Домаћи:

1. Нека је $(X_1, \dots, X_{10})$ ПСУ из $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ и
и нека је $\bar{S}^2_{10} = 0{,}49$. Наћи доњи и горњи
95%-ни интервал поверења за σ^2.

Решење: Знамо да је $\sigma^2 > 0$, па ће доњи интервал поверења бити облика:

$$(U_n, +\infty),$$

а горњи:

$$(0, V_n)$$

Нађимо доњи 95%-ни интервал:

- треба да нађемо U_n т.д. важи:

$$P\{U_n \le \sigma^2\} = 0{,}95$$

- означимо са $1-\alpha = 0{,}95$
- слично као и код двостраних интервала користићемо неку стожерну величину, нпр. $(n-1)\frac{\tilde{S}_n^2}{\sigma^2}$ јер у њој фигурише σ^2 и њену расподелу знамо.

- међутим, немамо вредности статистике $\tilde{S}_n^2$, већ $\bar{S}_n^2$, па ћемо користити другачији стожер:

$$(n-1)\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{\bar{S}_n^2}{\sigma^2} = \boxed{\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2}}$$

Следећи корак је налажење $c \in \mathbb{R}$ т.д. важи: $P\{\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} < c\} = 1-\alpha$ или $P\{\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} > c\} = 1-\alpha$

видећемо шта нам треба за горњи, а шта за доњи интервал

Ако нађемо c т.д. важи $P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} > c \} = 1-\alpha$, односно $P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{c} > \sigma^2 \} = 1-\alpha$,

пронашли смо горњи интервал: $\left(0, \frac{n\bar{S}_n^2}{c}\right)$

Дакле, да бисмо нашли доњи интервал, потражићемо c т.д. важи:

$$P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} < c \} = 1-\alpha$$

Како $\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, важи: $c = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(1-\alpha)$

$$\text{у R-у: } c = \text{qchisq}(0{,}95, 9) = 16{,}91896$$

Како је $P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} < c \} = P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{c} < \sigma^2 \}$, доњи интервал поверења је: $\left(\frac{n\bar{S}_n^2}{c}, +\infty \right)$, а када убацимо n, c и $\bar{S}_n^2$, реализовани доњи интервал поверења за σ^2 је:

$$\left(10 \cdot \frac{0{,}49}{16{,}92}, +\infty \right) = (0{,}2896, +\infty)$$

Горе смо показали како изгледа горњи интервал, само је потребно да нађемо c т.д. $P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} > c \} = 1-\alpha$, односно $P\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \le c \} = \alpha$

$$\Rightarrow c = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha) = 3{,}32511$$

реализовани 95%-ни горњи интервал поверења за σ^2 је:

$$\left(0, \frac{10 \cdot 0{,}49}{3{,}32511} \right) = (0, 1{,}4736)$$

2.) $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ - ПСУ из $\mathcal{E}(\lambda)$. Користећи својство које смо показали: $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$ наћи $100(1-\alpha)\%$-ни горњи и доњи интервал поверења за $\frac{1}{\lambda}$ (дати су нам $x_1, \dots, x_n$)

<u>решење:</u> Како је $\frac{1}{\lambda} > 0$, горњи интервал ће бити: $(0, V_n)$, а доњи: $(U_n, \underbrace{+\infty}_{\text{не постоји горња граница за } \frac{1}{\lambda}})$

Јасно је да ћемо за стожер узети $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$ јер знамо и $\sum_{i=1}^{n} x_i$ и знамо расподелу ове сл. вел.

Као и до сада, наћи ћемо c т.д.:

$$P\{2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i < c\} = 1-\alpha,$$ (c ће бити $F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(1-\alpha)$)

јер је $P\{2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i < c\} = P\{\frac{1}{\lambda} > \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c}\}$, па видимо да смо добили доњи интервал: $\boxed{\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c}, +\infty\right)}$

Да бисмо добили горњи интервал, наћи ћемо c т.д. $P\{2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i > c\} = 1-\alpha$, ($c$ ће бити $F^{-1}_{\chi^2_{2n}}(\alpha)$)

јер је $P\{2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i > c\} = P\{\frac{1}{\lambda} < \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c}\}$,

па видимо да смо добили и горњи интервал:

$$\boxed{\left(0, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c}\right)}$$