Содержание

1 Числовой образ и числа Гау-Ю. Определения и уже имеющиеся результаты

Рассмотрим векторное пространство размерности n над полем комплексных чисел с эрмитовым скалярным произведением $<\eta,\, \xi >= \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \bar{\xi_i}$. Пусть дана матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, определим для нее числовой образ

$$W(A) = \{< Ax, x > \quad | \quad < x, x >= 1\}.$$

Из [1, Теорема 1.3] мы знаем, что это будет выпуклое компактное подмножество в $\mathbb{C}$.

Также определим для неё число Гау-Ю $k(A)$ как максимальное количество таких ортонормированных векторов $\{x_1, \ldots, x_j\}$, что $< Ax_j, x_j >$ лежит на границе $W(A)$.

Пусть V— такая матрица $k \times n$, что $V^*V = I_k$. Тогда определим k на k компрессию матрицы A как V^*AV. Заметим, что $k(A)$ можно определить как максимальный размер k на k компрессии, у которой все диагональные элементы лежат на границе числового образа.

Перечислим основные факты о числовом образе и числе Гау-Ю:

1.1 [1, Теорема 1.2]Пусть дана матрица A размерности n. Тогда для числового образа этой матрицы верны следующие факты:

(a) Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, I - единичная матрица размера n. Тогда верен следующий факт: $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.

(b) Пусть U — унитарная матрица размера n, тогда $W(U^*AU = W(A)$.

1.2 [1, Теорема 1.4] Пусть матрица $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ и λ_1, λ_2 — ее собственные значения. Тогда $W(A)$ — эллиптический диск с фокусами λ_1, λ_2 и длиной малой оси $\{\operatorname{tr}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2\}^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Приведем легкое доказательство этого факта, взятое из статьи [4]. Пусть $W(A)$ — числовой образ матрицы A размера 2×2.

Пусть A - нормальная матрица. Тогда она унитарно эквивалентна диагональной матрице с собственными значениями на диагонали $D(\lambda_1, \lambda_1)$. В силу факта **1.1.b** числовые образы данных матриц совпадают, и мы имеем:

$$W(A) = W(D) = \{\lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$$

Это будет отрезок, на который можно смотреть как на эллипс и фокусами в λ_1 и λ_2 и длиной меньшей оси, равной 0. В случае, когда матрица не нормальна, заменим ее на $A - (tr(A))I/2$, где I - единичная матрица. Числовой образ параллельно перенесется на $(tr(A))/2$, в силу пункта **1.1.a**. Теперь $tr(A) = 0$.

Если оба собственных значения матрицы A равны 0, тогда матрица A унитарно эквивалентна матрице $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Следоавтельно

$$W(A) = W(B) = \{bx_1x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\}$$

таким образом, это окружность, который можно рассмотреть как эллипс с фокусами в 0 и $|b|$ как длинной меньшей оси. Пусть у A собственные значения равны a и $-a$. Заменив A на A/a, можем считать, что $a = 1$. Так как наша матрица не нормальна, она будет унитарна эквивалентна матрице $B = \begin{pmatrix} 1 & 2c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c > 0$. Пусть $C = \{(A + A^*) + \gamma(A - A^*)\}/2$, где $\gamma = \sqrt{1 + c^2}/c$. Тогда оба собственных значения матрицы C равны 0. По предыдущему пункту числовой образ матрицы C — окружность с центром в 0 и с радиусом $\sqrt{1 + c^2}$. Заметим, что $x + iy \in W(A) \Leftrightarrow x + i\gamma y \in W(C)$. Так как граница C задается $\{\sqrt{1 + c^2}e_{it} : t \in \mathbb{R}\}$. Тогда граница $W(A)$ задается $\{\sqrt{1 + c^2}\cos t + ic\sin t : t \in \mathbb{R}\}$. □

1.3 [1, Теорема 3.2] Если A унитарно эквивалентна $A_1 \oplus A_2$, то $W(A) = conv\{W(A_1) \cup W(A_2)\}$. Кроме того, по следствию из [1, Теоремы 3.3] если A — нормальная, тогда $W(A) = conv(\sigma(A))$ — выпуклый многоугольник.

1.4 [1, Теорема 3.3] $W(A)$ — выпуклый многоугольник с вершинами $\mu_1, \ldots, \mu_k \iff$ A унитарно эквивалентна $diag(\mu_1, \ldots, \mu_k) \oplus B$, где B такая матрица, что $W(B) \subset conv\{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$.

1.5 [3, Предложение 2.4] Если граница числового образа $\partial W(A)$ содержит в себе часть прямой, то $k(A) \geq 3$. Если $\partial W(A)$ содержит 2 параллельных отрезка, то $k(A) \geq 4$.

1.6 [2, Выкладки на странице 2] Назовём матрицу A почти нормальной, если A унитарно эквивалентна $A_n \oplus A_a$, где A_n нормальная, а A_a унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & \beta_1 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Матрицу A_a назовём "чистой" почти нормальной матрицей. [2, теорема 1] Если A — "чистая" почти нормальная матрица, то $k(A) = 2$.

1.7 [3, Предложение 2.8] Для матрицы $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ следующие условия эквивалентны:

(a) $a \in \partial W(A)$

(b) $\exists\, \beta \in [0, 2\pi) \ : \ be^{-i\beta} + \bar{c}e^{i\beta} = 0$

(c) $|b| = |c|$

(d) $d \in \partial W(A)$

1.8 [2, теорема 3] Пусть A почти нормальная матрица, т.е. A унитарно эквивалетна $A_n \oplus A_a$, тогда $k(A) = l_n + l_a$, где за l_n обозначили количество собственных значений матрицы A_n, лежащих в $\partial W(A)$ (считающее их кратность). А $l_a = 0$, 2, или 1. Первый случай происходит, когда $W(A_a) \subset \mathrm{Int}(W(A))$. Второй — когда существуют 2 различные касательные параллельные прямые, которые проходят через точки, принадлежащие $W(A)$. Третий — во всех остальных случаях.

1.9 [3, Лемма 2.9] Если $A = A_1 \oplus A_2$ и $W(A_1)$ содержится в $\mathrm{Int}(W(A_2))$, то $k(A) = k(A_2)$.

2 Классификация числе Гау- Ю для матриц размера 3×3

В [3] дана классификация видов числового образа и $k(A)$ для матриц A размера 3×3:

2.1 Пусть A — матрица нормального оператора. Тогда числовой образ A — треугольник, прямая или точка. В данном случае $k(A) = 3$.

2.2 Пусть A унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A_2} \end{pmatrix},$$

(a) Если числовой образ $W(a_1)$ содержится в $\mathrm{Int}(W(A_2))$, то по пункту 1.2 $W(A) = W(A_2)$, и значит является эллипсом (см. пункт 1.1). Также по пункту 1.8 $k(A) = k(A_2) = 2$.

(b) Если $W(a_1) \notin \mathrm{Int}(W(A_2))$, то $W(A)$ — это выпуклая оболочка эллипса и точки и $k(A) = 3$.

2.3 В оставшихся случаях матрица A унитарно эквивалентна верхнетреугольной и выполняется одно из двух:

(a) $W(A)$ — это выпуклая оболочка heart-shaped region, и по пункту 1.4 $k(A) = 3$, так как числовой образ A содержит сегмент прямой.

(b) $W(A)$ — овальная фигура, и также по пункту 1.4 $k(A) = 3$.

Подводя итог, для матриц размера 3×3 у нас появляется теорема

Теорема 2.1. *[3, Лемма 2.11] Пусть A матрица размера 3×3. Тогда $k(A) = 2$, если числовой образ $W(A)$ либо эллиптический диск, кроме случая, когда у матрицы существует собственный вектор, лежащий на $\partial W(A)$, либо овальная фигура. Во всех остальных случаях $k(A) = 3$.*

3 Классификация чисел Гау-Ю для матриц размера 4×4

Попробуем классифицировать числа Гау-Ю для матриц размара 4×4. Для начала докажем следующий факт:

Теорема 3.1. *Любую матрицу над $\mathbb{C}$ можно привести к верхнетреугольному виду унитарными преобразованиями.*

Доказательство. Докажем по индукции:

$(n = 2)$ У любой матрицы размера 2×2 существует собственный вектор (x_1, x_2) единичной длины с некоторым собственным значением λ. Возьмем вектор единичой длины из ортогонального дополнения к нашему собстенному вектору и рассмотрим матрицу:

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$n - 1$ верно, рассмотрим n. У любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ существует собственный вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ единичной длины с некоторым собственным значением λ_1. Тогда дополним этот вектор до ортогонального базиса. Построим матрицу:

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & * & \ldots & * \\ x_2 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $U^* A U$ будет иметь следующий вид:

$$A^{'} = U^* A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Тогда рассмотрим унитарную матрицу:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & W_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$W^* A^{'} W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Для матриц размера 4×4 расмотрим следующие случаи:

3.1 Матрица является нормальной

Пусть A — нормальная матрица. Тогда существует ортонормированный базис $\mathbb{C}^4$ из собственных векторов A, а значит $k(A) = 4$. Кроме того, числовой образ нормальной матрицы — это многоугольник с вершинами в ее собственных значениях (см. пункт 1.2).

3.2 Матрица унитарно эквивалентна матрице с 2 блоками размера 1×1 и с одним блоком 2×2

Пусть A унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \text{ где нижний блок } A_1 = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

унитарно эквивалентен верхнетреугольной матрице. По пункту 1.1 $W(A_1)$ является эллипсом с фокусами λ_1 и λ_2 — собственными значениями A_1 и длиной малой оси $\{\mathrm{tr}(A * A) - |\lambda_1| - |\lambda_2|\}$. В зависимости от того, как расположены точки a_1, a_2 и эллипс $W(A_1)$, мы можем сделать выводы о $k(A)$. Если a_1 и a_2 лежат в $\mathrm{Int}(W(A_1))$, то $k(A) = 2$. Иначе $k(A) \geq 3$.

3.3 Матрица унитрано эквивалентна матрице, состоящей из двух блоков 2×2

A унитарно эквивалентна матрице:

$$\begin{pmatrix} A_1 & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & A_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку числовой образ матриц 2×2 в невырожденном случае является эллипсом (см. пункт 1.1), то числовой образ матрицы A — это выпуклая оболочка 2-х эллипсов. Изучим случаи их взаимного расположения:

- Если $W(A_1)$ содержится в $Int(W(A_2))$ (или наоборот), то $k(A) = 2$.
- Если $W(A_1)$ и $W(A_2)$ — эллипсы одинакового размера, причём один получается из второго параллельным переносом, то $W(A)$ содержит 2 параллельных отрезка и $k(A) = 4$ (см. пункт 1.4).
- Если один эллипс получается из другого гомотетией, поворотом и параллельным переносом, и при этом ни один из них не содержится в другом, то из 1.4 мы знаем, что $k(A) \geq 3$.

3.4 Матрица унитарно эквивалентна матрице с блоками 1×1 и 3×3

Если A унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_2 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

где A_2 — матрица размера 3×3, неприводимая унитарными преобразованиями в сумму меньших блоков, то возможные следующие случаи:

- Если A_2 унитарно эквивалентна "чистой" почти нормальной матрице. Тогда по 1.7 $k(A) = 3$ или 4, в зависимости от того, где лежит a_{11} относительно числового образа матрицы A_2.

- Если A_2 унитарно эквивалентна верхнетреугольной матрице, то числовой образ A_2 является либо овалом, либо выпуклой оболочкой heart-shaped region (см. классификацию в пункте 2). В данном случаем $k(A) \geq 3$.

3.5 Матрица не унитарно эквивалентна матрице с меньшими блоками

Остался случай, когда матрица A унитарно эквивалентна верхнетреугольной матрице. Рассмотрим следующие возможности:

- Если A унитарно эквивалентна "чистой" почти нормальной матрице, то $k(A) = 2$. (см. пункт 1.5)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- A унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- A унитарно эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

4 Примеры вчисления числового образа и чисел Гау-Ю для матриц малых размерностей

4.1 Матрицы размера 3×3

(1) Для матриц размера 3×3 вида:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в статье [3] получен следующий результат:

Лемма 4.1. *[3, Следствие 2.13] Для матриц унитарно эквивалентных матрице A следующие условия эквивалентны:*

(a) $k(A) = 3$,

(b) $|a| = |b| = |c|$,

(c) A - нормальная матрица

(d) либо $A = 0$, либо $\partial W(A)$ содержит отрезок.

4.2 Матрицы размера 4×4

1. Вычислим числа Гау-Ю для некоторых матриц специального вида. В работе [2] разобран случай трехдиагональных матриц вида

$$T(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{C}$. Если $bc \neq 0$, то собственные значения $T(a,b,c)$ вычисляются по формуле:

$$\lambda_j = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j = 1, \dots, n.$$

И соответствующие собственные вектора x_j тогда имеют вид $(x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$, где компоненты вектора вычисляются по формуле

$$x_k^{(j)} = \left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^k \sin\left(\frac{jk\pi}{n+1}\right).$$

Теорема 4.2. *[2, теорема 5] Пусть n — размер матрицы $A = T(a,b,c)$ и $n \geq 3$. Тогда если $|b| = |c|$, то число Гау-Ю $k(A) = n$. Иначе $k(A) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

2. Разберём подробнее пример, подтверждающий теорему 4.1:

   Пусть $n = 4$, $a = 1$, $b = 2+i$, $c = \sqrt{5}$ и $A = T(a,b,c)$. Поскольку $|b| = 5 = |c|$, то по теореме 4.1 $k(A) = 4$. Покажем, что A — нормальная матрица :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 1 & 2+i & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 1 & 2+i \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 2-i & 1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-i & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^* = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5}+2+i & \sqrt{5}(2+i) & 0 \\ 2-i+\sqrt{5} & 11 & \sqrt{5}+2+i & \sqrt{5}(2+i) \\ \sqrt{5}(2-i) & 2-i+\sqrt{5} & 11 & \sqrt{5}(2+i)+1 \\ 0 & 0 & \sqrt{5}(2-i) & 6 \end{pmatrix} = A^*A$$

   Следовательно, $k(A) = 4$ (см. пункт 3.1).

5 Открытые вопросы

5.1

Как выглядит числовой образ и чему равняется число Гау-Ю матрицы A размера 4×4, унитарно эквивалентной матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

5.2

Как выглядит числовой образ и чему равняется число Гау-Ю матрицы A размера 4×4, унитарно эквивалентной матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Список литературы

[1] Lecture notes on Numerical Range. Chi-Kwong Li

[2] K.A. Camenga, P.X. Rault, T. Sendova , I.M. Spitkovsky, On the Gau–Wu number for some classes of matrices. Linear Algebra Appl. 444 (2014) 254-262

[3] Kuo-Zhong Wang, P.Y. WU, Diagonals and numerical ranges of weighted shift matrices. Linear Algebra Appl. 438 (1) (2013) 514-532

[4] Chi-Kwong Li, A simple proof of the elliptical range theorem.

[5] Mao-Ting Chien, Lina Yeh, On the boundary of the numerical range of a matrix. Applied Mathematics Letters 24 (2011) 620-622.