Тестирање хипотеза - подсећање

- хипотеза - претпоставка коју је потребно проверити
- хипотеза се не прихвата ако поверујемо да важи нека њој алтернативна

- тестирање статистичких хипотеза се врши по принципу:

1. претпоставимо да важи X
2. покушамо да дођемо до контрадикције
3. ако смо дошли до контрадикције → одбацујемо X

ако нисмо дошли до контрадикције → не одбацујемо X

и даље нисмо сигурни да важи X, па не можемо рећи да га прихватамо

У тестирању статистичких хипотеза оно што претпостављамо у 1. зовемо нулта хипотеза.

Нулту хипотезу ћемо одбацити ако поверујемо да је тачна нека њој алтернативна хипотеза.

$\boxed{\text{САВЕТ:}}$ У задацима за H_0 бирати ону хипотезу која се може лакше оповргнути.

нпр: $H': \theta = \theta_0$ $\qquad H'': \theta > \theta_0$

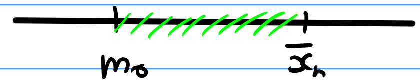
за H_0 узети H', јер је лакше одбацити хипотезу да је θ једнако тачно једном броју

ВАЖНО: посматрајмо следећи тест:

$(X_1, \dots, X_n)$ – ПСУ из $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ — σ^2 познато нпр.

$$H_0: \ m = m_0 \qquad H_1: \ m > m_0$$

Рекли смо да у прилог H_1 иду велике вредности статистике $\bar{X}_n - m_0$:



што је  веће, све више верујемо у H_1, тј. сумњамо у H_0.

Међутим, ова слика не иде у прилог H_1:

али не иде у прилог ни H_0!

Дакле, ако не прихватимо H_1, не значи да прихватамо H_0, већ да је не одбацујемо!

Постоје 2 приступа тестирању H_0 против алтернативе H_1:

1. приступ преко критичне области W:

$$T \in W \Rightarrow \text{одбацујемо } H_0$$
$$T \notin W \Rightarrow \text{не одбацујемо } H_0$$

2. приступ преко p-вредности:

$$p \le \alpha \Rightarrow \text{одбацујемо } H_0$$
$$p > \alpha \Rightarrow \text{не одбацујемо } H_0$$

САВЕТ 2: T бирати тако да расподела T у случају да важи H_0 буде позната и тако да буде јасно уочљиво какве вредности T иду у прилог H_1! (које год пристигну да се избаце)

Алтернативна дефиниција p-вредности:

<u>деф.2</u> p-вредност теста је најмањи ниво значајности за који ћемо одбацити H_0 на основу датог узорка.

Првобитна деф. је можда интуитивнија, али није најпрецизнија, јер није увек познато шта се под 'екстремнијим' вредностима подразумева. Погледајмо следећи пример:

1. Преко p-вредности теста тестирати:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad vs \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$$

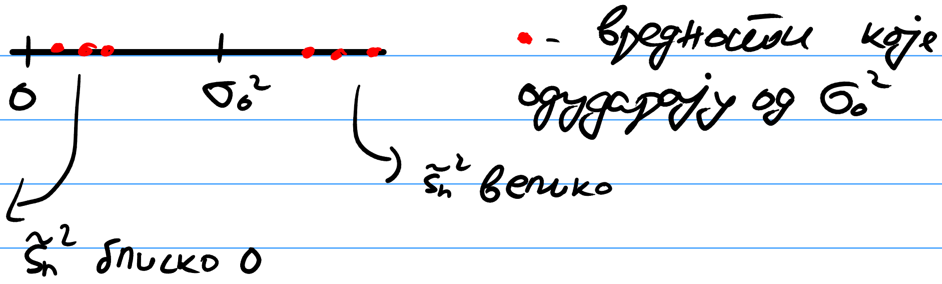
на основу ПСУ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ из $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

- α је дато

<u>решење:</u> 1. корак: нађимо неку тест статистику. Хајде да кренемо од неке статистике која је добра оцена параметра σ^2. Нпр: $\tilde{S}_n^2$ (јер је непристрасна)

2. корак: када расте наше уверење да је H_1 тачна?

Што је $\tilde{S}_n^2$ даље од σ_0^2:



3. корак: избор T: нећемо за T дати узети $\tilde{S}_n^2$, већ $T=(n-1)\frac{\tilde{S}_n^2}{\sigma_0^2}$, јер знамо њену расподелу за H_0.

- екстремне вредности стат. T: блиске 0 и велике
- ово је непрецизно! Како да израчунамо p-вредност?

Позивамо се на другу дефиницију:

p-вредност је најмањи ниво значајности за који ћемо на основу датог узорка одбацити H_0: $\alpha < p \iff$ не одбацујемо H_0

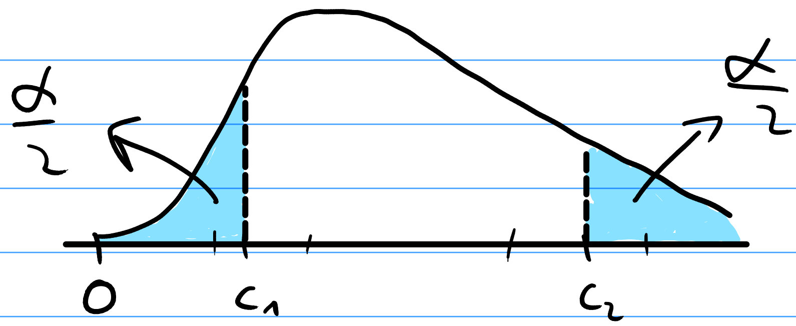
- како би имао приступ преко W?

$$W=\{T\le c_1\}\cup\{T\ge c_2\}$$

c_1 и c_2 су т.д. $P\{T\in W \mid H_0 \text{ је тачна}\}=\alpha$, обично се бирају т.д.

$$P\{T\le c_1 \mid H_0 \text{ тачна}\}=\frac{\alpha}{2}=P\{T\ge c_2 \mid H_0 \text{ тачна}\}$$

при H_0 $T\sim\chi^2_{n-1}$:



t - реализована вредност T

Означимо са p p-вр. теста

1° ако је t неки „мали" број, односно: $P_{H_0}\{T\le t\}<P_{H_0}\{T\ge t\}$, шта је "екстремније" од тога? Како под екстремнијим вредностима подразумевамо вредности које у прилог H_1, екстремније од t је све мање од t, али не само то!

Екстремније је и све веће од неког t', па је
$p = P_{H_0}\{T \le t\} + P_{H_0}\{T \ge t'\}$
↳ шта је ово?

Сада можемо искористити деф 2, јер нам првобитна деф. не говори како t' да израчунамо.
По деф 2. p је т.г. $\alpha < p \iff$ не одбацујемо H_0 (*)
Како α расте (погледајмо у слику горе), c_1 расте, а c_2 се смањује. Како α опада, c_1 се смањује, а c_2 расте.
Дакле, да би важило (*), чим α достигне p, c_1 и c_2 се поклопе са t и t' редом.
Зато за t' важи $P_{H_0}\{T \ge t'\} = P_{H_0}\{T \le t\}$, јер смо се договорили да ћемо c_1 и c_2 бирати тако да $P_{H_0}\{T \le c_1\} = P_{H_0}\{T \ge c_2\}$.

Дакле, $\boxed{p = 2 \cdot P_{H_0}\{T \le t\}}$ (није битно шта је t'...)

Можемо закључити да то како ћемо рачунати p вредности зависи од тога како смо дефинисали критичну област!

2° ако је t неки "велики" број, тј: $P_{H_0}\{T \ge t\} < P_{H_0}\{T \le t\}$, "екстремније" од t је све веће од t и мање од неког t'. Дакле, у овом случају важи:

$p = P_{H_0}\{T \ge t\} + P_{H_0}\{T \le t'\}$
↳ слично као у претходном разматрању можемо закључити да је t' т.г. $P_{H_0}\{T \ge t\} = P_{H_0}\{T \le t'\}$

$\Rightarrow \boxed{p = 2 \cdot P_{H_0}\{T \ge t\}}$

Када видимо боље случај 1° и случај 2°, јасно је да у једном реду можемо записати:

$$\boxed{p = 2 \cdot \min \{ P_{H_0}\{T \leq t\}, P_{H_0}\{T \geq t\} \}}$$

термин на енглеском: $\boxed{\text{p value}}$