Апсолутно непрекидне расподеле

1) $(\forall a \in \mathbb{R}) \quad P\{X=a\}=0$

- ово важи јер су апс. непр расподеле уједно и непрекидне, а рекли смо да за непрекидне ово јесте испуњено (што нећемо доказивати...)

2) $P\{a<X<b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b\} = P\{a \le X \le b\}$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Покажимо нпр: $P\{a<X<b\} = P\{a<X\le b\}$ (слично остали случајеви)

Доказ: $P\{a<X\le b\} = P\{\{a<X<b\} \cup \{X=b\}\}$

$$= P\{a<X<b\} + P\{\underbrace{X=b}_{0 \text{ због } 1)}\} \quad \checkmark$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ако $A \cap B = \phi$

Знамо да је: $P\{a<X\le b\} = P\{\{X\le b\} \setminus \{X \le a\}\}$

$$= P\{X\le b\} - P\{X\le a\} = F(b) - F(a)$$

$P(A\setminus B) = P(A) - P(B)$

$$= \int_a^b f(t)\,dt.$$

својство интеграла

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

- ово важи због $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

У дефиницију очекивања додати и:

- Ако је $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ мерљива ф-ја т. д. $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$ апсолутно ~~што~~ конвергира (тј. $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| \underbrace{f(x)}_{\ge 0}\,dx < +\infty$), дефинишемо:

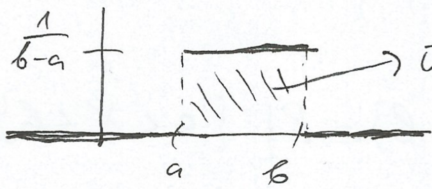
$$Eg(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

-Особине очекивања апс. непр. сл. вел. сличне као код дискретних.

- Дисперзија се дефинише као: $D(X) = E(X-(EX))^2$ (под условима када постоји као реалан број ...), а из својстава очекивања следи:

$$DX = E(X-EX)^2 = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2)$$
$$= EX^2 - 2(EX)^2 + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

пример 1): униформна расподела: $\underbrace{X \in U(a,b)}_{\text{ознака}}$, $a<b$, $a,b \in \mathbb{R}$

Густина: 

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(a,b) зовемо носач расподеле;

- некада се ова густина дефинише тако да јој носач буде $[a,b]$, $[a,b)$ или $(a,b]$. Срећом, код апсолутно непрекидних тачака не морамо бринути о овим детаљима.
Оправдање за тако нешто је што се вредност интеграла $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ неће променити ако ф-ју f променимо у највише пребројиво много тачака.

- Како одређујемо F? Гледамо са слике: лево од носача, тј. за $x<a$ важи $F(x)=0$. Десно од носача, тј за $x \geq b$ важи $F(x)=1$. Дакле, суштински потребно је F одредити само на (a,b). То чинимо по формули $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \int_{a}^{x} \frac{dt}{b-a}$

$$= \frac{x-a}{b-a}, \quad x \in (a,b)$$

Истом логиком се водимо код осталих примера...

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b^2-a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

одмах прелазимо на носач, јер је $x f(x) = 0 \ \forall x \notin (a,b)$

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx \ \ldots\ldots$$

користимо формулу за $Eg(X)$ (код нас: $g(x) = x^2$)

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \ldots$$

Шта је носач? (скуп могућих вредности које може узети сл. вел. X. Зашто?

1) $P\{X<a\} = P\{X \le a\} = F(a) = 0$

убудуће нећемо размишљати о овим детаљима...

2) $P\{X>b\} = 1 - P\{X \le b\} = 0$

Дакле, $P\{X \in (a,b)\} = 1$

Иста логика и код осталих расподела......

пример 2) $X \sim N(m, \sigma^2)$

- не покушавати израчунавање $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, јер се овај интеграл решава нумеричким методама.

3) $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

- додати својство гама ф-је:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$$

- оно нам је потребно да израчунамо EX

4

$$EX = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1-1}\beta^{\alpha+1-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha+1)\cdot\alpha^{-1}}dx$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha+1-1}\beta^{\alpha+1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha+1)}dx}_{= 1}$$

DX слично. Потребно је израчунати EX^2 на исти начин (наместавем), из чега следи $DX = EX^2 - (EX)^2 = \ldots$

1, јер је подинтегрална ф-ја густина расподеле $\Gamma(\alpha+1, \beta)$

Задаци: 5. $X_1, X_2 \sim U[0,1]$

$Y = \max\{X_1, X_2\}$

~~[illegible] [illegible]~~ нејасан, рашчешљати

Како $X_1, X_2 \in [0,1]$, $\max\{X_1, X_2\}$ такође мора бити из тог интервала.

Дакле, носач расподеле је $[0,1]$. Зато је $f_Y(y) = 0$ за $y \notin [0,1]$. Од интереса нам је $f_Y(y)$ за $y \in [0,1]$, а пошто је $f_Y(y) = F_Y'(y)$, довољно је да израчунамо $F_Y(y)$ у тачкама $y \in [0,1]$

Закључак: корисно је почети задатке одређивањем носача.... Али не мора увек!

⑥ а) $P\{|1-X|\le y\}=?$

- Како ово одређујемо?

Суштински, $P\{|1-X|\le y\} = P\{X\in A\}$, где је A неки подскуп од $\mathbb{R}$. Шта важи за скуп A?

$$A=\{x\in\mathbb{R} : |1-x|\le y\}.$$

Како је $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$, носач од X је $(0,+\infty)$, па можемо сузити A на: $A=\{x\ge 0: |1-x|\le y\}$. Зашто ово смемо да урадимо? Како нас интересује $P\{X\in A\}$, а X је ненегативно, важи:

$$P\{X\in A\} = P\{X\in A\cap\mathbb{R}\} = \underbrace{P\{X\in A\cap(-\infty,0)\}}_{0} +$$

$$P\{X\in A\cap[0,+\infty)\}.$$

Овде смо искористили следеће:

$$A\cap\mathbb{R} = A\cap((-\infty,0)\cup[0,+\infty))$$
$$=(A\cap(-\infty,0))\cup(A\cap[0,+\infty))$$

- Задатак је урађен графички уз препознавање 3 карактеристична случаја, у зависности од y.

- За оне који нису љубитељи оваквог начина решавања, могуће је било и следеће:

$$P\{|1-X|\le y\} = P\{-y\le 1-X\le y\}$$
$$= P\{1-y\le X\le y+1\}$$

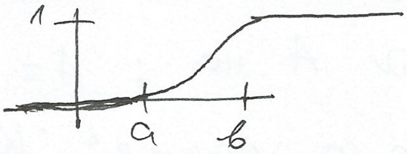
Надаље разликујемо случајеве у зависности од y

....

7 Како смо добили једнакост:

$$P\{F_X(X) \le y\} = P\{X \le F_X^{-1}(y)\} \ ?$$

Прво, из податка да је носач од X интервал $[a,b]$, закључујемо да је F_X строго растућа на $[a,b]$. Зашто? $F_X'(x) = f(x) > 0$ за $x \in [a,b]$. Дакле, F_X изгледе отприлике овако:



F_X није бијекција на целом $\mathbb{R}$, али јесте на $[a,b]$, јер су строго монотоне ф-је бијекције. Зато под ознаком F_X^{-1} мислимо на инверз функције $F_X|_{[a,b]}$ (рестрикција F на $[a,b]$), али због рогобатног записа то изостављамо...

Како је носач од $F_X(X)$ ~~интервал~~ садржан у $[0,1]$, а то важи зато што ~~на~~ вредности F_X морају бити у $[0,1]$, поново смо, као и до сада, тражили $F_Y(y)$ само за вредности y из носача сл. вел. Y.

~~Важно и како~~ Како је домен ф-је F_X^{-1} интервал $[0,1]$, вредности $F_X^{-1}(y)$ постоје. За $y \notin [0,1]$ то не би био случај!

Даље, важан је податак да је инверз строго монотоне ф-је такође строго монотона ф-ја и то истог типа!

Зато је $F_X(X) \le y \iff \underbrace{F_X^{-1}(F_X(X))}_{= X} \le F_X^{-1}(y)$