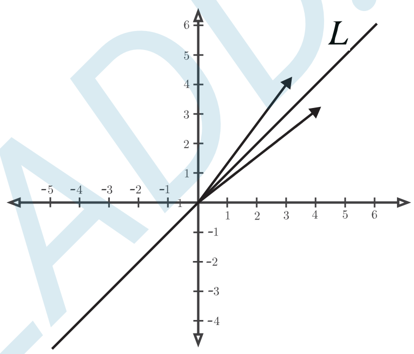


Figura 6.2: Un vector en $\mathbb{R}^2$ y simétrico.

Por un lado, que los vectores que pertenecen a la recta L quedan fijos por la simetría. En particular, $T(\vec{v}) = \vec{v}$. Por el otro lado, los vectores perpendiculares al vector director de la recta se transforman en sus inversos; es decir, el simétrico de (x, y) es $(-x, -y)$ en este caso (pueden comprobarlo por su cuenta). Por lo tanto, si $\vec{w}$ es un vector ortogonal a $\vec{v}$, entonces $T(\vec{w}) = -\vec{w}$. ¿Por qué nos interesan estos casos particulares de vectores? Porque $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, para saber cuál es la transformación lineal que modela una simetría, alcanza con determinar las imágenes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, ¡Es lo que acabamos de hacer!

Definición 62 Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que representa la simetría respecto de la recta L de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$ entonces, dado $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{v}$ cualquiera, T queda unívocamente determinada por los siguientes valores en la base $\{v, w\}$:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(\vec{w}) = -\vec{w} \end{cases}$$

Experimento 37 Calculen la expresión de la transformación lineal de la simetría respecto de la recta $y = 2x$ ¿Cuál es el vector simétrico de $(1, 1)$ respecto de esa recta? ■

Estudiemos ahora las simetrías en $\mathbb{R}^3$. Consideremos un plano Π en $\mathbb{R}^3$, de ecuación vectorial $X = t\vec{v} + s\vec{w}$ (que pasa por el origen). Queremos encontrar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que transforme cada vector de $\mathbb{R}^3$ en el vector simétrico respecto del plano Π. Si bien este problema es más complicado que el anterior, procedemos de la misma manera. Tengamos en cuenta que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ quedan fijos por la simetría, y si $\vec{N}$ es un vector normal al plano, entonces $\vec{N}$ se transforma en su opuesto $-\vec{N}$. Nuevamente, se puede probar que $\{v, w, N\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, por lo que alcanza con definir a T en esta base de la siguiente manera:

$$\begin{cases} T(v) = v \\ T(w) = w \\ T(N) = -N \end{cases}$$

Observación 37 *La matriz canónica asociada a la simetría respecto del plano xy es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las transformaciones del plano o del espacio que hemos estudiado hasta ahora *no* modifican el "tamaño" de los vectores. Pero es muy usual realizar transformaciones que sí lo hagan. Por ejemplo, si tenemos un dibujo en tamaño A4 y hacemos una fotocopia que reduce su tamaño a la mitad, entonces la transformación de los puntos del dibujo original al dibujo reducido, se puede modelar con un tipo especial de transformaciones lineales: *las homotecias*. En este ejemplo, la transformación de reducción de la fotocopia se modela con la transformación lineal $T(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)$. Una ampliación al doble de tamaño se traduce en la transformación lineal $T(x, y) = 2(x, y)$.

Definición 63 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice *homotecia* si $T(x, y) = k(x, y)$, con $k > 0$ fijo. La constante k se llama el *factor de la homotecia*. Si $0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y si $k > 1$, se denomina *dilatación*. Notemos que si $k = 1$, la transformación es la identidad.

Observación 38 *Es fácil convencerse que la matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Otro tipo de homotecia consiste en modificar el tamaño de los vectores de modo no homogéneo, es decir, mediante una dilatación o contracción en una dirección determinada (horizontal o vertical).

Definición 64 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice homotecia de factor k *en la dirección* x si $T(x, y) = (kx, y)$; y se dice homotecia de factor k *en la dirección* y si $T(x, y) = (x, ky)$. En ambos casos, si

$0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y, si $k > 1$, se denomina *dilatación*.

Observación 39

- *La matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k en la dirección x es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- *La matriz canónica asociada a una homotecia T de factor k en la dirección y es:*

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

Una contracción o dilatación de vectores en el caso tridimensional tiene exactamente el mismo significado que para las homotecias en $\mathbb{R}^2$. Las definiciones en este caso, son idénticas:

Definición 65 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice *homotecia* si $T(x, y, z) = k(x, y, z)$, con $k > 0$ fijo. La constante k se llama el *factor de la homotecia*. Si $0 < k < 1$, la homotecia se denomina *contracción* y si $k > 1$, se denomina *dilatación*. Notemos que si $k = 1$, la transformación es la identidad.

La matriz de una homotecia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de factor k es entonces:

$$A_T = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Definición 66 Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice homotecia de factor k *en la dirección x* si $T(x, y, z) = (kx, y, z)$. De manera análoga se definen homotecias en las direcciones y y z.

Experimento 38 Encuentren la forma que tienen las matrices canónicas de las homotecias en las direcciones x, y y z. ■

Los *deslizamientos cortantes* son maneras de "inclinar" los vectores del plano de forma paralela a uno de los ejes. La idea básica de este tipo de transformaciones es enviar el vector (x, y) a $(x + ky, y)$. En este caso, se llama un *deslizamiento cortante de factor k en la dirección x*. Notemos que la inclinación arriba referida tiene que ver con el hecho que la coordenada x está siendo alterada en una cantidad proporcional a la coordenada y, por lo que, cuando mayor sea el valor de y, más grande será la traslación del punto. Esta es la diferencia con una simple traslación en el sentido x (que tiene la forma $(x, y) \to (x + k, y)$). La matriz asociada a este tipo de transformaciones es:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observemos que, no tendrán problemas en escribir la matriz asociada a un deslizamiento cortante en la dirección y. Las ideas básicas de estas transformaciones quedarán mejor evidenciadas cuando veamos como afectan al cuadrado unitario.

Las *proyecciones ortogonales* que estudiamos en el capítulo 2 también son transformaciones lineales. Comencemos estudiando proyecciones en $\mathbb{R}^2$.

Sea L la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación vectorial $X = t\vec{v}$, queremos construir la proyección ortogonal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sobre la recta L. Claramente, los vectores de la recta L quedan fijos. Si L' es la recta ortogonal a la recta L que pasa por el origen, entonces los vectores de L' tendrán como imagen por T al vector $(0,0)$ (Figura 6.3).

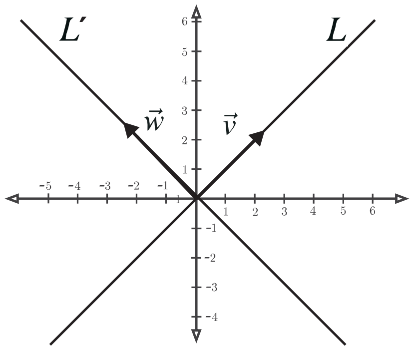


Figura 6.3: Proyección ortogonal en $\mathbb{R}^2$.

Concretamente, si $\vec{w}$ es un vector ortogonal a $\vec{v}$, entonces $\{\vec{v},\vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, y la proyección ortogonal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sobre la recta L queda unívocamente determinada por:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(w) = (0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 65 Veamos cuál es la fórmula de la proyección ortogonal sobre la recta $L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x=y\}$. La ecuación vectorial de la recta sobre la que estamos proyectando es $X=\lambda(1,1)$. Un vector ortogonal a $\vec{v}=(1,1)$ es, por ejemplo, $\vec{w}=(1,-1)$. Definimos $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ por:

$$\begin{cases} T(1,1) = (1,1) \\ T(1,-1) = (0,0) \end{cases}$$

Hallemos ahora la fórmula de T. Un vector $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se escribe como combinación lineal de los vectores de la base $\{(1,1),(1,-1)\}$ de la siguiente forma:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{x-y}{2}(1,-1)$$

Por lo tanto,

$$T(x,y) = \frac{x+y}{2}T(1,1) + \frac{x-y}{2}T(1,-1) = \frac{x+y}{2}(1,1) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$$

Esta es la fórmula de la transformación lineal que representa la proyección ortogonal buscada. ■

El razonamiento para $\mathbb{R}^3$ es completamente análogo. Si $\Pi=\{X\in\mathbb{R}^3 \,:\, X=t\vec{v}+s\vec{w},\ t,s\in\mathbb{R}\}$ es un plano que pasa por el origen y $\vec{N}$ es un vector normal al plano, entonces $\{\vec{v},\vec{w},\vec{N}\}$ constituye una base de $\mathbb{R}^3$, y la proyección ortogonal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ sobre el plano Π queda unívocamente determinada por:

$$\begin{cases} T(\vec{v}) = \vec{v} \\ T(\vec{w}) = \vec{w} \\ T(\vec{N}) = (0,0,0) \end{cases}$$

Experimento 39 Utilizando esta ultima transformación, calculen la expresión de la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy. ■

Transformando el cuadrado unitario. Para tener una idea más precisa de qué hacen realmente todas estas transformaciones geométricas sobre $\mathbb{R}^2$, vamos a estudiar el efecto de cada una de ellas sobre el cuadrado unitario C de $\mathbb{R}^2$; es decir, el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Como comentamos al comienzo de la unidad, una de las consecuencias que se desprende de las propiedades de las tranformaciones lineales, es que un segmento $\overline{PQ}$ es enviado al segmento $\overline{T(P)T(Q)}$. En efecto, todos los puntos del segmento $\overline{PQ}$ se pueden escribir de la forma $tP + (1-t)Q$, donde $0 \leq t \leq 1$. Una transformación lineal T envía a estos puntos a $T(tP + (1-t)Q) = tT(P) + (1-t)T(Q)$, que son precisamente todos los puntos del segmento $\overline{T(P)T(Q)}$ (ya que $0 \leq t \leq 1$). Por lo tanto, para saber cuál es la imagen del cuadrado unitario C por una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, solo debemos calcular a qué puntos envía T a los vértices del C, ya que, necesariamente, el segmento que une dos de sus vértices, será enviado al segmento que une sus imágenes. Por ejemplo, la imagen por T del segmento que une el $(0,0)$ con el $(0,1)$ es el segmento que une $T(0,0)$ con $T(0,1)$. En la Figura 6.4 podemos ver el efecto sobre el cuadrado unitario de todas las transformaciones estudiadas al comienzo de este apartado.

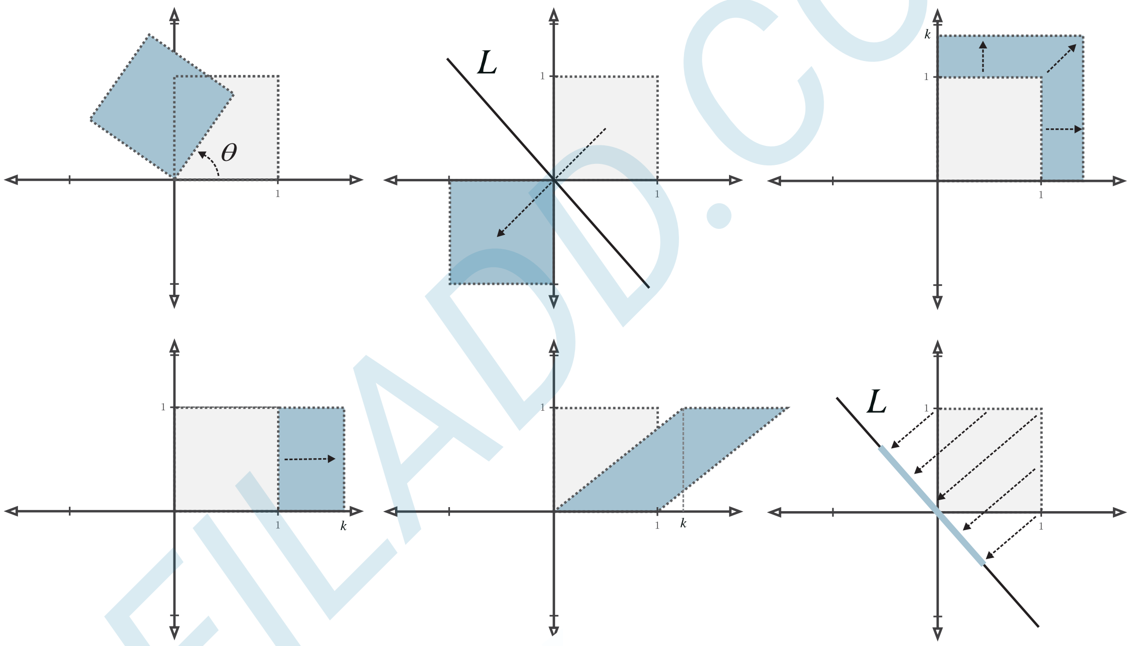


Figura 6.4: Tranformaciones del cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ (en orden de aparición): rotación, simetría respecto de la recta L, homotecia de factor k, homotecia de factor k en la dirección x, deslizamiento cortante de factor k en la dirección x y proyección sobre la recta L.

También podemos estudiar el efecto de una tranformación lineal $\mathbb{R}^3$ sobre el cubo unitario: el cubo de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$. El procedimiento en este caso es idéntico: los segmentos entre estos puntos serán enviados a los segmentos entre sus imágenes. En particular, los cuadrados que forman los lados del cubo son enviados por T a los trapezoides cuyos vértices son las imágenes de los vértices del cuadrado en cuestión. Por ejemplo, el cuadrado de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$ tiene por imagen el trapezoide $T(0,0,0)$, $T(1,0,0)$, $T(0,1,0)$ y $T(1,1,0)$.

Experimento 40 Como hicimos en la Figura 6.4, hagan el dibujo del efecto sobre el cubo unitario de $\mathbb{R}^3$ de todas las transformaciones estudiadas al comienzo de esta sección. ■

6.3.1 La interpretación geométrica del determinante

Como vimos, en el capítulo 5, el determinante de una matriz cuadrada tiene una interpretación algebraica como un número indicativo de la inversibilidad de una matriz. Sorprendentemente, también posee una interpretación geométrica: pensando a la matriz como asociada a una transformación lineal, nos dice *cómo cambia el área o volumen de una figura al aplicarle la transformación lineal*. Veamos algunos ejemplos para clarificar esta aserción. Supongamos que tenemos una homotecia T de factor k en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que la matriz asociada a esta transformación lineal es $A_T = \left(\begin{smallmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$. Tal como vimos en la Figura 6.4, si aplicamos esta homotecia al cuadrado unitario $C \subset \mathbb{R}^2$, entonces obtenemos un cuadrado cuyos lados tienen medida k. ¿Cuál es el área de este nuevo cuadrado $T(C)$? Como el área de un cuadrado se mide multiplicando la longitud de la base por la altura, entonces es k^2. Es decir, el cuadrado C de área 1 fue transformado en una figura (que en este caso es un cuadrado también) de área k^2. *Notemos que k^2 es, precisamente, el determinante de A_T mutiplicado por* 1. ¿Qué sucede si, ahora, aplicamos la misma homotecia al cuadrado C_2 de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ y $(2,2)$? Obtenemos el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(0,2k)$, $(2k,0)$ y $(2k,2k)$, cuyos lados miden $2k$, por lo que su área es $(2k)^2 = 4k^2$. ¿Cuál es el área del cuadrado original? Pues, $2^2 = 4$. Por lo tanto, vemos que:

$$\text{Área de } T(C_2) = (\text{Área de } C_2) \det(A_T)$$

Esto es algo que sucede siempre, para cualquier transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^2$ (no solo las homotecias). Lo enunciamos a continuación.

Proposición 40 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal y sea $F \subset \mathbb{R}^2$ una figura cualquiera. Entonces:

$$\text{Área de } T(F) = (\text{Área de } F)|\det(A_T)|$$

Esta proposición dice que *el módulo del determinante de la matriz asociada a T nos da el factor por el que se modifica el área de una figura al aplicarle T*. Por ejemplo, ¿qué sucede con las rotaciones? Geométricamente, estamos girando una figura; no le alteramos el área. ¿Cuál es el determinante de una matriz de rotación θ? Pues:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1.$$

Por lo tanto, ¡hemos redescubierto que el área antes y después de la rotación no se altera!

■ **Ejemplo 66** Estudiemos cómo se modifica el área del círculo D de radio $r = 3$ centrado en el origen al aplicarle una homotecia T de factor $\frac{1}{2}$. Sabemos que el área de D es $2\pi r = 6\pi$. La Proposición 40 nos dice que, luego de aplicar la homotecia T, el área de $T(D)$ es $6\pi \det(A_T)$. Como $\det(A_T) = \det \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$, entonces $T(D)$ tiene área $\left(\frac{1}{2}\right)^2 6\pi = \frac{3}{2}\pi$. ■

Para transformaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ vale la misma propiedad pero, en este caso, el determinante nos dice cómo se modifica *el volumen* de una figura tridimensional.

Proposición 41 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y sea $R \subset \mathbb{R}^3$ una región. Entonces:

$$\text{Volumen de } T(F) = (\text{Volumen de } F)|\det(A_T)|$$

Al igual que para $\mathbb{R}^2$, esta proposición dice que *el módulo del determinante de la matriz asociada a T nos da el factor por el que se modifica el volumen de una región al aplicarle T.*

Ejemplo 67 ¿Qué transformación hay que aplicarle al cubo unitario C de $\mathbb{R}^3$ para "agrandarlo" a un cubo de volumen 7? Lo primero que se nos viene a la mente es transformarlo por medio de una homotecia T. ¿Qué factor k debe tener la homotecia para alcanzar el volumen deseado? Sabemos que volumen de $T(C) =$ (Volumen de C) $\det(A_T)$. Como el volumen de C es 1, debemos hallar k tal que $\det(A_T)$ sea 7. Como $A_T = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, entonces $\det(A_T) = k^3$. Por lo tanto, k debe ser $\sqrt[3]{7}$. ■

Esta propiedad del determinante vale, en realidad, para una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. En este caso, lo que marca dicho determinante es cómo se altera el volumen n-dimensional *de la región. Claro que, para $n \geq 4$, ya no podemos imaginarnos qué interpretación geométrica tiene dicho "volumen".*

¿Qué hicimos en el apartado 6.3?

- Estudiamos las simetrías y las proyecciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ desde el punto de vista de las transformaciones lineales.
- Estudiamos la interpretación geométrica de ciertas tranformaciones lineales: rotaciones, simetrías, proyecciones, homotecias y deslizamientos cortantes. En cada caso, estudiamos la forma que tienen sus matrices asociadas.
- Vimos el efecto de una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^2$ sobre el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$ y el de una transformación lineal dentro de $\mathbb{R}^3$ sobre el cubo unitario de $\mathbb{R}^3$.
- Dimos una interpretación geométrica del determinante de una matriz cuadrada, como el factor de deformación del área (o volumen) de una región en $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$).

■

6.4 Composición e inversa de transformaciones lineales

De la misma forma que en la escuela secundaria se define la composición $f \circ g$ de dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en este apartado vamos a ver cómo se pueden componer dos transformaciones lineales. En este caso, el resultado vuelve a ser una transformación lineal.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo se componen las transformaciones lineales.
- Cómo calcular al transformación inversa de una transformación lineal inversible.

■

6.4.1 ¿Qué significa componer funciones?

Supongamos que tenemos dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Componer f con g* es una nueva función $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se obtiene al *aplicar primero g y después f*; es decir, la función compuesta $f \circ g$ en el punto x toma el valor $f(g(x))$ (aplico g a x y obtengo $g(x)$, y a este valor le aplico f). Componer no es otra cosa que "aplicar una función a continuación de la otra". Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$ entonces $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2$. En efecto, al aplicar g a x obtenemos $x + 1$. Y a este último valor le aplicamos f; es decir, calculamos $f(x + 1) = (x + 1)^2$. Notemos que *importa el orden en que componemos las funciones*. En general $f \circ g$ no es la misma función que $g \circ f$. En el ejemplo de recién, $g \circ f(x) = x^2 + 1$, y esta función no es igual a $f \circ g$ (en $x = 1$, por ejemplo, toman distintos valores).

En general, podemos componer funciones cuyo dominio y codominio no coincidan. Lo único que tendremos presente es que, para que esté definida $f \circ g$, "el conjunto donde cae g debe estar contenido en el conjunto donde sale f"; es decir, el codominio de g debe estar contenido en el dominio de f. Esta es una condición necesaria ya que $f \circ g$ quiere decir que, para un x en el dominio de g, primero aplicamos g y después f; pero f solo podemos aplicarlo si $g(x)$ está en el dominio de f. Más concretamente: si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones entre conjuntos cualesquiera, entonces, podemos definir $g \circ f : A \to C$. Notemos que f cae en B y g sale de B, por lo que al valor $f(x)$ podemos aplicarle g. También, tengamos en cuenta que $g \circ f$ es una función cuyo dominio es el dominio de f y cuyo codominio es el codominio de g. La regla para recordar qué función se aplica primero en la notación $g \circ f$ es leerla de derecha a izquierda: en este caso, primero f y luego g.

6.4.2 Composición de transformaciones lineales

Las transformaciones lineales son, en particular, funciones, por lo que podemos componerlas. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, entonces podemos armar la composición $T \circ T' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, que consiste en aplicar primero T' y, luego, T. Es decir:

$$(T \circ T')(\vec{v}) = T(T'(\vec{v}))$$

Por ejemplo, si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está dada por $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ y $T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$, entonces, tanto $T \circ T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como $T' \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ están definidas. Para calcular $T \circ T'$ debemos aplicar, primero, T' a un (x, y, z) genérico y, luego, aplicar al resultado la transformación lineal T. Por un lado, $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$. ¿Qué significa aplicar T a este resultado? Pues que la primera coordenada es $x - y - 2z$ y la segunda coordenada es $2x - z$. Es decir que, en la fórmula $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ que define T, el papel de x lo hace $x - y - 2z$ y, el de y, lo hace $2x - z$. Por lo tanto, debemos calcular $T(x - y - 2z, 2x - z)$:

$$\begin{aligned} T(\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}, \underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}}) &= ((\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}) + (\underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}}), 2(\underbrace{x - y - 2z}_{\text{“}x\text{”}}), 2(\underbrace{2x - z}_{\text{“}y\text{”}})) \\ &= (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z). \end{aligned}$$

Entonces, hemos hallado que $T \circ T'(x, y, z) = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z)$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} T' \circ T(x, y) &= T'(\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}, \underbrace{2x}_{\text{“}y\text{”}}, \underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}}) \\ &= ((\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}) - (\underbrace{2x}_{\text{“}y\text{”}}) - 2(\underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}}), 2(\underbrace{x + y}_{\text{“}x\text{”}}) - (\underbrace{2y}_{\text{“}z\text{”}})) \\ &= (-x - 3y, 2x) \end{aligned}$$

¿Qué sucede a nivel matricial? Sabemos que toda transformación lineal puede representarse de manera canónica por medio de una matriz, donde el resultado de evaluar un vector en la transformación equivale a multiplicar dicho vector por la matriz. Por este motivo, no nos debería sorprender que componer dos tranformaciones lineales equivale, a nivel matricial, a *multiplicar sus matrices asociadas*. En efecto, supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Si queremos calcular $T' \circ T$ en un vector $\vec{v}$, entonces sabemos que $T(\vec{v}) = A_T \cdot \vec{v}$ y $T'(\vec{v}) = A_{T'} \cdot \vec{v}$. Por lo tanto,

$$T' \circ T(\vec{v}) = T'(T(\vec{v})) = T'(A_T \cdot \vec{v}) = A_{T'} \cdot (A_T \cdot \vec{v}) = (A_{T'} \cdot A_T) \cdot \vec{v}.$$

Como esto vale para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, concluimos que:

$$A_{T' \circ T} = A_{T'} \circ A_T$$

De esta manera, hemos mostrado la validez de la siguiente proposición:

Proposición 42 Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene por matriz canónica asociada a A_T y $T' : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ tiene por matriz canónica asociada a $A_{T'}$, entonces, la matriz canónica asociada a $T' \circ T$ es $A_{T'} \cdot A_T$.

Retomemos los ejemplos anteriores. Teníamos que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ estaba dada por $T(x, y) = (x + y, 2x, 2y)$ y $T' : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ por $T'(x, y, z) = (x - y - 2z, 2x - z)$. Calculamos:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{T'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La Proposición 42 nos dice que $T' \circ T$ tiene por matriz canónica asociada a:

$$A_{T'} \cdot A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si pasamos esto a forma funcional tenemos:

$$(T' \circ T)(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 3y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Es decir, $(T' \circ T)(x, y) = (-x - 3y, 2x)$, y descubrimos la misma fórmula que conseguimos haciendo la composición directamente. En el siguiente experimento, los invitamos a hacer el cálculo de la composición para el otro lado.

Experimento 41 Muestren que $T \circ T' = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 4x - 2z)$ haciendo la multiplicación de las matrices A_T y $A_{T'}$. ■

6.4.3 Construyendo transformaciones lineales compuestas

La composición nos permite ampliar el conjunto de transformaciones lineales que estudiamos en el apartado anterior. Ahora, podemos construirnos funciones que transformen de manera más general regiones del plano o el espacio. Por ejemplo, supongamos que queremos armar una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ que, dada una región, la dilate manteniendo sus proporciones, de forma que tenga el doble de su área original y, también, la rote 45° en el sentido de las agujas del reloj. Sabemos que la transformación que agranda el área de una región en 2 es:

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mientras que la transformación que rota una región 45° en el sentido horario es:

$$R = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación buscada es la composición de ambas transformaciones. Pero, ¿en qué orden debemos aplicarlas? Notemos que la misma naturaleza de las transformaciones nos dice que no importa, ya que las rotaciones no afectan el área y las homotecias no afectan la "inclinación" de la región. Elegimos $H \circ R$:

$$A_{(H \circ R)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) & \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación lineal buscada es:

$$(H \circ R) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}) & \sqrt{2}\cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}$$

Tomemos la circunferencia unitaria S de $\mathbb{R}^2$ y apliquémosle las siguientes transformaciones:

- Una simetría respecto del eje y.
- Una rotación de ángulo θ en el sentido antihorario, para cierto $0 \leq \theta < 2\pi$.
- Una simetría respecto del eje y nuevamente.

Si seguimos gráficamente el recorrido que hace un punto cualquiera de S al aplicarle estas transformaciones, veremos que el resultado es el mismo que rotar la circunferencia en θ *en sentido horario*. Confirmemos esta hipótesis. Sabemos, por un lado, que la simetría respecto del eje y tiene por matriz asociada a $T = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Por otro lado, la rotación en θ en sentido antihorario tiene por matriz asociada a $T' = \left(\begin{smallmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{smallmatrix}\right)$. Por lo tanto, las tres transformaciones que aplicamos sobre S se resumen en la transformación $T \circ T' \circ T$ cuya matriz asociada resulta:

$$\begin{aligned} A_{T\circ T'\circ T} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, debemos recordar que $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ y $\sin(\theta) = -\sin(-\theta)$ para todo θ. Por lo tanto, esta última matriz podemos reescribirla:

$$A_{T\circ T'\circ T} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

que es, precisamente, la matriz asociada a la transformación lineal que rota en θ en el sentido horario. Esto confirma nuestra hipótesis.

Experimento 42 Le aplicamos a la circunferencia unitaria $S \subset \mathbb{R}^2$ las siguientes dos transformaciones: primero, una simetría respecto del eje x y, luego, una simetría respecto del eje y. Prueben que el efecto de estas transformaciones es el mismo que rotar la circunferencia 180º en el sentido antihorario. ■

6.4.4 Inversa de una transformación lineal

Recordemos que, si tenemos una función entre conjuntos $f : A \to B$ que es biyectiva, entonces, podemos definir la función inversa, $f^{-1} : B \to A$, *que envía al elemento $f(x) \in B$ al elemento $x \in A$*; es decir, lo devuelve al mismo punto de donde lo envió f. Formalmente, esto se escribe $f^{-1} \circ f(x) = x$. La función f^{-1} se llama la *inversa de f* y es única (es la única función que verifica esta igualdad). Algunas transformaciones lineales también admiten inversa. Por ejemplo, la inversa de la transformación que rota los vectores en 90º en el sentido antihorario es la transformación que rota los vectores 90º en el sentido horario. Por otro lado, la inversa de una simetría es ella misma, pues el simétrico de un simétrico es el punto original. Finalmente, la inversa de dilatar por un factor $k > 1$ es contraer por $\frac{1}{k}$. En todos estos casos, la inversa de una transformación lineal vuelve a ser una transformación lineal. Veremos que esto es siempre así.

Antes de dar la definición de inversa de una transformación lineal observemos que, para que exista la inversa, la transformación debe ser biyectiva. Esto es siempre un requerimiento para que tenga sentido buscar una inversa. Las transformaciones lineales biyectivas son necesariamente isormorfismos, por lo que *una tranformación lineal admite inversa sí, y solo sí, es un isomorfismo*. En particular, el dominio y el codominio deben ser el mismo espacio.

Definición 67 Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un isomorfismo. La *inversa de* T es una transformación lineal $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que verifica $(T \circ T^{-1})(\vec{v}) = \vec{v}$ y $(T' \circ T)(\vec{v}) = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

No es difícil ver que la inversa de T es única; es decir, no hay otra transformación lineal con esas caracteríticas. Por este motivo, la llamamos T^{-1} (pues no crea ambigüedad).

¿Cómo se calcula la inversa de un isomorfismo? Veamos un ejemplo. Consideremos el isomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y - z, x - 2y - 4z, 2x - z)$. Recordemos que, para construir una transformación lineal, alcanza con definir cúales son los valores que esta toma en una base. Pero, ¿qué base nos conviene considerar? Tengamos en cuenta que:

- $T(1, 0, 0) = (1, 1, 2)$
- $T(0, 1, 0) = (-1, -2, 0)$
- $T(0, 0, 1) = (-1, -4, -1)$

Como T es isomorfismo y $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, entonces $\{(1, 1, 2), (-1, -2, 0), (-1, -4, -1)\}$ también es una base de $\mathbb{R}^3$ (por la Proposición 35). Notemos que, entonces, definir la inversa es automático a partir de esta observación. La inversa T^{-1} debe verificar:

- $T^{-1}(1, 1, 2) = (1, 0, 0)$
- $T^{-1}(-1, -2, 0) = (0, 1, 0)$
- $T^{-1}(-1, -4, -1) = (0, 0, 1)$

Si ahora queremos encontrar la expresión funcional de T^{-1}, podemos proceder como mostramos en el apartado 6.1.3. Sin embargo, este procedimiento para hallar la forma funcional de una transformación lineal definida en una base involucra, en general, una gran cantidad de cuentas. Por suerte, existe una manera más directa de calcular la inversa de una transformación lineal: calcular la forma matricial de T^{-1}. A esta altura, no debería sorprendernos que *¡la forma matricial de la inversa de* T *es la matriz inversa de* A_T*!* Esto es evidente ya que, si $(T^{-1} \circ T)(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces $(A_{T^{-1}} \cdot A_T) \cdot \vec{v} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Esto fuerza a que $A_{T^{-1}} \cdot A_T = I$. ¿Se dan cuenta por qué sucede esto? Concluimos, entonces, que $A_{T^{-1}} = A_T^{-1}$. Por lo tanto, para hallar la inversa de $T(x, y, z) = (x - y - z, x - 2y - 4z, 2x - z)$, podemos escribir primero su matriz asociada:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y, luego, calcular su matriz inversa:

$$A_T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Esta última matriz es, entonces, la matriz asociada a $A_{T^{-1}}$; y podemos hallar que su forma funcional es:

$$T^{-1}(x, y, z) = A_{T^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\tfrac{2}{5}x - \tfrac{1}{5}y + \tfrac{2}{5}z, -\tfrac{7}{5}x + \tfrac{1}{5}y + \tfrac{3}{5}z, \tfrac{4}{5}x - \tfrac{2}{5}y - \tfrac{1}{5}z\right)$$

Observamos que, del ejemplo anterior, podemos deducir la siguiente propiedad de los isomorfismos:

Proposición 43 Una transformación lineal T es un isomorfismo sí, y solo sí, su matriz canónica asociada A_T es inversible.

■ **Ejemplo 68** Calculemos, si existe, la inversa de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - 2y, 2x - y)$. Para decidir si esta transformación lineal tiene inversa, debemos verificar si es o no un isomorfimo. Nos armamos la matriz canónica asociada:

$$A_T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A_T) = 1 \neq 0$, entonces A_T es inversible y, por lo tanto, T es un isomorfismo. Ahora que sabemos que T tiene inversa, la calculamos. Buscamos entonces la inversa de A_T:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - \frac{2}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Esta última matriz es, entonces, $A_{T^{-1}}$, por lo que la forma funcional de T^{-1} es:

$$T^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}.$$

Es decir, $T^{-1}(x, y) = (-x + 2y, -2x + 3y)$. Para verificar que este cálculo es correcto, calculemos $T \circ T^{-1}$:

$$\begin{aligned} T \circ T^{-1}(x, y) &= T(-x + 2y, -2x + 3y) \\ &= (3(-x + 2y) - 2(-2x + 3y), 2(-x + 2y) - (-2x + 3y)) \\ &= (-3x + 6y + 4x - 6y, -2x + 4y + 2x - 3y) \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 6.4?

- Estudiamos la composición de transformaciones lineales y vimos que la matriz canónica asociada a una composición es el producto de las matrices canónicas asociadas a las transformaciones originales. Usamos estas propiedades para mostrar cómo construir tranformaciones lineales que sean composiciones de rotaciones, simetrías, homotecias, etc.
- Definimos la inversa de un isomorfismo y vimos que la matriz canónica asociada a la transformación inversa es la matriz inversa de la matriz asociada al isomorfismo original.

■

7. Números complejos

Los números complejos forman un conjunto numérico más grande que los números reales, que surgen ante la necesidad de encontrar soluciones a ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{R}$. En este sentido, son la "extensión" necesaria (más pequeña) que garantiza que todas estas ecuaciones tienen solución. Si bien los números complejos, como objeto matemático, son una abstracción, surgieron en el estudio de ciertos problemas geométricos y en la resolución de ecuaciones polinomiales.

7.1 ¿Qué son los números complejos?

Probablemente hayan tenido contacto con números complejos durante su formación y asocien a ellos la palabra "imaginario" y la famosa letra i. Lo cierto es que las presentaciones de los números complejos que se hacen, en general, oscurecen el fuerte sentido geométrico que conllevan.

En este apartado estudiaremos...

- El sentido geométrico de los números complejos.
- La definición de número complejo y las operaciones básicas entre ellos.

■

7.1.1 ¿Cómo surgen los números complejos?

Los números naturales son los números que utilizamos para contar, de allí su nombre. Supongamos que queremos resolver ecuaciones con estos números. Por ejemplo, $x + 3 = 5$ puede ser resuelta sin problema: la solución es $x = 2$. Pero ¿qué sucede si queremos resolver $x + 3 = 1$? Esta ecuación *no tiene solución* en números naturales (no hay ningún número natural tal que, al sumarle 3, nos dé como resultado 1). ¿Qué podemos hacer? Pues podemos introducir los números naturales negativos para resolver este tipo de ecuaciones. Creamos, entonces, los números enteros, que constan de los números naturales y sus inversos aditivos (y del 0, ya que vamos a tener que poder representar $1 - 1$, por ejemplo). De esta manera, ya podemos resolver $x + 3 = 1$; la solución es el número entero -2. ¿Y si quisiéramos ahora resolver $2x + 3 = 4$? ¿Podemos? ¡No! Esta ecuación *no tiene solución* con los números enteros. Necesitamos nuevamente ampliar el conjunto de números con el que trabajamos. Entonces, construimos los cocientes entre números enteros: los números racionales. Con estos últimos, es posible resolver este tipo de ecuaciones. En este caso, la solución de la ecuación es el número racional $\frac{1}{2}$. ¿Qué sucede ahora si queremos resolver la ecuación cuadrática $x^2 = 2$? Pues sucede que esta ecuación *no tiene solución* con los números racionales. Como bien sabemos ahora, las posibles soluciones a dicha ecuación son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$, y estos números *no se pueden escribir como cociente de números enteros* (la demostración de este hecho se puede ver como información complementaria sobre el Teorema de Gauss del próximo capítulo). Entonces, llegamos a definir los números reales, que son los números que conocemos y utilizamos todo el tiempo. Lamentablemente, especificar cuáles son los números reales no es tan sencillo como lo es especificar los números enteros (a partir de los naturales) o los números racionales (a partir de los enteros). Podemos decir que, informalmente, los números reales constan de los números racionales más los números que se encuentran entre los racionales en la recta real (es decir, los números necesarios para llenar la recta y que no queden huecos). ¿Llegamos al final del camino? ¿Son estos los últimos números que vamos a necesitar? Miremos la ecuación $x^2 + 1 = 0$. ¿Existe algún número real que, elevado al cuadrado y sumado con 1, nos de 0? ¡No! Sabemos que el cuadrado de *cualquier* número real es un número positivo, por lo que no es posible que, al sumarle 1 a un número positivo, obtengamos algo más pequeño que 1 (mucho menos, el 0). Es, en este contexto, que necesitamos agrandar aún más el conjunto de números con el que trabajamos. Y aquí es donde aparecen los números complejos: nos permiten, en particular, resolver la ecuación $x^2 = -1$. Para ello, vamos a tener que introducir un número que elevado al cuadrado de como resultado -1: el famoso número i.

7.1.2 ¿Cómo se define el conjunto de números complejos?

Tal como mencionamos en el párrafo anterior, buscamos que el conjunto de números complejos sea una extensión de los reales que, además, contenga un elemento i que verifique $i^2 = -1$. Esta "ampliación" del conjunto $\mathbb{R}$ debemos realizarla de manera que las operaciones que de suma y multiplicación en este nuevo conjunto sean coherentes con las que llevamos a cabo en los números reales. Vamos a describir al conjunto $\mathbb{C}$ de *números complejos* de la siguiente manera:

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

donde establecimos que el nuevo "número" i verifica $i^2 = -1$. Es decir, un número complejo es la suma de un número real a y de un múltiplo real b de i. Notemos que el conjunto $\mathbb{R}$ es efectivamente un subconjunto de $\mathbb{C}$ ya que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbb{R} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} \,:\, b = 0\}$$

Ahora que sabemos qué forma tienen los números complejos, debemos aprender a sumarlos y multiplicarlos. Como dijimos, estas operaciones tienen que coincidir con las operaciones que ya conocemos de $\mathbb{R}$ cuando estemos trabajando con números reales *vistos como subconjuntos de* $\mathbb{C}$:

Definición 68 Dados números complejos $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$, definimos la suma y el producto entre ellos de la siguiente manera:

- Suma: $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- Producto: $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Observemos que la suma de números complejos consiste, simplemente, en sumar entre sí a los números reales que no están multiplicando a i y, entre sí, a los que están multiplicando a i. Por otro lado, si bien la fórmula del producto de números complejos parece complicada, esta surge de aplicar la propiedad distributiva y recordando que el número i al cuadrado es -1:

$$zw = (a + bi)(c + di) = ac + di + bci + bdi^2 = ac + di + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo 69

- $3i - (1 + 2i) = (0 - 1) + (3 - 2)i = -1 + i$.
- $(4 + 5i)(1 + 3i) = 4 - 15 + (12 + 5)i = -11 + 17i$.
- $3{,}5 = (15 - 0{,}0) + (0{,}5 + 3{,}0)i = 15$.

Nos preguntamos ahora, ¿cuáles son los números complejos inversibles? Sabemos que todo número real λ distinto de 0 tiene inverso: el número $\frac{1}{\lambda}$. ¿Qué sucede con un número complejo $a + bi$ distinto de 0? Podríamos proponer como inverso de este número a $\frac{1}{a+bi}$; pero, ¿es esto un número complejo? En realidad, sí lo es, solo que no está escrito de una forma que lo reconozcamos como tal. ¿Cómo podemos hacer para reescribir $\frac{1}{a+bi}$ de la manera como definimos a los números complejos? Pues multiplicamos esta expresión por $\frac{a-bi}{a-bi}$, ¡que es simplemente 1! (por lo que no la estamos cambiando). ¿Cuál es el resultado de esta cuenta?:

$$\frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i$$

Esta última expresión está escrita en la forma en la que definimos a los números complejos (un números real $\frac{a}{a^2+b^2}$ sumado a un número real $-\frac{b}{a^2+b^2}$ multiplicado por i). Verifiquemos que, efectivamente, este número es el inverso de $a + bi$:

$$\begin{aligned}
(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}i\right) &= \left(a\frac{a}{a^2+b^2} - b\frac{-b}{a^2+b^2}\right) + \left(a\frac{-b}{a^2+b^2} + b\frac{a}{a^2+b^2}\right)i \\
&= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \frac{-ab+ab}{a^2+b^2} \\
&= 1 + 0i \\
&= 1
\end{aligned}$$

De esta manera podemos concluir que *todos los números complejos no nulos son inversibles*.

¿Qué hicimos en el apartado 7.1?

- Mostramos la necesidad para definir y trabajar con números complejos (nos brindan soluciones a ecuaciones que no tienen soluciones reales).
- Definimos el conjunto de números complejos junto con su suma y multiplicación, estudiamos sus propiedades y vimos que eran coherentes con las operaciones de los números reales.
- Vimos que todos los números complejos no nulos son inversibles y estudiamos una manera de calcular dicho inverso.

7.2 El plano complejo

El hecho que un número complejo $a + bi$ esté definido a partir de los números reales a y b, no hace pensar si existe alguna relación entre estos y los puntos del plano $\mathbb{R}^2$. Esta relación existe y, en muchas ocasiones, será conveniente pensar un número complejo $z = a + bi$ como el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Este proceso nos permite obtener una representación gráfica de los números complejos e interpretar geométricamente las operaciones de suma y producto.

En este apartado estudiaremos...

- La representación en el plano de los números complejos.
- La forma binómica de un número complejo (partes real e imaginaria) y el conjugado de un número complejo.
- El módulo de un número complejo y la distancia entre números complejos.

7.2.1 Representación en el plano y forma binómica

Podemos, entonces, identificar un número complejo $a+bi$ con el vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Es decir, la primera coordenada del vector asociado corresponde a la componente real que no multiplica al número i, y la segunda coordenada, a la componente real que multiplica i. Esta identificación es biyectiva: a cada número complejo le corresponde un único vector de $\mathbb{R}^2$ y, a cada vector de $\mathbb{R}^2$, le corresponde un único número complejo. Cuando pensemos a $\mathbb{R}^2$ representando a los números complejos, lo llamaremos *el plano complejo*.

Observación 44 *Notemos que, el vector de $\mathbb{R}^2$ que le corresponde a la suma $z + w$ de los números complejos $z, w \in \mathbb{C}$, es el vector que se obtiene al sumar los vectores asociados a z y w. Es decir, si (a, b) es el vector asociado a z y (c, d) el vector asociado a w, entonces el vector asociado a $z+w$ es $(a, b)+(c, d) = (a+c, b+d)$. Por otro lado, el vector asociado al producto zw es $(ac - bd, ad + bc)$.*

Las componentes o coordenadas que constituyen un número complejo, tienen un nombre:

Definición 69 Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, llamaremos *parte real* de z al número a y *parte imaginaria* a b, y escribiremos $a = Re(z)$, $b = Im(z)$. Siempre que un número complejo esté escrito de esta manera, diremos que está en *forma binómica*.

Ejemplo 70

- Para $z = 4 + 3i$, ¿cuánto valen $Re(z)$, $Im(z)$? Como z ya está en forma binómica, podemos ver directamente que $Re(z) = 4$, $Im(z) = 3$.
- Si ahora z es $z = i(3 + 2i)^2$, para hallar $Re(z)$, $Im(z)$, primero necesitamos ponerlo en forma binómica. Desarrollemos el cuadrado:

$$z = i(3 + 2i)^2 = i(3^2 + 2{,}3{,}2i + (2i)^2) = i(9 + 12i - 4) = i(5 + 12i)$$

Ahora efectuamos la multiplicación de los dos números complejos que nos quedaron y obtenemos

$$z = -12 + 5i$$

que resulta la forma binómica de z. Por lo tanto, la respuesta es $Re(z) = -12$, $Im(z) = 5$.

Importante *Notemos que las partes real e imaginaria de un número complejo siempre son números **reales**. Por ejemplo, $Im(i) = 1$ y **no** i.*

Experimento 43 Calculen $Re(z+w)$ y $Im(z+w)$ en términos de $Re(z)$ y $Im(w)$ para complejos $z = a+bi$ y $w = c+di$. ■

Un punto importante, que quizás escapa a primera vista, es que llevar números complejos a su forma binómica nos permite decidir si dos números dados son iguales. ¿De qué manera? Es claro que, si $z = 2i, w = 2i$, entonces $z = w$. Pero si fuera $z = 2i(4+i)$ y $w = i(8-2i)$, no es tan inmediato responder si $z = w$ o $z \neq w$. Sucede que dos números complejos z y w son iguales sí, y solo sí,

$$Re(z) = Re(w) \text{ e } Im(z) = Im(w)$$

Dado que tenemos que $z = 2i(4+i) = -2+8i$ y $w = i(8-2i) = 2+8i$. Como $Re(z) = 2 \neq -2 = Re(w)$, podemos afirmar que $z \neq w$.

Traducir la igualdad de números complejos en términos de partes real e imaginaria es una herramienta más poderosa de lo que parece. Veamos un ejemplo de esto.

■ Ejemplo 71

- Supongamos que queremos averiguar cuáles son los números complejos z que satisfacen $(3+i)z = 4-2i$. Llamemos $z = a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y operemos:

  $$(3+i)z = (3+i)(a+bi) = (3a-b) + (a+3b)i$$

  Por lo tanto, tenemos que $(3+i)z = 4+2i$ sí, y solo sí, $3a-b = 4$ y $a+3b = -2$. ¡Este es un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes reales! Es fácil calcular que las soluciones son $a = 1$ y $b = -1$.
- Busquemos ahora los números complejos z tales que $Re(z(1-2i)) + 4i = zIm(z)$. Escribimos $z = a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, y reemplazamos en la ecuación original. El lado izquierdo de la igualdad queda:

  $$Re(z(1-2i)) + 4i = Re((a+bi)(1-2i)) + 4i = Re(a+2b+(-2a+b)i) + 4i = a+2b+4i.$$

  Del lado derecho:

  $$zIm(z) = (a+bi)b = ab+ib^2$$

  Si ahora igualamos las partes real e imaginaria de cada lado, obtenemos:

  $$a+2b = ab \text{ y } b^2 = 4$$

  De aquí, vemos que $b = 2$ o $b = -2$. En el primer caso, $a = 4$ y, en el segundo caso, $a = \frac{4}{3}$. Concluimos, entonces, que hay dos soluciones a la ecuación original: $z_1 = 4+2i$ y $z_2 = \frac{4}{3} - 2i$.

■

Norma de un número complejo. Una propiedad importante que conocíamos de los vectores en $\mathbb{R}^2$ es su longitud, que llamamos en general *norma*. En el caso de un número complejo $z = a+bi$, llamaremos *módulo* a la norma del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado.

Definición 70 Dado un número complejo $z = a+bi$ en forma binómica, su *módulo* es el número real $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Gráficamente, este número representa la longitud del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado al número complejo z.

■ Ejemplo 72

- El módulo del número complejo $z = 2i$ es $|z| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$. Esto es claro si pensamos que el vector asociado a z es $(0,2)$.

- ¿Cuál es el módulo de zw, donde $z = 3 + 2i$ y $w = -1 + 5i$? Hallemos la forma binómica de zw:

$$zw = (3 + 2i)(-1 + 5i) = (-3 - 10) + (-2 + 15)i = -13 + 13i.$$

Aplicamos ahora la fórmula del módulo para obtener:

$$|zw| = \sqrt{13^2 + 13^2} = 13\sqrt{2}$$

■

Como el módulo de un número complejo se define a partir de su representación en el plano, entonces sus propiedades con relación a la suma y a la multiplicación *por escalar real* son las mismas que para la de la norma de vectores en $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, los números complejos pueden multiplicarse entre sí (operación que *no está definida* para vectores). Nos preguntamos, ¿existe alguna propiedad que verifique el módulo respecto del producto de números complejos? La respuesta es sí, y dado que conciste en hacer las mismas cuentas que ya hicimos, se las dejamos para desarrollar en el siguiente experimento.

Experimento 44 Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$. Muestren que $|zw| = |z||w|$ (o sea, el módulo del producto de dos números complejos es el producto de los módulos de dichos números). ■

Comentamos en el párrafo anterior que, para un número complejo $a + bi$, el número $a - bi$ es de mucha importancia. Entre otras cosas, este número está relacionado sutilmente con el módulo. Lo definimos a continuación:

Definición 71 Dado un número complejo $z = a + bi$, escrito en forma binómica, definimos el *conjugado* de z, que notaremos por $\overline{z}$, como el número complejo $\overline{z} = a - bi$.

Notemos que, si (a, b) es el vector asociado a z, entonces $(a, -b)$ es el vector asociado a $\overline{z}$. Gráficamente, $\overline{z}$ es el simétrico de (a, b) respecto del eje x.

■ Ejemplo 73

- El conjugado de $3 + i$ es, obviamente $3 - i$.
- El conjugado de 2 es él mismo pues 2 escrito en forma binómica es $2 + 0i$, por lo que su conjugado es $2 - 0i = 2$. Gráficamente, el simétrico del vector asociado $(2, 0)$ respecto del eje x es $(2, 0)$, pues este vector pertenece a dicho eje.

■

Veremos que el conjugado de un número complejo z aparece muchas veces relacionado a propiedades de z. El siguiente experimento muestra algunas de las mismas.

Experimento 45

1. Consideren $z = 2 + 3i$. Calculen $z\overline{z}$. ¿Qué relación tiene este producto con $|z|$? ¿Y para un número complejo en general?
2. Verifiquen las siguientes propiedades de la conjugación para números complejos z, w:
   - $\overline{\overline{z}} = z$
   - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
   - $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
   - $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2Im(z)$.
   - $|z| = |\overline{z}|$.

■

Observemos que, del experimento anterior, podemos deducir que todo número complejo distinto de 0 es inversible. Más aún, podemos calcular directamente el inverso por medio de $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

■ **Ejemplo 74** Calculemos z^{-1} para $z = (3 + i)$. De acuerdo a la fórmula que acabamos de ver necesitamos, en primer lugar, hallar $|z|$ y $\overline{z}$. Por un lado $|z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Por otro lado, $\overline{z} = 3 - i$. Por lo tanto, tenemos $z^{-1} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$. ■

¿Qué más nos permite hacer el módulo de números complejos? Podemos medir la distancia entre dos números complejos z, w de la misma manera que hacíamos con los vectores de $\mathbb{R}^2$.

Definición 72 Dados dos números complejos z y w, definimos la *distancia entre z y w* como el número real $|z - w|$.

Por supuesto, la distancia entre z y w es, simplemente, la distancia en el plano complejo entre sus vectores asociados.

■ **Ejemplo 75**

- La distancia entre $z = -1 + 4i$ y $w = -5 - 2i$ es:

$$|z - w| = |(-1 + 4i) - (-5 - 2i)| = |4 + 6i| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$$

- ¿Cuál es el conjunto $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - (3 + i)| = 2\}$? Pues son los números que distan en 2 unidades del número $3 + i$. Gráficamente, en el plano complejo, C es la circunferencia de radio 2 y centro $(3, 1)$.
- Consideremos ahora el conjunto $L = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z - i|\}$. ¿Qué significa la condición que define al conjunto? Los elementos de L son los números complejos que distan de 1 lo mismo que de i. Gráficamente, en el plano complejo, son los puntos que distan de $(1, 0)$ en lo mismo que de $(0, 1)$. Si lo pensamos un rato, podemos convencernos de que este conjunto es una recta (que pasa por 0). Hagamos el cálculo formal para confirmarlo. Tomemos $z \in L$ y escribamos $z = a + bi$. Si reemplazamos en la ecuación que define a L, tenemos:

$$|a + bi - 1| = |a + bi - i|$$

Por la definición de módulo, podemos escribir:

$$\sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

Si elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado, obtenemos:

$$(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b-1)^2$$

Si expandimos los cuadrados y operamos, descubrimos que la igualdad de arriba equivale a $a = b$. Concluimos que un número complejo $z = a + bi$ pertenece a L sí, y solo sí, $a = b$, es decir, es de la forma $a + ai$. Podemos entonces escribir:

$$L = \{a + ai : a \in \mathbb{R}\} = \{a(1+i) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Esto nos dice que L consiste en todos los números complejos múltiplos de $1+i$. Gráficamente, el vector asociado a $1+i$ es el $(1,1)$, por lo que, visto en el plano complejo, el conjunto L es el conjunto

$$L = \{a(1,1)\ :\ a \in \mathbb{R}\}.$$

Concluimos que L se trata de la recta con ecuación vectorial $t(1,1)$.

7.2.2 Transformaciones en el plano complejo

Dado que hay una identificación natural entre los vectores de $\mathbb{R}^2$ y los números complejos, ¿cómo se traducen las transformaciones geométricas que vimos en el capítulo anterior en el lenguaje de números complejos? En este apartado las estudiaremos.

Empecemos por las *traslaciones*. Una de las transformaciones más simples en $\mathbb{R}^2$ consiste en "trasladar" un vector $\vec{v}$ por medio de otro vector $\vec{w} = (a,b)$. Por ejemplo, si a y b son números positivos, esto consiste en desplazar al vector $\vec{v}$ en a unidades a la derecha y en b unidades hacia arriba. La fórmula de la traslación $T_{\vec{w}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por el vector $\vec{w}$ está dada por:

$$T_{\vec{w}}(x,y) = (x+a, y+b) = (x,y) + (a,b)$$

Si pensamos en la misma transformación en el plano complejo, esta consiste en sumar, a un número complejo dado, el número $w = a + bi$. Es decir, la traslación $T_w : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por un número complejo $w = a + bi$ está dada por:

$$T_w(z) = z + w = z + (a + bi)$$

Analicen por qué las traslaciones $T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no son transformaciones lineales.

Como vimos en el capítulo anterior, una *homotecia* consiste en cambiar la longitud de cada vector multiplicándolo por un número $r > 0$ fijo, llamado la razón de la homotecia. Si $r < 1$, la homotecia de razón r "acorta" vectores y, si es $r > 1$, los "alarga". Una homotecia $H_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de razón r en $\mathbb{R}^2$ tiene fórmula:

$$H_r(x,y) = r(x,y) = (rx, ry)$$

Una homotecia en el plano complejo se traduce, entonces, a multiplicar por el número complejo $r + 0i$. Es decir, es la función $H_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$H_r(z) = H_r(x+iy) = r(x+iy) = rx + iry$$

Las *rotaciones* en $\mathbb{R}^2$ consisten en girar a cada vector un ángulo fijo en determinado sentido. En el capítulo anterior, vimos que la rotación $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ángulo $\theta > 0$, en sentido contrario a las agujas del reloj, está dada por la fórmula:

$$R_\theta(x,y) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta), x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

Consideremos el número complejo $\omega = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. ¿Qué características tiene? En primer lugar, su módulo es 1:

$$|\omega| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$$

Por otro lado, al multiplicarlo con otro número complejo $z = x + iy$ se obtiene:

$$z\omega = (x + iy)(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = (x\cos(\theta) - y\sin(\theta)) + i(x\sin(\theta) + y\cos(\theta))$$

¡Notemos que el vector asociado a esta última expresión es exactamente $R_\theta(x, y)$! Por lo tanto, concluimos que, en el plano complejo, la fórmula de rotación de ángulo $\theta > 0$, en sentido antihorario, es:

$$R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,,\ R_\theta(z) = z\omega,$$

donde $\omega = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Importante La deducción que acabamos de realizar muestra una propiedad geométrica muy interesante de los números complejos: *multiplicar por un número complejo de módulo 1 es una rotación por cierto ángulo.* ■

Veamos ahora las *simetrías*. Recordemos, del capítulo 2, que en $\mathbb{R}^2$ teníamos dos tipos de simetrías: respecto de un punto y respecto de una recta. Para el plano complejo, sólo consideraremos simetrías respecto de puntos. En general, una simetría $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ respecto de un número complejo w es la correspondiente simetría $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto del vector asociado a w. Por ejemplo, como la simetría $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto del origen de coordenadas tiene por fórmula a $S(x, y) = -(x, y) = (-x, -y)$, entonces la simetría respecto del número complejo 0 tiene es la función $S(z) = -z$. Si bien no desarrollaremos simetrías respecto de rectas, recordemos que ya hemos estado trabajando con una: el conjungado $\overline{z}$ de un número complejo z es el simétrico de z respecto de la recta dada por el eje x.

■ Ejemplo 76

- Interpretemos geométricamente el efecto de la operación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = (1+i)z - 3$, sabiendo que $(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Si analizamos la expresión de T, vemos que dicha operación consta de varias transformaciones sucesivas de las que hemos estudiado. En efecto, lo primero que hace T a un número complejo z es rotarlo un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ en sentido antihorario; luego, "agranda" el resultado por medio de una homotecia de razón $\sqrt{2}$. Finalmente, traslada lo obtenido tres unidades a la izquierda.
- ¿Cuál es la fórmula de la simetría S respecto del número $w = 3 + 2i$? Veremos que podemos reducir el cálculo de $S(z)$, para $z \in \mathbb{C}$, al caso conocido de la simetría respecto de 0. Notemos que, si realizamos una translación por el número $-w$, entonces dos números simétricos respecto de w van a parar, necesariamente, a dos números simétricos respecto de 0 (pues esta traslación manda w a 0). Como z y $S(z)$ son simétricos respecto de w, esto dice que:
$$T_w(z) = z - w = -(T_w(S(z))) = -(S(z) - w) = -S(z) + w$$
De aquí, concluimos que $S(z) = -z + 2w$.
- Si bien no desarrollaremos simetrías respecto de rectas, miremos la siguiente propiedad de la simetría S respecto del eje y en el plano complejo. Se puede ver que, si $z = a + bi$, entonces $S(z) = S(a + bi) = -a + bi$. Notemos que $-a + bi = -(a - bi) = -\overline{z}$, por lo que $S(z) = -\overline{z}$. Interpretada de esta manera, vemos que la simetría respecto del eje y consiste en la simetría respecto del eje x (que manda z a $\overline{z}$), seguida de la simetría respecto del 0 (que manda z a $-z$).

■

¿Qué hicimos en el apartado 7.2?

- Interpretamos a los números complejos como vectores en $\mathbb{R}^2$.
- Definimos la forma binómica de un número complejo y sus partes real e imaginaria (que siempre son números reales). Vimos que dos números complejos son iguales sí, y solo sí, sus partes reales y sus partes imaginarias coinciden.
- Definimos el módulo de un número complejo como la norma del vector de $\mathbb{R}^2$ asociado a dicho número y observamos que tiene la propiedad que el módulo de un producto es el producto de los módulos. También definimos distancia entre números complejos.
- Definimos el conjugado de un número complejo $a + bi$ como $a - bi$ que, geométricamente es el punto simétrico a (a, b) respecto del eje de las x, y estudiamos sus propiedades y relación con el cálculo de la inversa del número.
- Estudiamos las posibles transformaciones que se pueden hacer geométricamente con los números complejos (interpretándolos como vectores del plano): traslaciones, homotecias, rotaciones y simetrías.

■

7.3 Ecuaciones cuadráticas

Seguramente saben calcular las raíces (reales) de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. La *fórmula resolvente* dice que todas las soluciones reales de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

son de la forma:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El principal aprendizaje de este apartado es que la misma expresión vale para ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos.

En este apartado estudiaremos...

- Cómo resolver ecuaciones cuadráticas en los números complejos.

■

7.3.1 Raíces cuadradas complejas

¿Qué es la raíz cuadrada de un número real $x > 0$? Muchas veces se dice que es "otro número y tal que $y^2 = x$." Pero esta definición no es correcta. Lo que entendemos por "raíz cuadrada de un número real $x > 0$" es *el único número **positivo** y tal que $y^2 = x$*. Por ejemplo, si bien tanto 2 como -2 verifican que, al elevarlos al cuadrado, dan como resultado 4, la raíz cuadrada de 4 es 2. Esta unicidad de la raíz cuadrada y de x es lo que nos permite escribirla como $y = \sqrt{x}$: si no convenimos que siempre es positiva, no sabríamos si $\sqrt{4}$ representa al 2 o al -2.

¿Cómo se traslada la definición de raíz cuadrada a números complejos? Los números complejos no tienen noción de orden, por lo cual, en particular, no se pueden diferenciar entre positivos (mayores a 0) o negativos (menores a 0). Por este motivo, *en los números complejos*, no existe esta unicidad de la raíz cuadrada.

Definición 73 Una raíz cuadrada de $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo w tal que $w^2 = z$.

A diferencia de los reales, donde los números negativos no poseen raíz cuadrada, cualquier número complejo siempre tiene raíces cuadradas (aunque sea un real negativo). Veremos, de hecho, que siempre tiene exactamente dos. Analicemos cómo calcularlas "a mano" por medio de algunos ejemplos.

Ejemplos 77

- ¿Cuáles son las raíces cuadradas de -4? Para que un número complejo w sea una raíz cuadrada de -4 debe suceder que $w^2 = -4$. Si escribimos $w = a + bi$, esto se traduce en pedir:

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = -4$$

Al igualar las partes real e imaginaria, deducimos que $a^2 - b^2 = -4$ y $2ab = 0$. La segunda condición nos dice que, o bien $a = 0$, o bien $b = 0$. Si $a = 0$ entonces $b^2 = 4$, de donde $b = 2$ o $b = -2$. Concluimos que $w = 2i$ y $2 = -2i$ son raíces cuadradas de -4. En el caso que fuera $b = 0$, entonces debería ser $a^2 = -4$. Pero $a \in \mathbb{R}$, y no hay números reales cuyo cuadrado sea -4. Por lo tanto, todas las raíces cuadradas de -4 son $2i$ y $-2i$.

- Hallemos todas las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$. Es decir, busquemos todos los números complejos w tales que $w^2 = 4 + 3i$. Si, como antes, escribimos $w = a + bi$, entonces se tiene:

$$w^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 4 + 3i$$

Esto implica que $a^2 - b^2 = 4$ y $2ab = 3$. Esta vez, parece más difícil resolver estas ecuaciones simultáneas (notemos que no son lineales). Si despejamos, por ejemplo, $a = \frac{3}{2b}$ de la segunda ecuación y la reemplazamos en la primera, obtenemos $\frac{3^2}{(2b)^2} - b^2 = 4$. Esto nos dice que debemos buscar un número b que verifique $9 - 4b^4 = 16b^2$. Si bien esto no es muy difícil (lo aprenderemos a hacer en el capítulo ocho), existe una manera más fácil de resolver nuestro problema. Observemos que podemos extraer más información de los datos del problema. En efecto, como el w buscado debe verificar $w^2 = 4+3i$, entonces, en particular, $|w^2| = |4+3i| = 5$. Como $|w^2| = |w|^2$ (por Experimento 44), entonces debemos tener $|w| = \sqrt{5}$. En términos de a y b, esto quiere decir que $a^2 + b^2 = 5$. Esta es una nueva ecuación que nos va a facilitar el despeje los valores de a y b. Tenemos:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

Sumando la primera ecuación con la tercera, obtenemos $a^2 = \frac{9}{2}$, de donde $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$ o $a = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Reemplazando cada una de estas posibilidades en la segunda ecuación, hallamos $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente. Concluimos que todas las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$ son $w_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ y $w_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Siempre es una buena idea verificar si la respuesta hallada es efectivamente una solución al problema:

$$w_1^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} + 2\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = 4 + 3i$$

Por otro lado, notemos que $w_2 = -w_1$, por lo que $w_2^2 = (-w_1)^2 = w_1^2 = 4 + 3i$.

■

Observación 45 *Como muestran los ejemplos anteriores, si z es un número complejo distinto de 0, entonces z tiene* exactamente *dos raíces cuadradas y, además,* una es la inversa aditiva de la otra.

7.3.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas

Ahora, vamos a estudiar cómo resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Definición 74 Una ecuación cuadrática con coeficientes complejos es una ecuación de la forma:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

donde a, b, c son números complejos y $a \neq 0$.

Como dijimos al comienzo del apartado, la misma fórmula resolvente $x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ es válida para este tipo de ecuaciones complejas. Notemos que esta fórmula puede reescribirse como:

$$z_1, z_2 = \frac{-b+w}{2a},$$

donde w es una raíz cuadrada (compleja) de $b^2 - 4ac$. El término $b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* y se lo nota $\Delta = b^2 - 4ac$. Tengamos en cuenta que, en esta fórmula, no tenemos la necesidad de utilizar el símbolo $\pm$, ya que sabemos que, si w es raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$, también lo es $-w$.

Ejemplos 78

- Hallemos los números complejos z que satisfacen $z^2 + 2iz - 3 = 0$. Para esto, busquemos las raíces cuadradas de $\Delta = (2i)^2 - 4(-3) = -4 + 12 = 8$. Se trata entonces de $\sqrt{8}$ y $-\sqrt{8}$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:

$$\frac{-2i+\sqrt{8}}{2} \text{ y } \frac{-2i-\sqrt{8}}{2}$$

  Simplificando estas fracciones: $\sqrt{2} - i$ y $-\sqrt{2} - i$.

- Encontremos las soluciones de $z^2 + (3+i)z + (1 + \frac{3}{4}i) = 0$. Debemos encontrar las raíces cuadradas de:

$$\Delta = (3+i)^2 - 4\left(1 + \frac{3}{4}i\right) = 9 - 1 + 6i - 4 - 3i = 4 + 3i$$

  Las raíces cuadradas de $4 + 3i$ las habíamos calculado en el Ejemplo 77:

$$w_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ y } w_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

  Por lo tanto, las soluciones de la ecuación original son:

$$\frac{-(3+i)+w_1}{2} \text{ y } \frac{-(3+i)+w_2}{2}$$

■

¿Qué hicimos en el apartado 7.3?

- Estudiamos el concepto de “raiz cuadrada” de un número complejo. Vimos que todo número complejo tiene dos raíces (siendo una la inversa aditiva de la otra) y mostramos cómo hallarlas.
- Aprendimos a resolver ecuaciones cuadráticas en los números complejos (utilizando al fórmula resolvente conocida).

■

7.4 Formas polar y exponencial

Existen otras maneras de representar a los números complejos que resultarán muy convenientes a la hora de resolver ecuaciones.

En este apartado estudiaremos...

- La forma polar de un número complejo.
- La forma exponencial de un número complejo.

■

7.4.1 El problema de la forma binomial

En el apartado anterior vimos cómo resolver ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos. ¿Pero qué sucede con las ecuaciones cúbicas, cuartas o de grados mayores? Supongamos, por ejemplo, que buscamos un número complejo z que cumpla $z^4 = 1$. Una manera directa de encarar este problema es plantear un número complejo genérico $z = a + bi$ (con $a, b, \in \mathbb{R}$), calcular $(a + bi)^4$ e intentar despejar a y b. Si hacemos estas cuentas tenemos, primero:

$$z^2 = (a + bi)(a + bi) = (a^2 - b^2) + 2abi$$

Luego,

$$z^3 = z^2 z = ((a^2 - b^2) + 2abi)(a + bi) = a^3 - 3ab^2 + (3a^2 b - b^3)i$$

Finalmente,

$$z^4 = z^3 z = (a^3 - 3ab^2 + (3a^2 b - b^3)i)(a + bi) = a^4 - 6a^2 b^2 + b^4 + (4a^3 b - 4ab^3)i$$

Por lo tanto, deberíamos lidiar con la ecuación:

$$a^4 - 6a^2 b^2 + b^4 + (4a^3 b - 4ab^3)i = 1$$

En este punto, resulta claro que este camino no es muy ameno, tanto por la complejidad de la ecuación como por la cantidad de cuentas que hay que llevar a cabo para arribar a la misma. Por suerte, hay otra forma mucho más simple de encarar este problema. Esta consiste en utilizar otra manera de representar números complejos: la *forma polar*.

7.4.2 La forma polar de un número complejo

Hasta este punto, el único modo que utilizamos para especificar un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ es por medio de sus coordenadas. Pero existen otros. Uno consiste en dar la longitud de $\vec{v}$ (su norma) y la inclinación que tiene respecto del semieje positivo de las x (Figura 7.1, lado izquierdo). Dadas las coordenadas del vector, ya sabemos como calcular su norma. ¿Cómo encontramos el ángulo de $\vec{v}$ respecto del semieje positivo de las x? Notemos que, si $\vec{v}$ está en el *semiplano superior* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \geq 0\}$ (es decir, el semiplano determinado por todos los puntos del plano cuya coordenada y es mayor o igual a 0) entonces el ángulo buscado es, simplemente, el ángulo θ entre $\vec{v}$ y el vector $(1, 0)$ (o cualquier vector con extremo en el semieje positivo de las x, en realidad; Figura 7.1, lado izquierdo). Por otro lado, si $\vec{v}$ está en el *semiplano inferior* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, y \leq 0\}$ de los puntos cuya coordenada y es menor o igual a 0, entonces el ángulo buscado es $2\pi - \theta$, donde θ es, nuevamente, el ángulo entre $\vec{v}$ y el $(0, 1)$ (Figura 7.1, lado derecho).

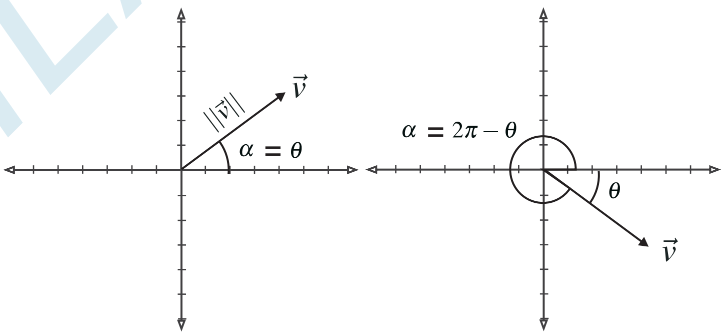


Figura 7.1: Representación polar de vectores.

Por otro lado, dados la norma y ángulo α respecto del semieje positivo de las x del vector $\vec{v}$, ¿cómo podemos hallar las coordenadas a, b de $\vec{v}$? Supongamos primero que el vector tiene norma 1. En este caso, es fácil ver que $a = \cos(\alpha)$ y $b = \sin(\alpha)$, de forma que $\vec{v} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Si ahora $||\vec{v}||$ es cualquier valor, entonces podemos considerar el vector $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$, que es un vector con la misma dirección que $\vec{v}$ pero de norma 1. Por el razonamiento anterior, sabemos entonces que $\vec{w} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, donde α es el ángulo entre $\vec{w}$ y el $(1,0)$ (que es el mismo ángulo entre $\vec{v}$ y el $(1,0)$). Por lo tanto, como $\vec{w} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$, concluimos que:

$$\vec{v} = ||\vec{v}||(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = (||\vec{v}|| \cos(\alpha), ||\vec{v}|| \sin(\alpha))$$

donde α es el ángulo entre $\vec{v}$ y el semieje positivo de las x.

Estudiemos esta situación en el plano complejo. Si tenemos $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces aplicando el razonamiento anterior al vector asociado (a, b), podemos concluir que $a = |z| \cos(\alpha)$ y $b = |z| \sin(\alpha)$, donde α es el ángulo entre el vector (a, b) y el semieje positivo de las x. Es decir, $z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$. Esta forma de representar a z es lo que se conoce como *forma polar de z*. Lo definimos formalmente a continuación:

Definición 75 Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, donde a y b son números reales (y no son ambos 0), vamos a llamar el *argumento* de z, y lo vamos a notar $\arg(z)$, al ángulo que forma (a, b) con el semieje positivo de las x. Observar que $0 \le arg(z) < 2\pi$. De esta manera, vale:

$$z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

Un número complejo escrito de esta manera se dice que está en *forma polar*. Si $|z| = 1$, suele omitirse en la expresión.

Notemos que hemos definido el argumento de un número complejo basados en la fuerte relación geométrica entre $\mathbb{C}$ y el subespacio $\mathbb{R}^2$. Existe, de todas formas, una manera puramente algebraica de especificarlo: *el argumento de un número complejo $z = a + bi \neq 0$ es el único ángulo $arg(z)$ que satisface, simultáneamente, que* $\arg(z) \in [0, 2\pi)$, $\frac{a}{|z|} = \cos(\arg(z))$ *y* $\frac{b}{|z|} = \sin(\arg(z))$. Esta manera de definirlo no requiere conocimientos de cálculo de ángulos entre vectores, pero suele involucrar más cuentas.

Observación 46 *Si $z = |z|(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ está dado en forma polar, es muy fácil encontrar sus partes real e imaginaria. Como $z = |z| \cos(\alpha) + i|z| \sin(\alpha)$ y, tanto $|z| \cos(\alpha)$ como $|z| \sin(\alpha)$ son números reales, se tiene $Re(z) = |z| \cos(\alpha)$ y $Im(z) = |z| \sin(\alpha)$.*

Ejemplos 79

- Hallemos la forma polar de $z = (1 - i)$. En primer lugar, el módulo de z es $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por otro lado, el vector asociado a z en el plano complejo es $(1, -1)$, el cual se encuentra en el semiplano inferior del plano, por lo $arg(z) = 2\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre $(1, -1)$ y $(1, 0)$. Este ángulo es;

$$\theta = \arccos\left(\frac{(1,-1)\cdot(1,0)}{||(1,-1)||||(1,0)||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

  Por lo tanto, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, y la forma polar de z es $\sqrt{2}(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i \sin(\frac{7}{4}\pi))$.

- ¿Cuál es la forma polar de $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$? A primera vista, podría parecer que este número ya está escrito en forma polar, pero hay una condición que falla: $-\frac{\pi}{4}$ no está en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo tanto, esta no es la escritura polar de z. Notemos, sin embargo, que 3 sí es el módulo de z, pues:

$$|z| = \sqrt{9\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 9\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{9\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{9} = 3$$

  Ahora, tenemos que $Re(z) = 3\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ y $Im(z) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Como $\cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces el vector asociado a z es $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$. Este vector está en el semiplano inferior, por lo que $arg(z) =$

$2\pi - \theta$, donde θ es el ángulo entre $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ y el $(1,0)$. Dicho ángulo es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}) \cdot (1,0)}{||(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})||||(1,0)||}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto, $arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, y la forma polar de z resulta $3(\cos(\frac{7}{4}\pi) + i\sin(\frac{7}{4}\pi))$. Observemos que el argumento que acabamos de hallar es el mismo que el del ejemplo anterior. Esto no es casualidad, ya que $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ y $(1,-1)$ forman el mismo ángulo con el semieje positivo de las x (porque son múltiplos). Como para calcular ángulos no nos importan las longitudes de los vectores involucrados, siempre podemos reemplazar los vectores por múltiplos convenientes de ellos. En este ejemplo concreto, podríamos haber calculado el argumento de z utilizando el ángulo entre $(1,-1)$ y $(1,0)$, cosa que nos hubiera simplificado las cuentas.

- Busquemos ahora la forma polar de $z = -1 + \sqrt{3}i$. Un cálculo rápido muestra que $|z| = 2$. El vector asociado a z es $(-1, \sqrt{3})$, el cual se encuentra en el semiplano superior. Por lo tanto, el argumento de z es el ángulo entre $(-1, \sqrt{3})$ y el $(1,0)$. Dicho ángulo es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(-1,\sqrt{3}) \cdot (1,0)}{||(-1,\sqrt{3})||||(1,0)||}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

Por lo tanto, la forma polar de z es $2(\cos(\frac{2}{3}\pi) + i\sin(\frac{2}{3}\pi))$

■

Observación 47 *En el segundo de los ejemplos anteriores, vimos que el número* $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ *tenía por forma polar a* $3\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right)$. *Estas son dos maneras de escribir al mismo número. De hecho, si reemplazamos el argumento* $\frac{7}{4}\pi$ *por cualquier otro número en el cual el seno y coseno tomen el mismo valor que toma este argumento (en cualquier número de la forma* $\frac{7}{4}\pi + 2k\pi$, *para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*), entonces vemos que existen infinitas maneras de representar al número* z. Pero la forma polar es la única expresión de esta forma que tiene al ángulo entre 0 y 2π. *Además,* la norma de z no depende del argumento. *Por estos motivos, podemos concluir que: dos números complejos* z, w *son iguales sí, y solo sí, sus formas polares son idénticas; es decir,* $z = w$ *sí, y solo sí,* $|z| = |w|$ *y* $arg(z) = arg(w)$.

Una de las características más importantes de la forma polar de los complejos es la interpretación del producto. Supongamos que z y w son números complejos no nulos, y sean $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ y $w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ sus escrituras en forma polar, respectivamente. Si hacemos el producto entre z y w, se tiene:

$$\begin{aligned} zw &= |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))|w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= |z||w|(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + i(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))) \end{aligned}$$

Si recordamos las siguientes identidades trigonométricas:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ y
- $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta))$

entonces podemos concluir el siguiente resultado, que se conoce como *Teorema de De Moivre*:

Teorema 48 *[De Moivre]* Si $z, w \in \mathbb{C}$ son distintos de 0 y se pueden escribir de la forma $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ y $w = |w|(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$, para ciertos ángulos α y β (que no necesariamente estén en el intervalo $[0, 2\pi)$), entonces:

$$zw = |z||w|(\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta))$$

¡Este resultado es realmente maravilloso! Dice que el módulo de zw es el producto de los módulos de z y w (que ya sabíamos de antes), pero, también, que el ángulo de zw respecto del eje de las x es la suma de los ángulos de z y

w. Esto muestra que, gráficamente, el efecto de multiplicar un número complejo z por otro w es el de modificar el módulo de vector determinado por z en la proporción $|w|$ y rotar el vector determinado por z en el sentido y magnitud especificada por $\arg(w)$. En particular, si multiplicamos a z por un número complejo de módulo 1, entonces el efecto es simplemente de rotación.

Los siguientes resultados son consecuencia directa del Teorema de De Moivre:

Corolario 49 Si $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ es no nulo, entonces:

1. $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.
2. $\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$.
3. $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$.

Por ejemplo, veamos por qué vale la primera propiedad enunciada en el corolario. Tenemos que verificar que $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$. Si llamamos $w = \frac{1}{|z|}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ entonces, por el Teorema de De Moivre:

$$zw = |z|\frac{1}{|z|}(\cos(\alpha - \alpha) + i\sin(\alpha - \alpha)) = 1(\cos(0) + i\sin(0)) = 1$$

Esto demuestra que $z^{-1} = w$.

Experimento 46 Demuestren las otras dos propiedades enunciadas en el corolario. ■

7.4.3 La forma exponencial

Aun existe otra forma de representar un número complejo. Esencialmente, es equivalente a la forma polar, pero tiene la ventaja que es más “cómoda” para su notación.

Definición 76 Para un número real x, definimos $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$. Usando esta notación, si z es un número complejo no nulo con forma polar $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, tenemos que $z = |z|e^{i\alpha}$. A esta escritura la llamaremos *forma exponencial* de z.

¿Qué ganamos con esta nueva escritura? En primer lugar, da una expresión más concisa que la forma polar para un número complejo. En segundo lugar, nos permite reescribir el Teorema de De Moivre, y sus consecuencias, de manera que es consistente con la propiedad de la exponencial en $\mathbb{R}$ de transformar sumas en productos (es decir, la conocida identidad $e^{x+y} = e^x e^y$ para números reales x, y). Enunciamos a continuación la “versión exponencial” de los resultados y propiedades que vimos para números complejos dados en forma polar. Si $z = |z|e^{i\alpha}$ y $w = |w|e^{i\beta}$, entonces:

1. $zw = |z|e^{i\alpha}|w|e^{i\beta} = |z||w|e^{i\alpha + i\beta} = |z||w|e^{i(\alpha+\beta)}$ (este es el Teorema de De Moivre).
2. $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-i\alpha}$.
3. $\overline{z} = |z|e^{-i\alpha}$.
4. $z^n = |z|^n e^{in\alpha}$, para cualquier número natural n.

¿Qué hicimos en el apartado 7.4?

- Definimos la forma polar de un número complejo (módulo y argumento) y estudiamos sus propiedades e interpretación geométrica.
- Enunciamos el teorema de De Moivre que establece cómo se obtiene la forma polar de un producto de números complejos a partir de los módulos y argumentos de los números involucrados.
- Introdujimos la forma exponencial de un número complejo.

■

7.5 Resolución de ecuaciones generales

Vamos ahora a estudiar cómo resolver ecuaciones con coeficientes complejos.

En este apartado estudiaremos...

- Las raíces n-ésimas de la unidad y de un número complejo cualquiera.
- La resolución de algunas ecuaciones que involucran números complejos.

■

7.5.1 Raíces n-ésimas de la unidad

En el apartado 7.3 estudiamos las raíces cuadradas de un número complejo z, que son los $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^2 = z$, y vimos que saber calcular raíces cuadradas nos permite resolver ecuaciones cuadráticas generales. En es apartado vamos a aprender a resolver ecuaciones que tengan grado n mayor a dos y, para ello, en muchas ocasiones será útil poder encontrar las *raíces n-ésimas* de un número z, es decir, los $w \in \mathbb{C}$ tales que $w^n = z$. Esta es una generalización de la noción de raíz cuadrada a cualquier número natural n. Lo definimos a continuación:

Definición 77 Si n es un número natural, una raíz n-ésima de $z \in \mathbb{C}$ es un número complejo tal que $w^n = z$.

Observación 50 *Así como todo número complejo no nulo tiene, exactamente, dos raíces cuadradas, veremos que todo número complejo no nulo tiene, exactamente, n raíces n-ésimas distintas.*

¿Cómo hacemos para encontrar las raíces n-ésimas de un número complejo $z \neq 0$ dado? Para empezar a buscar una manera, pensemos por un momento, la situación “al revés”. Supongamos que sabemos de antemano que w_1 y w_2 son raíces n-ésimas de z. ¿Qué podemos decir de la relación entre ellas? Observemos que, como $w_1^n = w_2^n = z$ (por definición de “raíz n-ésima”), entonces:

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^n = 1$$

Esto dice que, entonces, $\frac{w_0}{w_1}$ es una raíz n-ésima del número 1. Además indica que podría haber alguna relación entre las raíces en n-ésimas de un número complejo cualquiera y las raíces n-ésimas del número 1. Esto no debería sorprendernos, ya que lo mismo sucede para las raíces cuadradas: si w es una raíz cuadrada de z entonces $-w$ es la otra; pero $-w$ se obtiene al multiplicar a w por la “otra” raíz cuadrada de 1: -1.

Comencemos entonces, estudiando cuáles son raíces cuadradas del número 1; las llamaremos *raíces n-ésimas de la unidad*.

■ **Ejemplos 80**

- Las raíces cuadradas de la unidad son 1 y -1, como ya sabíamos.
- Las raíces cúbicas de la unidad son 1, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

■

Busquemos las raíces cuartas de la unidad, es decir, los $\omega \in \mathbb{C}$ tales que $\omega^4 = 1$. Lo primero que notamos es que la norma de ω debe ser 1. Esto se debe a que $|\omega^4| = |\omega|^4$, y el único número *real positivo* que elevado a la cuarta da 1 es el mismo 1 (de hecho, esto sucede para cualquier potencia n). Por otro lado, como $\omega = 0$ no es una posible raíz, podemos escribir $\omega = |\omega|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$ (en forma polar). Aquí, hemos escrito $arg(\omega) = \alpha$ y ya hemos hecho el reemplazo $|\omega| = 1$. Si reemplazamos en la ecuación $\omega^4 = 1$ obtenemos, por De Moivre:

$$\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha) = 1$$

Si escribimos al 1 en forma polar, esta igualdad queda:

$$\cos(4\alpha) + i\sin(4\alpha) = \cos(0) + i\sin(0)$$

Recordemos que dos números complejos escritos en forma polar son iguales sí, y solo sí, sus módulos coinciden y sus argumentos coinciden. *¡Pero cuidado! ¡No sabemos si la expresión de ω^4 en esta última igualdad es su forma polar!* Por ejemplo, si α fuera π entonces $4\alpha = 4\pi$, el cual no es un argumento válido. Debemos, entonces, averiguar cual es realmente el argumento de ω^4 para poder igualarlo a 0 (que es el argumento de 1). Notemos que, en caso que 4α fuera mayor a 2π deberíamos ir restándole múltiplos de 2π hasta arribar a un número del intervalo $[0, 2\pi)$; o si fuera menor a 0, sumándole múltiplos de 2π. Por lo tanto, el argumento de ω^4 será de la forma $4\alpha + k2\pi$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, donde k representa el múltiplo mencionado, y será positivo o negativo dependiendo de si hay que sumar o restar el 2π. Ahora que sabemos que $arg(\omega^4)$ es de esta forma (para cierto k), podemos igualarlo al argumento de 1 y escribir $4\alpha + k2\pi = 0$. ¿Qué nos dice esta ecuación? Nos dice que el argumento α de ω que estamos buscando debe ser tal que, al multiplicarlo por 4 y, luego, sumarle un múltiplo de 2π, el resultado debe ser 0. Pero, ¿qué múltiplo? *No importa. Alguno.* Mientras $4\alpha + k2\pi$ sea igual a 0 para cierto k, el α correspondiente será un argumento válido para el ω que estamos buscando. De hecho, veremos que existen varios múltiplos que nos servirán, dando lugar a varios posibles argumentos α para ω. Esto no debería soreprendernos, ya que debemos hallar cuatro raíces n-enésima de la unidad. recién mencionado, el múltiplo k no es importante, y solo nos interesará hallar los α. Si despejamos la última ecuación que encontramos, obtenemos:

$$\alpha = -\frac{k\pi}{2}$$

Esto dice que "α tiene la forma $-\frac{k\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$". Pero, ¿para cualquier k? *¡No!* Debemos recordar que $\alpha = arg(\omega)$, por lo que $\alpha \in [0, 2\pi)$. Entonces, ¿para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$ vale que $-\frac{k\pi}{2}$ esté en dicho intervalo? Si vamos haciendo la prueba, vemos que para $k = 0$ queda $\alpha = 0$, para $k = -1$ queda $\alpha = \frac{\pi}{2}$, para $k = -2$ queda $\alpha = \pi$ y para $k = -3$ queda $\alpha = \frac{3}{2}\pi$. Para un $k \in \mathbb{Z}$ distinto de estos valores, los ángulos determinados caen fuera del intervalo $[0, 2\pi)$. Como dijimos antes, no nos importan cuáles son estos múltiplos k; solo nos importan cuáles son los posibles argumentos α. Hay cuatro posibles argumentos para ω, por lo que encontramos las cuatro raíces cuartas de la unidad:

- $\omega_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\omega_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$
- $\omega_2 = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
- $\omega_3 = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -i$

Es decir, las raíces cuartas de la unidad son 1, -1, i y $-i$.

Este razonamiento se puede repetir para calcular las raíces n-ésimas de la unidad para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por un lado, el módulo de toda raíz será 1. Por otro lado, como el argumento de ω^n es $n\alpha$, donde $\alpha = arg(\omega)$, entonces obtendremos la ecuación $n\alpha - k2\pi = 0$, de donde concluimos que los posibles $alpha$ son de la forma $-\frac{k2\pi}{n}$, *para los $k \in \mathbb{Z}$ tales que $-\frac{k2\pi}{n} \in [0, 2\pi)$*. Es fácil chequear que dichos k son $0, -1, -2, -3, \ldots, -(n-1)$, por lo que los posibles argumentos de ω son $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$; es decir, los números de la forma $\frac{2t\pi}{n}$ para $t = 0, \ldots, n-1$. Concluimos que las raíces n-ésimas de la unidad son:

- $\omega_0 = \cos(0) + i\sin(0) = 1$
- $\omega_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$
- $\omega_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

- $\vdots$
- $\omega_{n-1} = \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$.

Notemos que los subíndices de los ω_t los hemos elegido de manera que $\omega_t = \cos\left(\frac{2t\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2t\pi}{n}\right)$.

7.5.2 Raíces n-ésimas de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$ no nulo. Supongamos que conocemos de antemano una raíz n-ésima de z. Llamémosla η. Por un lado, si $\tilde{\eta}$ es otra raíz n-ésima de z, entonces vimos que $\frac{\tilde{\eta}}{\eta}$ es raíz n-ésima de la unidad. Por otro lado, si ω es una raíz de la unidad, entonces $\omega\eta$ es una raíz n-ésima de z, pues:

$$(\omega\eta)^n = \underbrace{\omega^n}_{=1}\underbrace{\eta^n}_{=z} = z$$

Por lo tanto, acabamos de ver que, fijada una raíz n-ésima de z particular, a cada raíz n-ésima de z da lugar a una raíz n-ésima de la unidad y, a su vez, cada raíz n-ésima de la unidad da lugar a una raíz n-ésima de z. Por lo tanto, para hallar todas las raíces n-ésimas de z, nos alcanza con encontrar una en particular y, luego, multiplicarla por cada una de las raíces n-ésimas de la unidad. Ahora, si $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ es la forma polar de z, entonces una posible raíz n-ésima de z es $\eta_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n}))$ (pueden comprobarlo elevando esta expresión a la n). Concluimos, entonces, que todas las raíces n-ésimas de z son:

- $\eta_0 = \eta_0\omega_0 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha}{n}) + i\sin(\frac{\alpha}{n}))$
- $\eta_1 = \eta_0\omega_1 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2\pi}{n}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+4\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+4\pi}{n}))$
- $\vdots$
- $\eta_{n-1} = \eta_0\omega_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}))$.

Notemos que los subíndices de los η_t los hemos elegido de manera que $\eta_t = \eta_0\omega_t = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\alpha+2t\pi}{n}) + i\sin(\frac{\alpha+2t\pi}{n}))$.

Ejemplo 81 Calculemos las raíces sextas de $1+i$. Por lo visto recién, vamos a necesitar calcular las raíces sextas de la unidad y una raíz sexta de $1+i$ particular. Sabemos que una tal raíz es $\eta_0 = \sqrt[6]{|1+i|}(\cos(\frac{\alpha}{6}) + i\sin(\frac{\alpha}{6}))$, donde $\alpha = arg(1+i)$. Como $|1+i| = \sqrt{2}$ y $\alpha = \frac{\pi}{4}$, entonces $\eta_0 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{\pi}{24}) + i\sin(\frac{\pi}{24}))$. Por otro lado, las raíces sextas de la unidad son los números complejos de la forma $\omega_t = \cos\left(\frac{2t\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2t\pi}{6}\right)$ para $t = 0,1,2,3,4,5$. Por lo tanto, las raíces sextas de $1+i$ son:

- $\eta_0 = \eta_0\omega_0 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{\pi}{24}) + i\sin(\frac{\pi}{24}))$
- $\eta_1 = \eta_0\omega_1 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{9\pi}{24}) + i\sin(\frac{9\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{17\pi}{24}) + i\sin(\frac{17\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{25\pi}{24}) + i\sin(\frac{25\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{33\pi}{24}) + i\sin(\frac{33\pi}{24}))$
- $\eta_2 = \eta_0\omega_2 = \sqrt[12]{2}(\cos(\frac{41\pi}{24}) + i\sin(\frac{41\pi}{24}))$

Estos números en general tienen partes reales e imaginarias muy complicadas de escribir, por lo que los dejaremos expresados en forma polar. Por ejemplo, $\eta_0 \approx 1,059460329406 + 0,002420479749i$ ■

7.5.3 Resolución de ecuaciones generales

Vamos a aprender a resolver ecuaciones con coeficientes complejos que incorporan todo lo que aprendimos en la unidad: raíces n-ésimas, módulos y conjugados. Mostramos las ideas principales de resolución en dos ejemplos. Busquemos, primero, todos los números complejos $z \in \mathbb{C}$ que cumplan $z^3 = (1+i)(3-2i)^3$. Un posible camino es llevar a cabo las operaciones indicadas en el lado derecho de la igualdad (es decir, calcular el cubo de $3-2i$ y multiplicarlo por $1+i$) y, luego, hallar las raíces cúbicas del resultado. Este camino es efectivamente factible, pero muchas veces se pueden “reordenar” ciertas expresiones para hacer más fáciles los cálculos (o, directamente, nos lo podemos ahorrar). En este caso, como hay una potencia cúbica a cada lado de la igualdad, pasar el $(3-2i)^3$ dividiendo y reescribir:

$$\left(\frac{z}{3-2i}\right)^3 = 1+i$$

Esto nos está diciendo que *el número* $\frac{z}{3-2i}$ *es una raíz cúbica de* $1+i$. Ya sabemos calcular raíces n-ésimas para cualquier n, así que podemos hallar que las raíces cúbicas de $1+i$ son:

- $\eta_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- $\eta_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)$
- $\eta_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

Por lo tanto, estas son las tres posibilidades para $\frac{z}{3-2i}$. Si pasamos multiplicando el $3-2i$ hallamos los z buscados:

- $z_0 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$
- $z_1 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{12}\right)\right)$
- $z_2 = (3-2i)\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$

Supongamos ahora que queremos hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\overline{z}^4 + z^2(2-2i)|z| = 0$. Siempre es una posibilidad plantear z en forma binomial, llevar a cabo las operaciones que indican la ecuación y tratar de despejar la parte real e imaginaria de z. Pero, como vimos en ejemplos anteriores, en general, la forma binomial no es muy cómoda a la hora de calcular potencias grandes de números. Elijamos, entonces, la forma polar. Recuerden que la forma polar de un número complejo está definida sólo para números no nulos, por lo que, siempre que resolvamos ecuaciones apelando a esta forma, debemos tratar por separado el caso $z=0$. En este caso, es claro que $z=0$ es una solución de esta ecuación. Ahora que ya la registramos como posible solución, la dejamos de lado y estudiamos si alguno de los números no nulos es también solución. Escribimos $z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$, con $\alpha = arg(z)$, y reemplazamos en la ecuación para obtener:

$$\underbrace{|z|^4(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha))}_{\overline{z}^4} + \underbrace{|z|^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))}_{z^2}(2-2i)|z| = 0$$

¿Cómo seguimos? Vimos que, por el Teorema de De Moivre, es muy sencillo multiplicar las formas polares de dos números complejos, pero no hay ningún resultado que nos diga cómo es la suma de este tipo de expresiones. Sí sabemos cómo lidiar con una igualdad de formas polares: sus módulos y argumentos deben coincidir. Por este motivo, lo mejor que podemos hacer, en este caso, es pasar uno de los términos de la suma al otro lado de la igualdad, con el fin de “deshacernos” de la suma y llevar la ecuación a una expesión de igualdad entre formas polares. Entonces, obtenemos:

$$|z|^4(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha)) = |z|^3(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))(-2+2i)$$

Aquí hemos juntado $|z|^2$ con el $|z|$ del final de la expresión y hemos incluido el signo “$-$” que aparece por haber pasado restando, dentro del paréntesis del número $2-2i$ (por este motivo aparece $-2+2i$ en su lugar). Ahora, como $|z| \neq 0$, pues descartamos el caso $z=0$, entonces podemos cancelar el $|z|^3$ a ambos lados de la igualdad (lo que deja solo un $|z|$ del lado izquierdo). Por otro lado, $-2+2i$ tiene por forma polar a $\sqrt{8}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4}))$, por lo cual, luego de hacer la multiplicación por $(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$, la igualdad nos queda:

$$|z|(\cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha)) = \sqrt{8}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2 + \alpha\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Esta última, se asemeja a una igualdad de formas polares, pero ya sabemos que no lo es. Los ángulos involucrados no verifican ser posibles argumentos (pues podrían no estar dentro del rango $[0, 2\pi)$). Como este problema lo tenemos en ambos términos de la igualdad, sería muy complicado relacionar todos los posibles argumentos del término de la derecha con los posibles argumentos de la izquierda. ¡En este caso, lo más conveniente es volver a acudir al Teorema de De Moivre! ¿Cómo? ¡Pues podemos pasar dividiendo el término de la derecha! Recordemos que, al dividir números escritos en forma polar, se resta el argumento del divisor al del dividendo. Por lo tanto, nuestra ecuación equivale a:

$$\frac{|z|}{\sqrt{8}}\left(\cos\left(-6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-6\alpha - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 1$$

Ahora procedemos de manera análoga a cuando hallamos las raíces cuartas de la unidad (en la página 211). No sabemos si $-6\alpha - \frac{3\pi}{4}$ es un argumento válido ya que no podemos garantizar que caiga en el intervalo $[0, 2\pi)$. Por lo tanto, debemos sumarle a esta expresión algún múltiplo entero de 2π para llevarlo a dicho intervalo. Como el argumento de 1 es 0, entonces al igualar argumentos nos queda la igualdad:

$$-6\alpha - \frac{3\pi}{4} + k2\pi = 0$$

De aquí, despejamos que:

$$\alpha = \frac{k2\pi - \frac{3}{4}\pi}{6}$$

Como α representa el argumento del z, entonces debemos ver para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$ esta última expresión está en el intervalo $[0, 2\pi)$. Esto podemos hacerlo a mano, y descubrir que los únicos $k \in \mathbb{Z}$ que verifican esto son $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Por lo tanto, los posibles argumentos de z son $\alpha = \frac{5}{24}\pi, \frac{13}{24}\pi, \frac{21}{24}\pi, \frac{29}{24}\pi, \frac{37}{24}\pi, \frac{45}{24}\pi$. Por otro lado, como el módulo de 1 es 1, entonces $\frac{|z|}{\sqrt{8}} = 1$, de donde $|z| = \sqrt{8}$. Hemos hallado, entonces, que todas las soluciones de la ecuación $\overline{z}^4 + z^2(2 - 2i)|z| = 0$ son:

- $z_0 = 0$ (que habíamos hallado al comienzo)
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{5}{24}\pi) + i\sin(\frac{5}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{13}{24}\pi) + i\sin(\frac{13}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{21}{24}\pi) + i\sin(\frac{21}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{29}{24}\pi) + i\sin(\frac{29}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{37}{24}\pi) + i\sin(\frac{37}{24}\pi))$
- $z_1 = \sqrt{8}(\cos(\frac{45}{24}\pi) + i\sin(\frac{45}{24}\pi))$

¿Qué hicimos en el apartado 7.5?

- Estudiamos las raíces n-ésimas de la unidad y de un número complejo genérico.
- Vimos como resolver algunas ecuaciones generales que involucran a los números complejos.

8. Polinomios

En este capítulo vamos a introducir uno de los principales objetos de estudios del Álgebra: los polinomios. Los polinomios poseen una estructura algebraica muy rica que es similar a la teoría de números enteros (mejor conocida como Teoría de números*) y aparecen prácticamente en todas las ramas de la Matemática. En este curso, estudiaremos los resultados más relevantes de esta teoría.*

8.1 ¿Qué es un polinomio?

Los polinomios son expresiones que se construyen a partir de números y potencias de una variable x. Aquí los trabajaremos desde una visión algebraica.

En este apartado estudiaremos...

- La definición de polinomio de una variable como objeto algebraico.
- Las operaciones que pueden llevarse a cabo entre polinomios.
- La evaluación de polinomios en números.

8.1.1 La visión algebraica de los polinomios

Los polinomios suelen ser considerados como un tipo especial de funciones reales. Si bien esta interpretación es válida, los polinomios poseen una estructura muy *regular*, lo que permite realizar operaciones entre ellos y tratarlos como objetos algebraicos. Los polinomios constan de una única variable x, que es elevada a distintas potencias, cada una de estas potencias es multiplicada por una constante (número) y, finalmente, todos estos términos son sumados entre sí. Si lo relacionamos con la noción de combinación lineal que estudiamos en el capítulo 3, se lo puede pensar como una *combinación lineal de potencias de x*. Veremos más adelante que esta interpretación es, de hecho, bastante acertada. La importancia de los polinomios desde el punto de vista algebraico, es que admiten operaciones conocidas, como la suma, multiplicación y división, y, en cada caso, el resultado vuelve a ser un polinomio. En este sentido, el conjunto de estas funciones no es simplemente un conjunto, sino que es lo que se conoce como un *anillo* (un conjunto con una estructura algebraica muy rica).

Definición 78 Un *polinomio* $P(x)$ en una indeterminada (o variable) x con coeficientes en $\mathbb{C}$ es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

donde los $a_0, \ldots, a_n$ son números complejos. Si todos los a_i son números reales, decimos que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ y si todos los a_i son racionales, que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$. El índice i más grande tal que $a_i \neq 0$ se llama el *grado* del polinomio y se nota $gr(P)$.

Las constantes $a_0, a_1, ..., a_n$ se llaman *coeficientes* del polinomio. Al coeficiente a_0 se le da el nombre de *término independiente* y al coeficiente a_n, el de *coeficiente principal*. Cuando el coeficiente principal es 1, al polinomio se le llama *mónico*. El conjunto de polinomios con coeficientes complejos se nota $\mathbb{C}[x]$, el de polinomios con coeficientes reales, $\mathbb{R}[x]$, y el de polinomios con coeficientes racionales, $\mathbb{Q}[x]$. Por supuesto, $\mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$.

Importante En general, vamos a usar $\mathbb{K}$ para representar alguno de los conjuntos numéricos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, de forma que $\mathbb{K}[x]$ representará el conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$. De esta manera, vamos a poder enunciar resultados de manera más sencilla (utilizando el $\mathbb{K}$), en lugar de tener que escribir un enunciado para cada conjunto numérico $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. ■

■ **Ejemplo 82**

- $P(x) = 1$ es un polinomio donde el único coeficiente no nulo es el término independiente (no aparece explícitamente la variable x). En general, un polinomio $P(x) = \lambda \in \mathbb{C}$, con $\lambda \neq 0$, se llama *polinomio constante*. El grado de un polinomio constante es 0.
- Observemos que, en el caso de los polinomios constantes, hemos descartado la posibilidad que la constante sea el 0. El polinomio $P(x) = 0$ es un polinomio especial que se llama *polinomio nulo* y *no tiene grado*. Entenderemos esta diferenciación con los polinomios constantes cuando veamos el producto de polinomios.
- $Q(x) = 2x - 5$ es un polinomio de grado 1. Su coeficiente principal es 2 y su término independiente es -5. A los polinomios de grado 1 se los llama *polinomios lineales*.
- $R(x) = -\frac{2}{5}x^2 - 3x + 7$ es un polinomio de grado 2. Su coeficiente principal es $-\frac{2}{5}$ y su término independiente es 7. A los polinomios de grado 2 se los llama *polinomios cuadráticos*. Tengamos en cuenta que las ecuaciones cuadráticas que estuvimos resolviendo en el apartado 3 del capítulo anterior, son precisamente polinomios cuadráticos en $\mathbb{C}[x]$.
- $N(x) = x^4 + 1$ y $M(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x$ son polinomios de grado 4. El primero es mónico (su coeficiente principal 1); el segundo, no. Consideremos que el término independiente de $M(x)$ es 0.
- $S(x) = x^3 - 3ix^2 + (1 - 2i)x + 7i$ es un polinomio con coeficientes complejos. A diferencia de los ejemplos anteriores, este polinomio no está en $\mathbb{R}[x]$.

■

Observación 51 *Así como consideramos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mediante la identificación $\mathbb{R} = \{a + bi \, : \, b = 0\}$, también podemos considerar los números complejos como contenidos en los polinomios con coeficientes complejos; es decir, $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}[x]$. La identificación, por supuesto, es interpretar a $\mathbb{C}$ como el conjunto de polinomios constantes; es decir, $\mathbb{C} = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x] \, : \, a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 0\}$. De la misma manera, podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[x]$.*

8.1.2 Operaciones con polinomios

Comentamos en el comienzo del capítulo que los polinomios se pueden sumar, multiplicar e, inclusive, dividir.

Primero veamos *suma y resta de polinomios*. Para sumar (o restar) dos polinomios, se agrupan los términos de igual grado y se suman (o restan) sus coeficientes. Por ejemplo, si $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ y $Q(x) = 6x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x + 9$, el polinomio $P(x) + Q(x)$ se calcula:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^4 - 5x^3 + x - 7) + (6x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x + 9) \\ &= (2+6)x^4 + (-5+1)x^3 - 2x^2 + (1-6)x + (-7+9) \\ &= 8x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

Por otro lado, el polinomio $P(x) - Q(x)$ se calcula:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^4 - 5x^3 + x - 7) - (6x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x + 9) \\ P(x) + Q(x) &= (2-6)x^4 + (-5-1)x^3 + (0-(-2))x^2 + (1-(-6))x + (-7-9) \\ &= -4x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 7x - 16 \end{aligned}$$

Si P y Q tienen sus coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces $P + Q$ y $P - Q$ también.

Experimento 47 Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, observen cuál es el grado de $P + Q$. ■

Prosigamos con *Multiplicación de polinomios*. Para multiplicar dos polinomios, basta aplicar la propiedad distributiva y las leyes de la multiplicación y de las potencias. Es decir, se multiplica cada término de uno de los polinomios por cada término del otro y se suman todas estas multiplicaciones. Por ejemplo, para $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x - 7$ y $Q(x) = 2x^2 - x + 1$, el producto $P(x)Q(x)$ se calcula:

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= (2x^4 - 5x^3 + x - 7)(2x^2 - x + 1) \\ &= (2x^4 - 5x^3 + x - 7)2x^2 + (2x^4 - 5x^3 + x - 7)(-x) + (2x^4 - 5x^3 + x - 7) \\ &= 4x^6 - 10x^5 + 2x^3 - 14x^2 - 2x^5 + 5x^4 - x^2 + 7x + 2x^4 - 5x^3 + x - 7 \\ &= 4x^6 + (-10x^5 - 2x^5) + (5x^4 + 2x^4) + (2x^3 - 5x^3) + (-14x^2 - x^2) + (7x + x) + (-7) \\ &= 4x^6 - 12x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 8x - 7 \end{aligned}$$

Si P y Q tienen sus coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces PQ también.

Experimento 48 Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, observen cuál es el grado de PQ (noten que, como P y Q tienen grado, entonces ninguno es el polinomio nulo). Este experimento explica, en parte, la diferenciación que hacemos entre los polinomios constantes (de grado 0) y el polinomio nulo (que no tiene grado). ■

Igualdad de polinomios. ¿Cuándo dos polinomios son iguales? Cuando tienen el mismo grado y sus coeficientes coinciden término a término. Es decir, decimos que el polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es igual al polinomio $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ si $a_i = b_i$ para todo i entre 0 y n. Por ejemplo, los polinomios $x^2 + 3x - 2$ y $x^3 + x - 1$ no son iguales porque tienen distinto grado. También, los polinomios $x^3 - 4x^2 - x + 9$ y $x^3 - 4x^2 + 3x + 9$ son distintos, pues el coeficiente que acompaña a x en el primero es -1, mientras que en el segundo es 3.

Una característica a tener en cuenta es lo que se denomina *evaluación de polinomios*. Un hecho importante sobre los polinomios es que se los puede evaluar en números (racionales, reales, complejos). Esto da lugar a una función (que es, seguramente, la manera más común de considerarlos). Por supuesto, la evaluación de un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ en un número $b \in \mathbb{C}$ consiste simplemente en reemplazar la indeterminada x por el número b en la expresión del polinomio y llevar a cabo la cuenta indicada por el polinomio. Por lo tanto, evaluar un polinomio da como resultado un número. El polinomio $P(x)$ evaluado en un número b se nota $P(b)$. Es decir, si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ entonces:

$$P(b) = a_n b^n + \cdots + a_1 b + a_0 \in \mathbb{C}.$$

Por ejemplo, si $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 9$, entonces $P(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 3(-2) + 9 = -21$.

Un *monomio* es un tipo especial de polinomio que solo tiene un coeficiente que no es cero. Dicho de otra manera, un monomio es un polinomio de la forma $P(x) = ax^n$ con $a \neq 0$. La importancia de los monomios es que *todo polinomio es una suma de monomios*.

$$P(x) = \underbrace{a_n x^n}_{monomio} + \underbrace{a_{n-1} x^{n-1}}_{monomio} + \ldots + \underbrace{a_2 x^2}_{monomio} + \underbrace{a_1 x}_{monomio} + \underbrace{a_0}_{monomio}$$

De hecho, la expresión *polinomio* expresa que es un objeto que consta de varios monomios. Cabe aclarar que los polinomios constantes se consideran monomios de grado 0 (pues $a = ax^0$). Veremos, más adelante, que los monomios son muy útiles a la hora de llevar a cabo muchas operaciones. Esto no debería sorprendernos, ya que sumando monomios podemos "generar" todos los polinomios.

La palabra "generar" utilizada en la última oración no es casualidad. Sucede que $\mathbb{C}[x]$ también es un espacio vectorial (donde la suma es la suma de polinomios y el producto por escalar es el producto de un polinomio por otro polinomio constante). Un sistema de generadores natural para el espacio de todos los polinomios consta de los monomios de todas los grados: $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$. Noten que, pensado de esta manera, los polinomios son precisamente las combinaciones lineales de los monomios.

¿Qué hicimos en el apartado 8.1?

- Definimos a los polinomios como objetos algebraicos y las operaciones entre polinomios (suma y multiplicación). Vimos que estas operaciones cumplen propiedades idénticas a las operaciones con números reales o complejos.
- Determinamos cuándo dos polinomios son iguales y desarrollamos la idea de evaluar un polinomio en un número.
- Definimos los monomios como los polinomios de la forma ax^n.

8.2 División de polinomios

Vamos ahora a aprender cómo llevar a cabo la división entre dos polinomios y a estudiar algunos resultados fundamentales de la Teoría de divisibilidad.

En este apartado estudiaremos...

- El algoritmo de división.
- Teorema del resto.

8.2.1 ¿A qué se le llama dividir dos polinomios?

La división de polinomios se define de manera análoga a la división entre números enteros. ¿Qué hacíamos para dividir dos números enteros? Pues dividir $a \in \mathbb{Z}$ por $b \in \mathbb{Z}$ consistía en encontrar enteros $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $a = qb + r$ para $0 \leq r < b$. El número q se llamaba el *cociente* de la división y el número r el *resto*. También, el número a era el *dividendo* y el número b el divisor. El propósito de dividir el número a por b es ver cuántas veces "entra" en a el número b (dado por el cociente q) y, si no entra "justo", cuánto "sobra" antes de poder completar a (el resto r). El hecho que pidamos que el resto sea mayor a cero y menor que el divisor hace que haya *únicos* enteros $q, r \in \mathbb{Z}$ que verifiquen $a = qb + r$. Por ejemplo, la división de 572 por 12 tiene por cociente $q = 47$ y por resto $r = 8$. En efecto, $572 = 12{,}47 + 8$ y el resto 8 es mayor a cero y menor que 12. Conocemos ya desde la escuela primaria una manera de llevar a cabo a mano la división de dos números enteros, ¡y la manera de hacerlo con polinomios es prácticamente igual! De hecho, veremos que en cierta forma es mucho más sencillo.

Primero, veamos a qué nos referimos específicamente con "división de dos polinomios". Consideremos el siguiente teorema:

Teorema 52 Dados polinomios $P, Q \in \mathbb{K}[x]$, con $Q \neq 0$, existen *únicos* polinomios C y R en $\mathbb{K}[x]$ tales que:

- $P = QC + R$ y
- o bien, $R = 0$ (el polinomio nulo) o bien, $gr(R) < gr(Q)$.

Notemos que el Teorema 52 es un resultado análogo a lo que vale en el caso de los números enteros: el cociente de la división de P por Q nos dice cuantas veces "entra" el polinomio Q dentro de P y, si no entra "justo", el resto nos indica "cuánto le sobra" para entrar justo. Observemos que, también, en lugar de pedir que el resto sea un número mayor o igual a cero y menor estricto que el divisor, pedimos que el resto sea un polinomio *de grado* mayor o igual que cero o menor o igual que el *grado* del divisor. Esto es porque no hay un orden natural entre los polinomios, pero sí hay un orden natural entre los grados de los polinomios. A lo largo del texto hablaremos de polinomios "más pequeños" o "más grandes", estas frases deben entenderse como una definición a partir del hecho de que dados dos polinomios, no iguales, el grado de uno es mayor que el del otro. Entonces al mayor se lo denomina "más grande" mientras que al de menor grado "más pequeño". El estudiante debe tener en cuenta, mientras lee, que debe llegar a familiarizarse con estas formas de expresión típicas. También, al igual que el caso de los enteros, el polinomio $P(x)$ es llamado el *dividendo*, el polinomio $Q(x)$, el *divisor*, el polinomio $C(x)$, el *cociente* y el polinomio $R(x)$, el *resto*. Por lo tanto, cuando nos referimos a "hacer la división entre dos polinomios" lo que vamos a querer hallar es el cociente y el resto de dicha división.

Observación 53 *Observemos que si P, Q tienen coeficientes en $\mathbb{K}$ entonces su cociente y resto también.*

8.2.2 El algoritmo de división

La forma para llevar a cabo el cálculo de la división entre dos polinomios se conoce como *Algoritmo de división*. Veamos con un ejemplo cómo se procede. Supongamos que queremos dividir el polinomio $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x$ por el polinomio $Q(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Al igual que para números enteros, los ubicamos gráficamente así:

$$3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x \quad |\underline{x^3 + 3x^2 - 1}$$

Vamos a empezar a armar el cociente calculando los monomios que lo constituyen uno a la vez (de hecho, del más grande al más chico). Lo que debemos hacer es considerar el monomio de potencia más grande del divisor Q (en este caso es x^3), el monomio más grande del polinomio que estamos dividiendo ($3x^5$) y preguntarnos: ¿por qué otro monomio debo multiplicar a x^3 para "llegar" a $3x^5$? La respuesta es, por supuesto, $3x^2$. Este es, entonces, el primer monomio de cociente.

$$\begin{array}{ll} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & |\underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ & \;3x^2 \end{array}$$

Y ahora hacemos lo mismo que en la división de enteros: multiplicamos el divisor por el monomio que acabamos de agregar al cociente y ponemos el resultado debajo del dividendo:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & \underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ 3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 \end{array}$$

Luego, restamos el dividendo por este nuevo polinomio que ubicamos bajo él:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & \underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ 3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 \\ \hline -9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x & \end{array}$$

Es importante tener en cuenta que la idea central en este último punto es la de realizar la resta de dos polinomios, con lo cual al principio de su aprendizaje tal vez sea útil que, como cálculo auxiliar, escriba explícitamente dicha operación,

$$(3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x) - (3x^5 + 9x^4 - 3x^2) = -9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x$$

¿Qué hemos logrado con este procedimiento? ¡Pues ahora nos quedó un polinomio de menor grado en el sector donde estaba el dividendo (en este caso, de grado 4)! Esto nos indica que este procedimiento va a ir disminuyendo los grados de los polinomios bajo el dividendo y, por lo tanto, eventualmente arribaremos a un polinomio de grado menor al divisor (y habremos terminado el cálculo, pues esta es la característica que buscamos en el resto).

Veamos cómo seguimos. En el lugar del dividendo, nos quedó el polinomio $-9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x$, cuyo monomio principal es $-9x^4$. Nos preguntamos nuevamente, ¿por qué monomio tenemos que multiplicar a x^3 para llegar a $-9x^4$? La respuesta es $-9x$. Entonces, sumamos este monomio al cociente:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & \underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ 3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 - 9x \\ \hline -9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x & \end{array}$$

Hacemos a continuación la multiplicación de este monomio (y solo este monomio) por Q y lo ubicamos debajo del último polinomio que calculamos:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & \underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ 3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 - 9x \\ \hline -9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x & \\ -9x^4 - 27x^3 + 9x & \end{array}$$

y restamos estos últimos dos polinomios:

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & \underline{x^3 + 3x^2 - 1} \\ 3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 - 9x \\ \hline -9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x & \\ -9x^4 - 27x^3 + 9x & \\ \hline 25x^3 + 10x^2 - 11x & \end{array}$$

Como este último polinomio obtenido aún no tiene grado menor al grado del divisor, continuamos. ¿Por qué monomio tenemos que multiplicar x^3 para "deshacernos" del $25x^3$? Por 25 (recuerden que las constantes también son monomios). Siguiendo el mismo procedimiento que antes, tenemos:

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x & x^3 + 3x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
3x^5 + 9x^4 - 3x^2 & 3x^2 - 9x + 25 \\ \cline{1-1}
-9x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 2x & \\
-9x^4 - 27x^3 + 9x & \\ \cline{1-1}
25x^3 + 10x^2 - 11x & \\
25x^3 + 75x^2 + 25 & \\ \cline{1-1}
-65x^2 - 11x + 25 &
\end{array}
$$

Y ahora sí, como en el lugar del dividendo arribamos a un polinomio de grado menor a 3, terminamos con la división. El resultado obtenido es que el cociente de la división entre P y Q es $C(x) = 3x^2 - 9x + 25$ y el resto $R(x) = -65x^2 - 11x + 25$. Pueden corroborar que:

$$3x^5 - 2x^3 + 7x^2 - 2x = (3x^2 - 9x + 25)(x^3 + 3x^2 - 1) + (-65x^2 - 11x + 25)$$

¿Qué sucede si el grado del dividendo P es menor que el grado del divisor Q? ¡En este caso la división es obvia! El cociente es 0 y el resto es P (de forma que $P = 0.Q + P$). Notemos que el cociente y el resto, así definidos, cumplen las condiciones del Teorema 52. Además, la interpretación de este hecho es natural: si $gr(Q) > gr(P)$, entonces Q no puede "entrar" siquiera una vez dentro de P, por lo que el cociente es 0. Les dejamos para pensar en el siguiente experimento otra situación especial del algoritmo de división.

Experimento 49 ¿Cómo es el cociente y el resto de la división entre P y Q si ambos polinomios tienen el mismo grado? ■

Veamos otro ejemplo del algoritmo de división. Supongamos que queremos hacer la división entre $P(x) = -x^3 + 12x^2 - 47x + 60$ por $Q(x) = x - 4$. Escribimos todo junto el procedimiento.

$$
\begin{array}{r|l}
-x^3 + 12x^2 - 47x + 60 & x - 4 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 4x^2 & -x^2 + 8x - 15 \\ \cline{1-1}
8x^2 - 47x + 60 & \\
8x^2 - 32x & \\ \cline{1-1}
-15x + 60 & \\
15x - 60 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

En este caso, el resto es el polinomio 0, lo que nos dice que $P(x) = Q(x)(-x^2 + 8x - 15)$. Esto es análogo al caso cuando obteníamos resto 0 en la división de número enteros. Por ejemplo, el resto de dividir 455 por 13 es 0, lo que quiere decir que 455 es múltiplo de 13 (o que 13 divide a 455). De la misma manera, se dice que un polinomio $Q(x)$ *divide* a $P(x)$, o que el polinomio $P(x)$ es *divisible* por el polinomio $Q(x)$, si el resto de la división entre $P(x)$ y $Q(x)$ es el polinomio nulo $R(x) = 0$. Veremos al final de la unidad cómo descomponer a los polinomios como producto de sus divisores más pequeños (llamados *factores*).

8.2.3 El Teorema del resto

En algunas situaciones, existe una manera de conocer el polinomio resto con antelación a efectuar la división entre dos polinomios. Y esto resulta útil dado que se puede conocer si la división será exacta (es decir, con resto 0) sin la necesidad de efectuarla. El Teorema del resto permite averiguar el valor del resto de la división entre un polinomio $P(x)$ por otro polinomio de la forma $Q(x) = x - a$, con $a \in \mathbb{C}$, sin necesidad de hacer la división.

Teorema 54 — Teorema del resto. El resto de dividir el polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ por el polinomio $x - a$, con $a \in \mathbb{C}$, es igual a $P(a)$.

Observemos que, como estamos dividiendo por un polinomio de grado 1, entonces el resto de la división entre $P(x)$ y $x - a$ será el polinomio nulo o un polinomio constante. Lo que dice el teorema es que esta constante será precisamente el número $P(a)$. La demostración de este hecho no es complicada: si $C(x)$ y $R(x)$ son el cociente y el resto, respectivamente, de la división entre $P(x)$ y $x-a$, entonces $P(x) = (x-a)C(x)+R(x)$. Si ahora evaluamos al polinomio $P(x)$ en $x = a$, resulta: $P(a) = (a - a)C(a) + R(a) = R(a)$. Como $R(x)$ es un polinomio nulo o un polinomio constante, entonces toma el mismo valor cualquier número en lo que lo evaluemos. En particular, $R(x) = R(a)$, que es lo que queríamos demostrar.

■ **Ejemplo 83** Calculemos el resto de la división de $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ por el polinomio $Q(x) = x - 3$. Como el divisor es de la forma $x - a$, entonces podemos usar el Teorema del resto y hallar que el resto es $P(3) = 3^3 - 5(3^2) + 6{,}3 = 27 - 45 + 18 = -18 + 18 = 0$. ■

¿Qué hicimos en el apartado 8.2?

- Estudiamos cómo dividir polinomios (de manera análoga a la división de números enteros).
- Introducimos el concepto de que un polinomio P sea divisible por otro Q (que el resto de la división de P por Q sea el polinomio nulo).
- Enunciamos y demostramos el Teorema del resto, que nos dice cuál es el resto de la división de un polinomio P por un polinomio de la forma $x - a$.

■

8.3 Raíces

Estudiemos, ahora, cómo hallar los *ceros* de los polinomios; esto es, los números que, al evaluarlos en el polinomio, lo anulan.

En este apartado estudiaremos...

- La definición de raíz de un polinomio.
- La relación entre las raíces del polinomio P y los polinomios que dividen a P.
- Cómo buscar raíces de polinomios.
- El Teorema de Gauss.
- La multiplicidad de una raíz.
- El Teorema fundamental del Álgebra.

■

8.3.1 ¿Qué son las raíces de un polinomio?

Ya sabemos que las ecuaciones cuadráticas que resolvimos en el capítulo anterior son, en realidad, ecuaciones polinomiales (determinadas por un polinomio de grado 2). Probablemente ya estén al tanto de que los ceros de una ecuación cuadrática se llaman también *raíces* de la ecuación. Este concepto de raíz es común a todos los polinomios y, ahora, vamos a definirlo de manera general.

Definición 79 Sea $P(x) \in \mathbb{K}[x]$. Un número $a \in \mathbb{C}$ se dice una *raíz* de P si $P(a) = 0$.

Es decir, las raíces son los números donde el polinomio se anula. Notemos que, según el Teorema del resto, el resto de la división entre $P(x)$ y $x - a$ se obtiene como $P(a)$. En particular, si el resto de esta división es $0 \in \mathbb{C}[x]$, entonces $P(a) = 0$. Esto quiere decir que $x = a$ es raíz del polinomio $P(x)$. Por otro lado, si $x = a$ es raíz de $P(x)$, entonces $P(a) = 0$ (por definición de raíz). El Teorema del resto nos dice que el resto de dividir $P(x)$ por $x - a$ es, entonces, $P(a) = 0$, por lo que concluimos que $x - a$ divide a $P(x)$. Hemos hallado, así, que vale la siguiente propiedad:

Importante Un número $a \in \mathbb{C}$ es raíz del polinomio $P(x)$ si, y solo si, $x - a$ divide a $P(x)$. ■

Experimento 50 Supongan que el polinomio $Q(x)$ divide al polinomio $P(x)$. ¿Qué relación hay entre las raíces de $Q(x)$ y las de $P(x)$? ■

Supongamos ahora que a y b son raíces *distintas* del polinomio P. Esto, en particular, nos dice que tanto $x - a$ como $x - b$ dividen a P. ¿Es cierto que el polinomio cuadrático $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$ también divide a P? ¡Sí! Como $x - a$ divide a $P(x)$ entonces $P(x) = (x - a)Q(x)$ para cierto polinomio $Q(x)$. Ahora, como b es raíz de P, entonces $P(b) = 0$. Pero $P(b) = (b - a)Q(b)$. Como estamos suponiendo que $b \neq a$, entonces $b - a \neq 0$, por lo que, para que $(b - a)Q(b) = 0$, debe ser $Q(b) = 0$. Esto nos dice que b es raíz de $Q(b)$ y, por lo tanto, $(x - b)$ divide a Q. Entonces, podemos escribir $Q(x) = (x - b)R(x)$ para cierto polinomio R. De esta manera, hallamos que

$$P(x) = (x - a)Q(x) = (x - a)(x - b)R(x) = (x^2 - (a + b)x + ab)R(x).$$

Observemos que, si seguimos repitiendo el razonamiento para $R(x)$, podemos probar que, si tenemos varias raíces distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ de $P(x)$, entonces el producto $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$ divide a $P(x)$. Lo dejamos asentado en el siguiente lema.

Lema 55 Si varios polinomios de la forma $x - \lambda_1, \dots, x - \lambda_t$ dividen a P y todos los λ_i son distintos entre sí, entonces el producto $(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_t)$ también divide a P.

8.3.2 ¿Cómo encontrar raíces de un polinomio?

Encontrar raíces de polinomios es un problema central del Álgebra y el Análisis Matemático. Ahora bien, ¿cómo encontramos las raíces? La primera observación que podemos hacer es que *ya sabemos cómo encontrar las raíces de polinomios lineales y cuadráticos*. En efecto, para un polinomio lineal $a_1x + a_0$ (con $a_1 \neq 0$) solo debemos despejar x de la ecuación $a_1x + a_0 = 0$. O sea, la única raíz es $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Por otro lado, a un polinomio cuadrático $a_2x^2 + a_1x + a_0$ (con $a_2 \neq 0$), también sabemos calcularle las raíces: utilizamos la fórmula resolvente:

$$x_1, x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

para la cual ya vimos, en el capítulo anterior, que siempre tiene dos soluciones en los números complejos. Para polinomios de grados mayores, ya no tenemos procedimientos o fórmulas directas para hallar las raíces. La estrategia general es ir hallando progresivamente las raíces de un polinomio $P(x)$ de la siguiente manera:

- Conseguir (de alguna manera) una raíz $a \in \mathbb{C}$ de $P(x)$.
- Como sabemos que $x - a$ divide a $P(x)$, hallar el cociente $C(x)$ de dicha división, de manera que $P(x) = (x - a)C(x)$. Recuerden que $C(x)$ tiene grado menor a $P(x)$.

- Si $C(x)$ tiene grado 1 o 2, calcular, usando las fórmulas conocidas, las raíces de $C(x)$ (que también son raíces de $P(x)$). Si el grado de $C(x)$ es mayor a 2, repetir el procedimiento para $C(x)$.

Notemos que esta estrategia pide conseguir una raíz *de alguna manera* para comenzar. Algunas veces, las raíces se pueden identificar rápidamente (por ejemplo, si el polinomio no tiene término independiente entonces $x = 0$ es raíz) y otras veces son datos del problema. El siguiente teorema, debido a Gauss, nos permite anticipar las posibles raíces *racionales* de un polinomio con coeficientes *enteros*.

Teorema 56 — Teorema de Gauss. Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Z}$. Si el número racional $\frac{p}{q}$ es raíz del polinomio ($q \neq 0$), siendo $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible, entonces p divide a a_0 y q divide a a_n. En particular, si $P(x)$ es un polinomio mónico (el coeficiente principal $a_n = 1$), las posibles raíces racionales del polinomio son los divisores del término independiente a_0.

Es importante remarcar que este teorema *no nos dice* que un polinomio con coeficientes enteros tiene raíces racionales. Lo que dice es que, *de existir raíces racionales*, estas deben forzosamente ser de una manera determinada. Es decir, “si tiene, son de esta forma”. Es por esta razón para determinar si tiene raíces racionales, debemos probar con los números racionales que tienen la forma anticipada por el teorema. Pero podría ser que ninguno sea raíz, y por lo tanto, el polinomio en cuestión no tendría raíces racionales (solo reales y complejas).

Ejemplos 84

- Consideremos el polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6$. Como tiene coeficientes enteros, el Teorema de Gauss nos indica que, de tener una raíz racional $\frac{p}{q}$, debe suceder que p debe dividir al término independiente 6 y q debe dividir al coeficiente principal 1. En este caso, las únicas posibilidades para q son 1 y -1. Por otro lado, las posibilidades para p son los posibles divisores de 6: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. Probando con todos encontramos que $P(3) = 0$. Hemos hallado, entonces, una raíz racional (de hecho, entera) de $P(x)$.
- Consideremos ahora el polinomio $Q(x) = 2x^4 - 10x^2 + 12$. Nuevamente, como tiene coeficientes enteros, podemos utilizar el Teorema de Gauss para ver si tiene alguna raíz racional $\frac{p}{q}$. En este caso, p debe dividir a 12 y q a 2. Las opciones para q son $1, -1, 2, -2$ y las opciones para p son $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$. Por lo tanto, todas las posibles opciones para $\frac{p}{q}$ se obtienen eligiendo un numerador p entre las doce opciones disponibles y un denominador q entre las cuatro opciones disponibles. Esto da un total de $12{,}4 = 48$ posibles opciones a considerar. Sin embargo, hay muchas combinaciones que dan como resultado el mismo número racional. Por ejemplo, $\frac{1}{-1}$ y $\frac{-1}{1}$; o $\frac{4}{2}$ y $\frac{2}{1}$. Al mirar con detenimiento se puede advertir que las opciones que hay que chequear son las siguientes:

$$\frac{p}{q} = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}.$$

  Al verificar todas estas posibilidades, no se encuentra ningún número que anule al polinomio. Por lo tanto, $P(x)$ no tiene raíces racionales.

■

Un dato interesante sobre el Teorema de Gauss es que proporciona una demostración del hecho que $\sqrt{2}$ no es un número racional. En efecto, consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - 2$. Claramente, $\sqrt{2}$ es raíz de $P(x)$. Pero $\sqrt{2}$ no puede ser racional pues el Teorema de Gauss nos dice que, si un racional $\frac{p}{q}$ es raíz de P, entonces p divide a 2 y q divide a 1. Como las únicas posibilidades para q son 1 o -1 entonces una raíz racional $\frac{p}{q}$ es en realidad un número entero. Por lo tanto, si $\sqrt{2}$ fuera racional debería ser un número entero (que sabemos que no es).

Vamos a ver ahora qué es la *multiplicidad de una raíz*. Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - 2x + 1$. El Teorema de Gauss nos dice que las únicas posibles raíces racionales de $P(x)$ son 1 o -1. Es fácil ver que $x = 1$ es una raíz $P(x)$. Por lo visto en el apartado 8.3.1, sabemos que $x - 1$ divide a $P(x)$. Si ahora hacemos la división entre $P(x)$ y $x - 1$, hallamos que el cociente de la división es también $x - 1$. Es decir, se tiene que:

$$P(x) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2.$$

El hecho de que $P(x)$ "sea divisible" dos veces de $x - 1$ se interpreta diciendo que $x = 1$ es *raíz doble* de $P(x)$ o que es una *raíz de multiplicidad* 2. Definimos esta noción de manera general a continuación:

Definición 80 Sea $P(x) \in \mathbb{K}[x]$. Un número $a \in \mathbb{C}$ se dice una *raíz de multiplicidad* k de $P(x)$ si el polinomio $(x - a)^k$ divide a $P(x)$, pero el polinomio $(x - a)^{k+1}$, no. Dicho de otra manera, existe un polinomio $C(x)$ tal que $C(a) \neq 0$ y $P(x) = (x - a)^k C(x)$. Si $k = 1$, entonces a recibe el nombre de *raíz simple* y si $k > 1$, *raíz múltiple*.

■ **Ejemplo 85** El polinomio $P(x) = x^5 + 7x^4 + 18x^3 + 20x^2 + 8x$ tiene 5 raíces: la raíz $x = -2$ con multiplicidad 3, la raíz $x = -1$ con multiplicidad 1 y la raíz $x = 0$, también con multiplicidad 1. Pueden verificar que $P(x) = (x + 2)^3(x + 1)x$. ■

ⓘ *Si conocen la noción de derivada de una función, podrán advertir que la derivada de un polinomio (visto como función) es nuevamente un polinomio (de un grado menos). Una definición alternativa del concepto de multiplicidad es la siguiente: una raíz de $P(x)$ tiene multiplicidad k si también es raíz de los primeros k polinomios derivados $P'(x), P''(x), \dots, P^{(k)}(x)$ de $P(x)$, pero no de la derivada $(k+1)$-ésima de $P(x)$.*

En este punto queremos poder responder la pregunta *¿Cuántas raíces tiene un polinomio?* El Teorema de Gauss nos ayuda a encontrar raíces racionales. En algunos casos las hallamos y en otros, no. Si queremos buscar todas las raíces de un polinomio, ¿cómo sabemos cuándo parar? ¿Cuántas raíces puede tener un polinomio? ¿Puede no tener ninguna? No es difícil ver que un polinomio de grado n no puede anularse en más de n números. Se los dejamos para pensar en el siguiente experimento:

Experimento 51 Sea $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ de grado n. Vamos a ver que $P(x)$ no puede tener más de n raíces. Si $P(x)$ no tiene raíces, entonces lo que estamos tratando de ver es cierto (si no tiene ninguna raíz, no tiene más de n). Supongamos que posee al menos una raíz a. Sabemos que $x - a$ divide a $P(x)$ y que, por lo tanto, $P(x) = (x - a)C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división. ¿Qué grado tiene $C(x)$? Observemos que si, ahora, $C(x)$ no tiene raíces, entonces, nuevamente, hemos visto que $P(x)$ no tiene más de n raíces. ¿Qué harían si $C(x)$ tiene al menos una raíz? ¿Cómo seguirían el razonamiento? ¿Cómo concluyen el resultado? Recuerden el Experimento 50. ■

Sabemos, entonces, que un polinomio de grado n tiene, a lo sumo, n raíces. Pero, ¿puede haber polinomios sin raíces? El siguiente teorema, que fue probado por Gauss, contesta esta pregunta. Es llamado (ni más ni menos) el *Teorema fundamental del Álgebra*.

Teorema 57 Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *[Teorema fundamental del Álgebra (TFA)]* de grado mayor a cero tiene, al menos, una raíz *compleja*.

En este teorema hemos remarcado que la raíz es compleja (lo que abarca, por supuesto, enteros, racionales y reales) pues, de lo contrario, el resultado no vale. Por ejemplo, ya vimos que el polinomio $x^2 + 1$ no tiene ninguna raíz real.

Pese a que el TFA habla de la existencia de, al menos, una raíz, podemos, en realidad, dar un enunciado más preciso de este resultado (que se deduce de este teorema que hemos escrito) y decir cuántas raíces tiene exactamente un polinomio de grado n.

Teorema 58 *[Enunciado equivalente del TFA]* Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces *complejas* (no necesariamente distintas; es decir, contadas con multiplicidad).

Aunque este último enunciado parezca más "fuerte" que el del TFA, ambos teoremas se deducen uno del otro. En efecto, si vale el enunciado equivalente al TFA, entonces todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces. Pero esto quiere decir que, en particular, tiene al menos una. Por lo tanto, se tiene que vale el TFA. Les dejamos en un experimento para que vean que se deduce dicha equivalencia.

Experimento 52 Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 0$. Veamos, usando el TFA, que $P(x)$ tiene exactamente n raíces. Precisamente por el TFA sabemos que $P(x)$ tiene al menos una raíz $a \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, $x - a$ divide a $P(x)$ y se tiene $P(x) = (x - a)C(x)$. ¿Qué harían ahora? ¿Cómo seguirían el razonamiento?■

Observación 59 *Notemos que el Teorema fundamental del Álgebra es un* resultado de existencia *de raíces: solo nos dice qué cantidad debemos buscar, pero no nos dice cómo buscarlas.*

■ **Ejemplos 86**

- Hallemos todas las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$. Por el TFA debemos buscar cuatro raíces. El polinomio P tiene como coeficiente principal 1 y como término independiente 12. Según el Teorema de Gauss, las posibles raíces son los divisores de 12: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$. Si evaluamos en $x = -1$ obtenemos $P(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 7(-1)^2 - 8(-1) + 12 = 1 - 2 - 7 + 8 - 12 = -12$. Concluimos que $x = -1$ no es raíz de $P(x)$. Si ahora evaluamos en $x = 1$ se tiene $P(1) = (1)^4 + 2(1)^3 - 7(1)^2 - 8(1) + 12 = 1 + 2 - 7 - 8 + 12 = 0$. Entonces, $x = 1$ es raíz de $P(x)$. Haciendo la división de P por $(x - 1)$, obtenemos $P(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 - 4x - 12)$. El Teorema de Gauss puede ser aplicado nuevamente el polinomio de grado 3. Si evaluamos el polinomio $Q(x)$ en $x = -2$ resulta $Q(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4(-2) - 12 = -8 + 12 + 8 - 12 = 0$. Haciendo la división de $Q(x)$ y $x + 2$ se tiene $Q(x) = (x + 2)(x^2 + x - 6)$. Aquí podemos utilizar la fórmula de la resolvente para hallar que las raíces de $x^2 + x - 6$ son 2 y -3. Concluímos que las raíces de P son $1, -2, 2$ y 3.
- Busquemos ahora la raíces del polinomio $Q(x) = -2x^3 - 10x^2 - 2x - 10$. El TFA nos dice que tiene que tener tres raíces complejas. Por el Teorema de Gauss, las posibles raíces son $10, -10, 5, -5, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, 2, -2, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Si evaluamos $Q(-5) = -2(-5)^3 - 10(-5)^2 - 2(-5) - 10 = 250 - 250 + 10 - 10 = 0$. Dividiendo $Q(x)$ por $x + 5$ obtenemos $Q(x) = (x + 5)(-2x^2 - 2)$. Observemos que $-2x^2 - 2$ es un polinomio que no tiene raíces reales (siempre toma valores negativos, por lo que no se anula en ningún valor de x). Para hallar sus raíces complejas podemos utilizar la fórmula de la resolvente o, también, simplemente igualar a 0 (que es más directo en este caso ya que el polinomio no tiene término lineal):

$$\begin{aligned} & -2x^2 - 2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & -2x^2 = 2 \\ \Rightarrow \quad & x^2 = \tfrac{2}{-2} \\ \Rightarrow \quad & x^2 = -1 \end{aligned}$$

  Concluimos que las raíces de Q con $-5, i, -i$.

■

Proposición 60 Si $P(x)$ con coeficientes reales y $z \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(x)$, entonces $\overline{z}$ también es raíz de $P(x)$.

■ **Ejemplo 87** Supongamos que queremos hallar todas las raíces de $P(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12$ y sabemos que $1 + i$ es raíz de P. Como P tiene coeficientes reales, entonces $\overline{1+i} = 1 - i$ también será raíz de P. Luego, $x - (1+i)$ y $x - (1-i)$ dividen a P y, como $1 + i \neq 1 - i$, entonces $(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$ divide a P (por Lema 55). Si llevamos a cabo la división, hallamos que $P(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 5x + 6)$. Finalmente, podemos calcular las raíces de $x^2 - 5x + 6$ utilizando la fórmula de la resolvente y hallar que todas las raíces de P son $1 + i, 1 - i, 2, 3$. ■

Existen polinomios de grado 2 que no tienen raíces. Analicen si es posible que esto suceda con los polinomios de grado 3 cuyos coeficientes son números reales.

¿Qué hicimos en el apartado 8.3?

- Definimos qué son las raíces de los polinomios y las clasificamos según su multiplicidad.
- Vimos que si a es raíz de P entonces $x - a$ divide a P.
- Dimos un procedimiento para encontrar todas las raíces de un polinomio.
- Enunciamos el Teorema de Gauss para buscar raíces racionales en polinomios con coeficientes enteros.
- Enunciamos el Teorema Fundamental del Álgebra que dice que un polinomio de grado $n > 0$ tiene necesariamente n raíces en los números complejos.

■

8.4 Factorización de polinomios

Una de las informaciones más útiles que podemos tener de un polinomio es conocer cuáles polinomios más pequeños lo componen.

En este apartado estudiaremos...

- Qué son los polinomios irreducibles.
- Cómo hallar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio en los distintos conjuntos de polinomios $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

■

8.4.1 Polinomios irreducibles

La *descomposición en factores primos* es una herramienta fundamental de la teoría de números enteros. ¿En qué consiste? Recordemos que un número primo es un número entero cuyos únicos divisores positivos son el 1 y él mismo. Los primeros números primos positivos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ El 6, por ejemplo, no es primo, pues 2 divide a 6 (por lo que 6 tiene un divisor distinto de 1 y 6). Es un hecho soprendente que los números que no son primos se pueden escribir como producto de potencias de números primos. Tomemos, por ejemplo, el número 60, que se puede escribir como 2^2,3,5; es decir, es producto potencias de 2, 3 y 5, que son números primos. La expresión 2^2,3,5 se llama la *descomposición en números primos* del número 60, y es *única*: no existe otra descomposición del 60 que use otros números primos (u otras potencias de estos mismos primos). Con los polinomios sucede algo prácticamente idéntico: todo polinomio puede descomponerse en *factores irreducibles* (los análogos a los primos en este contexto); y la característica que tiene estos factores irreducibles es que *no pueden escribirse como producto de polinomios más pequeños* (de allí el nombre "irreducibles").

Definición 81 Un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, de grado mayor a 0, se dice *irreducible en* $\mathbb{K}$ (o *irreducible en* $\mathbb{K}[x]$) si **no** se puede escribir como producto de dos polinomios de grados mayores a 0 que pertenecen a $\mathbb{K}[x]$. Un polinomio que no es irreducible se dice *reducible*.

Por ejemplo, el polinomio $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ no es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, ya que $Q(x) = (x-2)(x-3)$, y tanto $x-2$ como $x-3$ tienen grado mayor a 0 y pertenecen a $\mathbb{Q}[x]$. Por otro lado, el polinomio $P(x) = x^2+1$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, pues no se puede escribir como producto de polinomios de grado mayor a 0. En efecto, sabemos que sus raíces son i y $-i$, por lo cual, tanto $x-i$ como $x+i$, dividen a $P(x)$. Es fácil verificar que $P(x)$ es, exactamente, $(x-i)(x+i)$. Pero los polinomios $x-i$ y $x+i$ *no pertenecen a* $\mathbb{R}[x]$ (pues su término independiente es un número no real). Por lo tanto, $P(x)$ no se puede escribir como producto de polinomios más pequeños *que pertenecen a* $\mathbb{R}[x]$. Lo que notamos es que $P(x)$ se puede escribir como producto de polinomios más pequeños que pertenecen a $\mathbb{C}[x]$. Por lo tanto, el polinomio $P(x)$ *sí* es reducible en $\mathbb{C}[x]$. Observemos que, de este último ejemplo, podemos concluir lo siguiente: *que un polinomio sea o no irreducible depende de dónde lo estemos considerando*. Por supuesto, si un polinomio es irreducible en $\mathbb{C}[x]$, entonces también lo es en $\mathbb{R}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$ (y si es irreducible en $\mathbb{R}[x]$, también lo es en $\mathbb{Q}[x]$). ¿Se dan cuenta por qué?

Ejemplos 88

- El polinomio $P(x) = x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$, pues lo únicos polinomios de grado mayor a 1 que lo dividen son $x - \sqrt{2}$ y $x + \sqrt{2}$, que no tienen coeficientes racionales. En particular, sí es reducible en $\mathbb{R}[x]$, dado que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Como es reducible en $\mathbb{R}[x]$, también lo es en $\mathbb{C}[x]$.
- El polinomio $Q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ es reducible en $\mathbb{Q}[x]$, ya que puede escribirse como $(x^2+4)(x-1)$, y ambos polinomios en este producto grado mayor a cero y coeficientes racionales. También resulta, entonces, reducible en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.
- El polinomio $R(x) = x^2+4$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{R}[x]$. Es reducible en $\mathbb{C}[x]$ ya que $R(x) = (x-2i)(x+2i)$.

■

Consideremos que, en la definición de polinomio irreducible, hemos dejado afuera a los polinomios constantes. *Estos no son considerados polinomios irreducibles ni reducibles*. También, de la misma definición, es fácil deducir que *todos los polinomios de grado* 1 *son irreducibles en cualquier* $\mathbb{K}[x]$.

Veamos como escribir cualquier polinomio como *descomposición en factores irreducibles*. Así como todos los números enteros pueden descomponerse en producto de potencias de primos, los polinomios pueden descomponerse en producto de potencias de polinomios irreducibles. En este sentido, los polinomios irreducibles son los "números primos" de los polinomios. Como mecionamos en el párrafo anterior, la reducibilidad o irreducibilidad de un polinomio varía dependiendo en qué conjunto numérico $\mathbb{K}$ estemos considerando la factorización. Por lo tanto, cuando busquemos la *descomposición en factores irreducibles* de un polinomio, deberemos especificar *respecto de qué conjunto numérico* $\mathbb{K}$ *la estamos buscando*. Por ejemplo, consideremos el polinomio $T(x) = -x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 3x + 10$. Su descomposición en $\mathbb{Q}[x]$ es $-(x-2)(x+5)(x^2+1)$. Está también es su descomposición en $\mathbb{R}[x]$. Sin embargo, su descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ es $(x-2)(x+5)(x-i)(x+i)$. Por lo tanto, tiene tres factores irreducibles en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pero cuatro en $\mathbb{C}$.

Definición 82 Una *descomposición en factores irreducibles en* $\mathbb{K}[x]$ de un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ es una escritura de $P(x)$ como producto de potencias polinomios irreducibles en $\mathbb{K}$.

Por ejemplo, una descomposición de $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x$ en $\mathbb{Q}[x]$ es $(4x)(x-1)^2$. En este caso, los factores irreducibles son $4x$ y $x-1$ (este último aparece elevado al cuadrado). Notemos que esta descomposición no es única, pues también podríamos escribir $P(x) = x(2x-2)^2$, y aquí los factores irreducibles resultarían x y $(2x-2)$. Lo que sucede en este caso es que hemos "reordenado" el coeficiente principal para que aparezca en un factor o en otro (en el primer caso, en el factor $4x$ y, en el segundo caso, en $2x-2$, donde el 4 aparece al elevar al cuadrado este factor). Este "intercambio" del coeficiente principal no influye en la naturaleza de la factorización y es, de hecho, irrelevante en qué lugar aparezca situado. Para simplificar las cosas, hacemos, entonces, la siguiente convención.

Importante Vamos a convenir que la descomposición en factores irreducibles $\mathbb{K}$ de un polinomio $P(x) \in \mathbb{K}$ es una descomposición en producto de potencias de polinomios irreducibles *mónicos*, *todo multiplicado por una constante de* $\mathbb{K}$. En el ejemplo anterior, escribimos $P(x) = 2x(x-1)^2$ y consideramos que los componentes irreducibles son x y $x-1$, y la constante que multiplica todo es 2. ■

Tengamos en cuenta que, con esta convención, la descomposición en factores irreducibles de un polinomio es única. ¿Se dan cuenta por qué? En general, trabajaremos con polinomios mónicos, por lo que no aparecerá la constante correspondiente al coeficiente principal. El objetivo de este apartado es, entonces, aprender a calcular la descomposición en factores irreducibles de un polinomio. A esta tarea se la conoce como *factorizar el polinomio*.

Observación 61 *Notemos que los polinomios lineales (de grado 1) son* siempre *irreducibles en cualquier conjunto $\mathbb{K}[x]$. Esto es inmediato de la definición de polinomio irreducible y las propiedades del grado de un producto de polinomios.*

Observemos *¿Cómo se halla la descomposición en factores irreducibles de un polinomio?* Estamos ya al tanto de que la descomposición en factores irreducibles está íntimamente ligada a la existencia de raíces del polinomio: si $\lambda \in \mathbb{K}$ es raíz de P entonces $x-\lambda$ divide a P, y viceversa. Por lo tanto, para calcular la factorización de un polinomio podemos intentar buscar todas las raíces del polinomio, de manera de ir obteniendo los factores irreducibles progresivamente. Si alguno de los factores que hallamos no tiene raíces en el $\mathbb{K}$ que estamos trabajando, entonces dicho factor será irreducible en $\mathbb{K}[x]$. Dado que la demostración rigurosa de esto sería demasiado exigente, veamos el procedimiento a partir de algunos casos particulares.

Factoricemos el polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ en cada uno de los tres conjuntos de polinomios con los que trabajamos: $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$. Como $P(x)$ no tiene término independiente, entonces $x = 0$ es una raíz de él. Aquí no necesitamos hacer la división de P por $x-0$, ya que podemos, simplemente, sacar x de factor común: $P(x) = x(x^2 - 5x + 6)$. Ahora, buscamos las raíces de $x^2 - 5x + 6$, que podemos hallar mediante la fórmula de la resolvente: $x = 2$ y $x = 3$. Por lo tanto, utilizando el Lema 55, se deduce que $P(x) = x(x-2)(x-3)$. Como todos los polinomios en este producto tienen grado 1 entonces son irreducibles en $\mathbb{C}[x]$ (y, por lo tanto, también en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Q}[x]$). Como, además, estos polinomios tienen coeficientes en $\mathbb{Q}$, entonces $x(x-2)(x-3)$ es la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{Q}$. Esta también es la factorización en $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$.

Consideremos ahora el polinomio $T(x) = -x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 3x + 10$. El Teorema de Gauss nos dice que las posibles raíces racionales, de existir, son $1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10$. Evaluando el polinomio en estos números, obtenemos que 2 y -5 son raíces de $T(x)$. Dividiendo $T(x)$ por $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$ hallamos que $T(x) = (x^2+3x-10)(x^2+1)$. Sabemos que x^2+1 no tiene raíces racionales, por lo que es un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, la descomposición de $T(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ es precisamente $(x-2)(x+5)(x^2+1)$. Como x^2+1 tampoco tiene raíces reales, entonces la descomposición en $\mathbb{R}[x]$ es la misma. Por otro lado, x^2+1 se descompone como $(x-i)(x+i)$ en $\mathbb{C}[x]$, por lo que la descomposición de $T(x)$ en $\mathbb{C}[x]$ es $(x-2)(x+5)(x-i)(x+i)$.

Estudiemos, finalmente, cómo factorizar el polinomio $Q(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ sabiendo que

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ es una de sus raíces. Notemos que, como $Q(x)$ tiene coeficientes en $\mathbb{Q}$, el hecho que $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ sea raíz de $Q(x)$ implica que su conjugada $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ también debe ser raíz de $Q(x)$ (por la Proposición 60). Por lo tanto, concluímos que el polinomio

$$\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=x^2-x+1$$

debe dividir a $Q(x)$. Llevemos a cabo la división.

$$\begin{array}{r|l}
x^6+x^5-3x^4+2x^3+x^2-3x+1 & \underline{x^2-x+1} \\
x^6-x^5+x^4 & x^4+2x^3-2x^2-2x+1 \\
\hline
2x^5-4x^4+2x^3+x^2-3x+1 & \\
2x^5-2x^4+2x^3 & \\
\hline
-2x^4+0x^3+x^2-3x+1 & \\
-2x^4+2x^3-2x^2 & \\
\hline
-2x^3+3x^2-3x+1 & \\
-2x^3+2x^2-2x & \\
\hline
x^2-x+1 & \\
x^2-x+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Luego:

$$Q(x)=(x^2-x+1)(x^4+2x^3-2x^2-2x+1)$$

Para factorizar $x^4+2x^3-2x^2-2x+1$ en $\mathbb{Q}[x]$ recurrimos al Teorema de Gauss, donde vemos que las únicas posibilidades son 1 y -1. Como ambos números anulan a $x^4+2x^3-2x^2-2x+1$ podemos concluir que (x^2-1) divide a $x^4+2x^3-2x^2-2x+1$. Hacemos esta división.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+2x^3-2x^2-2x+1 & \underline{x^2-1} \\
x^4-x^2 & x^2+2x-1 \\
\hline
2x^3-x^2-2x+1 & \\
2x^3-2x & \\
\hline
-x^2+1 & \\
-x^2+1 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Hasta aquí hemos hallado que

$$Q(x)=(x^2-x+1)(x-1)(x+1)(x^2+2x-1)$$

Observemos que x^2+2x-1 es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ pues, nuevamente por Teorema de Gauss, las únicas posibles raíces racionales son 1 y -1, y ninguna anula a x^2+2x-1. Por lo tanto, la factorización de $Q(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$ es precisamente $(x^2-x+1)(x-1)(x+1)(x^2+2x-1)$.

Ahora, como x^2-x+1 es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ (pues sus raíces son complejas no reales), entonces, para hallar la factorización de $Q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$, debemos chequear la reducibilidad de x^2+2x-1. Las raíces de este polinomio vienen dadas por:

$$\frac{-2+\sqrt{4+4}}{2}=-1+\sqrt{2}\in\mathbb{R}$$

$$\frac{-2-\sqrt{4+4}}{2} = -1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Luego, la factorización de $Q(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ es:

$$(x^2-x+1)(x-1)(x+1)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$$

Finalmente, la factorización de $Q(x)$ en $\mathbb{C}[x]$ es:

$$\left(x-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)(x-1)(x+1)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$$

Esto concluye la solución del problema.

Quizá ya se han percatado que *todos los polinomios se descomponen en factores lineales en* $\mathbb{C}$. Esto solo es cierto para $\mathbb{C}$ (ya vimos, por ejemplo, que x^2+1 es irreducible en $\mathbb{R}$ y no es lineal).

¿Qué hicimos en el apartado 8.4?

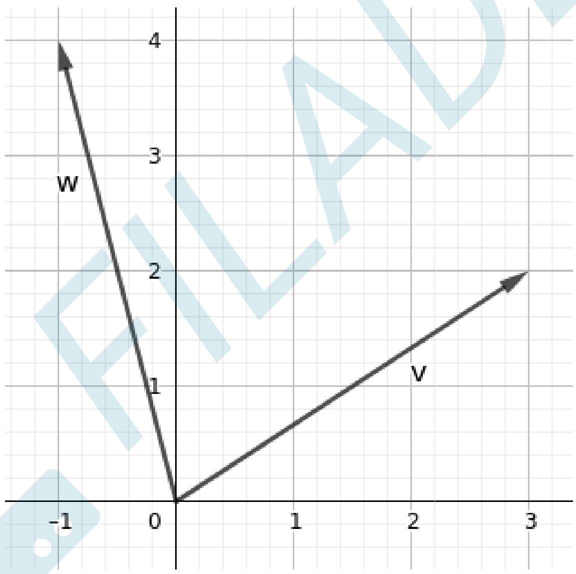
- Definimos los polinomios irreducibles en $\mathbb{K}[x]$ como los polinomios que no se pueden escribir como producto de dos (o más) polinomios de grados mayores a 0.
- Estudiamos cómo hallar la descomposición en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$ de polinomios en $\mathbb{K}[x]$.

■

9. Experimentos resueltos

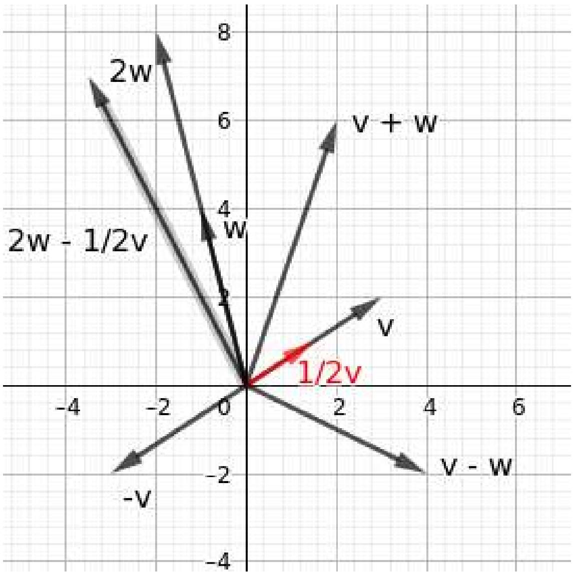
Experimento Resuelto 1 (pág. 29)

El gráfico del punto a, es:

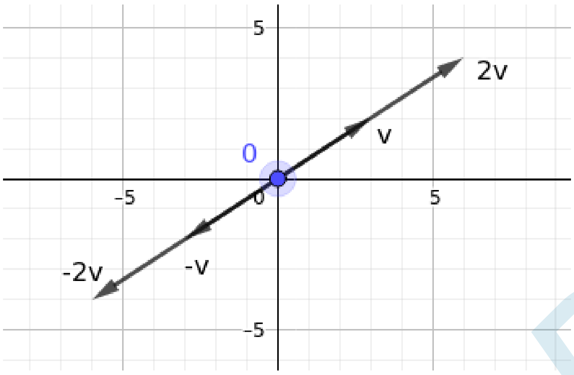


Los calculos para el punto b dan $\vec{v} + \vec{w} = (2, 6)$, $\vec{v} - \vec{w} = (4, -2)$, $-\vec{v} = (-3, -2)$, $2\vec{w} = (-2, 8)$, $\frac{1}{2}\vec{v} = (\frac{3}{2}, 1)$ y $2\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{v} = (-\frac{7}{2}, 7)$

Y sus gráficos son:

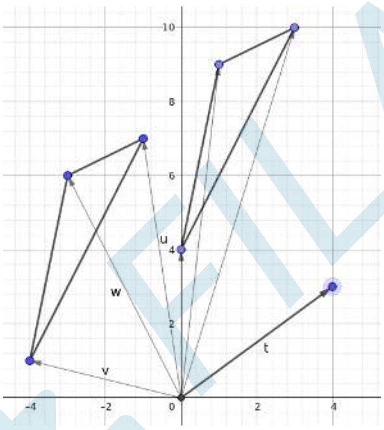


Los gráficos del punto c son:

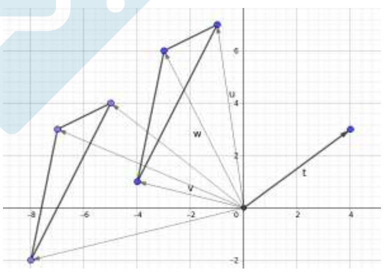


Experimento Resuelto 2 (pág. 30)

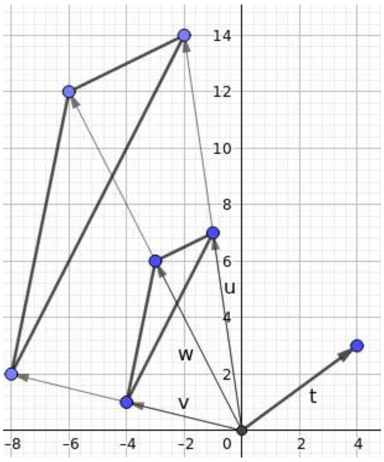
En la siguiente imagen vemos todos los vectores pedidos, junto con las sumas:



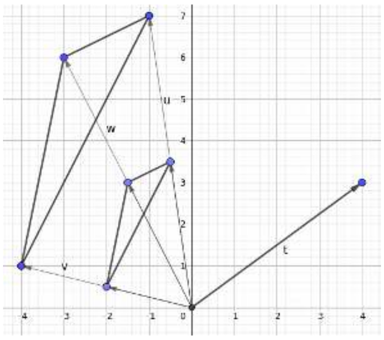
los vectores y las restas:



los vectores multiplicados por 2:



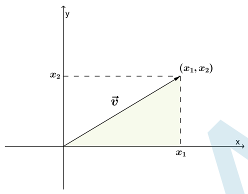
y multiplicados por $\frac{1}{2}$:



■

Experimento Resuelto 3 (pág. 33)

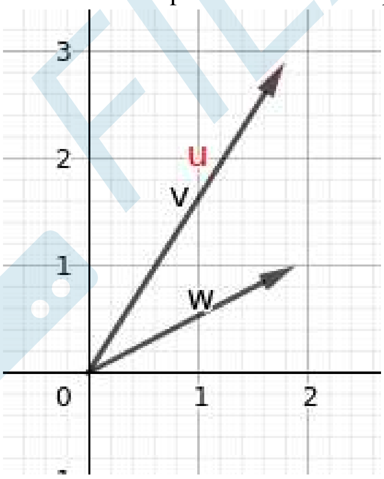
El módulo de (x_1, x_2) es $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ que es exactamente la longitud de la hipotenusa del triángulo que obtenemos si hacemos Pitágoras, pues la longitud de los catetos en este caso es x_1 y x_2, como podemos constatar en la imagen.



■

Experimento Resuelto 4 (pág. 33)

Gráficamente es imposible de observar pues $\vec{v}$ (en negro) se superpone con $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w} + \vec{w}$ (en color):



Análiticamente tenemos $(x_1, x_2) - (y_1, y_2) + (y_1, y_2) = (x_1 - y_1 + y_1, x_2 - y_1 + y_2) = (x_1, x_2)$. ■

Experimento Resuelto 5 (pág. 35)

1. Si $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (1, 2)$, entonces, $||\vec{v}|| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$, $||\vec{w}|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

$||\vec{v}+\vec{w}|| = ||(4,2)|| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $||\vec{v}|| + ||\vec{w}|| = 5+\sqrt{5}$, $||2\vec{v}|| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = \sqrt{100} = 10$, $||\frac{1}{2}\vec{v}|| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2+(-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

2. Vemos que al duplicar el vector se duplica el módulo y al dividirlo por dos el módulo tambien se divide por dos.
3. $||\vec{v}+\vec{w}|| = 2\sqrt{5} \leq 5+\sqrt{5} = ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$

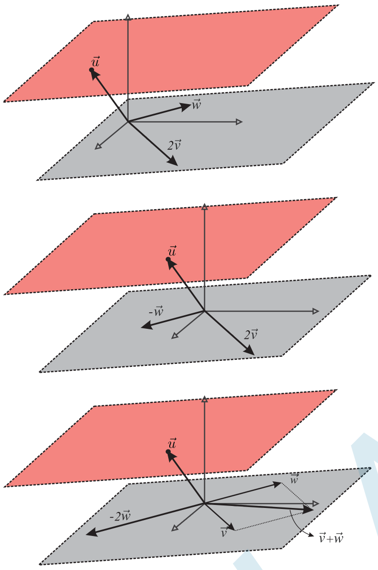
■

Experimento Resuelto 6 (pág. 37)

1. Tres vectores ortogonales a $(2,3)$: $(-3,2)$, $(6,-4)$ y $(-5,\frac{10}{3})$. El producto escalar entre los vectores y $(2,3)$ siempre es cero.
2. Los vectores ortogonales a $(2,-2)$ serán de la forma (k,k) con $k \in \mathbb{R}$, entonces como nos piden norma 1 tenemos que $\sqrt{k^2+k^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2}$, con lo cual para que la norma sea 1 necesitamos que $|k| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto los vectores ortogonales a $(2,-2)$ con norma 1 son $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. Dos vectores ortogonales a $(1,2,1)$ no paralelos entes si pueden ser $(2,-1,0)$ y $(0,1,-2)$.
4. Los vectores simultaneamente ortogonales a $(1,2,1)$ y $(1,-3,0)$ serán multiplos del vector $(3,1,-5)$.

■

Experimento Resuelto 7 (pág. 48)



■

Experimento Resuelto 8 (pág. 57)

Tomemos como ejemplo $\vec{v} = (1,-1,2)$, $\vec{w} = (1,3,1)$ y $\vec{u} = (-1,3,7)$, entonces $\vec{v}x\vec{w} = (-7,1,4)$, esta será la normal al plano Π.

La ecuación normal es $(-7,1,4)[(x,y,z)-(-1,3,7)] = 0$, de aquí obtenemos $-7(x+1)+(y-3) = 4(z-7) = 0$, de lo cual deducimos $-7x+y+4z = 38$. ■

Experimento Resuelto 9 (pág. 57)

- Cuando nos dan un plano a través de una ecuación $ax+by+cz = d$ la normal del plano Π' es $\vec{N} = (a,b,c)$.
- Para encontrar un punto del plano basta buscar una terna de números que "cumpla" la ecuación, uno puede ser $P = (0,0,\frac{d}{c})$, pues si reemplazamos obtenemos $a0+b0+c\frac{d}{c} = d \Rightarrow d = d$.
- Un posible vector ortogonal a $\vec{N}$ es $\vec{v} = (-b,a,0)$, pues $(a,b,c)\cdot(-b,a,0) = -ab+ab = 0$.
- $\vec{N}x\vec{v} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = (-ac,-bc,a^2+b^2)$

- $X = t(-b, a, 0) + s(-ac, -bc, a^2 + b^2) + (0, 0, \frac{d}{c})$, donde $s, t \in \mathbb{R}$

■

Experimento Resuelto 10 (pág. 61)

1. Los puntos del plano Π' son de la forma $(s-3, t+1, t-2s)$, al reemplazarlos en la ecuación de Π obtenemos $2(s-3) - (t+1) + (t-2s) = 13$ lo cual es $-7 = 13$, absurdo. Por lo tanto tenemos que $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$.
2. Los puntos del plano Π'' son de la forma $(2k - l + 5, 2k + l, -2k - 3l + 3)$, al reemplazarlos en la ecuación de Π obtenemos $2(2k - l + 5) - (2k + l) + (-2k - 3l + 3) = 13$ con lo cual tenemos $-6l + 13 = 13$, o sea $l = 0$, con lo cual $\Pi \cap \Pi'' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = k(2, 2, -2) + (5, 0, 3), k \in \mathbb{R}\}$

■

Experimento Resuelto 11 (pág. 62)

1. Los puntos del plano Π' son de la forma $(-3k + l + 1, -\frac{1}{2}k + l + 3, 2k - 3l - 1)$, al igualarlos con los que surjen de la ecuación de Π obtenemos:

$$\begin{cases} -3k + l + 1 = 2t - s + 2 \\ -\frac{1}{2}k + l + 3 = t \\ 2k - 3l - 1 = -4t + s - 3 \end{cases}$$

resolviendo ese sistema obtenemos $k = 2l + \frac{9}{2}$, entonces tenemos que $\Pi \cap \Pi' = \{X \in \mathbb{R}^3 : X = l(-5, 0, 1) + (\frac{23}{2}, \frac{5}{4}, -8), l \in \mathbb{R}\}$.

2. De la misma forma al igualar los puntos de cada recta obtenemos:

$$\begin{cases} -3j + 1 = 2t - s + 2 \\ r - j = t \\ -2r + 5j - 2 = -4t + s - 3 \end{cases}$$

resolviendo ese sistema obtenemos $0 = -2$, absurdo. Por lo tanto tenemos que $\Pi \cap \Pi'' = \emptyset$.

■

Experimento Resuelto 12 (pág. 63)

1. La recta L escrita en forma de ecuaciones cartesianas es:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Entonces para encontrar $\Pi \cap L$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

A partir de las dos primeras ecuaciones tenemos que $1 + z = 1$, pero esto es $z = 0$. Con lo cual el sistema es contradictorio. No tiene solución, luego $\Pi \cap L = \emptyset$.

2. Mientras que la recta L' es:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Entonces para encontrar $\Pi \cap L'$ debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuaciones tenemos $x + 1 = 1$, es decir $x = 0$, entonces reemplazando esto en la segunda ecuacion nos queda $-2y = 2$, o sea $y = -1$, y volviendo con esto a la tercera ecuación $-1 + z = 1$, es decir $z = 2$, con lo cual tenemos que $\Pi \cap L' = \{(0, -1, 2)\}$.

■

Experimento Resuelto 13 (pág. 63)

1. Los puntos de L tienen la forma $(t + 2, 3t + 2, -t)$.
2. $(t+2)+(3t+2)+(-t) = 1$, la interpretación de este paso es que de todos los puntos del plano, nos estamos quedando con los que tienen la forma de los puntos que estan en la recta, es decir los puntos que estan al mismo tiempo en el plano y en la recta.
3. El t que se deduce del punto anterior es $t = -1$, entonces $\Pi \cap L = \{(1, -1, 1)\}$.

■

Experimento Resuelto 14 (pág. 68)

En este experimento nos piden averiguar la distancia de $P = (1; -3)$ a la recta:

$L = X \in R^2 : X = t(2; -3) + (0; 5), t \in R$

En primer lugar, buscamos la ecuación de una recta L perpendicular a L que pase por el punto P. Para ello, buscamos un vector perpendicular a L, por ejemplo: $\vec{v} = (3; 2)$. Luego: $L = X \in R^2 : X = k(3; 2) + (1; -3), k \in R$

Para hallar a intersección entre L y L, igualamos coordenada a coordenada sus ecuaciones paramétricas, es decir:

$2t = 3k + 1$ y $-3t + 5 = 2k - 3$. Al reoslver este sistema obtienen que $t = 2$ y $k = 1$. por lo tanto, las rectas se intersecan en el punto $Q = (4; -1)$.

Ahora nos resta calcular la distancia entre $P = (1; -3)$ y $Q = (4; -1)$:

$d(P; Q) = \sqrt{(4-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Esta es la distancia de la recta L al punto P. ■

Experimento Resuelto 15 (pág. 69)

Para hallar el plano Π perpendicular a L, tomamos como vector normal al plano al vector director de la recta L:

$\Pi : 1 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z + d = 0$. Nos falta hallar d. Para eso reemplazamos en esta ecuación por el punto P:

$1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 + d = 0 \to 1 - 3 + d = 0 \to d = 2$. Luego: $\Pi : x + 2y - 3z + 2 = 0$

Para hallar el punto Q de intersección entre L y Π, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L en Π:

$(t) + 2(2t + 1) - 3(-3t + 5) + 2 = 0 \to 14t = 11 \to t = \frac{11}{14}$. Luego: $Q = \left(\frac{11}{14}; \frac{18}{7}; \frac{37}{14}\right)$

Solo nos resta hallar la distancia $d(P; Q) = \sqrt{\left(\frac{11}{14} - 1\right)^2 + \left(\frac{18}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{37}{14} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{1834}}{14}$ ■

Experimento Resuelto 16 (pág. 70)

Primero vamos a escribir la ecuación del plano Π en su forma implícita. Para ello, averiguamos el vector normal al plano como el producto vectorial entre los vectores $(2, 2, -1)$ y $(5, 0, -3)$ y nos da: $\vec{N} = (-6; 1; -10)$.

Luego: $\Pi : -6x + y - 10z + d = 0$. Si reemplazamos por el punto del plano $(2; 0; 0)$ obtenemos que $d = 12$.

Entonces $\Pi : -6x + y - 10z + 12 = 0$

Para escribir L perpendicular a Π y que pase por $P = (-1; -2; 4)$, usamos como vector director de L la normal la plano:

$L: X = k(-6;1;-10) + (-1;-2;4)$. Expresamos esta recta en sus ecuaciones paramétricas y las reemplazamos en la ecuación del plano para encontrar el punto Q interseccciónn:

$-6(-6k-1) + (k-2) - 10(-10k+4) + 12 = 0 \rightarrow k = \frac{24}{137} \rightarrow Q = \left(-\frac{281}{137}; -\frac{250}{137}; \frac{308}{137}\right)$

Luego resta calcular: $d(P;Q) = d(\Pi; L) = 2,05$ ■

Experimento Resuelto 17 (pág. 71)

Para probar que los planos son paralelos, podemos buscar el vector normal al plano Π calculando en producto vectorial entre los vectores contenidos en él: $(-2;1;1)$ y $(0;-3;4)$.

Este vector normal es:$\vec{N} = (7;8;6)$. Para comprobar que el plano Π es paralelo Π verificamos que las coordenadas de los vectores normales son proporcionales (porque son paralelos): en este caso basta con ver que tienen el mismo vector normal.

Para construir la recta L perpendicular a ambos planos, podemos definirla con el vector normal a los planos como vector director (se verifica la condición de perpendicularidad pedida) y que pase, por ejemplo, por un punto del plano Π:

$L: X = k(7;8;6) + (5;-1;0)$. De esta forma nos ahorramos el paso de calcular P dado que ese punto es $P = (5;-1;0)$ Ahora buscamos la intersección entre L y Π y a ese punto lo llamamos Q. ¿Cómo? Reemplazando las ecuaciones paramétricas de L en Π:

$7(7k+5) + 8(8k-1) + 6(6k) = -2 \rightarrow k = -\frac{29}{149}$. Luego $Q = \left(\frac{542}{149}; -\frac{381}{149}; -\frac{174}{149}\right)$

Solo nos resta calcular $d(P;Q) = \frac{29\sqrt{149}}{149}$. Este número representa la distancia entre los planos. ■

Experimento Resuelto 18 (pág. 71)

Primero vamos a expresar a la reecta L_1 en su ecuación vectorial. Como viene dada por la intersección de dos planos, elegimos despejar la variable y de ambas ecuaciones e igualarlas.

De ello resulta que: $2x - z - 4 = 4x - 2z - 9$ y si se despeja z se obtiene: $z = 2x - 5$. Al volver con esta igualdad a una de las ecuaciones de los planos -puede ser cualquiera- se obtiene que $y = 1$.

Luego, todo punto de la forma $(x;1;2x-5)$ es un punto de la recta L_1. Separando lo que tiene x de lo que no, resulta que una posible ecuación vectorial de L_1 es:

$L_1: X = k(1;0;2) + (0;1;-5)$. Ustedes pueden observar que el vector director de L_1 es el mismo vector director de L_2. Esto nos garantiza que las rectas son paralelas.

Para encontrar una ecuación de Π perpendicular a L_2, tomamos el vector director de esta recta como la normal al plano:

$1 \cdot x + 0 \cdot y + 2 \cdot z + d = 0$. Luego reemplazamos por el punto $P = (1;2;-3)$ y obtenemos d:

$1 + 2(-3) + d = 0 \rightarrow d = 5$. Entonces: $\Pi : x + 2z + 5 = 0$.

Para encontrar Q, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L_1 en Π: $(k) + 2(2k-5) + 5 = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow Q = (1;1;-3)$

Solo nos resta hallar $d(P;Q)$, que es la distancia entre las rectas paralelas. Pero como $P = Q$ ¡son el mismo punto!, dicha distancia vale 0 (cero). ■

Experimento Resuelto 19 (pág. 71)

Para probar que L es perpendicular a Π basta con mostrar que el vector director de la recta es ortogonal al vector normal al plano, es decir: el producto escalar entre ambos es nulo:

$\vec{v_L} \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow (-1;0;1)(1;1;1) = -1 + 0 + 1 = 0$. ¡Comprobado!

Para encontrar L' ortogonal a Π, se toma como vector director de esta recta la normal al plano Π y si, además, debe pasar por $P = (1; 1; 2)$ reuslta:

$L' : X = k(1; 1; 1) + (1; 1; 2)$. Si esta recta la expresamos en sus coordenadas cartesianas y la reemplazamos en Π resulta:

$(k + 1) + (k + 1) + (k + 2) = 1 \to k = -1$. Luego $Q = (0; 0; 1)$.

La distancia $d(P; Q) = d(L; \Pi) = \sqrt{3}$. ■

Experimento Resuelto 20 (pág. 71)

1. Para probar que las rectas L_1 y L_2 son alabeadas debemos comprobar que su intersección es vacía y que no son paralelas.

   Si reemplazamos las ecuaciones paramétricas de L_2 en L_1 resulta que:

   $x - y - z = 1 \to 2\lambda + 3\lambda + 1 = 1 \to 5\lambda = 0 \to \lambda = 0$

   $x - 2y + z = -2 \to 2\lambda + 6\lambda - 1 = -2 \to -1 = -2$ es absurdo (pues $\lambda = 0$). Entonces la intersección entre las rectas es vacía.

   Ahora bien, si escribimos la ecuación vectorial de L_1 resulta: $(x; y; z) = k(3; 2; 1) + (4; 3; 0)$. Como el vector director de L_2 es $(2; -3; 0)$ es sencillo comprobar que las coordenadas de los vectores de ambas rectas no son proporcionales.

   Por lo tanto, comprobamos que las rectas no son paralelas. Luego: las rectas son alabeadas.

2. La ecuación vectorial de la recta L_1 es $k(3, 2, 1) + (4, 3, 0)$. Entonces los planos buscados serán de la forma:

   $\Pi_1 = \{\lambda(3, 2, 1) + \beta(2, -3, 0) + (4, 3, 0), \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$

   $\Pi_2 = \{\lambda'(3, 2, 1) + \beta'(2, -3, 0) + (0, 0, -1)\lambda', \beta' \in \mathbb{R}\}$

3. Para encontrar la distancia entre los planos, primero buscamos la recta perpendicular a Π_2 que pasa por $(0, 0, 1)$.

   Para esto encontramos la normal al plano:

   $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = (3, 2, -13)$$

   Entonces la ecuación de la recta buscada es $\alpha(3, 2, -13) + (0, 0, -1)$.

   La intersección de esta recta con el plano Π_1 es el punto $(42, 28, -183)$.

   Entonces $d(\Pi_1, \Pi_2) = d((0, 0, 1), (42, 28, -183)) = 14\sqrt{182}$.

■

Experimento Resuelto 21 (pág. 73)

Para encontrar una recta L que pase por $P = (1; 2; 3)$ y sea perpendicular al plano $\Pi : x + 2y + 2z = 0$ utilizamos el punto P como punto de la recta y la normal al plano $\vec{N} = (1; 2; 3)$ como vector director de la recta. Es decir:

$L : (x; y; z) = k(1; 2; 3) + (1; 2; 3)$. Luego, reemplazamos las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación del plano para enocntrar las coordenadas del punto R:

$(k + 1) + 2(2k + 2) + 3(3k + 3) = 0 \to 14k + 14 = 0 \to k = -1$ entonces $R = (0; 0; 0)$

Como R es el punto medio entre P y Q podemos plantear que:

$(x_R; y_R; z_R) = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}; \frac{y_P + y_Q}{2}; \frac{z_P + z_Q}{2}\right)$

$(0; 0; 0) = \left(\frac{1 + x_Q}{2}; \frac{2 + y_Q}{2}; \frac{3 + z_Q}{2}\right)$

$Q = (-1; -2; -3)$ ■

Experimento Resuelto 22 (pág. 80)

1. Si $P \in L \to P = t_1 \cdot \vec{v}$ y si $Q \in L \to Q = t_2 \cdot \vec{v}$

   Sumamos miembro a miembro ambas igualdades y resulta: $P + Q = t_1 \cdot \vec{v} + t_2 \cdot \vec{v}$

   Luego: $P + Q = (t_1 + t_2) \cdot \vec{v} \to P + Q \in L$

   Si $P \in L \to P = t_1 \cdot \vec{v}$ y multiplicamos miembro a miembro por $\lambda \in R$ resulta:

   $\lambda P = \lambda t_1 \cdot \vec{v} \to \lambda P = (\lambda t_1) \cdot \vec{v} \to \lambda P \in L$

2. Si $P \in \Pi \to P = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u}$

   Si $Q \in \Pi \to Q = s_2 \cdot \vec{w} + r_2 \cdot \vec{u}$

   Si sumamos miembro a miembro resulta:

   $P + Q = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u} + s_2 \cdot \vec{w} + r_2 \cdot \vec{u}$

   Si se extraer como factor común los vectores $\vec{w}$ y $\vec{u}$ resulta:

   $P + Q = (s_1 + r_1) \cdot \vec{u} + (s_2 + r_2) \cdot \vec{u} \to P + Q \in \Pi$

   Si $P \in \Pi \to P = s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u}$ y multiplicamos miembro a miembro por $\lambda \in R$ resulta:

   $\lambda P = \lambda(s_1 \cdot \vec{w} + r_1 \cdot \vec{u})$

   Si se distribuye λ resulta: $\lambda P = (\lambda \cdot s_1) \cdot \vec{w} + (\lambda \cdot r_1)\vec{u})$

   Entonces: $\lambda P \in \Pi$.

■

Experimento Resuelto 23 (pág. 85)

1. Todo vector del subespacio $S = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \in R^5 : x_5 = 0$ puede ser escrito como $(a; b; c; d; 0)$ con $a, b, c, d \in R$.

   Para probar que el conjunto $< (1; 0; 0; 0; 0); (0; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 1; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0) >$ genera S debo mostrar que $(a; b; c; d; 0)$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores del conjunto dado:

   $(a; b; c; d; 0) = a(1; 0; 0; 0; 0) + b(0; 1; 0; 0; 0) + c(0; 0; 1; 0; 0) + d(0; 0; 0; 1; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

2. En este caso, debemos probar que: $< (1; 0; 0; 0; 0); (1; 1; 0; 0; 0); (1; 1; 1; 0; 0); (1; 1; 1; 1; 0) >$ genera S. Luego:

   $(a; b; c; d; 0) = (a - b)(1; 0; 0; 0; 0) + (b - c)(1; 1; 0; 0; 0) + (c - d)(1; 1; 1; 0; 0) + d(1; 1; 1; 1; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

3. En este caso, debemos probar que

   $< (1; 0; 0; 0; 0); (0; 1; 0; 0; 0); (0; 0; 1; 0; 0); (0; 0; 0; 1; 0); (1; 2; 3; 4; 0) >$

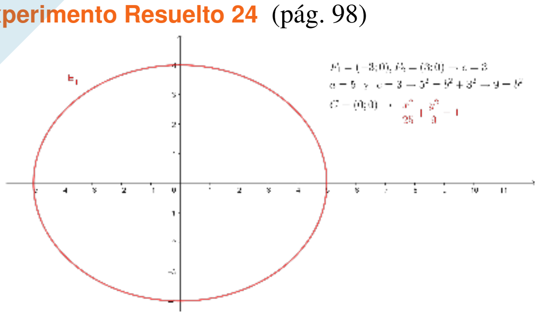
   genera S. Luego:

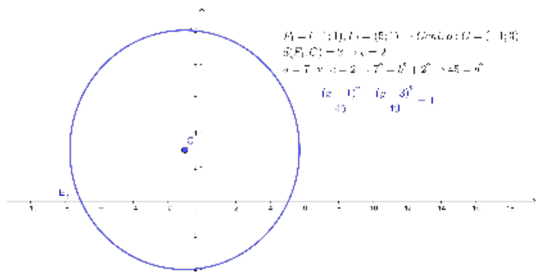
   $(a; b; c; d; 0) = a(1; 0; 0; 0; 0) + b(0; 1; 0; 0; 0) + c(0; 0; 1; 0; 0) + d(0; 0; 0; 1; 0) + 0(1; 2; 3; 4; 0)$ siendo $a, b, c, d \in R$.

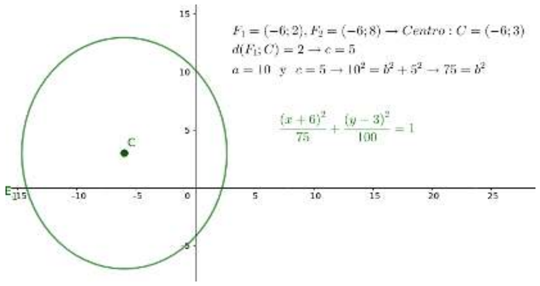
   ¡Así queda probado que el conjunto dado genera S!

■

Experimento Resuelto 24 (pág. 98)







Experimento Resuelto 25 (pág. 103) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$

$(9x^2 - 36x) - (16y^2 - 32y) = 124$

$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 + 2y) = 124$

$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) = 124$

$9[(x-2)^2 - 4] - 16[(y+1)^2 - 1] = 124$

$9(x-2)^2 - 36 - 16(y+1)^2 + 16 = 124$

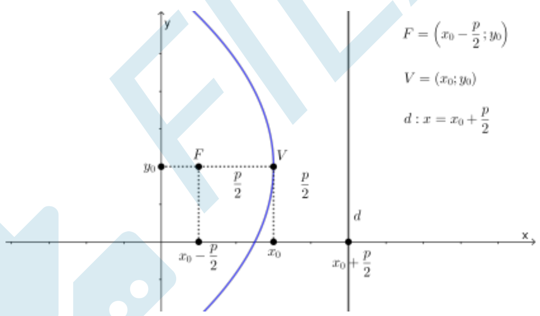
$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 124 + 36 - 16$

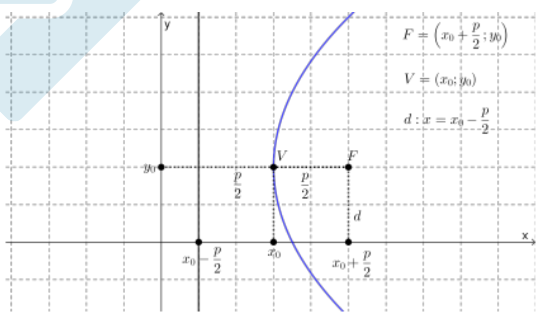
$9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 = 144$

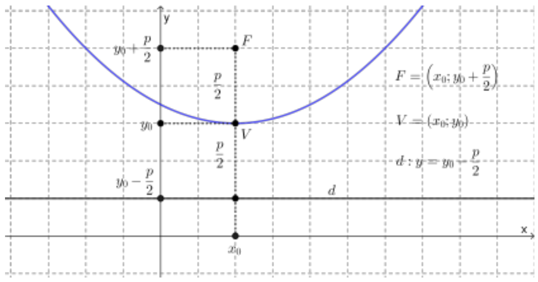
$\frac{9(x-2)^2}{144} - \frac{16(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$

$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

Experimento Resuelto 26 (pág. 108)







■

Experimento Resuelto 27 (pág. 147) Primero resolvamos el producto de la izquierda. Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2d-g & b+2e-h & c+2f-i \\ a+d-2g & b+e-2h & c+f-2i \\ 2a+2g & 2b+2h & 2c+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como se ve bastante feo, pero los sistema que salen de esa igualdad son:

$$\begin{cases} a+2d-g=1 \\ a+d-2g=0 \\ 2a+2g=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2e-h=0 \\ b+e-2h=1 \\ 2b+2h=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c+2f-i=0 \\ c+f-2i=0 \\ 2c+2i=1 \end{cases}$$

Cómo se observa, son muchas cuentas. Lo cual nos deja en claro que el método para encontrar la inversa nos facilita el trabajo. La idea detrás de esto es que al irse alternando la fila que tiene al 1 en cada sistema al hacer la triángulación por el método de Gauss estaremos reproduciendo de forma ordenada los despejes que, de todas formas, deberiamos hacer para resolver los tres sistemas. ■

Experimento Resuelto 28 (pág. 150) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de vectores linealmente independiente entonces:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$ para todo i, por la definición de independencia lineal. Pero entoces como cualquier reordenamiento de una suma finita da el mismo resultado, tenemos que:

$$\alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica lo mismo, luego $\{\vec{v}_2, \vec{v}_1 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, es linealmente independiente.

Pero entonces si $\alpha_i = 0$ tenemos que $\alpha_2 = 0$ y $\lambda\alpha_2 = 0$, sin importar el valor de λ, con lo cual $\{\vec{v}_1, \lambda\vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es L.I.

Por último como:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

implica $\alpha_i = 0$ para todo i, entonces, a partir de:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2(\vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1) + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

tenemos:

$$(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = 0$$

pero $(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = 0$, pues ambos α_i lo son, con lo cual $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + \lambda\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es L.I. ■

Experimento Resuelto 29 (pág. 158)

Conviene desarrollar por la última fila o la primer columna. Dado que son las que contienen la mayor cantidad de ceros. Si desarrollamos el determinante obtenemos $a_11 \cdot a_22 \cdot a_33$. Con lo cual la conclusión es que el determinante de una matriz triangular se obtiene multiplicando los elementos de la diagonal de dicha matriz. ■

Experimento Resuelto 30 (pág. 163)

1. Calculemos el determinante de una matriz que tiene una fila de ceros, en el caso de columna es lo mismo. Para fijar ideas pensemos en la primer fila, en caso de ser otra es lo mismo. En ese caso al momento del calculo obtenemos $0 \cdot |A_{11}| - 0 \cdot |A_{12}| + 0 \cdot |A_{13}| - \cdots + (-1)^n \cdots 0 \cdot |A_{1n}|$, como vemos todos los terminos de la suma son $|A_1i|$ donde este es el determinante del menos de la matriz, por cero. Sea cual sea el resultado del determinate del menor lo estoy multiplicando por cero, con lo cual obtengo una suma de ceros, lo que obviamente es cero.
2. Para el caso de una matriz con dos filas o columnas iguales, en este caso para fijar ideas las primera y segunda, debemos tener en cuenta la propiedad que dice que el determinante de una matriz es el mismo que el determinante que surje de reemplazar una fila por el resultado de la resta de dos filas de la matriz, que nos da:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} - a_{11} & a_{12} - a_{12} & \ldots & a_{1n} - a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   Pero al hacer esa resta tenemos que nos queda una fila de ceros, lo cual hace que el determinante de cero:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

3. Para que una matriz de nxn tenga rango menor que n debe tener una, o más, filas o columnas todas conformadas por ceros. Pero en este caso, por el ítem 1 tenemos que el determinante da cero.

■

Experimento Resuelto 31 (pág. 164)

1. El determinante será $det(A^k) = det(A \cdot A \cdot A \ldots A) = det(A) \cdot det(A) \cdot det(A) \ldots det(A) = (det(A))^k$.
2. $1 = det(I) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A) \cdot det(A^{-1}) \Rightarrow (det(A))^{-1} = det(A^{-1})$.
3. Son matrices diferentes.
4. Si $A \cdot B$ es inversible entonces $det(A \cdot B) \neq 0$ pero entonces $det(A) \cdot det(B) \neq 0$, y como los determinantes son números reales entonces $det(A) \neq 0$ y $det(B) \neq 0$, con lo cual A y B son inversibles.

■

Experimento Resuelto 32 (pág. 169)

- Como en general $\vec{0} = 0 \cdot \vec{v}$, en particular $\vec{0} = 0 \cdot T(\vec{v}) = T(\vec{0} \cdot \vec{v}) = T(\vec{0})$
- $\vec{0} = T(\vec{v} - \vec{v}) = T(\vec{v} + (-\vec{v})) = T(\vec{v}) + T(-\vec{v}) \Rightarrow -T(\vec{v}) = T(-\vec{v})$

- $T(\vec{v}-\vec{w}) = T(\vec{v}+(-\vec{w})) = T(\vec{v}) + T(-\vec{w}) = T(\vec{v}) - T(\vec{w})$
- Para dos vectores tenemos $T(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_1 + \cdots + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_2) = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_1) + \cdots + T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) + T(\vec{v}_2) + \cdots + T(\vec{v}_2) = \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2)$. Este razonamiento puede extenderse en general para la suma de r vectores.

■

Experimento Resuelto 33 (pág. 174)

Como S es subespacio entonces si $v, w \in S \Rightarrow T(v), T(w) \in T(S)$, pero entonces $T(v) + T(w) = T(v+w) \in T(S)$. Del mismo modo $\lambda T(v) = T(\lambda v) \in T(S)$, pues $\lambda v \in S$. Finalmente, $\vec{0} = T(\vec{0}) \in T(S)$. Por lo tanto T(S) cumple las tres condiciones con las que definimos un subespacio. Luego $T(S) \subset (R)^m$ es un subespacio de $(R)^m$.

■

Experimento Resuelto 34 (pág. 176)

Por exploración podemos encontrar que la matriz A que cumple que $T(\vec{v}) = A\vec{v}$ es de la forma $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esto lo podemos comprobar haciendo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

A partir de lo que obtenemos $(x_1, x_2, x_1 + x_2)$ que es $T(x_1, x_2)$.

Pero tenemos tambien que $T((1,0)) = (1,0,1)$ y $T((0,1)) = (0,1,1)$, que podemos observar son las columnas de la matriz anterior. ■

Experimento Resuelto 35 (pág. 176)

Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ entonces si $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$ tomemos $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T^{-1}(W)$ tales que $T(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$ y $T(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$. Pero entonces $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in T(W)$, del mismo modo $\lambda\vec{w}_1 = \lambda T(\vec{v}_1) = T(\lambda\vec{v}_1) \in T(W)$. Por lo tanto $T^{-1}(W)$ es subespacio de $\mathbb{R}^m$. ■

Experimento Resuelto 36 (pág. 181)

La matriz de la transformación rotación de $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrario a las agujas del reloj es $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (0, \sqrt{2})$$

■

Experimento Resuelto 37 (pág. 183)

La expresión de la T.L. simetría respecto de $y = 2x$ es $T(x,y) = (\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5})$. $T(1,1) = (\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$. ■

Experimento Resuelto 38 (pág. 184)

- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección x: $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección y: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Matriz canónica de la homotecia de factor k en la dirección z: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

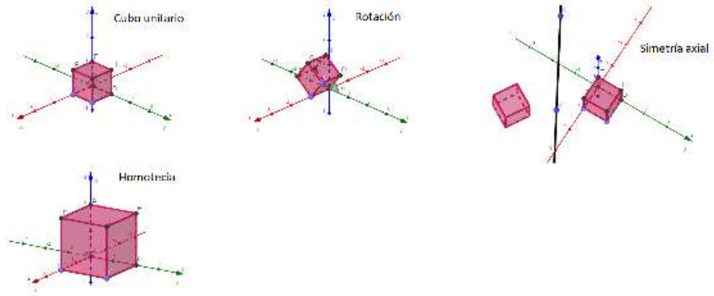
■

Experimento Resuelto 39 (pág. 186)

Como el plano xy esta generado por $\vec{v} = (1,0,0)$ y por $\vec{w} = (0,1,0)$ y como normal podemos tomar $N = (0,0,1)$, entonces la transformación buscada cumple $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = (0,1,0)$ y $T(0,0,1) = (0,0,0)$. Entonces tenemos:

$T(x,y,z) = T(x,0,0) + T(0,y,0) + T(0,0,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) =$
$x(1,0,0) + y(0,1,0) = (x,y,0)$ ■

Experimento Resuelto 40 (pág. 187)



■

Experimento Resuelto 41 (pág. 190) Primero calculamos el producto de las matrices A_T y A'_T:

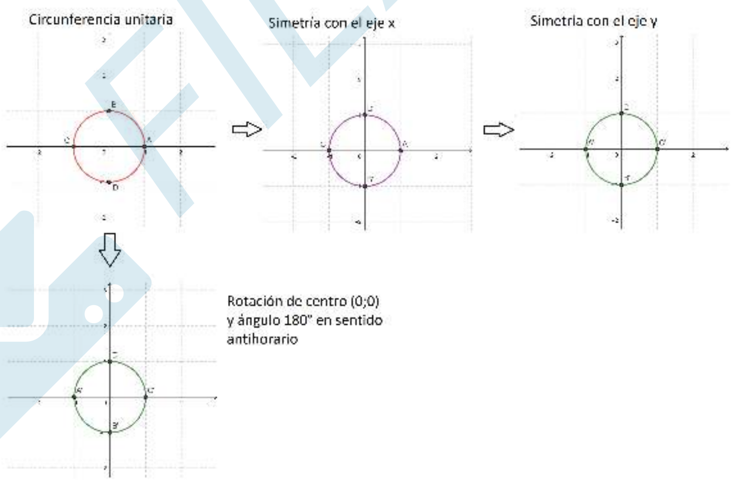
$$A_T \cdot A'_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Una vez que tenemos esto veamos que el producto de la matriz resultante por el vector de variables nos da lo mismo que la forma funcional de la composición ToT', es decir:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x - y - 3z, 2x - 2y - 4z, 2x - 2z)$$

Vemos que se recupera la expresión funcional de la composición. ■

Experimento Resuelto 42 (pág. 191)



■

Experimento Resuelto 43 (pág. 199)

Si $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces:

$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$. Luego:

- $Re(z+w) = a+c = Re(z) + Re(w)$
- $Im(z+w) = b+d = Im(z) + Im(w)$

■

Experimento Resuelto 44 (pág. 201) Si $z = a+bi$ y $w = c+di$ sucede que:

$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w)(\overline{(z \cdot w)})$

$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}$

$|z \cdot w|^2 = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}$

$|z \cdot w|^2 = |z|^2 |w|^2$

Tomando raíces cuadradas en la igualdad obtenida, resulta: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. ■

Experimento Resuelto 45 (pág. 202)

1. Si $z = 2+3i$ entonces $\overline{z} = 2-3i$

   Luego: $z \cdot |z| = (2+3i)(2-3i) = 2^2 - (3i)^2$ por ser una diferencia de cuadrados.

   $z \cdot \overline{z} = 4 - 9i^2 = 4+9 = 13$. Este valor coincide con $|z|^2$.

   En general, sucede que si $z = a+bi$ entonces $\overline{z} = a - bi$. Entonces:

   $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

2. Si $z = a+bi$ y $w = c+di$ son dos números complejos, se verifica que:
   - $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$
   - $\overline{z+w} = \overline{a+bi+c+di} = (a+c) - i(b+d) = (a-ib) + (c-id) = \overline{z} + \overline{w}$
   - $\overline{zw} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc) = ac - bd - iad - ibc =$ $(a-bi)(c-di) = \overline{z}\overline{w}$
   - $z + \overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a = 2Re(z)$; $z - \overline{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi = 2Im(z)$
   - $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

■

Experimento Resuelto 46 (pág. 210)

Propiedad 2 del corolario 49:

$z = |z|(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$

$z = |z|\cos(\alpha) + i|z|\sin(\alpha)$

$\overline{z} = \overline{|z|\cos(\alpha) + i|z|\sin(\alpha)}$

$\overline{z} = |z|\cos(\alpha) - i|z|\sin(\alpha)$

Pero $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ y $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$

Entonces: $\overline{z} = |z|\cos(-\alpha) - i|z|(-\sin(-\alpha))$

$\overline{z} = |z|\cos(-\alpha) + i|z|\sin(-\alpha)$

$\overline{z} = |z|(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ ■

Experimento Resuelto 47 (pág. 219)

Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, el grado de $P+Q$ será:

- $gr(P+Q) = n$ si $n > m$
- $gr(P+Q) = m$ si $m > n$
- $gr(P+Q) = n$ si $n = m$

■

Experimento Resuelto 48 (pág. 219) Si $gr(P) = n$ y $gr(Q) = m$, el grado de $P \cdot Q$ será:

$gr(P \cdot Q) = n+m$ ■

Experimento Resuelto 49 (pág. 223)

Si se realiza la división entre dos polinomios del mismo grado, el cociente y el resto son polinomios de grado 0, es decir, funciones constantes. ■

Experimento Resuelto 50 (pág. 225)

Si el polinomio $Q(x)$ divide al polinomio $P(x)$ entonces las raíces de $Q(x)$ son raíces también de $P(x)$. ■

Experimento Resuelto 51 (pág. 227)

Sea $P(x) \in K[x]$ de grado n. Observemos que $P(x)$ no puede tener más de n raíces. Si $P(x)$ no tiene raíces, entonces lo que estamos tratando de ver es cierto (si no tiene ninguna raíz, no tiene más de n). Ahora bien: supongamos que $P(x)$ posee al menos una raíz a. Sabemos que $x - a$ divide a $P(x)$ y que, por lo tanto, $P(x) = (x - a)C(x)$, donde $C(x)$ es el cociente de la división y su grado es $n - 1$. Observemos que si, ahora, $C(x)$ no tiene raíces, entonces, nuevamente, hemos visto que $P(x)$ no tiene más de n raíces.

Si $C(x)$ tiene al menos una raíz, se procede de la misma forma y, entonces, $P(x)$ tiene dos raíces: a y la raíz de $C(x)$. Nuevamente, $P(x)$ tiene n raíces. ■

Experimento Resuelto 52 (pág. 228)

Sea $P(x)$ un polinomio de grado $n > 0$. Por el TFA, sabemos que $P(x)$ tiene al menos una raíz $a \in C$. Por lo tanto, $x - a$ divide a $P(x)$ y se tiene $P(x) = (x - a)C(x)$. Calculando las raíces de $C(x)$ puede repetirse el procedimiento y, con el experimento 50, sabemos que las raíces de C son raíces de P. Luego, P tiene como máximo n raíces: la raíz $x = a$ y las $n - 1$ raíces de C.

■

10. Bibliografía

- Grossman, S. (1996). *Álgebra lineal*. México D. F.: Mcgraw Hill.
- Jeronimo, G., Sabia, J. y Tesauri, S. (2008). *Álgebra lineal*. Buenos Aires: UBA. (Disponible en: `http://mate.dm.uba.ar/~jeronimo/algebra_lineal/AlgebraLineal.pdf`)
- Krick, T. (2017). *Álgebra I*. Buenos Aires: UBA. (Disponible en: `http://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado9.pdf`)
- Lang, S. (1990). *Introducción al álgebra lineal*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.
- Lipschutz, S. (1992). *Álgebra lineal*. México D. F.: Mcgraw Hill.
- Oteyza, E. et al. (2011). *Geometría analítica*. México D. F.: Pearson Educación.

Índice Alfabético