МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 5
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

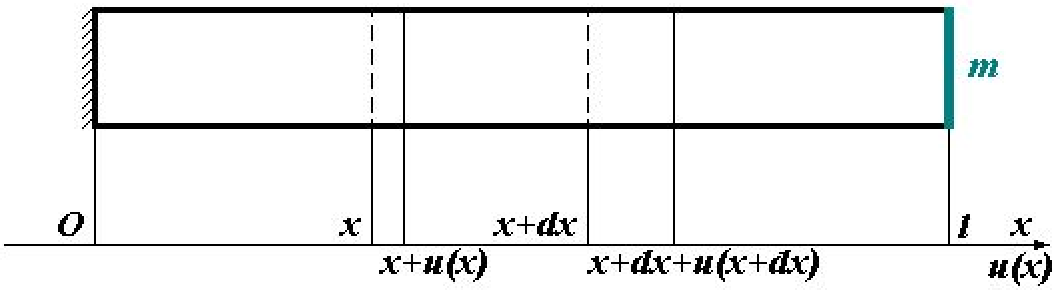
3.17. Сформулировать задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня постоянного сечения s длины l при произвольных начальных отклонениях и скоростях, если конец $x = 0$ закреплён, а конец $x = l$ свободен и к нему прикреплена сосредоточенная масса m.

1) выбрать функцию, характеризующую физический процесс,
2) вывести дифференциальное уравнение для этой функции,
3) вывести для неё граничные условия,
4) сформулировать начальные условия.

Направим ось Ox вдоль оси стержня, а начало координат выберем в точке его закрепления. Тогда свободный конец будет иметь координату $x = l$. В качестве функции, характеризующей физический процесс, выберем величину $u(x,t)$ продольного смещения поперечного сечения стержня, имевшего координату x.

Для вывода дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $u(x,t)$, рассмотрим малый участок стержня длины dx, ограниченный двумя поперечными сечениями x и $x+dx$.

На рисунке изображены положения этих двух сечений в произвольный момент времени t в процессе колебаний. Чтобы не загромождать рисунки, зависимость величин от времени не указывается.



Если смещения этих в момент времени t сечений равны, соответственно, $u(x,t)$ и $u(x+dx,t)$, то их координаты в этот момент времени будут равны, соответственно, $x+u(x,t)$ и $x+dx+u(x+dx)$. Следовательно, новая длина участка составит

$$x + dx + u(x+dx,t) - (x + u(x),t) = dx + u(x+dx,t) - u(x,t).$$

Значит, абсолютное удлинение участка будет равно

$$dx + u(x+dx,t) - u(x,t) - dx = u(x+dx,t) - u(x,t),$$

а относительное –

$$\varepsilon = \frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} \approx \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

В соответствии с законом Гука, механическое напряжение σ, возникающее в результате такого относительного удлинения, равно

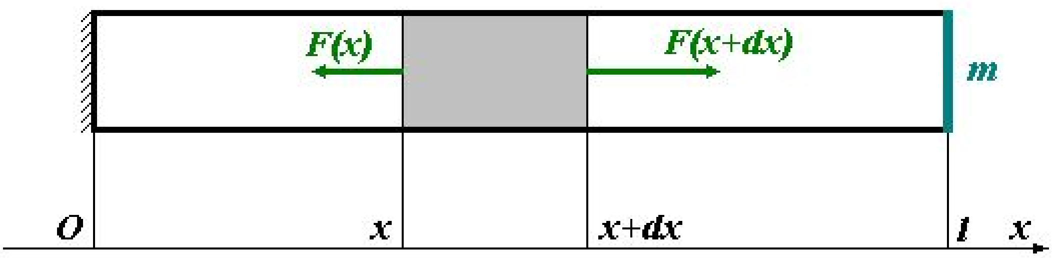
$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E - модуль Юнга материала стержня. Значит, сила натяжения T, действующая в каждом поперечном сечении, равна

$$T(x,t) = ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

где S - площадь поперечного сечения стержня.

Рассмотрим силы, действующие на произвольный (вообще говоря, другой) малый участок стержня. При малых колебаниях смещениями сечений стержня относительно равновесных положений можно пренебречь (см. рис.).



Со стороны остальных частей стержня на него действуют силы упругости. В частности, со стороны части, расположенной левее, действует сила $F(x,t)$, направленная в сторону отрицательных значений x, а со стороны части, расположенной правее, - сила $F(x+dx,t)$, направленная в положительном направлении.

Как установлено выше,

$$F(x,t) = T(x,t) = ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

$$F(x+dx,t) = T(x+dx,t) = ES\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона,

$$dm \cdot a = F(x + dx, t) - F(x, t),$$

где dm - масса участка, а a - его ускорение. По определению функции $u(x, t)$,

$$a = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

Если плотность материала стержня – ρ, то масса участка –

$$dm = \rho S dx.$$

Следовательно,

$$\rho S dx \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = ES\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - ES\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},$$

откуда

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{dx} \approx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

получаем дифференциальное уравнение продольных колебаний однородного стержня:

$$\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 \equiv \frac{E}{\rho}.$$

Если левый конец стержня закреплён, то в любой момент времени его отклонение равно нулю. Значит, выполняется граничное условие

$$u(x = 0, t) = 0.$$

Если к правому концу стержня $x = l$ прикреплена сосредоточенная масса m, то в любой момент времени она движется с ускорением

$$\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}.$$

При этом на неё действует в отрицательном направлении сила упругости со стороны стержня, равная

$$-T(l,t)=-ES\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}.$$

Из уравнения движения этой массы следует, что

$$m\cdot\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}=-ES\frac{\partial u(l,t)}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}+\frac{ES}{m}\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,$$

или

$$\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial t^2}+h\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,\quad h\equiv\frac{ES}{m}.$$

В случае произвольных начальных отклонений и скоростей обозначим через $\varphi(x)$ функцию, задающую начальные отклонения, а через $\psi(x)$ - функцию, задающую начальные скорости сечений стержня. Тогда задача о продольных колебаниях данного стержня ставится следующим образом:

$$\{u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0<x<l,\quad t>0;\ u|_{x=0}=0,\quad t\geq 0;\ (u_{tt}+hu_x)|_{x=l}=0,\quad t\geq 0;$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad 0\leq x\leq l;\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad 0\leq x\leq l.$$