Често смо у испитивању постојаности оцене $\hat{\theta}$ за параметар θ користили тврђење да ако $E(\hat{\theta}-\theta)^2 \to 0$, $n \to +\infty$, оцена јесте постојана. Међутим, ако $E(\hat{\theta}-\theta)^2 \not\to 0$, $n\to+\infty$, то нам не гарантује да оцена није постојана.
Сада ћемо дати један такав пример:

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ПСУ из $\mathcal{N}(m,1)$

За оцену параметра m је предложена оцена

$$\hat{m} = \begin{cases} \bar{X}_n, & \text{са вероватноћом } \frac{n-1}{n} \\ n, & \text{са вероватноћом } \frac{1}{n} \end{cases}$$

Шта овај запис представља? — неки скуп из σ-алгебре $\mathcal{A}$

$$\hat{m}(\omega) = \begin{cases} \bar{X}_n(\omega), & \omega \in A,\ P(A) = \frac{n-1}{n} \\ n, & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

Како ово можемо у једном реду да напишемо?
Уведимо $Y_n \sim Ber\left(\frac{n-1}{n}\right)$, Y_n независна од $X_1, \dots, X_n$

$$\hat{m} = \bar{X}_n Y_n + n(1-Y_n)$$

→ видимо као детерм. сл. величину, нез. од Y_n

Испитујемо постојаност: (подсећање: $(\forall \varepsilon>0)\ P\{|\hat{m}-m|>\varepsilon\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

фиксно

$$P\{|\hat{m}-m|<\varepsilon\} = P\{|\hat{m}-m|<\varepsilon, Y_n=1\} + P\{|\hat{m}-m|<\varepsilon, Y_n=0\}$$

формула тотп. вероб.

$$= P\{|\bar{X}_n - m|<\varepsilon, Y_n=1\} + P\{|n-m|<\varepsilon, Y_n=0\}$$

$$= P\{|\bar{X}_n-m|<\varepsilon\}P\{Y_n=1\} + P\{|n-m|<\varepsilon\}P\{Y_n=0\}$$

независност

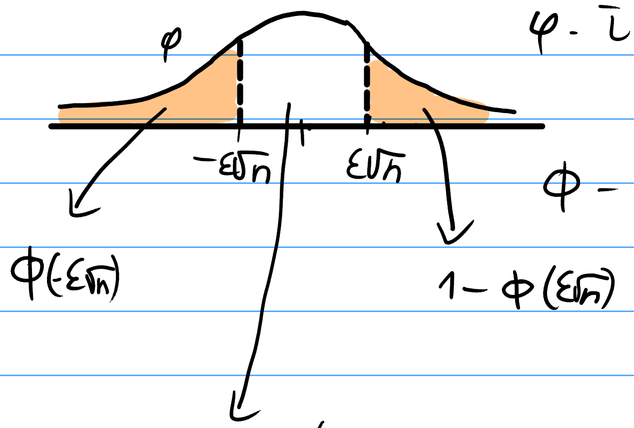
$$= P\{|\bar{X}_n-m|<\varepsilon\}\cdot\frac{n-1}{n} + P\{|n-m|<\varepsilon\}\frac{1}{n}$$

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow (\bar{X}_n - m)\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

у наставку показујемо ово

$$\frac{n-1}{n} P\{-\varepsilon < \overline{X}_n - m < \varepsilon\} + \frac{1}{n} P\{|n-m| < \varepsilon\}$$

$$= \frac{n-1}{n} P\{-\varepsilon\sqrt{n} < (\overline{X}_n - m)\sqrt{n} < \varepsilon\sqrt{n}\} + \frac{1}{n} P\{|n-m| < \varepsilon\} = (*)$$



φ - густина $N(0,1)$ расподеле

Φ - ф-ја расподеле

$$P\{-\varepsilon\sqrt{n} < (\overline{X}_n - m)\sqrt{n} < \varepsilon\sqrt{n}\}$$

$$= 1 - \left(\Phi(-\varepsilon\sqrt{n}) + 1 - \Phi(\varepsilon\sqrt{n})\right) = \Phi(\varepsilon\sqrt{n}) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{n})$$

$$(*) = \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1}\Big(\underbrace{\Phi(\varepsilon\sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 1} - \underbrace{\Phi(-\varepsilon\sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0}\Big) + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \underbrace{P\{|n-m| < \varepsilon\}}_{\xrightarrow{n\to+\infty} 0} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$$

Дакле, $P\{|\hat{m} - m| > \varepsilon\} = 1 - P\{|\hat{m} - m| < \varepsilon\} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

ε је било произвољно, па закључујемо да

$$(\forall \varepsilon > 0)\ P\{|\hat{m} - m| > \varepsilon\} \to 0,\ n \to +\infty$$

Овиме смо показали да је $\hat{m}$ постојан. Сада ћемо показати да $E(\hat{m} - m)^2 \not\to 0, n\to\infty$. За то је довољно да покажемо да $E(\hat{m} - m) \not\to 0, n\to\infty$, због: $DZ = EZ^2 - (EZ)^2 \geq 0$, па $EZ^2 \geq (EZ)^2$

$$E(\hat{m} - m) = E(\overline{X}_n Y_n + n(1 - Y_n)) - m = E\overline{X}_n EY_n + n(1 - EY_n) - m$$

$$= m\frac{n-1}{n} + n\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) - m$$

$$= m\frac{n-1}{n} + 1 - m \xrightarrow{n\to+\infty} 1 \neq 0$$