Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студентки 403 группы
Страховой Надежды Олеговны

Оценка ширины светового луча по времени пребывания случайного блуждания

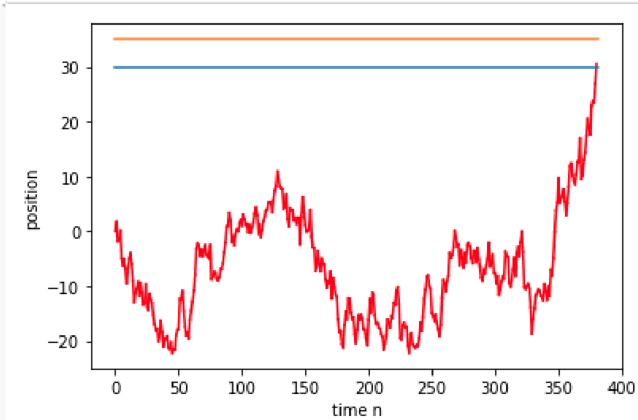
Научный руководитель:
н.с., к.ф.-м.н.
Дмитрущенков Дмитрий Валерьевич

Москва, 2020

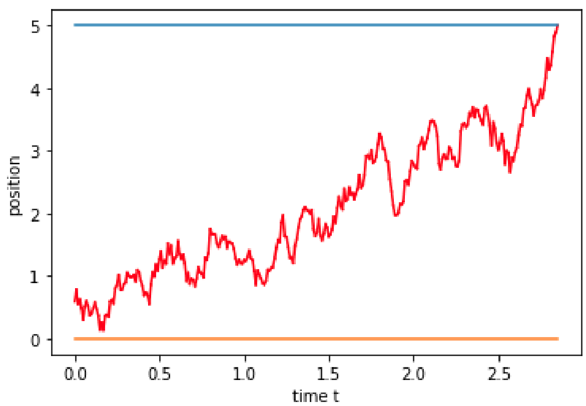
Содержание

1 Постановка задачи.

Проводится эксперимент: частица совершает случайное блуждание, где приращение имеет нормальное распределение.



В некоторый момент мы фиксируем ее попадание в луч и начинаем замерять время t ее пребывания в нем.



Необходимо оценить ширину луча d, если известны t и σ^2.

2 Первый этап — до попадания в луч.

До попадания частицы в луч, она совершает случайное блуждание. Введем обозначения:

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

где X_i имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$.

Пусть a — координата начала луча, которую мы задаем сами. Определим

$$N(a) = \max\{n \geq 1 : S_n \leq a\}$$

Таким образом, координата, с которой наша частица начинает блуждать в луче, будет обозначаться $X_0 = S_{N(a)+1} - a$.

Введем понятия первого лестничного индекса и первой лестничной высоты, которые взяты из [2]

$$\eta_+ = \max\{n \geq 1 : S_n \geq 0\},\ \chi_+ = S_{\eta_+}$$

Понятно, что мы можем представить $S_{N(a)+1} = \chi_1 + \cdots + \chi_k$, где χ_i распределены как χ_+.

2.1 Теория для дальнейших рассуждений.

Теперь, когда мы ввели случайные величины $\chi_i \geq 0$ и переписали наши суммы с помощью них, воспользуемся некоторыми результатами из теории восстановления.

Определение 2.1. *Пусть X_i — случайные величины и $P(X_i \geq 0) = 1$, а обозначения $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и $N(a)$ такие, как определяли раньше. Тогда следующие случайные величины будут называться:*
$\Delta_2 = (S_{N(a)+1} - a)$ — *эксцесс*, $\Delta_1 = (a - S_{N(a)})$ — *дефект.*

Для эксцесса и дефекта в теории восстановления у нас есть следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть X_i случайные величины с одинаковой непрерывной функцией распределения и $P(X_i \geq 0) = 1$. Тогда имеем $\forall u, v \geq 0$*

$$\lim_{a \to \infty} P\left(\Delta_1 > u, \Delta_2 > v\right) = \frac{1}{EX} \int_{u+v}^{\infty} P(X > x)dx$$

Также, для решения нашей задачи, нам будут полезны следующие факты, поученные в статье [3]. Благодаря Теореме 2 в [3] мы можем вычислить следующие моменты для случайной величины χ_+:

$$E\chi_+ = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

$$E\chi_+^2 = \frac{K\sigma^2}{\sqrt{\pi}}$$

$$E\chi_+^3 = \frac{3\sigma^3}{4\sqrt{2}} + \frac{3K^2\sigma^3}{2\sqrt{2}\pi}$$

где $K = 1.460\ldots$, взята из равенства $\sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{m}} = 2\sqrt{n} - K + O\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$

3 Оценка эксцесса на первом этапе.

Оценим, к чему стремятся $E(S_{N(a)+1}-a)$ и $E(S_{N(a)+1}-a)^2$ при $a \to \infty$. Воспользуемся следующим фактом для математического ожидания случайной величины $X \geq 0$:

$$EX = \int_0^\infty x dP(X \leq x) = -\int_0^\infty x dP(X > x) = \int_0^\infty P(X > x) dx$$

$$\lim_{a\to\infty} E(S_{N(a)+1}-a) = \int_0^\infty \lim_{a\to\infty} P(\Delta_2 > u) du = \frac{1}{E\chi_+}\int_0^\infty \int_u^\infty P(\chi_+ > x) dx du =$$

$$= \frac{1}{E\chi_+}\int_0^\infty \int_0^x P(\chi_+ > x) du dx =$$

$$= \frac{1}{E\chi_+}\int_0^\infty x P(\chi_+ > x) dx$$

Если мы рассмотрим следующее математическое ожидание

$$E\chi_+^2 = \int_0^\infty x^2 dP(\chi_+ \leq x) = -\int_0^\infty x^2 dP(\chi_+ > x) = 2\int_0^\infty x P(\chi_+ > x) dx$$

Отсюда следует:

$$\lim_{a\to\infty} E(S_{N(a)+1} - a) = \frac{E\chi_+^2}{2E\chi_+}$$

Теперь рассмотрим:

$$\lim_{a\to\infty} E(S_{N(a)+1}-a)^2 = \lim_{a\to\infty} 2\int_0^\infty u P(\Delta_2 > u) du = \frac{2}{E\chi_+}\int_0^\infty u \int_u^\infty P(\chi_+ > x) dx du =$$

$$= \frac{2}{E\chi_+}\int_0^\infty \int_0^x u P(\chi_+ > x) du dx =$$

$$= \frac{1}{E\chi_+}\int_0^\infty x^2 P(\chi_+ > x) dx$$

Для дальнейшего вычисления посмотрим на равенство:

$$E\chi_+^3 = \int_0^\infty x^3 dP(\chi_+ \leq x) = -\int_0^\infty x^3 dP(\chi_+ > x) = 3\int_0^\infty x^2 P(\chi_+ > x) dx$$

Отсюда получаем:

$$\lim_{a\to\infty} E(S_{N(a)+1} - a)^2 = \frac{E\chi_+^3}{3E\chi_+}$$

4 Второй этап — движение в луче.

Теперь рассмотрим вторую часть нашего эксперимента, где частица попадает в луч. С самого начала сделаем сдвиг на a и будем дальше работать с лучом, чьи границы равны 0 и d.

Частица начинает свое движение из точки $X_0 = S_{N(a)+1} - a$ и ее движение описывается так: $\Gamma(t) = W_t + X_0$, где W_t - броуновское движение. Так как, W_t мартингал, то $\Gamma(t)$ тоже будет мартингалом, потому что X_0 случайная константа.

Введем случайную величину τ, равную первому моменту выхода из луча. Это будет марковский момент, и для него в курсе случайных процессов у нас имеется следующая теорема:

Теорема 4.1. *Пусть τ - марковский момент (т.е $\forall m : \{\tau = m\} \in F_m$), $E(\sum_{i=1}^{\tau} |X_i - X_{i-1}|) < \infty$. Тогда $EX_\tau = EX_0$, $\forall m$ т.,ч $w \in \{\tau \geq n\}$: $E(X_\tau|F_n) = X_n$*

Из нее следует $E\Gamma(\tau) = E\Gamma(0) = EX_0$. С другой стороны $E\Gamma(\tau) = dP_1$, где P_1 - вероятность молекулы пересечь верхнюю границу луча.

Рассмотрим еще один процесс: $\Gamma(t)^2 - \sigma^2 t = W_t^2 - \sigma^2 t + 2X_0W_t + X_0^2$ — это тоже мартингал, так как $W_t^2 - \sigma^2 t$ мартингал. По той же самой теореме получим: $E(\Gamma(\tau)^2 - \sigma^2\tau) = E(\Gamma(0)^2) = EX_0^2$. Тут же по линейности у нас выходит $E(\Gamma(\tau)^2 - \sigma^2\tau) = E\Gamma(\tau)^2 - \sigma^2 E\tau = d^2P_1 - \sigma^2 E\tau$. Теперь у нас есть следующая система:

$$dP_1 = EX_0$$

$$d^2P_1 = EX_0^2 + \sigma^2 E\tau$$

$$E\tau = \overline{T}$$

Решая эту систему методом моментов, мы получаем оценку $\hat{d} = \dfrac{EX_0^2 + \sigma^2\overline{T}}{EX_0}$ для равенства $d = \dfrac{\sigma^2 E\tau + EX_0^2}{EX_0}$ А отсюда, при $a \to \infty$ имеем $\hat{d} \to \dfrac{2(E\chi_+^3 + \sigma^2 3E\chi_+\overline{T})}{3E\chi_+^2}$

5 Асимптотическая нормальность оценки и доверительный интервал.

Теперь мы хотим доказать, что наша оценка асимптотически нормальна, и посторить доверительный интервал для величины d.

Для оценки методом моментов в [1] есть следующая теорема:

Теорема 5.1. *Если теоретический момент случайной величины EX^{2k} конечен, то при $n \to \infty$ оценка $X_n^k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ для параметра EX^k будет асимптотически нормальная $N\Big(EX^k, \dfrac{EX^{2k} - (EX^k)^2}{n}\Big)$.*

Если теперь предположить, что $E\tau^2 < \infty$, то оценка $\overline{T}$ будет асимтотически нормальна $N\Big(E\tau, \dfrac{E\tau^2 - (E\tau)^2}{n}\Big)$. Отсюда мы получаем $\hat{d} = \dfrac{EX_0^2 + \sigma^2\overline{T}}{EX_0}$ асимтотически нормальна $N\Big(\dfrac{\sigma^2 E\tau + EX_0^2}{EX_0}, \dfrac{\sigma^4 E\tau^2 - \sigma^4 (E\tau)^2}{n(EX_0)^2}\Big)$.

Чтобы построить доверительный интервал : $(T_1(X), T_2(X))$ такой, что $P(T_1(X) \le d \le T_2(X)) = \gamma$ возьмем для $E\tau$ оценку $\overline{T}$, а для $D\tau^2$ — $S = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (T_i - \overline{T})^2$. Из-за асимптотической нормальности нашей оценки мы можем взять для заданного γ следующий доверительный интервал:

$\Big(\dfrac{\sigma^2\overline{T} + EX_0^2}{EX_0} - \dfrac{c_\gamma \sigma^2 \sqrt{S}}{\sqrt{n} EX_0}, \dfrac{\sigma^2\overline{T} + EX_0^2}{EX_0} + \dfrac{c_\gamma \sigma^2 \sqrt{S}}{\sqrt{n} EX_0}\Big)$, где величина $c_\gamma = \Phi^{-1}((1+\gamma)/2)$ $\Big(\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^x \exp(-\dfrac{x^2}{2})dx\Big)$ является табличной.

6 Моделирование эксперимента на Python.

При помощи Python я смоделировала эксперимент и проверила полученные теоретическим способом оценки. Для определенности были взяты $\gamma = 0.90$ $c_\gamma = 1.645$

В ходе реализации прогаммы мы сравнивали заданную ширину луча d с полученной нами оценкой $\hat{d}$, а также строили доверительный интервал $\Big(\dfrac{\sigma^2\overline{T} + EX_0^2}{EX_0} - \dfrac{c_\gamma \sigma^2 \sqrt{S}}{\sqrt{n} EX_0}, \dfrac{\sigma^2\overline{T} + EX_0^2}{EX_0} + \dfrac{c_\gamma \sigma^2 \sqrt{S}}{\sqrt{n} EX_0}\Big)$. В таблице ниже представлены результаты: в левом столбце написаны начальные данные, посередине — вычиленная оценка, а справа — доверительный нтервал.

Начальные условия мы задаем сами: d — ширина луча, которую мы оцениваем, a — начало луча, мы его для определенности везде полагаем равным 20, n — количество частиц, которых мы наблюдаем, σ — наша заданная дисперсия.

Заданные начальные условия	оценка для d	доверительный интервал для d
$\sigma = 1, d = 1, n = 50$	1.32513	$(1.25480, 1.39546)$
$\sigma = 1, d = 1, n = 100$	1.38486	$(1.32814, 1.44158)$
$\sigma = 1, d = 3, n = 30$	3.15268	$(2.45199, 3.85336)$
$\sigma = 1, d = 3, n = 30$	2.78307	$(2.04254, 3.52360)$
$\sigma = 1, d = 3, n = 100$	3.48080	$(3.05705, 3.90455)$
$\sigma = 1, d = 5, n = 100$	5.63596	$(4.56687, 6.70504)$
$\sigma = 2, d = 6, n = 100$	6.74636	$(6.02182, 7.47091)$
$\sigma = 2, d = 6, n = 50$	6.55343	$(5.58716, 7.51971)$
$\sigma = 2, d = 8, n = 50$	9.38143	$(7.49846, 11.26440)$
$\sigma = 0.3, d = 1, n = 50$	1.15202	$(0.95577, 1.34826)$

Также по ходу эксперимента мы смогли сравнить наши полученные оценки $E(S_{N(a)+1} - a)$ и $E(S_{N(a)+1} - a)^2$ для эксцесса с их средним $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ и средним квадратичным $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$

Дисперсия	оценка $E(S_{N(a)+1} - a)$	оценка $E(S_{N(a)+1} - a)^2$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
$\sigma = 1, a = 20$	0.58260	0.58943	0.54766	0.50878
$\sigma = 1, a = 30$	0.58260	0.58943	0.58012	0.56458
$\sigma = 0.3, a = 20$	0.17478	0.05305	0.14174	0.03592
$\sigma = 2, a = 50$	1.16521	2.35771	1.44069	3.10703
$\sigma = 2, a = 20$	1.16521	2.35771	1.05644	1.82695
$\sigma = 0.5, a = 20$	0.29130	0.14736	0.24175	0.09689
$\sigma = 0.5, a = 40$	0.29130	0.14736	0.29387	0.15154

Список литературы

[1] Г.И.Ивченко, Ю.И.Медведев,Введение в математическую статистику, Ленанд, Editorial URSS, 2010

[2] В.Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Том 1 и 2

[3] V. I. Lotov, “On some boundary crossing problems for Gaussian random walks”, The Annals of Probability, 1996, 2154-2171