Тестирање хипотеза

100 g? Сумњиво...

- Како бисмо то проверили?
- И шта уопште проверавамо?
  - Апсолутно свако произведено паковање садржи 100g чоколаде? ✗
    - Можда неко паковање садржи 99 g чоколаде, а неко друго 103 g, па ћемо да опростимо.
  - Просечна грамажа свих произведених чоколада је 100g? ✓
    - Ово има више смисла.

- Отићи ћемо у радњу, купити неколико чоколада и измерити их (тј. узети ћемо узорак и забележити вредности обележја на узорку); затим ћемо на основу тих резултата извући неки закључак (тј. израчунаћемо вредност неке статистике на основу датог узорка и размислити шта нам она сугерише)

- Нпр. добили смо да је узорачка средина 99.5 g. То нам се свиђа, а шта ако је узорачка средина 96 g? Које вредности узорачке средине ће нас уверити да је просечна грамажа свих чоколада 100g, а које да је просечна грамажа свих чоколада већа, односно мања од 100 g?

Дакле, концепт тестирања неке хипотезе је следећи:

1. дефинишемо нулту хипотезу H_0 и њој алтернативну H_1
   у нашем примеру: H_0: просек $= 100g$; H_1: просек $< 100g$
   (или просек $> 100g$ и сл...)
2. извадимо узорак $x_1, \dots, x_n$
3. израчунамо неку статистику од $x_1, \dots, x_n$: $T(x_1, \dots, x_n)$
4. у зависности од тога да ли се $T(x_1, \dots, x_n)$ нашло у неком унапред задатом скупу вредности одлучујемо да ли прихватамо H_0 или је одбацујемо.

Параметарски тестови

- тестови које користимо при тестирању хипотеза које се тичу параметара расподеле чији је облик познат

- ако расподела неког обележја зависи од параметра $\theta \in \Theta$, такве хипотезе су следећег облика:

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta \in \Theta_1,$$
$$\text{где су} \quad \Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset, \quad \Theta_0 \cup \Theta_1 \subset \Theta$$

- Статистику коју користимо при тестирању зовемо <u>ТЕСТ</u> статистика и обично је означавамо са T

- Скуп вредности које узима T за које ћемо одбацити H_0 зовемо <u>критична област</u> и обично означавамо са W.

- Главно питање је како формирати T и W.
  - T и W треба да буду такви да са што мањом вероватноћом грешимо у закључивању;
  - W треба да обухвати вредности T стат. које иду у прилог H_1.

Како можемо да погрешимо?

- одбацимо H_0 када је она тачна ← грешка 1. врсте
- не одбацимо H_0 када је она нетачна ← грешка 2. врсте

- $\alpha = P\{$грешка 1. врсте$\} = P\{T \in W \mid H_0$ тачна$\}$
- $\beta = P\{$грешка 2. врсте$\} = P\{T \notin W \mid H_0$ нетачна$\}$

- Како је тешко конструисати тест смањујући и α и β, обично посматрамо само α-ниво значајности теста.

---

36. $(X_1, \dots, X_n)$ - ПСУ из $\mathcal{N}(m, \underset{\sigma^2}{\underbrace{10}})$, $n=60$, $\bar{x}_n = 1{,}784$

Тестирати $H_0: m=2$ против $H_1: m \neq 2$, $\alpha = 0{,}05$

$m > 2$ ← у збирци

$m < 2$

решење: б) При конструкцији интервала поверења смо доказали да за $c = \Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$ важи:

$H_1: m \neq 2$

$$P\left\{\bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = \underbrace{1-\alpha}_{\text{велико!}}$$

Дакле, ако се 2 није нашла у $\left(\bar{x}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, имамо добар разлог да верујемо да је $m \neq 2$.

Како је $P\left\{2 \notin \left(\bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}\right) \mid H_0 \text{ тачна}\right\}$

$$= 1 - P\left\{\bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \leq 2 \leq \bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \mid H_0 \text{ тачна}\right\}$$

$$= 1 - P\left\{-c \leq \frac{\bar{X}_n - 2}{\sigma}\sqrt{n} \leq c \mid H_0 \text{ тачна}\right\}$$

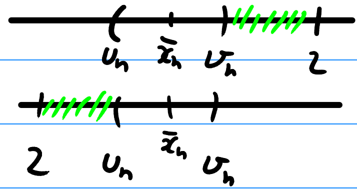
$$= P\left\{\left|\frac{\bar{X}_n - 2}{\sigma}\sqrt{n}\right| > c \mid H_0 \text{ тачна}\right\} \underset{m=2 \text{ при } H_0}{=} 1 - (1-\alpha) = \alpha,$$

Закључујемо да $T=\frac{\bar X_n-2}{\sigma}\sqrt{n}$, а $W=\{|T|>c\}$ можемо користити при овом тестирању. Зашто?

1. У прилог H_1 иду велике вредности $|T|$, јер је $\bar X_n$ непр. оцена за m, па очекујемо да $|\bar X_n-2|$ буде велико за $m\neq 2$

$u_n=\bar x_n-\frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$

$v_n=\bar x_n+\frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$



што је веће, то смо више сигурни да је $m\neq 2$

2. Обезбедили смо да важи:

$$P\{T\in W \mid H_0 \text{ тачна}\}=\alpha$$

H_1: $m>2$

Ако успемо да конструишемо одговарајући доњи интервал поверења $(U_n,+\infty)$, у прилог H_1 ће ићи вредности статистике U_n веће од 2. $2<u_n<m$

Нађимо доњи $100\cdot(1-\alpha)\%$-ни интервал поверења за m:

Тражимо c т.д. $P\{\underbrace{\frac{\bar X_n-m}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)}\le c\}=1-\alpha$ (*) $\Rightarrow c=\Phi^{-1}(1-\alpha)$

Како је $P\{\frac{\bar X_n-m}{\sigma}\sqrt{n}\le c\}=P\{m\geq \bar X_n-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}\}$,

следи да је $(\bar X_n-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}},+\infty)$ тражени интервал

Дакле, H_0 можемо одбацити ако је $2<\bar x_n-\frac{\sigma c}{\sqrt{n}}$, односно $\frac{\bar x_n-2}{\sigma}\sqrt{n}>c$

Дакле, $T = \dfrac{\overline{X}_n - 2}{\sigma}\sqrt{n}$, $W = \{T > c\}$.

1. У другој H_1 иду веће вредности $\overline{X}_n$, па и T
2. $P\{T > c \mid H_0 \text{ тачна}\} = P\{\underbrace{\dfrac{\overline{X}_n - 2}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > c\} = 1-(1-\alpha) = \alpha$

$H_1: m < 2$ за домаћи

а) деф. p-вредност је вероватноћа да тест статистика при услову да је H_0 тачна узме екстремнију вредност од вредности коју је узела на датом узорку.

- екстремнија = иде у другој H_1

примери: 1. $W = \{|T| > c\}$, t - реализовано T на узорку

p-вр $= P\{|T| > |t| \mid H_0 \text{ тачна}\}$

2. $W = \{T > c\} \Rightarrow p\text{-вр} = P\{T > t \mid H_0 \text{ тачна}\}$

3. $W = \{T < c\} \Rightarrow p\text{-вр} = P\{T < t \mid H_0 \text{ тачна}\}$

Зашто је важна p-вредност?

- Ако је p-вр. мала, мала је вероватноћа да T, у случају да је H_0 тачно, узме још екстремнију вредност од реализоване, тј. реализована вредност t је довољно екстремна за нулту хипотезу. Дакле мале p-вредности утерују да би требало одбацити H_0.

If p is low, null must go!

$H_1: m > 2$

a) $W = \{T > c\} \Rightarrow p = P\{T > t \mid H_0 \text{ је тачна}\}$

$$= P\Big\{ \underbrace{\frac{\overline{X}_n - 2}{\sigma}\sqrt{n}}_{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ (јер при } H_0\ m=2)} > t \Big\} = 1 - \Phi(t)$$

Да бисмо одбацили H_0, потребно је да p буде мање од α.

37. за домаћи; 38. као 36.

39. $H_0: \sigma^2 = 0{,}25$ $\quad H_1: \sigma^2 < 0{,}25$

Како је $\tilde{S}_n^2$ непристр. оцена σ^2, у прилог H_1 иду оне вредности статистике $\tilde{S}_n^2$ мање од 0,25, односно оне вредности т.д.

$$\frac{\tilde{S}_n^2}{0{,}25} \text{ мало}$$

Узмимо онда за критичну област $W = \left\{ \frac{\tilde{S}_n^2}{0{,}25} < c_1 \right\}$

$$W = \Big\{ \underbrace{(n-1)\frac{\tilde{S}_n^2}{0{,}25}}_{=:T} < \underbrace{c_1 \cdot (n-1)}_{=:c} \Big\}$$

c је такво да $P\{T \in W \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha$

$$\Leftrightarrow P\Big\{ \underbrace{(n-1)\frac{\tilde{S}_n^2}{0{,}25}}_{\chi^2_{n-1} \text{ (при } H_0 \text{ је } \sigma^2 = 0{,}25)} < c \Big\} = \alpha$$

Дакле, за c важи: $F_{\chi^2_{n-1}}(c) = \alpha \Rightarrow c = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$

Дакле, тест можемо конструисати по узору на интервале поверења као у 36, а можемо и за T узети неку стожерну величину (сличну оној код интервала поверења) и одредити W тако да W одговара скупу вредности T које иду у прилог H_1, као у 39. задатку.

За домаћи нађи T и W у претходним задацима на други начин.

40. и 41. и 44. прескачемо

42. $(X_1, \dots, X_n) \sim Ber(p)$

фер новчић $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$

$$H_0: p = \frac{1}{2} \quad vs \quad H_1: p \neq \frac{1}{2}$$

Како је $p = EX$, $X \sim Ber(p)$ посматраћемо $\bar{X}_n$ као непристрасну оцену параметра p.
Вредности $\bar{X}_n$ које су такве да је $|\bar{X}_n - \frac{1}{2}|$ велико иду у прилог H_1, па има смисла критичну област потражити у облику:

$$W = \{ |\bar{X}_n - \tfrac{1}{2}| > c_1 \}, \text{ односно}$$

$$W = \left\{ \frac{|\bar{X}_n - \frac{1}{2}|}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} \sqrt{n} > c \right\}, \quad c = \frac{c_1 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}}$$

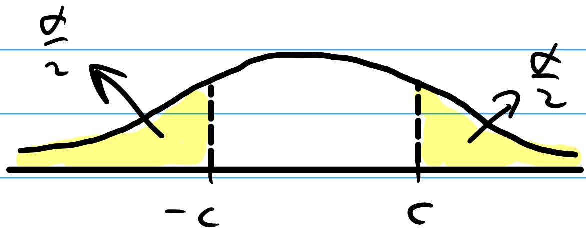
Ако са T означимо $\frac{\bar{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}} \sqrt{n}$, c треба да буде т.д. $P\{ T \in W \mid H_0 \text{ тачна} \} = \alpha$, односно

$P\{ |T| > c \mid H_0 \text{ тачна} \} = \alpha$

Како је при H_0 $p = \frac{1}{2}$, тада је по ЦГТ:

$$T = \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1),$$

па је c т.д: $P\{ |Z| > c \} = \alpha$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



Са слике видимо да је $\Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow c = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$

у R-у: $c = \text{qnorm}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right)$

$= 1{,}96$

Дакле, $W = \{ |T| > 1{,}96 \}$,

$$T = \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)}}\sqrt{n}$$

Пошто имамо и W и T, можемо извршити тести-рање.

45. $H_0: \lambda = 5$ $\quad H_1: \lambda > 5$

Како је λ једнако очекивању Пуасонове расподеле, $\bar{X}_n$ као неприст. оцена очекивања је непристр.

оцена параметра λ. Дакле, очекујемо да је $\bar{X}_n$ близу λ. Ако је $\bar{X}_n > 5$, имамо разлога да верујемо да је H_1 тачна и да одбацимо H_0. Зато ћемо W потражити у облику:

$$W = \{ \bar{X}_n - 5 > c_1 \}, \quad \text{односно:}$$

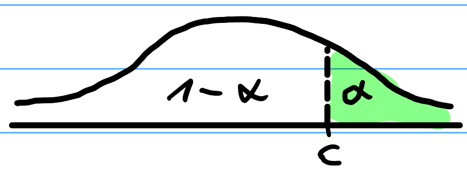
$$W = \left\{ \frac{\bar{X}_n - 5}{\sqrt{5}} \sqrt{n} > c \right\}$$

c тражимо да је т.д. $P\{ \underbrace{\frac{\bar{X}_n - 5}{\sqrt{5}} \sqrt{n}}_{\stackrel{!!}{T}} > c \mid H_0 \text{ тачна} \} = \alpha$

Како је при H_0 $\lambda = 5$, у том случају

$$T = \frac{\bar{X}_n - 5}{\sqrt{5}} \sqrt{n} \underset{\text{ЦГТ}}{\sim} \mathcal{N}(0,1), \quad \text{па } c \text{ знамо}$$

да одредимо:



са слике видимо да је $\phi(c) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow c = \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

у R-у: $c = \text{qnorm}(1-\alpha)$
$= 1,64$

Дакле, наш тест изгледа овако:

$$T = \frac{\bar{X}_n - 5}{\sqrt{5}} \sqrt{n}, \qquad W = \{ T > 1,64 \}$$

и сада можемо извршити тестирање.