Интервали поверења на основу два узорка

- Посматраћемо 2 независна ПСУ $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_{n_1})$ и $\mathbb{Y}=(Y_1,\dots,Y_{n_2})$

деф. Два случајна вектора $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ дефинисана на истом простору вероватноћа $(\Omega,\mathcal{A},P)$ су независна ако је $P\{\mathbb{X}\in A \cap \mathbb{Y}\in B\} = P\{\mathbb{X}\in A\}\cdot P\{\mathbb{Y}\in B\}$ за све $A,B\in\mathcal{A}$.

Може се показати да ако су $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_{n_1})$ и $(Y_1,\dots,Y_{n_2})$ независни, тада су и произвољна 2 подвектора $(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$ и $(Y_{j_1},\dots,Y_{j_k})$ такође независна, где су $\{i_1,\dots,i_m\}\subset\{1,2,\dots,n_1\}$; $\{j_1,\dots,j_k\}\subset\{1,2,\dots,n_2\}$

(Више о овим техничким детаљима на Теорији вероватноће)

Како под независношћу случајних величина $X_1,\dots,X_{n_1}$ из ПСУ $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_{n_1})$ мислимо на независност у потпуности, следи да ће случајне величине $X_1,\dots,X_{n_1},Y_1,\dots,Y_{n_2}$ из два независна ПСУ $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_{n_1})$ и $\mathbb{Y}=(Y_1,\dots,Y_{n_2})$ бити независне у потпуности.

подсећање: $X_1,X_2,\dots,X_{n_1}$ су независне у потпуности ако:

$$P\{X_{i_1}\in A_1 \cap\dots X_{i_m}\in A_m\} = P\{X_{i_1}\in A_1\}\cdot\ldots\cdot P\{X_{i_m}\in A_m\}$$

за сваки $\{i_1,\dots,i_m\}\subset\{1,\dots,n_1\}$ и све догађаје $A_1,\dots,A_m$

Често реч "потпуно" изостављамо!

Ми ћемо надаље посматрати 2 независна ПСУ:

$(X_1,\dots,X_{n_1})$, $X_i\sim\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ и $(Y_1,\dots,Y_{n_2})$, $Y_i\sim\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$

Интересоваће нас интервали поверења за m_1-m_2 и $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

1. Интервал поверења за $m_1 - m_2$ када су σ_1^2 и σ_2^2 познати.

Тражимо стожер:

Подсећање на тврђење: $X_1,\dots,X_n$ независне, $X_i \sim N(m_i,\sigma_i^2)$, тада:

под ово мислимо у потпуности

$$a_1X_1+\dots+a_nX_n \sim N(a_1m_1+\dots+a_nm_n,\ a_1^2\sigma_1^2+\dots+a_n^2\sigma_n^2)$$

Како су $X_1,\dots,X_{n_1}$, $Y_1,\dots,Y_{n_2}$ независне и нормално расподељене, према овом тврђењу важи:

$$\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2} = \frac{X_1+\dots+X_{n_1}}{n_1} - \frac{Y_1+\dots+Y_{n_2}}{n_2} \overset{(*)}{\sim} N\left(m_1-m_2,\ \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

па
$$\boxed{\frac{\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}} \sim N(0,1)$$

ово ће бити наш стожер

(*) $$E(\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}) = \underbrace{\frac{m_1}{n_1}+\dots+\frac{m_1}{n_1}}_{n_1 \text{ пута}} - \underbrace{\frac{m_2}{n_2}-\dots-\frac{m_2}{n_2}}_{n_2 \text{ пута}} = m_1-m_2$$

$$D(\overline{X}_{n_1}-\overline{Y}_{n_2}) = \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1^2}+\dots+\frac{\sigma_1^2}{n_1^2}}_{n_1 \text{ пута}} + \underbrace{\frac{\sigma_2^2}{n_2^2}+\dots+\frac{\sigma_2^2}{n_2^2}}_{n_2 \text{ пута}} = \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

32. Тражимо c т.д. $P\left\{-c \le \frac{\overline{X}_{n_1}-\overline{X}_{n_2}-(m_1-m_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \le c\right\} = 0{,}9$

$\Rightarrow c = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, $1-\alpha = 0{,}9$

Како је ова вероватноћа једнака:

$$P\Big\{\underbrace{\bar X_{n_1}-\bar X_{n_2} - c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}_{U_n} \le m_1-m_2 \le \underbrace{\bar X_{n_1}-\bar X_{n_2} + c\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}_{V_n}\Big\},$$

следи да је (U_n, V_n) тражени интервал

---

2. Интервал поверења за m_1-m_2 када су σ_1^2 и σ_2^2 непознати.

Разликоваћемо случај када су σ_1^2 и σ_2^2 једнаки и случај када су различити.

Нама ће се у задатку казати да ли су дисперзије једнаке или не, а можемо и сами закључити на следећи начин:

- конструишемо интервал поверења за $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ и ако он садржи 1, претпостављамо да су једнаке.

У супротном можемо претпоставити да су различите.

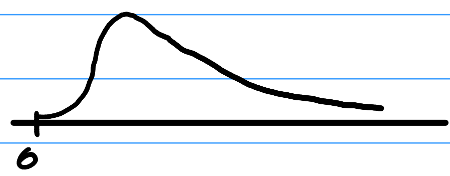
Конструкција интервала поверења за $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

Тврђење: Нека су $X\sim\chi^2_n$ и $Y\sim\chi^2_m$ и независне су, тада

$$Z := \frac{\frac{X}{n}}{\frac{Y}{m}} \sim F(n,m)$$

→ Фишерова расподела

- облик густине Фишерове расподеле је сличан као код χ^2



- Поменули смо раније да $\frac{(n_1-1)}{\sigma_1^2}\tilde S_{n_1}^2 = \chi^2_{n_1-1}$ и

$\frac{(n_2-1)}{\sigma_2^2}\tilde S_{n_2}^2 \sim \chi^2_{n_2-1}$. Како су ове две сл. вел. независне, по поменутом тврђењу следи:

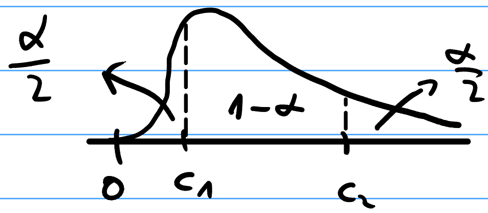
$$\frac{\frac{\cancel{(n_1-1)}\tilde S_{n_1}^2}{\cancel{(n_1-1)}\sigma_1^2}}{\frac{\cancel{(n_2-1)}\tilde S_{n_2}^2}{\cancel{(n_2-1)}\Sigma_{n_2}^2}} = \frac{\frac{\tilde S_{n_1}^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\tilde S_{n_2}^2}{\sigma_2^2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

Дакле, стожер који можемо користити је:

$$\boxed{\frac{\tilde S_{n_1}^2}{\tilde S_{n_2}^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}}$$

35 Фишерова расподела је асиметрична и интервал треба наћи границе c_1 и c_2 т.д.

(*) $$P\left\{c_1 \le \frac{\tilde S_{n_1}^2}{\tilde S_{n_2}^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le c_2\right\} = 0,95$$



$1-\alpha = 0,95$

$c_1 = F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, F – ф-ја расподеле за $F(n_1-1, n_2-1)$

$c_2 = F^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$,

у R-у: $c_1 = qf\left(\frac{\alpha}{2}, \underbrace{n_1-1}_{=10}, \underbrace{n_2-1}_{=14}\right) = 0,282$

$c_2 = qf\left(1-\frac{\alpha}{2}, n_1-1, n_2-1\right) = 3,147$

Како је (*) $\Longleftrightarrow P\left\{ \underbrace{\frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{c_2 \tilde{S}_{n_2}^2}}_{U_n} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \underbrace{\frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{c_1 \tilde{S}_{n_2}^2}}_{V_n} \right\} = 0,95,$

следи да је тражени интервал: (U_n, V_n)

2.1. Стожер за интервал поверења за $m_1 - m_2$ када $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ и када нам нису познате:

За стожер се предлаже:

$$\boxed{\frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2} - (m_1 - m_2)}{\sqrt{\frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_{n_2}^2}{n_2}}}} \sim t_\nu$$

биће дато на испиту

ν је реализована вредност статистике:

$$\frac{\left(\frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{n_1} + \frac{\tilde{S}_{n_2}^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{\tilde{S}_{n_1}^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{\tilde{S}_{n_2}^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

2.2. Стожер за интервал поверења за $m_1 - m_2$ кад је $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ и непознате су:

$$\boxed{\frac{\bar{X}_{n_1} - \bar{X}_{n_2} - (m_1 - m_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}, \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1)\tilde{S}_{n_1}^2 + (n_2 - 1)\tilde{S}_{n_2}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$