МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 2
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 5.17 (Вариант 14)

Привести к каноническому виду и упростить следующее уравнение:

$$a\partial_x^2 u + 4a\partial_x\partial_y u + a\partial_y^2 u + b\partial_x u + c\partial_y u + u = 0 \qquad (*)$$

Прежде всего, создадим уравнение характеристик с целью привести исходное уравнение (*) к каноническому виду.

Коэффициент при $\partial_x^2 u$ в уравнении $a(x, y) = a$

Коэффициент при $\partial_x\partial_y u$ это $2b(x, y) = 4a$

При $\partial_y^2 u \Rightarrow c(x, y) = a$

Тогда уравнение характеристик $a(x, y)dy^2 - 2b(x, y)dx\, dy + c(x, y)dx^2 = 0$ будет иметь вид:

$$ady^2 - 4adx\, dy + adx^2 = 0 \qquad (1)$$

Разделим уравнение (1) на dx^2 . Имеем:

$$ad(y')^2 - 4ay' + a = 0 \qquad (2)$$

Находим дискриминант и решаем (2) относительно y' как квадратное уравнение.

$D = (-4a)^2 - 4a * a = 16a^2 - 4a^2 = 12a^2$, тогда $y' = \frac{4a \pm \sqrt{12a^2}}{2a} = \frac{2a \pm \sqrt{3}a}{a} = 2 \pm \sqrt{3}$

Далее решаем уравнения:

$y' = 2 + \sqrt{3}$; $\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{3}$

$y' = 2 - \sqrt{3}$; $\frac{dy}{dx} = 2 - \sqrt{3}$

Это уравнения с разделяющимися переменными.

$$dy = (2+\sqrt{3})dx \Rightarrow \int dy = (2+\sqrt{3})\int dx + C \Rightarrow y = (2+\sqrt{3})x + C_1$$

$$dy = (2-\sqrt{3})dx \Rightarrow \int dy = (2-\sqrt{3})\int dx + C \Rightarrow y = (2-\sqrt{3})x + C_2$$

решения уравнения (2)

откуда $C_1 = y - (2+\sqrt{3})x$

$C_1 = y - (2-\sqrt{3})x$

независимые первые интегралы

Делаем замену:

$$\begin{cases} \xi = y - (2+\sqrt{3})x \\ \eta = y - (2-\sqrt{3})x \end{cases}$$

$\xi(x,y)$ и $\eta(x,y)$ - характеристики.

Произведем замену переменных в $(*)$:

$V(\xi(x,y), \eta(x,y)) = U(x,y)$

Тогда:

$U_x = V_\xi \ast \xi_x + V_\eta \ast \eta_x = V_\xi(-(2+\sqrt{3})) + V_\eta(\sqrt{3}-2)$

$U_y = V_\xi \ast \xi_y + V_\eta \ast \eta_y = V_\xi \ast 1 + V_\eta \ast 1 = V_\xi + V_\eta$

$U_{xx} = V_{\xi\xi} \ast \xi_x^2 + 2V_{\xi\eta} \ast \xi_x \ast \eta_x + V_{\eta\eta} \ast \eta_x^2 + V_\xi \ast \xi_{xx} + V_\eta \ast \eta_{xx} =$

$= V_{\xi\xi}(-2-\sqrt{3})^2 + 2V_{\xi\eta}(-(2+\sqrt{3}))(-(2-\sqrt{3})) + V_{\eta\eta} \ast (-(2-\sqrt{3}))^2 +$

$+ V_\xi \ast 0 + V_\eta \ast 0 = V_{\xi\xi}(7+4\sqrt{3}) + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \ast (7-4\sqrt{3})$;

$U_{yy} = V_{\xi\xi} \ast 1 + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta} \ast 1 + V_\xi \ast 0 + V_\eta \ast 0 = V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$;

$U_{xy} = V_{\xi\xi}(-(2+\sqrt{3})) + V_{\xi\eta}(-(2+\sqrt{3}))(-(2-\sqrt{3})) + V_{\eta\eta} \ast (-2+\sqrt{3}) +$

$+ V_\xi \ast 0 + V_\eta \ast 0$;

Итак, частные производные:

$$U = V\ ;$$
$$U_x = V_\xi(-(2+\sqrt{3})) + V_\eta(\sqrt{3}-2)\ ;$$
$$U_y = V_\xi + V_\eta\ ;$$
$$U_{xx} = V_{\xi\xi}(7+4\sqrt{3}) + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}(7-4\sqrt{3})\ ;$$
$$U_{yy} = V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}\ ;$$
$$U_{xy} = V_{\xi\xi}(-2-\sqrt{3}) + V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}(-2+\sqrt{3})\ ;$$

Подставим в ($\ast$).

Собираем подобные слагаемые в: $aU_{xx} + 4aU_{xy} + aU_{yy} + bU_x + cU_y + U = 0$;

$$V_\xi : \quad a*0 + 4a*0 + b*(-2-\sqrt{3}) + C*1\ ;$$
$$V_\eta : \quad a*0 + 4a*0 + b*(-2+\sqrt{3}) + C*1\ ;$$
$$V_{\xi\xi} : \quad a*(7+4\sqrt{3}) + 4a*(-2-\sqrt{3}) + a*1 = 0 \Rightarrow 0 = 0\ ;$$
$$V_{\eta\eta} : \quad a*(7-4\sqrt{3}) + 4a*(-2+\sqrt{3}) + a*1 = 0 \Rightarrow 0 = 0\ ;$$
$$V_{\xi\eta} : \quad a*2 + 4a*1 + a*2 = 8a\ ;$$

Как видим, коэффициенты для $V_{\xi\xi}$ и $V_{\eta\eta}$ тождественно равны 0.

Тогда имеем канонический вид уравнения ($\ast$).

$$8aV_{\xi\eta} + (b(-2-\sqrt{3}) + C)V_\xi + (b(-2+\sqrt{3}) + C)V_\eta + V(\xi,\eta) = 0;$$

Переходя к обозначениям

$$\partial_x U = U_x,\ \partial_y U = U_y,\ \ldots \text{etc.}$$
$$\partial_\xi V = V_\xi,\ \partial_\eta V = V_\eta,\ \partial_\xi\partial_\eta V = V_{\xi\eta},$$
$$\partial_\xi^2 V = V_{\xi\xi},\ \partial_\eta^2 V = V_{\eta\eta},$$

получим уравнение (канонический вид уравнения ($\ast$)):

$$8a\,\partial_\xi\partial_\eta V + (b(-2-\sqrt{3}) + C)\partial_\xi V + (b(-2+\sqrt{3}) + C)\partial_\eta V + V = 0;$$

Ответ

канонический вид исходного уравнения:

$$8a\,\partial_\xi\partial_\eta V + (b(-2-\sqrt{3}) + C)\partial_\xi V + (b(-2+\sqrt{3}) + C)\partial_\eta V + V = 0;$$