Једнострани интервали поверења

- случајни интервали чији је један крај одговарајућа статистика, док други крај зависи од скупа свих могућих вредности параметра

деф. - доњи $100\cdot(1-\alpha)$-%-ни интервал поверења за θ има доњу границу U_n ако је:

$$P\{U_n \leq \theta\} = 1-\alpha$$

- горњи $100\cdot(1-\alpha)$-%-ни интервал поверења за θ има горњу границу V_n ако је

$$P\{\theta \leq V_n\} = 1-\alpha$$

пример: $(X_1,\dots,X_n)$ ПСУ из $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\bar{x}_n$ и $\bar{s}_n$ дато

Наћи горњи и доњи $100\cdot(1-\alpha)$%-ни интервал поверења за m.

решење:

Како параметар m може бити произвољан реалан број, једнострани интервали поверења изгледају овако:

$$(U_n, +\infty) \text{ - доњи}$$

$$(-\infty, V_n) \text{ - горњи}$$

Крајеве једностраних интервала ћемо наћи слично као и код двостраних - посматрајући неки стожер.

Стожер који би могао да нам послужи био би

$$\boxed{\frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Међутим, није нам дата реализована вредност статистике $\tilde{S}_n$, већ $\bar{S}_n$, па ћемо користећи релацију

$$\tilde{S}_n^2 = \frac{n}{n-1}\bar{S}_n^2$$

конструисати другачији стожер:

$$\frac{\bar{X}_n - m}{\tilde{S}_n}\sqrt{n} = \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\bar{S}_n}\sqrt{n} = \boxed{\frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\cdot\sqrt{n-1}}$$

Једина разлика у односу на двостране интервале је та што ћемо сада тражити $c \in \mathbb{R}$ т.д. важи:

$$P\left\{\frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \le c\right\} = 1-\alpha, \text{ односно } P\left\{-c \le \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right\} = 1-\alpha$$

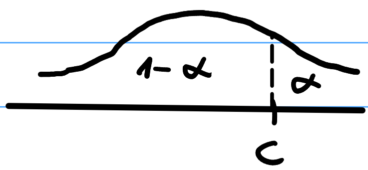
Како је $P\left\{\frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} \le c\right\} = P\left\{\bar{X}_n - m \le c\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right\}$

$$= P\left\{\bar{X}_n - c\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} \le m\right\},$$

следи да је доњи интервал: $\left(\bar{X}_n - c\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, +\infty\right)$, где

је c т.д. $F_{t_{n-1}}(c) = 1-\alpha \Rightarrow c = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha)$

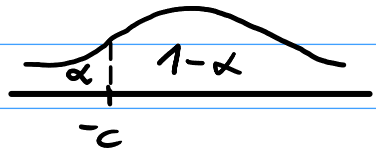
$$= qt(1-\alpha, n-1)$$



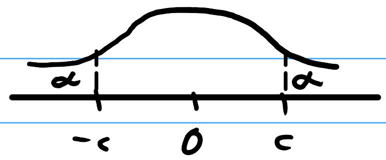
Кад убацимо познате вредности статистика које су нам дате, добијамо реализовани доњи $100(1-\alpha)\%$-ни интервал поверења за m.

Слично, $P\left\{-c \le \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right\} = P\left\{m \le \bar{X}_n + c\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right\}$, па је горњи интервал: $\left(-\infty, \bar{X}_n + c\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right)$, где је

c т.д.:



Због симетричности студентове расподеле, c можемо одредити са следеће слике:



$$\Rightarrow F_{t_{n-1}}(c) = 1-\alpha$$
$$\Rightarrow c = F^{-1}_{t_{n-1}}(1-\alpha)$$

За домаћи: Наћи горњи и доњи 95%-ни интервал за σ, ако је $\bar{x}_{10} = 4,2$ и $\bar{s}^2_{10} = 0,49$

Интервал поверења за $EX=m$ када је расподела X непозната

- урадићемо само случај када је ПСУ $(X_1,\dots,X_n)$ великог обима и када је $DX=\sigma^2$ познато ($DX<+\infty$)

- по ЦГТ: $\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n}$ има приближно $\mathcal{N}(0,1)$ расподелу,

ако знамо $\bar{x}_n$, може се користити као стожер. Дакле, $100(1-\alpha)\%$-ни интервал поверења можемо наћи као и до сада:

Најпре тражимо c т.д.:

$$P\left\{-c \le \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma}\sqrt{n} \le c\right\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left\{\underbrace{\bar{X}_n - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}}_{= U_n} \le m \le \underbrace{\bar{X}_n + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}}_{= V_n}\right\} = 1-\alpha$$

1. а) $(X_1,\dots,X_n)$ – ПСУ из $\mathcal{E}(\lambda)$. Тада $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$. Показати. (Ово својство се не мора знати напамет)

б) Претпоставља се да се животни век електричних уређаја може моделовати $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом. Одабран је ПСУ од n уређаја и забележена су времена њихове трајности $x_1, x_2, \dots, x_n$. Наћи $100(1-\alpha)$-%-ни интервал поверења за очекивани животни век уређаја.

<u>решење</u> а) Знамо да $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$. Сада је потребно да покажемо да $2\lambda Y \sim \chi^2_{2n}$ (односно $\Gamma(\frac{2n}{2},\frac{1}{2})$)

Нађимо прво ф-ју расподеле од $2\lambda Y$:

$$F_{2\lambda Y}(x) = P\{2\lambda Y \le \underset{\geq 0}{x}\} = P\{Y \le \tfrac{x}{2\lambda}\} = F_Y\left(\tfrac{x}{2\lambda}\right)$$

Густина од $2\lambda Y$:

$$f_{2\lambda Y}(x) = \left(F_Y\left(\tfrac{x}{2\lambda}\right)\right)' = f_Y\left(\tfrac{x}{2\lambda}\right)\cdot\frac{1}{2\lambda}$$

$$= \left(\frac{x}{2\lambda}\right)^{n-1}\frac{e^{-\lambda\frac{x}{2\lambda}}\cdot\lambda^n}{\Gamma(n)}\cdot\frac{1}{2\lambda} = \frac{x^{n-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\lambda^n}{(2\lambda)^{n-1}\,\Gamma(n)\,2\lambda}$$

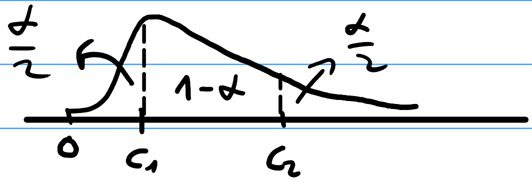
$$= \frac{x^{n-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}}{2^n\,\Gamma(n)} \to \text{густина } \Gamma\left(\tfrac{2n}{2},\tfrac{1}{2}\right),$$

односно χ^2_{2n} расподеле

б) $EX=\frac{1}{\lambda}$, па је корисно да нам стожер буде баш $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$ (јер знамо $\sum_{i=1}^{n} x_i$ и показали смо да ова сл. вел има познату расподелу)

Нађимо прво c_1 и c_2 т.д. $P\{c_1 \le 2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i \le c_2\} = 1-\alpha$

Пошто $2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i$ има χ^2_{2n} расподелу, рекли смо да се c_1 и c_2 обично бирају тако да:



$$\Rightarrow F_{\chi^2_{2n}}(c_1) = \frac{\alpha}{2}, \quad F_{\chi^2_{2n}}(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Како је $P\{c_1 \le 2\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i \le c_2\} = 1-\alpha$

$$\underset{2\sum_{i=1}^{n} X_i > 0}{\Longleftrightarrow} P\left\{\frac{c_1}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} \le \lambda \le \frac{c_2}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right\} = 1-\alpha$$

$$\underset{\lambda>0,\ c_1,c_2>0}{\Longleftrightarrow} P\left\{\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c_2} \le \frac{1}{\lambda} \le \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c_1}\right\} = 1-\alpha$$

$\Longleftrightarrow \left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c_2}, \frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i}{c_1}\right)$ је тражени интервал

Како бисмо нашли једностране интервале? (за домаћи)

$\frac{1}{\lambda}\in(0,+\infty) \Rightarrow$
- доњи интервал ће бити облика: $(u_n, +\infty)$
- горњи интервал ће бити облика: $(0, u_n)$

2.* Нека је $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ПСУ из $\mathcal{N}(m,1)$. Како наћи $100(1-\alpha)$-%-ни интервал поверења за m ако нам $x_1, \dots, x_n$ нису познати, али познато нам је да ли је $x_i > 0$, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$? Претпоставити да је n велико.

имамо реализоване вредности за $Y_i = I\{X_i > 0\}$

$$Y_i \sim Ber(p)$$

$$p = P\{Y_i = 1\} = P\{X_i > 0\} = P\{\underbrace{X_i - m}_{\sim N(0,1)} > -m\} = 1 - \Phi(-m)$$

Тражимо стожер:

ЦГТ: $$\frac{\bar{Y}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$\bar{y}_n$ možemo izračunati, jer su nam poznati $y_1, \dots, y_n$

ЗВБ: $p \approx \bar{Y}_n$

- претпоставићемо да $\bar{Y}_n$ није другу 0 и 1

да нам буде лакше..

- стожер: $$\boxed{\frac{\bar{Y}_n - p}{\sqrt{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

ovaj stožer nam odgovara jer u njemu figuriše $\bar{y}_n$ koje možemo izračunatiti, kao i parametar p preko kog možemo izraziti m

- тражимо c т.д.:

$$P\left\{-c \le \frac{\bar{Y}_n - p}{\sqrt{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}}\sqrt{n} \le c\right\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\Big\{\underbrace{\bar{Y}_n - c\frac{\sqrt{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}}{\sqrt{n}}}_{U_n} \le p \le \underbrace{\bar{Y}_n + c\frac{\sqrt{\bar{Y}_n(1-\bar{Y}_n)}}{\sqrt{n}}}_{V_n}\Big\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\{U_n \le 1 - \Phi(-m) \le V_n\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\{1 - V_n \le \Phi(-m) \le 1 - U_n\} = 1-\alpha$$

$\Phi \nearrow \Rightarrow \Phi^{-1} \nearrow$

$$\Leftrightarrow P\{\Phi^{-1}(1-V_n) \le -m \le \Phi^{-1}(1-U_n)\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\{-\Phi^{-1}(1-U_n) \le m \le -\Phi^{-1}(1-V_n)\} = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \left(-\Phi^{-1}(1-U_n), -\Phi^{-1}(1-V_n)\right)$$ је

тражени интервал поверења