МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 4
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 6.25 (Вариант 14)

Привести к каноническому виду следующее уравнение:

$$\partial_x^2 u - 2\partial_x\partial_y u - 2\partial_x\partial_z u + \partial_x u + \partial_y u + 2\partial_z u + u = 0 \qquad \textbf{(\#)}$$

Решение:

Прежде всего, создадим уравнение характеристик с целью привести исходное уравнение (#) к каноническому виду.

Для этого, частным производным второго порядка сопоставляем a, $\partial_x^2 u \Rightarrow a_1^2$, $\partial_x\partial_y u \Rightarrow a_1 a_2$, $\partial_x\partial_z u \Rightarrow a_1 a_3$, а производные первого порядка $\partial_x u,\ \partial_y u,\ \partial_z u$ игнорируем.

Тогда характеристическая квадратичная форма исходного уравнения **(#)** имеет вид:

$$Q(a_1, a_2, a_3) = a_1^2 - 2\,a_1 a_2 - 2\,a_1 a_3$$

Приведем квадратичную форму Q к каноническому виду:

$$Q(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \gamma_1\mu_1^2 + \gamma_2\mu_2^2 + \gamma_3\mu_3^2\,,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ принимают значения 1; 0 или -1, а μ_1, μ_2, μ_3 - зависят от a_1, a_2, a_3

Далее используем метод выделения полных квадратов:

$$\begin{gathered} Q = a_1^2 - 2\,a_1 a_2 - 2\,a_1 a_3 = a_1^2 - 2\,a_1(a_2 + a_3) = \\ = (a_1 - (a_2 + a_3))^2 - (a_2 + a_3)^2 = \\ = (a_1 - a_2 - a_3)^2 - (a_2 + a_3)^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + 0\cdot\mu_3^2\,, \end{gathered}$$

где $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 0$, а также имеет место система:

$$\begin{cases} \mu_1 = a_1 - a_2 - a_3 \\ \mu_2 = a_2 + a_3 \\ \mu_3 = a_3 \end{cases}$$

Выразим a_1, a_2, a_3 через μ_1, μ_2, μ_3:

$$\begin{cases} a_3 = \mu_3 \\ a_2 = \mu_2 - a_3 = \mu_2 - \mu_3 \\ a_1 = \mu_1 + (a_2 + a_3) = \mu_1 + \mu_2 \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} a_1 = \mu_1 + \mu_2 \\ a_2 = \mu_2 - \mu_3 \\ a_3 = \mu_3 \end{cases}$$

Таким образом, получаем матрицу преобразований:

$$P = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Находим матрицу замены переменных:

$$P^T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Далее, осуществляем замену переменных:

$$\begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \hline \beta \\ \hline \vartheta \\ \hline \end{array} = P^T \cdot \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{|c|} \hline \psi \\ \hline \beta \\ \hline \vartheta \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline x \\ \hline \end{array}$$

То есть,

$$\begin{cases} \psi = x \\ \beta = x + y \\ \vartheta = -y + z \end{cases}$$

Чтобы подставить новые переменные ψ, β, ϑ в исходное уравнение **(#)**, положим:

$$v(\psi, \beta, \vartheta) = u(x, y, z)$$

и найдем частные производные $\partial_x u,\ \partial_y u,\ \partial_z u,\ \partial_x^2 u,\ \partial_x \partial_y u,\ \partial_x \partial_z u$ как производные сложной функции $v(\ \psi(x,y,z),\ \beta(x,y,z),\ \vartheta(x,y,z)\ )$, при этом учитываем, что $\psi_1 = 1,\ \psi_2 = 0,\ \psi_3 = 0;\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0;\ \vartheta_1 = 0,$
$\vartheta_2 = -1,\ \vartheta_3 = 1.$

- $\partial_x u = \psi_x \partial_\psi v + \beta_x \partial_\beta v + \vartheta_x \partial_\vartheta v = \partial_\psi v + \partial_\beta v$ **;**
- $\partial_y u = \psi_y \partial_\psi v + \beta_y \partial_\beta v + \vartheta_y \partial_\vartheta v = \partial_\beta v - \partial_\vartheta v$ **;**
- $\partial_z u = \psi_z \partial_\psi v + \beta_z \partial_\beta v + \vartheta_z \partial_\vartheta v = \partial_\vartheta v$ **;**
- $\partial_x^2 u = \partial_x(\partial_\psi v + \partial_\beta v) = \psi_x({\partial_\psi}^2 v + \partial_\beta \partial_\psi v) + \beta_x(\partial_\psi \partial_\beta v + {\partial_\beta}^2 v) + \vartheta_x(\partial_\psi \partial_\vartheta v +$
  $+ \partial_\beta \partial_\vartheta v) = {\partial_\psi}^2 v + \partial_\beta \partial_\psi v + \partial_\psi \partial_\beta v + {\partial_\beta}^2 v = {\partial_\psi}^2 v + 2 \cdot \partial_\beta \partial_\psi v + {\partial_\beta}^2 v$ **;**
- $\partial_x \partial_y u = \partial_x(\partial_\beta v - \partial_\vartheta v) = \psi_x(\partial_\beta \partial_\psi v - \partial_\vartheta \partial_\psi v) + \beta_x({\partial_\beta}^2 v - \partial_\vartheta \partial_\beta v) + \vartheta_x(\partial_\beta \partial_\vartheta v -$
  $- {\partial_\vartheta}^2 v) = \partial_\beta \partial_\psi v - \partial_\vartheta \partial_\psi v + {\partial_\beta}^2 v - \partial_\vartheta \partial_\beta v$ **;**
- $\partial_x \partial_z u = \partial_x(\partial_\vartheta v) = \psi_x \cdot \partial_\vartheta \partial_\psi v + \beta_x \cdot \partial_\vartheta \partial_\beta v + \vartheta_x \cdot {\partial_\vartheta}^2 v = \partial_\vartheta \partial_\psi v + \partial_\vartheta \partial_\beta v$ **;**

Подставляем найденные производные в исходное уравнение **(#)**:

$$
{\partial_\psi}^2 v + 2 \cdot \partial_\beta \partial_\psi v + {\partial_\beta}^2 v - 2 \cdot (\partial_\beta \partial_\psi v - \partial_\vartheta \partial_\psi v + {\partial_\beta}^2 v - \partial_\vartheta \partial_\beta v) - 2 \cdot \partial_\vartheta \partial_\psi v + \partial_\vartheta \partial_\beta v +
$$
$$
+ \partial_\psi v + \partial_\beta v + \partial_\beta v - \partial_\vartheta v + 2 \cdot \partial_\vartheta v + v = 0 \,;
$$

Приведя подобные, получаем канонический вид исходного уравнения:

$$
{\partial_\psi}^2 v - {\partial_\beta}^2 v + \partial_\psi v + 2 \cdot \partial_\beta v + \partial_\vartheta v + v = 0 \,;
$$

Ответ:

Канонический вид исходного уравнения имеет вид:

$$
{\partial_\psi}^2 v - {\partial_\beta}^2 v + \partial_\psi v + 2 \cdot \partial_\beta v + \partial_\vartheta v + v = 0 \,.
$$