ММВ

1. $\ell(p) := \ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(1-p)$

$$\ell'(p) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{p} - \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{1-p}$$

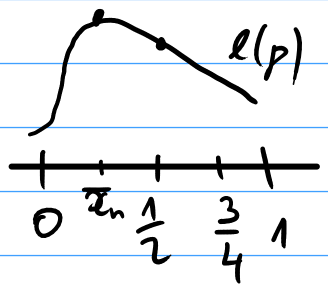
$\ell'(p) = 0 \iff \dots \quad p = \bar{x}_n$

$\ell'(p) > 0 \iff \dots \quad p < \bar{x}_n$

$\ell'(p) < 0 \iff \dots \quad p > \bar{x}_n$

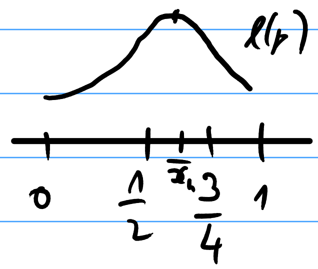
да ли $\bar{x}_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$?

1°

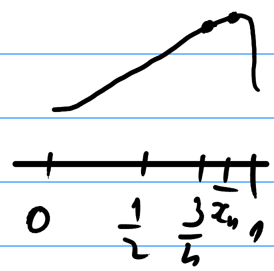


$\underset{p \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}{\operatorname{argmax}} \ell(p) = \frac{1}{2}$

2°



$\underset{p \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}{\operatorname{argmax}} \ell(p) = \bar{x}_n$



$\underset{p \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]}{\operatorname{argmax}} \ell(p) = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \hat{p}_{\text{ммв}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \bar{X}_n < \frac{1}{2} \\ \bar{X}_n, & \frac{1}{2} \le \bar{X}_n \le \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}, & \bar{X}_n > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Интервали поверења. Параметарски тестови

1. X - потрошња горива са адитивима

а) $n = 30$

$\bar{x}_n = 9{,}12$

$X \sim \mathcal{N}(m, 0{,}9^2)$

$H_0: \; m = 9.4 \quad vs \quad H_1: \; m < 9.4$

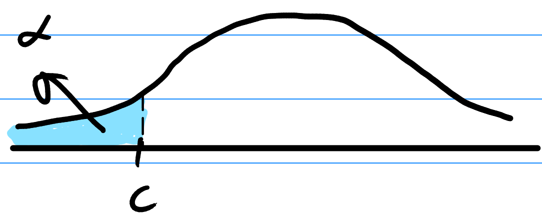
$\alpha = 0.05$

$m_0 = 9.4$

$\sigma^2 = 0{,}9^2$

$$T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \underset{\text{при } H_0}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$$

$W = \{T < c\}, \quad P\{T < c \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha$



$\phi(c) = \alpha$

$\Rightarrow c = \phi^{-1}(\alpha)$

$= -1{,}64$

реализована вредност T:

$t = -1{,}7$

$t < c \Rightarrow$ одбацујемо H_0

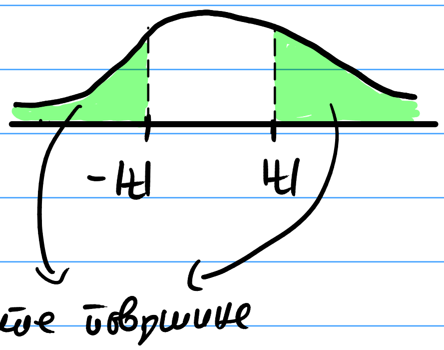
б) $H_0: \; m = 9.4 \quad vs \quad H_1: \; m \neq 9.4$

$$T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

$$P\{|X|>a\} = P\{X<-a \text{ или } X>a\}$$
$$= P\{X<-a\} + P\{X>a\}$$

$$W = \{ |T| > c \}$$

$$p\text{-вр} = P\{ |T| > |t| \mid H_0 \text{ тачна} \}$$
$$= 2\cdot P\{ Z > |t| \}, \quad Z \sim N(0,1)$$
$$= 2\cdot(1-\phi(|t|))$$
$$= 2(1-\phi(1{,}7))$$
$$= 2(1-0{,}96)$$
$$= 0{,}08$$



в) Подсетање: (U_n, V_n) је $\beta\cdot 100\%$-ни интервал поверења за m ако важи:

$$P\{ U_n < m < V_n \} = \beta$$

1. Пронађемо стожер T
2. Тражимо c_1 и c_2 т.д.

$$P\{ c_1 < T < c_2 \} = \beta$$

3. Трансформишемо $P\{c_1 < T < c_2\}$ у облик:

$$P\{ U_n < m < V_n \}$$

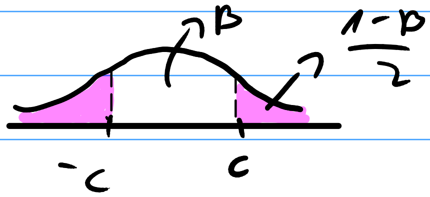
- m треба да се налази у T
- треба да знамо расподелу од T да бисмо нашли c_1 и c_2
- у T се налазе само оне величине које знамо да израчунамо на основу података које имамо

Код нас: $$T = \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

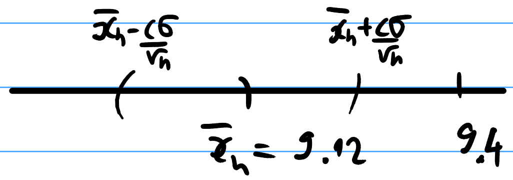
договор: $c_1 = -c_2$

$$P\{-c < T < c\}$$
$$= P\left\{-c < \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} < c\right\}$$
$$= P\{\underbrace{\bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}}_{U_n} < m < \underbrace{\bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}}_{V_n}\}$$

c је т.д. $P\{-c < T < c\} = \beta$



$$\phi(c) = \frac{1+\beta}{2}$$



интервал ће обухвати-ти 9.4 акко десни крај интервала надмаши 9.4

$$\bar{x}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} > 9.4$$

$$\iff c > 1.75 \quad / \phi$$

$$\iff \phi(c) > \phi(1.75) = 0.96$$

$$\iff \frac{1+\beta}{2} > 0.96$$

$$\iff \beta > 0.92$$

$$\iff \alpha < 0.08$$

Дакле:

$$\alpha < 0.08 \iff \bar{x}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} < 9.4 < \bar{x}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\iff -c < \frac{\bar{x}_n - 9.4}{\sigma}\sqrt{n} < c$$

$$\iff \left|\frac{\bar{x}_n - 9.4}{\sigma}\sqrt{n}\right| < c$$

За сваки ниво значајности $\alpha < 0.08$ не одбацујемо $H_0: m = 9.4$.

Дакле, 0,08 је најмањи ниво значајности за који ћемо на основу датог узорка одбацити $H_0: m = 9.4$ у корист $H_1: m \neq 9.4$. Приметимо да је ово и дефиниција p-вредности из дела б), која је заиста једнака 0.08.

3. X - резултати после курса

Y - -||- пре -||-

$(X_1, Y_1), \dots, (X_{20}, Y_{20})$ DCY

$D_i = X_i - Y_i \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

↳ није познато

$H_0: m=0$ vs $H_1: m>0$

$$T=\frac{\overline{D}_n-0}{\sqrt{\tilde{S}_d^2}}\sqrt{n}\underset{\text{уколико}}{\sim} t_{n-1}$$

$$(d_1, d_2, \dots, d_{20})=(4, 4, 1, \dots, -1)$$

$$\overline{d}_n = 2.05$$

$$\tilde{s}_d^2 = \frac{1}{20-1}\left((d_1-\overline{d}_n)^2+\dots+(d_{20}-\overline{d}_n)^2\right)=8.05$$

$$\tilde{s}_d = 2.84$$

критична област: $W=\{T>c\}$, $c=F_{t_{19}}^{-1}(1-\underset{0.05}{\alpha})=1.73$

реализована вредност T:

$t=3.23$

$t>c \Rightarrow$ одбацујемо H_0

б) статистика: $T=\frac{\overline{D}_n-m}{\tilde{S}_d}\sqrt{n}\sim t_{n-1}$

$$P\{-c<T<c\}=1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\{\underbrace{\overline{D}_n-c\frac{\tilde{S}_d}{\sqrt{n}}}_{U_n}<m<\underbrace{\overline{D}_n+c\frac{\tilde{S}_d}{\sqrt{n}}}_{V_n}\}=1-\alpha$$

4. $(X_1, \dots, X_{n_1})$ – број калорија у млечкама бренда A

$n_1 = 14$

$\bar{x}_{n_1} = 23$ $\quad\quad X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$

$\bar{S}_{n_1}^2 = 9$

$(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ – број калорија у млечкама бренда B

$n_2 = 16$

$\bar{y}_{n_2} = 25$

$\bar{S}_{n_2}^2 = 16$ $\quad\quad Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

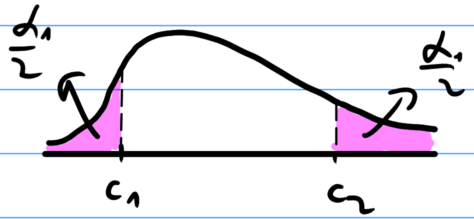
$H_0: m_1 = m_2 \quad$ vs $\quad H_1: m_1 \neq m_2$

1. прво тестирамо $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$T_1 = \frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{\tilde{S}_{n_2}^2} = \frac{\frac{n_1}{n_1-1}\bar{S}_{n_1}^2}{\frac{n_2}{n_2-1}\bar{S}_{n_2}^2} \underset{\text{при } H_0}{\sim} F_{n_1-1, n_2-1}$$

$\alpha_1 = 0.1$ (задато сами)

$W_1 = \{T_1 < c_1\} \cup \{T_1 > c_2\}$



$F(c_1) = \frac{\alpha_1}{2}$, $\quad$ F – ф-ја F_{n_1-1, n_2-1} расподеле

$F(c_2) = 1 - \frac{\alpha_1}{2}$

$$\Rightarrow c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = 0,39$$
$$c_2 = F^{-1}\left(1-\frac{\alpha_1}{2}\right) = 2,45$$

$t_1 = 0,57 \notin W \Rightarrow$ не одбацујемо H_0

Претпоставка на двостраном нагибу: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

2. Враћамо се на

$$H_0: m_1 = m_2 \quad vs \quad H_1: m_1 \neq m_2$$

$$T = \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - 0}{S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

при H_0

$$W = \{ |T| > c \}$$
$$c = F^{-1}_{t_{n_1+n_2-2}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = F^{-1}_{t_{28}}\left(1-\frac{0.01}{2}\right) = 2.76$$

$$S^2 = \frac{(n_1-1)\tilde{S}_{n_1}^2 + (n_2-1)\tilde{S}_{n_2}^2}{n_1+n_2-2} = \frac{n_1\bar{S}_{n_1}^2 + n_2\bar{S}_{n_2}^2}{n_1+n_2}$$

$$s^2 = \frac{14\cdot 9 + 16\cdot 16}{28} = 13.64$$
$$\Rightarrow s = 3.69$$

реализована вредност T:
$$t = -1,48$$

$|t| < c \Rightarrow$ не одбацујемо $H_0: m_1 = m_2$

5. Уведимо следеће сл. величине:

$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix}$, где X узима 1 ако је становник 1. округа за увођење новог закона. Даље $X \sim Ber(p_1)$

Слично, $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$, где узима 1 ако је становник 2. округа за увођење новог закона. $Y \sim Ber(p_2)$

На располагању имамо 2 независна узорка обима 100:

$(X_1, \dots, X_{100})$, $X_i \sim Ber(p_1)$

$(Y_1, \dots, Y_{100})$, $Y_i \sim Ber(p_2)$

б) стожер за $p_1 - p_2$?

$$\bar{x}_{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} = 0{,}58, \quad n_1 = 100$$

$$\bar{y}_{n_2} = 0{,}52, \quad n_2 = 100$$

} ово имамо, па би било згодно да пронађемо стожер који садржи $\bar{X}_{n_1}$ и $\bar{Y}_{n_2}$

$$\sum_{i=1}^{n_1} X_i \sim \mathcal{N}(n_1 p_1, n_1 p_1 (1-p_1))$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} Y_i \sim \mathcal{N}(n_2 p_2, n_2 p_2 (1-p_2))$$

$$\Rightarrow \bar{X}_{n_1} \sim \mathcal{N}\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right)$$

$$\bar{Y}_{n_2} \sim \mathcal{N}\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} \sim \mathcal{N}\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{Y}_{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ЗВБ : $\overline{X}_{n_1} \approx p_1$, $\overline{Y}_{n_2} \approx p_2$

$$\Rightarrow T = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\overline{X}_{n_1}(1-\overline{X}_{n_1})}{n_1} + \frac{\overline{Y}_{n_2}(1-\overline{Y}_{n_2})}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

ово може бити наш статистик

a) $H_0: p_1 - p_2 = 0$ vs $H_1: p_1 - p_2 \neq 0$

$$T = \frac{\overline{X}_{n_1} - \overline{Y}_{n_2} - 0}{\sqrt{\frac{\overline{X}_{n_1}(1-\overline{X}_{n_1})}{n_1} + \frac{\overline{Y}_{n_2}(1-\overline{Y}_{n_2})}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

при H_0

$W = \{ |T| > c \}$

$\phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow c = \phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = 1{,}96$

$t = 0{,}85$

$|t| < c \Rightarrow$ не одбацујемо H_0