- Збирка Тришић и Перуничић
- ВиС А, Б
- атлас расподела

1. $$f(x)=\frac{x}{\theta^2}e^{-\frac{x}{\theta}}, \quad x>0, \quad \theta>0$$

$(x_1,\dots,x_n)$ - реализовани узорак

- пишемо ф-ју веродостојности:

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i), \quad \theta>0$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\theta^2}e^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}$$

$$l(\theta):=\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-2n\ln\theta$$

$$l'(\theta)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}-\frac{2n}{\theta}$$

$$l'(\theta)=0 \iff \sum_{i=1}^{n}x_i=2n\theta \iff \theta=\frac{1}{2}\bar{x}_n$$

$$l'(\theta)>0 \iff \theta<\frac{1}{2}\bar{x}_n$$

$$l'(\theta)<0 \iff \theta>\frac{1}{2}\bar{x}_n$$

l

$\frac{\bar{x}_n}{2} \to$ тачка max ф-је l, па и L

$$\boxed{\hat{\theta}_{\text{ММВ}}=\frac{\bar{X}_n}{2}}$$

- ga li je $E\hat{\Theta}_{MMV} = \theta$?

$$\Leftrightarrow E\overline{X_n} = 2\theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{EX_1 + \ldots + EX_n}{n} = 2\theta$$

$$\Leftrightarrow EX_1 = 2\theta$$

$$EX_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = I$$

$$u = x^2 \qquad \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = dv$$

$$du = 2x\,dx \qquad \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}}(-\theta) = v$$

$$-\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} = v$$

$$\frac{1}{e^{\frac{x}{\theta}}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$$

$$I = -\frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \cdot 2x\,dx$$

$$= 0 - 0 + 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx}_{EY,\ Y \sim \left(\frac{1}{\theta}\right)} = 2\theta$$

$\Rightarrow \hat{\Theta}_{MMV}$ je непристрасна

б) $T = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

- ga li je $ET = DX_1$?

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3n} \cdot n\, EX_1^2 = DX_1$$

$$\Leftrightarrow EX_1^2 = 3\left(EX_1^2 - (EX_1)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad EX_1^2 = 3EX_1^2 - 3\cdot 4\theta^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2EX_1^2 = 12\theta^2$$
$$\Leftrightarrow \quad EX_1^2 = 6\theta^2$$

$$EX_1^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = I$$

$x^3 = u$ $\qquad \frac{1}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = dv$

$3x^2 dx = du$ $\qquad -\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} = v$

$$I = -\frac{x^3}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 3\frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$
$$= 0 + 3\theta \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta^2} e^{-\frac{x}{\theta}} dx = 3\theta \cdot 2\theta = 6\theta^2 \quad \text{w}$$

(2.) $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$

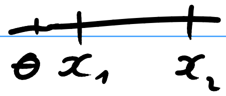
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e^{-|x_i-\theta|} \underset{n=2}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2^2} e^{-|x_1-\theta| - |x_2-\theta|}$$

Kada je L najveće?

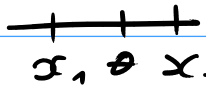
- kada je $-|x_1-\theta| - |x_2-\theta|$ najveće, tj. kada je $|x_1-\theta| + |x_2-\theta|$ najmanje

- neka je б.у.о. $x_1 < x_2$

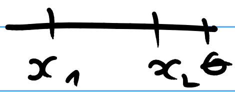
$$g(\theta) = |x_1-\theta| + |x_2-\theta|$$

1) 

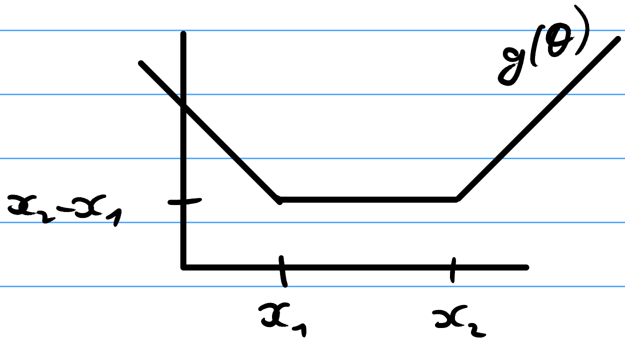
: $g(\theta) = x_1 - \theta + x_2 - \theta = x_1 + x_2 - 2\theta$

2) 

: $g(\theta) = \theta - x_1 + x_2 - \theta = x_2 - x_1$

3) 

: $g(\theta) = \theta - x_1 + \theta - x_2 = 2\theta - x_1 - x_2$



$g(\theta)$ је најмање када $\theta \in [x_1, x_2]$, тј. када $\theta \in [\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}]$

- за $\hat{\theta}_{ММВ}$ можемо узети било коју оцену која се налази у $[\min\{X_1,X_2\}, \max\{X_1,X_2\}]$

- дакле оцена добијена методом макс. вероватноће није јединствена

б) да ли је $E(0{,}3X_1 + 0{,}7X_2) = \theta$?

$$\Leftrightarrow 0{,}3 \cdot EX_1 + 0{,}7 EX_2 = \theta$$
$$\Leftrightarrow EX_1 = \theta$$

$$EX_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}\,dx$$

смена $x - \theta = t$
$dx = dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (t+\theta)\frac{1}{2} e^{-|t|} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} t e^{-|t|} dt}_{0, \text{ jer je } \frac{1}{2} t \cdot e^{-|t|} \text{ neparna f-ja}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \frac{1}{2} e^{-|t|} dt$$

$$= 0 + \cancel{2} \cdot \int_{0}^{+\infty} \theta \cdot \frac{1}{\cancel{2}} e^{-t} dt$$

$$= \theta \cdot \int_{0}^{+\infty} e^{-t} dt = \theta \cdot 1 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow 0{,}3\, X_1 + 0{,}7\, X_2$ je nepristr. ocjena za θ

3. $X \sim U(\theta, 2+\theta)$

a)
- tražimo EX^k za neko k
- neka je $k=1$ (što je najlakše)

$$EX = \frac{\theta + 2 + \theta}{2} = 1 + \theta$$

- izjednačavamo $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ i EX_1:

$$\overline{X}_n \text{"="} 1 + \theta \Leftrightarrow \overline{X}_n - 1 \text{"="} \theta$$

$\Rightarrow$ ocjena metodom momenata je $\hat{\theta}_{MM} = \overline{X}_n - 1$

- da li je $E\hat{\theta}_{MM} = \theta$?

$$E(\overline{X}_n - 1) = E\overline{X}_n - 1 = EX_1 - 1 = 1 + \theta - 1 = \theta$$

$\Rightarrow$ ocjena $\hat{\theta}_{MM}$ je nepristrasna

- подсетање: ако средњекв. грешка оцене тежи 0, кад $n \to +\infty$, оцена је постојана

- $MSE(\hat{\theta}) := E(\hat{\theta} - \theta)^2$
- ако је оцена непристрасна, $MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2 = D\hat{\theta}$

$$\Downarrow$$
$$E\hat{\theta} = \theta$$

- дакле, како је $\hat{\theta}_{MM}$ непристр., проверићемо да ли $D\hat{\theta}_{MM} \to 0$, $n \to +\infty$

$$D\hat{\theta}_{MM} = D(\bar{X}_n - 1) = D\bar{X}_n = \frac{D(X_1 + \ldots + X_n)}{n^2}$$

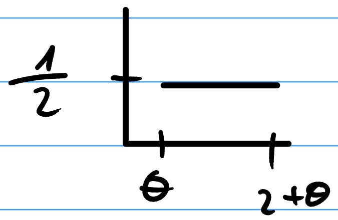
$$D(X+c) = DX$$

$X_1, \ldots, X_n$ су iid

$$= \frac{n \cdot DX_1}{n^2} = \frac{DX_1}{n} = \frac{(2+\theta-\theta)^2}{12n} \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty$$

$\Rightarrow$ $\hat{\theta}_{MM}$ је постојана

б) $X \sim U[\theta, 2+\theta] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [\theta, 2+\theta]$



$$f(x) = \frac{1}{2} I\{\theta \le x \le 2+\theta\}$$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot I\{\theta \le x_i \le 2+\theta\}$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} I\{x_i - 2 \le \theta \le x_i\}$$

$x_{(n)} \neq x_n$

$$= \frac{1}{2^n} I\{x_i - 2 < \theta \leq x_i, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$$

$$= \frac{1}{2^n} I\{x_{(n)} - 2 \leq \theta \leq x_{(1)}\}$$

$\Rightarrow L(\theta)$ достиже максимум у свакој тачки $[x_{(n)} - 2, x_{(1)}]$, јер је у њима $L(\theta) = \frac{1}{2^n}$, а у осталим нула

$\Rightarrow$ за $\hat{\theta}_{MMV}$ можемо узети било коју стат. која се налази у $[X_{(n)} - 2, X_{(1)}]$

$a, b \in \mathbb{R}$, нпр. $a < b$

$$c \in [a, b] \iff c = \lambda \cdot a + (1-\lambda) b \text{ за неко } \lambda \in [0,1]$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\lambda \cdot a + (1-\lambda) b \leq \lambda b + (1-\lambda) b = b$

$\lambda \cdot a + (1-\lambda) b \geq \lambda a + (1-\lambda) a = a$

$\boxed{\Rightarrow}$ шта је λ?

$$c = \lambda(a-b) + b \iff \lambda = \frac{c-b}{a-b} = \frac{b-c}{b-a} \in [0,1]$$

$$\underbrace{\hat{\theta}_{MMV}(\lambda)}_{\text{ово јесте}} = \lambda(X_{(n)} - 2) + (1-\lambda) X_{(1)}, \quad \lambda \in [0,1]$$

оцена добијена методом макс. верод.

$\Rightarrow$ за $\lambda = \frac{1}{7}$ такође добијамо оцену методом макс. верод.

б) шукаємо $\lambda \in [0,1]$ т.щ. $E\hat{\theta}_{ммв}(\lambda) = \theta$

$E\hat{\theta}_{ммв}(\lambda) = \lambda(EX_{(n)} - 2) + (1-\lambda)EX_{(1)}$

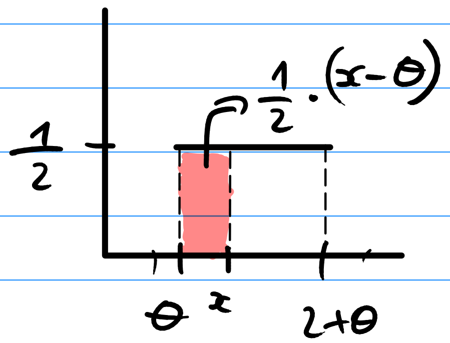
– рахуємо спершу $EX_{(1)}$

$$F_{X_{(1)}}(x) = P\{X_{(1)} \le x\} = 1 - P\{X_{(1)} > x\}$$

$$= 1 - P\{X_1 > x, \dots, X_n > x\} \underset{\text{незал. } X_1, \dots, X_n}{=} 1 - (P\{X_1 > x\})^n$$

$$= 1 - (1 - F(x))^n$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ \frac{x-\theta}{2}, & x \in [\theta, 2+\theta] \\ 1, & x > 2+\theta \end{cases}$$



$$F(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ 1 - \left(1 - \frac{x-\theta}{2}\right)^n, & x \in [\theta, 2+\theta] \\ 1, & x > 2+\theta \end{cases}$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = F'_{X_{(1)}}(x) = -n\left(1 - \frac{x-\theta}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(1 - \frac{x-\theta}{2}\right)^{n-1}, \quad x \in [\theta, \theta+2]$$

$$EX_{(1)} = \int_{\theta}^{\theta+2} x f_{X_{(1)}}(x)\,dx = \int_{\theta}^{\theta+2} \frac{nx}{2}\left(1-\frac{x-\theta}{2}\right)^{n-1} dx$$

Смена: $1-\frac{x-\theta}{2} = t \Rightarrow \frac{x}{2} = 1-t+\frac{\theta}{2}$

$-\frac{dx}{2} = dt$

$$= \int_{1}^{0} n\left(1-t+\frac{\theta}{2}\right)\cdot t^{n-1}(-2)\,dt$$

$$= 2n\int_{0}^{1}\left(1-t+\frac{\theta}{2}\right)t^{n-1}\,dt$$

$$= 2n\left[\left(1+\frac{\theta}{2}\right)\int_{0}^{1} t^{n-1}dt - \int_{0}^{1} t^{n}\,dt\right]$$

$$= 2n\left(\left(1+\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2+\theta-\frac{2n}{n+1}$$

- сада рачунамо $EX_{(n)}$

- $F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \le x\} = P\{X_1 \le x, \dots, X_n \le x\}$

$= (F(x))^n$

$$\Rightarrow F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \theta \\ \left(\frac{x-\theta}{2}\right)^n, & x \in [\theta, \theta+2] \\ 1, & x > \theta+2 \end{cases}$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = n\left(\frac{x-\theta}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}, \quad x \in [\theta, \theta+2]$$

$$\Rightarrow EX_{(n)} = \int_{\theta}^{\theta+2} x\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{x-\theta}{2}\right)^{n-1} dx$$

Смена $\frac{x-\theta}{2} = t \Rightarrow \frac{dx}{2} = dt,\quad x = 2t+\theta$

$$= \int_0^1 n\cdot(2t+\theta)\cdot t^{n-1}\,dt$$

$$= n\left[\int_0^1 2t^n\,dt + \theta\int_0^1 t^{n-1}\,dt\right]$$

$$= n\left[2\cdot\frac{1}{n+1} + \theta\cdot\frac{1}{n}\right] = 2n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{n}\right)$$

$$E\,\hat{\theta}_{\text{ммв}}(\lambda) = \lambda\left(\frac{2n}{n+1}+\theta-2\right) + (1-\lambda)\left(2+\theta-\frac{2n}{n+1}\right)$$

$$= \lambda\frac{2n}{n+1} + \cancel{\lambda\theta} - 2\lambda + 2 + \theta - \frac{2n}{n+1} - 2\lambda - \cancel{\lambda\theta} + \frac{2n\lambda}{n+1}$$

$$= \lambda\left(\frac{4n}{n+1} - 4\right) + 2 + \theta - \frac{2n}{n+1}$$

$$= \theta + \frac{\cancel{4n\lambda} - 4\lambda(n+1) + \cancel{2n} + 2 - \cancel{2n}}{n+1}$$

$$= \theta + \frac{2-4\lambda}{n+1}$$

$$E\,\hat{\theta}_{\text{ммв}}(\lambda) = \theta \iff 2-4\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{\text{ммв}}\left(\frac{1}{2}\right)$ је непристр. оцена за θ

4. $(X_1,\dots,X_n)$, $X_i \sim U[-\theta,\theta]$, $\hat{\theta}_1 = c_1\sum_{i=1}^{n}|X_i|$, $\hat{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}$

а) тражимо c_1 т.д. $E\left(c_1\sum_{i=1}^{n}|X_i|\right) = \theta$

$$\Leftrightarrow c_1 \cdot n E|X_1| = \theta$$

рачунамо $E|X_1|$:

1. начин: по дефиницији

– како је $f_{X_1}(x) = \frac{1}{2\theta}$, $x\in[-\theta,\theta]$, следи:

$$E|X_1| = \int_{-\theta}^{\theta}|x| f_X(x)dx = \int_{-\theta}^{\theta}|x|\frac{1}{2\theta}dx = \cancel{2}\int_0^{\theta} x\cdot\frac{1}{\cancel{2}\theta}dx = \frac{1}{\cancel{\theta}}\cdot\frac{\theta^{\cancel{2}}}{2} = \frac{\theta}{2}$$

2. начин: нађимо расподелу од $|X_1|$:

– носач за $|X_1|$ је $[0,\theta]$, па је $F_{|X_1|}(x)=0$, за $x<0$ и $F_{|X_1|}(x)=1$, $x>\theta$

– за $x\in[0,\theta]$ важи:

$$F_{|X_1|}(x) = P\{|X_1|\le x\} = P\{-x\le X_1\le x\} = \int_{-x}^{x} f_{X_1}(t)dt$$

$$= \int_{-x}^{x}\frac{1}{2\theta}dt = \frac{2x}{2\theta} = \frac{x}{\theta}$$

$$\Rightarrow f_{|X_1|}(x) = F'_{|X_1|}(x) = \frac{1}{\theta},\quad x\in[0,\theta]$$

$$\Rightarrow |X_1|\sim U[0,\theta] \Rightarrow E|X_1| = \frac{\theta}{2}$$

Дакле, c_1 је т.д. $c_1 n E|X_1| = \theta$, односно $c_1 n \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$, па је $\boxed{c_1 = \frac{2}{n}}$

Нађимо сад c_2 т.д. $E(c_2 X_{(n)}) = \theta$

$$\iff c_2 E X_{(n)} = \theta$$

Потребно је да израчунамо $EX_{(n)}$ што ћемо учинити на исти начин као у претх. задатку.

$$F_{X_{(n)}}(x) = P\{X_{(n)} \leq x\} = (F_{X_1}(x))^n$$

$X_1 \sim U[-\theta, \theta]$, па важи:

$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0, & x < -\theta \\ \frac{x+\theta}{2\theta}, & x \in [-\theta, \theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < -\theta \\ \left(\frac{x+\theta}{2\theta}\right)^n, & x \in [-\theta, \theta] \\ 1, & x > \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) = F'_{X_{(n)}}(x) = \frac{n}{2\theta}\left(\frac{x+\theta}{2\theta}\right)^{n-1}, \quad x \in [-\theta, \theta]$$

Сада можемо да израчунамо $EX_{(n)}$

$$EX_{(n)} = \int_{-\theta}^{\theta} x \cdot f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \int_{-\theta}^{\theta} \frac{nx}{2\theta}\left(\frac{x+\theta}{2\theta}\right)^{n-1} dx = I$$

смена: $\frac{x+\theta}{2\theta} = t \Rightarrow 2\theta t - \theta = x$

$\frac{dx}{2\theta} = dt$

$$I = \int_0^1 n(2\theta t - \theta)\, t^{n-1}\, dt$$

$$= n\theta \left[2\int_0^1 t^n dt - \int_0^1 t^{n-1} dt \right] = n\theta\left[2 \cdot \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right]$$

$$= \cancel{n}\theta \, \frac{2n-n-1}{\cancel{n}(n+1)} = \theta \cdot \frac{n-1}{n+1}$$

Дакле, c_2 је т.д. $c_2 \cdot \theta \cdot \frac{n-1}{n+1} = \theta$, па је $\boxed{c_2 = \frac{n+1}{n-1}}$

д) Пошто су $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$ сада непристрасне, да бисмо их упоредили у средњеквадратном смислу, упоредићемо њихове дисперзије

$$D\hat{\theta}_1 = D\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right) = \frac{4}{n^2} \cdot D\left(\sum_{i=1}^{n} |X_i|\right) = \frac{4}{n^2} \cdot n\, D|X_i|$$

$X_1, \dots, X_n$ су iid, па су и $|X_1|, \dots, |X_n|$ iid

$$= \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \boxed{\frac{\theta^2}{3n}}$$

$|X_i| \sim U[0,\theta]$, па је $D|X_i| = \frac{\theta^2}{12}$

$$D\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \cdot D X_{(n)}$$

$DX_{(n)}$ можемо да израчунамо на 2 начина.

1. начин: $DX_{(n)} = EX_{(n)}^2 - \underbrace{(EX_{(n)})^2}_{\text{ово смо израчунали}}$

$$E X_{(n)}^2 = \int_{-\theta}^{\theta} x^2 f_{X_{(n)}}(x)\,dx = \ldots$$

2. начин: $D X_{(n)} = E(X_{(n)} - EX_{(n)})^2 = E\left(X_{(n)} - \theta\frac{(n-1)}{n+1}\right)^2$

$$= \int_{-\theta}^{\theta} \left(x - \theta\frac{(n-1)}{n+1}\right)^2 f_{X_{(n)}}(x)\,dx = I$$

$Eg(X)$

$= \int_{\mathbb{R}} g(x) \underbrace{f(x)}_{\text{густина од } X} dx$

код нас: $g(x) = \left(x - \theta\frac{(n-1)}{n+1}\right)^2$

$$I = \int_{-\theta}^{\theta} \left(x - \theta \cdot \frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{n}{2\theta}\left(\frac{x+\theta}{2\theta}\right)^{n-1} dx$$

смена: $\frac{x+\theta}{2\theta} = t \Rightarrow x = 2\theta t - \theta$

$$\frac{dx}{2\theta} = dt$$

$$= \int_0^1 \left(2\theta t - \theta - \theta\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cdot n \cdot t^{n-1}\,dt$$

$$= n\theta^2 \int_0^1 \left(2t - 1 - \frac{n-1}{n+1}\right)^2 \cdot t^{n-1}\,dt$$

$$= n\theta^2 \int_0^1 \left(2t - \frac{n+1+n-1}{n+1}\right)^2 \cdot t^{n-1}\,dt$$

$$= n\theta^2 \int_0^1 \left(2t - \frac{2n}{n+1}\right)^2 \cdot t^{n-1}\,dt$$

$$= n\theta^2 \cdot 4 \cdot \int_0^1 \left(t^2 - 2t\frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)^2}\right) t^{n-1}\,dt$$

$$= 4n\theta^2 \left[\int_0^1 t^{n+1}\,dt - \frac{2n}{n+1}\int_0^1 t^n\,dt + \frac{n^2}{(n+1)^2}\int_0^1 t^{n-1}\,dt\right]$$

$$= 4n\theta^2 \left[\frac{1}{n+2} - \frac{2n}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{n^{\cancel{2}}}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\right]$$

$$= 4n\theta^2 \left[\frac{1}{n+2} - \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^2}\right] = 4n\theta^2\left[\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right]$$

Дакле, $D\hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 \cdot 4n\theta^2\left[\frac{1}{n+2} - \frac{n}{(n+1)^2}\right]$

$$= \theta^2\left[\frac{4n(n+1)^2}{(n-1)^2(n+2)} - \frac{4n^2}{(n-1)^2}\right]$$

$$= \theta^2\left[\frac{4n(n^2+2n+1) - 4n^2(n+2)}{(n-1)^2(n+2)}\right]$$

$$= \boxed{\theta^2 \cdot \frac{4n}{(n-1)^2(n+2)}}$$

Резултати које смо добили су:

$$D\hat{\theta}_1 = \frac{\theta^2}{3n} \quad и \quad D\hat{\theta}_2 = \frac{4n\theta^2}{(n-1)^2(n+2)}$$

Како $D\hat{\theta}_1, D\hat{\theta}_2 \to 0,\ n\to+\infty$, обе оцене су постојане.

Боља оцена је она чија дисперзија брже тежи 0 кад $n \to +\infty$, а то је она оцена чија је дисперзија мања почевши од неког n.

Показаћемо да је та оцена $\hat{\theta}_2$, тј. показаћемо да је $D\hat{\theta}_2 < D\hat{\theta}_1$ почев од неког n:

$$D\hat{\theta}_2 < D\hat{\theta}_1 \iff \frac{4n\theta^2}{(n-1)^2(n+2)} < \frac{\theta^2}{3n}$$

за $n>1$

$$\iff 12n^2 < (n-1)^2(n+2)$$

$$\iff 12n^2 < (n^2-2n+1)(n+2)$$

$$\iff 12n^2 < n^3 + \cancel{2n^2} - \cancel{2n^2} - 4n + n + 2$$

$$\iff n^3 - 12n^2 - 3n + 2 > 0$$

$$\iff n(n^2-12n-3)+2>0$$

$$\iff n(n(n-12)-3)+2>0,$$ а ово је сигурно тачно за $n>12$

Још један начин да видимо да $D\hat{\theta}_2$ брже иде у 0 је следећи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\hat{\theta}_2}{D\hat{\theta}_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n\theta^2}{(n-1)^2(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2}{(n-1)^2(n+2)} = 0$$

(5.) $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\frac{2\theta}{3} \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0, \frac{3}{2})$

а) $EX = -\frac{\theta}{3} + 1 - \frac{2\theta}{3} = 1 - \theta$

изједначавамо $\overline{X}_n$ и EX:

$$\overline{X}_n \text{ "=" } EX \Leftrightarrow \overline{X}_n \text{ "=" } 1-\theta$$
$$\Leftrightarrow \theta \text{ "=" } 1 - \overline{X}_n$$

$\Rightarrow \hat{\theta}_{MM} = 1 - \overline{X}_n$

б) Нека је $(x_1, \dots, x_n)$ реализовани узорак

- тражимо ф-ју веродостојности:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P\{X_i = x_i\}, \quad \theta \in (0, \frac{3}{2})$$

- запишимо у једном реду $P\{X_i = x_i\}$:

$$P\{X_i = x_i\} = \left(\frac{\theta}{3}\right)^{I\{x_i=-1\}} \cdot \left(\frac{\theta}{3}\right)^{I\{x_i=0\}} \cdot \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x_i=1\}}$$

$$= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{I\{x_i=-1\}+I\{x_i=0\}} \cdot \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x_i=1\}}$$

$$= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{1-I\{x_i=1\}} \cdot \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x_i=1\}}$$

$I\{x_i=-1\} + I\{x_i=0\} + I\{x_i=1\} = 1$

Сада L изгледа овако:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta}{3}\right)^{1-I\{x_i=1\}} \cdot \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{I\{x_i=1\}}$$

$$= \left(\frac{\theta}{3}\right)^{n-\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}} \cdot \left(1-\frac{2\theta}{3}\right)^{\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}$$

Посматрајмо $\ell(\theta) := \ln L(\theta)$

$$\ell(\theta) = \left(n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right) \ln\frac{\theta}{3} + \left(\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right) \cdot \ln\left(1-\frac{2\theta}{3}\right)$$

$$= \left(n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right) \ln\theta - \underbrace{\left(n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right) \ln 3}_{const}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right) \ln\left(1-\frac{2\theta}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \ell'(\theta) = \frac{n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{\theta} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}\right)}{1-\frac{2\theta}{3}} \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{\theta} - \frac{2\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{3-2\theta}$$

$$\ell'(\theta) = 0 \iff \frac{n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{\theta} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{3-2\theta}$$

$$\iff 3n - 2n\theta - 3\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\} + \cancel{2\theta\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}} = \cancel{2\theta\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}$$

$$\iff \theta = \frac{3n - 3\sum I\{x_i=1\}}{2n}$$

$$l'(\theta) > 0 \iff \frac{n - \sum_{i=1}^{n} I\{x_i = 1\}}{\theta} > \frac{2\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{3-2\theta} \quad (*)$$

– помножићемо обе стране неједнакости са $\theta(3-2\theta)$.
Знак се неће променити јер је $0<\theta<\frac{3}{2}$, па је $\theta(3-2\theta)>0$

$$(*) \iff 3n - 3\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\} - 2\theta n + \cancel{2\theta\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}} > \cancel{2\theta\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}$$

$$\iff \theta < \frac{3n - 3\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{2n}$$

слично, $l'(\theta) < 0 \iff \theta > \dfrac{3n - 3\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{2n}$

Дакле, $\dfrac{3n-3\sum_{i=1}^{n} I\{x_i=1\}}{2n}$ је тачка max ф-је l, па и L

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{MMV} = \frac{3n - 3\sum_{i=1}^{n} I\{X_i=1\}}{2n}$$

б) показаћемо да су обе оцене непристрасне, па ћемо као и у претходном задатку упоредити њихове дисперзије

$$E\hat{\theta}_{MM} = E(1-\overline{X}_n) = 1 - E\overline{X}_n = 1 - EX_1 = 1-(1-\theta) = \theta$$

$$D\hat{\theta}_{MM} = D(1-\overline{X}_n) = D(-\overline{X}_n) = (-1)^2 D\overline{X}_n = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\, DX_1 = \frac{1}{n}\left(EX_1^2 - (EX_1)^2\right) \quad (*)$$

$$X_1^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\theta}{3} & 1-\frac{\theta}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow EX_1^2 = 1 - \frac{\theta}{3}$$

$$(*) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\theta}{3} - (1-\theta)^2\right) = \frac{1}{3n}\left(3 - \theta - 3(1-2\theta+\theta^2)\right)$$

$$= \frac{1}{3n}\left(\cancel{3} - \theta - \cancel{3} + 6\theta - 3\theta^2\right) = \boxed{\frac{\theta}{3n}(5-3\theta)}$$

$$E\,\hat{\theta}_{MMV} = E\left(\frac{3n - 3\sum_{i=1}^{n} I\{X_i=1\}}{2n}\right) = \frac{3n - 3\cdot\sum_{i=1}^{n} E(I\{X_i=1\})}{2n}$$

$$E(I\{X_i=1\}) = P\{I\{X_i=1\}=1\} = P\{X_i=1\} = 1 - \frac{2\theta}{3}$$

$$\Rightarrow E\,\hat{\theta}_{MMV} = \frac{3\cancel{n} - 3\cancel{n}\left(1-\frac{2\theta}{3}\right)}{2\cancel{n}} = \frac{2\theta}{2} = \theta$$

$$D\,\hat{\theta}_{MMV} = D\left(\frac{3n}{2} - \frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i=1\}\right)$$

$$= D\left(-\frac{3}{2n}\sum_{i=1}^{n} I\{X_i=1\}\right)$$

$$= \frac{9}{4n^{\cancel{2}}}\cancel{n}\, D(I\{X_i=1\}) \quad (*)$$

$I\{X_1=1\}, \dots, I\{X_n=1\}$
су iid

Пошто $I\{X_i=1\} \sim Ber(P\{X_i=1\})$,

$$D(I\{X_i=1\}) = P\{X_i=1\}\cdot(1 - P\{X_i=1\})$$

$$(*) = \frac{9}{4n} P\{X_i=1\}\left(1 - P\{X_i=1\}\right)$$

$$= \frac{9}{4n}\left(1-\frac{2\theta}{3}\right)\left(1-\left(1-\frac{2\theta}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{\cancel{9}}{{}_2\cancel{4}n} \cdot \frac{(3-2\theta)}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{2}\theta}{\cancel{3}} = \boxed{\frac{\theta(3-2\theta)}{2n}}$$

Показаћемо да је $D\hat{\theta}_{MMV} < D\hat{\theta}_{MM}$ (и то за свако n), из чега ће следити да је оцена $\hat{\theta}_{MMV}$ боља од $\hat{\theta}_{MM}$

$$D\hat{\theta}_{MMV} < D\hat{\theta}_{MM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{\theta}(3-2\theta)}{2\cancel{n}} < \frac{\cancel{\theta}}{3\cancel{n}}(5-3\theta)$$

$$\Leftrightarrow 9-6\theta < 10-6\theta$$

$$\Leftrightarrow 9 < 10 \quad T$$