Домаћи:

1. Нека је $(X_1, \ldots, X_n)$ псу из $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ и нека је познато: n, σ^2 и $\bar{x}_n$.
Ако је дат ниво значајности α, како бисмо извршили следеће тестирање:

$$H_0: m \geq m_0 \quad vs \quad H_1\ m < m_0 \ ?$$

решење: Да бисмо извршили тестирање, потребно је да одредимо T и W т.д:

- W одговара скупу вредности тест. стат. T које иду у прилог H_1 (јер када $T \in W$ одбацујемо H_0)
- T и W треба да буду такви да важи:
$$P\{T \in W \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha$$

Да видимо прво како би W могло да изгледа. Како је $\bar{X}_n$ непристрасна, па чак и постојана оцена за m, очекујемо да је $\bar{x}_n$ врло блиско m. Дакле ако се испостави да је $\bar{x}_n < m_0$, можемо да посумњамо да је H_1 тачна. Само је питање колико $\bar{x}_n$ треба да буде далеко од m_0 (са леве стране) да бисмо одбацили H_0. Нека зато W буде:

$$W = \{\bar{X}_n - m_0 < c_1\},$$

односно: $W = \left\{ \frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma} \sqrt{n} < c \right\}$ (видећемо у наредном кораку зашто је згодније овако написати W)

Дакле, ако узмемо за $T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$, а $W = \{T < c\}$, с треба да буде т.д:

$$P\{T \in W \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha,$$

односно: $P\{T < c \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha$

Ако је H_0 тачна, тада је m_0 права вр. параметра m, па $T = \frac{\overline{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$, па c можемо да израчунамо као: $\Phi^{-1}(\alpha)$

Дакле, сада смо нашли и T и W, па можемо извршити тестирање.

2. (37. у збирци) Нека је дат $(X_1, \dots, X_n)$ ПСУ из $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, m и σ^2 непознати. Ако је дато: n, $\overline{x}_n$, $\tilde{s}_n^2$, како бисмо са нивоом значајности α тестирали:

$$H_0: \ m = m_0 \quad vs \quad H_1: \ m \neq m_0$$

преко а) критичне области;
б) p-вр. теста?

<u>решење</u> а) Слично као и у претходном задатку, очекујемо да вредност статистике $\overline{X}_n$ буде блиске правој вредности параметра m.

У овом случају вредности $\overline{X}_n$ које су далеко од m_0, било слева или сдесна, иду у прилог H_1. Зато ћемо W потражити у облику:

$$W = \{|\overline{X}_n - m_0| > c_1\}$$

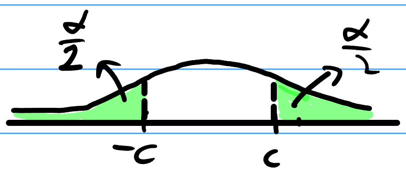
W ћемо поново записати другачије као:

$$W = \left\{ \left| \frac{\bar{X}_n - m_0}{\tilde{S}_n}\sqrt{n} \right| > c \right\}$$

ако за T узмемо $T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\tilde{S}_n}\sqrt{n}$, с треба да буде т.д. $P\{|T|>c \mid H_0 \text{ тачна}\} = \alpha$

При H_0 је $m = m_0$, па при H_0: $T \sim t_{n-1}$

Зато је с т.д.:



$$\Rightarrow c = F^{-1}_{t_{n-1}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Како је у збирци дато $n=60$, студентова расподела са 59 степени слободе се може апроксимирати са $\mathcal{N}(0,1)$.

Дакле, за T ћемо узети $T = \frac{\bar{X}_n - m_0}{\tilde{S}_n}\sqrt{n}$, а за W: $W = \{|T|>c\}$ и сада можемо извршити тестирање.

б) подсетимо се p-вр. теста је вероватноћа да T, при услову да је H_0 тачна, узме још екстремнију вр. од реализоване.

иде у прилог H_1

Вредности T које иду у прилог H_1 треба да буду по апс. вредности велике, па ћемо p-вр наћи као:

$$P\{|T|>|t| \mid H_0\} = 2\cdot P\{T>|t|\} = 2\left(1 - F_{t_{n-1}}(|t|)\right)$$

реализована вр. T за узорак који смо добили

при H_0 $T\sim t_{n-1}$; t_{n-1} је симетрична