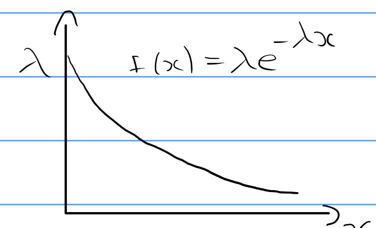
произвољан реалан број

$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow Y := X + \mu$ има 'померену' експоненцијалну расподелу

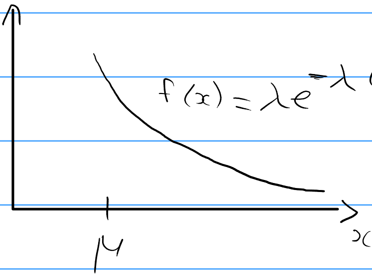
Носач за $Y$: $[\mu, +\infty)$

$F_Y(y) = P\{X+\mu \le y\} = P\{X \le y-\mu\} = 1 - e^{-\lambda(y-\mu)}, \quad y \ge \mu$

$\Rightarrow f_Y(y) = F_Y'(y) = -e^{-\lambda(y-\mu)} \cdot (-\lambda) = \lambda e^{-\lambda(y-\mu)}, \quad y \ge \mu$




Густина $\mathcal{E}(\lambda)$ расподеле




Густина померене експ. расподеле са парам. $\lambda$ и $\mu$

21. а) $f(x) = e^{\mu - x}, \quad x \geq \mu$ б) $f(x) = e^{\mu - x}, \quad x > \mu$

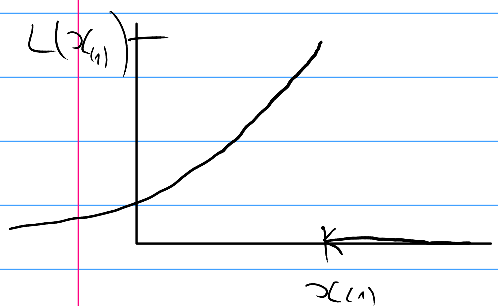
померена exp. $\lambda = 1$

$f(x) = e^{\mu - x} \cdot I\{x \geq \mu\}$

$L(\mu) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = e^{n\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} I\{x_i \geq \mu\}$

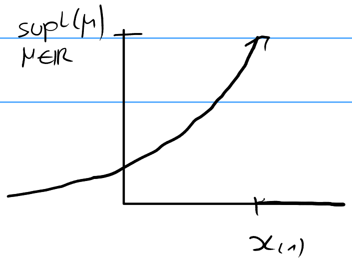
$= e^{n\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i} I\{x_{(1)} \geq \mu\} = \begin{cases} 0, & \mu > x_{(1)} \\ e^{n\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \mu \leq x_{(1)} \end{cases}$

расте по $\mu$

а) 


домен: $\mathbb{R}$

$\hat{\mu}_{ммв} = X_{(1)}$

б) 


$\sup_{\mu \in \mathbb{R}} L(\mu)$ се не достиже

$\Rightarrow$ оцена ммв не постоји

**Теорема** $A \subset \mathbb{R}^n$ отворен, $f : A \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(A)$, $a \in A$ стационарна тачка, тј:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0$$

Тада важи: – ако је квадратна форма $\Phi$ одређена матрицом

$$\left[\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^{m}$$

негативно дефинитна, $f$ у $a$ има строги локални максимум

У нашим примерима ће бити довољно проверити само стационарне

22. а) $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$L(m, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\underset{\substack{\| \\ l(m,\sigma^2)}}{\ln(L(m, \sigma^2))} = -\frac{n}{2} \ln \sigma^2 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{не зависи од } m \text{ и } \sigma^2}}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}$$

$$((\sigma^2)^{-1})' = -\sigma^{-4}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma^2}(m, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^4}$$

$$= -\frac{n\sigma^2}{2\sigma^4} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m}(m, \sigma^2) = + \sum_{i=1}^{n} \frac{2(x_i - m)}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial l}{\partial m}(m, \sigma^2) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} x_i - nm = 0 \iff m = \overline{x_n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial l}{\partial \sigma^2}(m, \sigma^2) = 0 \iff -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})^2 = 0$$

$$\iff \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_n})^2$$

$$(\hat{m}, \hat{\sigma}^2) = (\overline{X}_n, \overline{S}^2)$$

22. б) $X \sim U[a, b]$ $\qquad f(x) = \frac{1}{b-a}, \; x \in [a,b]$

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{b-a} I\{a \le x_i \le b\}$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)^n I\{a \le x_1, x_2, \dots, x_n \le b\}$$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)^n I\{a \le x_{(1)}\} I\{x_{(n)} \le b\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(1)}, \; x_{(n)} \le b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Ф-ја $L$ позитивна на $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \le x_{(1)}, x_{(n)} \le b\}$, па ћемо на том скупу потражити њену тачку max.

$\frac{1}{(b-a)^n}$ је нај~~веће~~ када је $(b-a)^n$ најмање

$\Rightarrow$ a и b су на најмањем могућем растојању $\Rightarrow a = x_{(1)}, \; b = x_{(n)}$

$$\Rightarrow \quad (\hat{a}_{mmv}, \hat{b}_{mmv}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$$