Домаћи

2.б) (X_1, X_2, X_3) - ПСУ из $U[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$. Испитати непристрасност оцене $X_{(2)}$ за параметар θ.

<u>Решење</u>: Потребно је испитати да ли је $EX_{(2)}=\theta$. За то нам је потребна густина расподеле оцене $X_{(2)}$. Нађимо прво ф-ју расподеле од $X_{(2)}$, па ћемо њеним диференцирањем добити густину.

Носач статистике поретка је исти као и носач обележја, па ћемо потражити $F_{X_{(2)}}(x)$ за $x\in[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$. ($F_{X_{(2)}}$ је у тачкама мањим од $\theta-\frac{1}{2}$ једнако 0, а у тачкама већим од $\theta+\frac{1}{2}$ је једнако 1.
Дакле,

$$\begin{aligned} F_{X_{(2)}}(x) = P\{X_{(2)}\le x\} = & P\{X_1\le x, X_2\le x, X_3\le x\} \\ & + P\{X_1\le x, X_2\le x, X_3>x\} \\ & + P\{X_1\le x, X_3\le x, X_2>x\} \\ & + P\{X_2\le x, X_3\le x, X_1>x\} \end{aligned}$$

$$= (F(x))^3 + 3(F(x))^2(1-F(x)), \quad x\in[\theta-\tfrac{1}{2}, \theta+\tfrac{1}{2}],$$

где је F ф-ја расподеле $U[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$
Како је $F(x) = x-\theta+\frac{1}{2}$, $x\in[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$, следи:

$$\begin{aligned} F_{X_{(2)}}(x) &= \left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2\left(1-\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^3 + 3\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2\left(\theta-x+\tfrac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(2)}}(x) = F'_{X_{(2)}}(x) = 3\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2 + 3\left(2\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)\left(\theta-x+\tfrac{1}{2}\right) - \left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 3\left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2 + 3\left(2\left(\tfrac{1}{2^2} - (x-\theta)^2\right) - \left(x-\theta+\tfrac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$= 3\left((x-\theta)^2 + \cancel{x-\theta} + \frac{1}{2^2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} - 2\cdot(x-\theta)^2 - (x-\theta)^2 - \cancel{(x-\theta)} - \frac{1}{2^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - 2(x-\theta)^2\right)$$

Да проверимо и по формули из дела а) за $n=3$, $i=2$:

$$F_{X_{(2)}}(x) = \frac{3!}{1!\,1!} F^1(x)\,(1-F(x))^1 f(x)$$

$$= 3\cdot 2\left(x-\theta+\frac{1}{2}\right)\left(1-x+\theta-\frac{1}{2}\right)\cdot 1$$

$$= 3\cdot 2\left(\frac{1}{2^2} - (x-\theta)^2\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{2} - 2(x-\theta)^2\right) \checkmark$$

Рачунамо сада $EX_{(2)}$:

$$EX_{(2)} = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} 3x\left(\frac{1}{2} - 2(x-\theta)^2\right)dx = \frac{3}{2}\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} x\,dx - 6\int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} x(x-\theta)^2 dx$$

$$\begin{bmatrix} x-\theta = t \\ dx = dt \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{\theta-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} - 6\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (t+\theta)t^2\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\left(\left(\theta+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2\right) - \cancel{6\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^3} - 6\theta\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2\,dt$$

$\to 0$ (интеграл непарне ф-је на интервалу симетричном око 0 је једнак нули)

$$= \frac{3}{4}\cdot 2\theta - 6\theta\,\frac{t^3}{3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3\theta}{2} - 2\theta\left(\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{3}{2}\theta - \cancel{2}\theta\cdot\frac{1}{\cancel{4}} = \frac{3}{2}\theta - \frac{\theta}{2} = \theta$$

Дакле, оцена $\hat{\theta} = X_{(2)}$ је непристрасна оцена параметра θ!