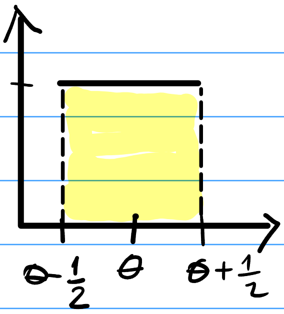
1. $X \sim U[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$. Наћи оцену за θ методом макс. веродостојности.

решење



$$f(x) = 1 \cdot I\{\theta-\tfrac{1}{2} \leq x \leq \theta+\tfrac{1}{2}\}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} I\{\theta-\tfrac{1}{2} \leq x_i \leq \theta+\tfrac{1}{2}\} = \prod_{i=1}^{n} I\{x_i-\tfrac{1}{2} \leq \theta \leq x_i+\tfrac{1}{2}\}$$

$$L(\theta) = I\{x_{(n)}-\tfrac{1}{2} \leq \theta \leq x_{(1)}+\tfrac{1}{2}\}$$

Дакле, $L(\theta) = \begin{cases} 1, & x_{(n)}-\frac{1}{2} \leq \theta \leq x_{(1)}+\frac{1}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Функција L достиже свој максимум у свакој тачки интервала $[x_{(n)}-\frac{1}{2}, x_{(1)}+\frac{1}{2}]$, па оцена добијена методом макс. веродостојности није јединствена. Дакле, за $\hat{\theta}_{mmv}$ можемо узети:

$$\hat{\theta}_{mmv} = X_{(n)}-\frac{1}{2}, \quad \hat{\theta}_{mmv} = X_{(1)}+\frac{1}{2}, \quad \hat{\theta}_{mmv} = \frac{X_{(n)}-\frac{1}{2} + X_{(1)}+\frac{1}{2}}{2}, \ldots$$

2. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ - ПСУ са ф-јом расподеле F и функцијом густине f

а) Одредити функцију густине од $X_{(i)}$

б) На основу узорка обима 3 из $U[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}]$ испитати непристрасност оцене $\hat{\theta} = X_{(2)}$

$X_{(i)}$ - ith order statistics

решење

а) $F_{X_{(i)}}(x) = P\{X_{(i)} \leq x\}$

Како је:

$\{X_{(i)} \leq x\} = \{i$ тачака из узорка је $\leq x$, остале су $> x\}$

$\cup \ \{i+1$ тачка из узорка је $\leq x$, остале су $> x\}$

$\vdots$

$\cup \ \{$све тачке из узорка су $\leq x\}$ и ови догађаји су дисјунктни, $P\{X_{(i)} \leq x\}$ можемо израчунати као збир вероватноћа ових догађаја.

$P\{i$ сл. величина $\leq x$, остале $> x\} = ?$

Израчунајмо прво $P\{X_1 \leq x, \ldots, X_i \leq x, X_{i+1} > x, \ldots, X_n > x\}$ (*)

Због независности $X_1, \ldots, X_n$ ова вероватноћа је једнака производу $P\{X_1 \leq x\} \cdot \ldots \cdot P\{X_i \leq x\} \cdot P\{X_{i+1} > x\} \cdot \ldots \cdot P\{X_n > x\} = (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$

Како би (*) било исто и да смо узели неких других i случајних величина из узорка да буду $\leq x$ (а не нужно првих i), а остале $> x$, следи да је:

$$P\{i \text{ сл. величина} \leq x, \text{ остале} > x\} = \binom{n}{i} (F(x))^i (1 - F(x))^{n-i}$$

Слично добијамо и да је

$$P\{i+1 \text{ сл. величина} \leq x, \text{ остале} > x\} = \binom{n}{i+1} (F(x))^{i+1} (1 - F(x))^{n-i-1}$$

Дакле,
$$\begin{aligned} P\{X_{(i)} \leq x\} &= \binom{n}{i} (F(x))^i (1-F(x))^{n-i} \\ &+ \binom{n}{i+1} (F(x))^{i+1} (1-F(x))^{n-i-1} \\ &+ \\ &\vdots \\ &+ \binom{n}{n} (F(x))^n (1-F(x))^{n-n}, \end{aligned}$$

односно:
$$P\{X_{(i)} \leq x\} = \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} F(x)^k (1-F(x))^{n-k}$$

$$f_{X_{(i)}}(x) = F'_{X_{(i)}}(x) = \left(\sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (F(x))^k (1-F(x))^{n-k} \right)'$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} \Big[k(F(x))^{k-1} f(x) (1-F(x))^{n-k} + (n-k)(1-F(x))^{n-k-1}(-f(x))(F(x))^k \Big]$$

$$= \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} k (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x) - \sum_{k=i}^{n} \binom{n}{k} (n-k)(F(x))^k (1-F(x))^{n-k-1} f(x)$$

$$= \underset{\downarrow}{\binom{n}{i}} i (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i} f(x) + \sum_{k=i+1}^{n} \binom{n}{k} k (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$$

издвојили смо 1. члан из 1. суме

$$- \sum_{k=i}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k)(F(x))^k (1-F(x))^{n-k-1} f(x) = (*)$$

Како је $\sum_{k=i+1}^{n} \binom{n}{k} k (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x) = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$

$$\underset{\downarrow}{=} \sum_{j=i}^{n-1} \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} \cdot (j+1)(F(x))^j (1-F(x))^{n-j-1} f(x)$$

померамо бројач

$$= \sum_{j=i}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} (F(x))^j (1-F(x))^{n-j-1} f(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j) (F(x))^j (1-F(x))^{n-j-1} f(x)$$

следи да је $(*) = \binom{n}{i} i (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i} f(x)$

Дакле $f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} (F(x))^{i-1} (1-F(x))^{n-i} f(x)$

б) за домаћи. Савет: не примењивати одмах ову формулу, већ покушати слично као у овом поступку:

$$F_{X_{(2)}}(x) = P\{X_{(2)} \le x\} = P\{X_1 \le x, X_2 \le x, X_3 \le x\}$$
$$+ P\{X_1 \le x, X_2 \le x, X_3 > x\}$$
$$+ P\{X_1 \le x, X_3 \le x, X_2 > x\}$$
$$+ P\{X_2 \le x, X_3 \le x, X_1 > x\}$$

3. X има Паретову расподелу са параметрима $a, b > 0$ ако је њена густина:

$$f(x) = \frac{a b^a}{x^{a+1}}, \quad x \geq b$$

Наћи оцене параметара a и b методом макс. веродост.

<u>решење</u>

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a b^a}{x_i^{a+1}} \cdot I\{x_i \geq b\}$$

$$= a^n b^{an} \cdot \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a+1}} \, I\{x_{(1)} \geq b\}$$

Дакле,
$$L(a,b) = \begin{cases} a^n b^{an} \cdot \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{a+1}}, & b \leq x_{(1)}, \ a > 0 \\ 0, & b > x_{(1)}, \ a > 0 \end{cases}$$

Како је $x_i \geq b > 0$, следи да је $\prod_{i=1}^{n} x_i > 0$, следи да је функција L строго позитивна на $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0, \ b \leq x_{(1)}\}$, па ћемо на њему тражити тачку максимума. Као и до сада, посматраћемо $l(a,b) := \ln L(a,b)$

$$l(a,b) = n \ln a + an \ln b - (a+1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Како је $\ln(\cdot)$ строго растућа, ова ф-ја достиже max када је b највеће могуће, односно када је $b = x_{(1)}$

Тачку a тражимо као тачку max. ф-је
$$l(a) := l(a, x_{(1)}) = n \ln a + an \ln x_{(1)} - (a+1) \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

Тражимо $l'(a)$: $\quad l'(a) = \frac{n}{a} + n \ln x_{(1)} - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$

Одавде следи да је:

$$l'(a) = 0 \iff a = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln x_{(1)}}$$

$$l'(a) > 0 \iff a < \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln x_{(1)}}, \quad \text{(показати...)}$$

$$l'(a) < 0 \iff a > \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - n \ln x_{(1)}},$$ па је то заиста тачка max. ф-је l

Дакле $$(\hat{a}, \hat{b}) = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i - n \ln X_{(1)}}, \; X_{(1)} \right)$$

mle - maximum likelihood estimator