МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 6
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 7.17. Найти общее решение уравнения:

$$\partial_x^2 u + 4\partial_x\partial_y u + 4\partial_y^2 u - \partial_x u - 2\partial_y u = 0. \qquad (*)$$

Решение.

Сначала приведем уравнение к каноническому виду.

Говорят, что уравнение в частных производных второго порядка

$A\partial_x^2 u + 2B\partial_x\partial_y u + C\partial_y^2 u + F\left(x, y, u, \partial_x u, \partial_y u\right) = 0$

в некоторой области принадлежит

гиперболическому типу, если детерминант $B^2 - AC > 0$;

параболическому типу, если детерминант $B^2 - AC = 0$;

эллиптическому типу, если детерминант $B^2 - AC < 0$.

У нас: $A = 1,\ B = 2,\ C = 4,$

детерминант $B^2 - AC = 2^2 - 1 \cdot 4 = 4 - 4 = 0.$

Следовательно, имеем уравнение параболического типа.

Уравнение характеристик $A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2 = 0$ имеет вид:

$(dy)^2 - 4\,dx\,dy + 4(dx)^2 = 0,$

по формуле квадрата разности: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$(dy - 2dx)^2 = 0,$

$$dy - 2dx = 0 \quad \Rightarrow \quad dy = 2dx \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int 2dx \quad \Rightarrow \quad y = 2x + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

Мы нашли характеристику: $y - 2x = C$,

Вводим новые переменные:

$$\begin{cases} \xi = y - 2x \\ \eta = y \end{cases}$$

Переменную η выбирали так, чтобы

$$\begin{vmatrix} \partial_x\xi & \partial_y\xi \\ \partial_x\eta & \partial_y\eta \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \left(\text{проверка: } \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = -2 \neq 0\right).$$

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$\partial_x\xi = -2, \quad \partial_y\xi = 1, \quad \partial_x\eta = 0, \quad \partial_y\eta = 1\,;$

$\partial_x u = \partial_\xi u \cdot \partial_x\xi + \partial_\eta u \cdot \partial_x\eta = -2\partial_\xi u\,;$

$\partial_y u = \partial_\xi u \cdot \partial_y\xi + \partial_\eta u \cdot \partial_y\eta = \partial_\xi u + \partial_\eta u\,;$

$\partial_x^2 u = \partial_x(\partial_x u) = \partial_x\left(-2\partial_\xi u\right) = -2\partial_\xi^2 u \cdot \partial_x\xi - 2\partial_\xi\partial_\eta u \cdot \partial_x\eta = 4\partial_\xi^2 u\,;$

$\partial_x\partial_y u = \partial_x\left(\partial_y u\right) = \partial_x(\partial_\xi u + \partial_\eta u) = \left(\partial_\xi^2 u + \partial_\eta\partial_\xi u\right) \cdot \partial_x\xi + \left(\partial_\xi\partial_\eta u + \partial_\eta^2 u\right) \cdot \partial_x\eta =$

$= -2\partial_\xi^2 u - 2\partial_\eta\partial_\xi u\,;$

$\partial_y^2 u = \partial_y\left(\partial_y u\right) = \partial_y\left(\partial_\xi u + \partial_\eta u\right) = \left(\partial_\xi^2 u + \partial_\eta\partial_\xi u\right) \cdot \partial_y\xi + \left(\partial_\xi\partial_\eta u + \partial_\eta^2 u\right) \cdot \partial_y\eta =$

$= \partial_\xi^2 u + \partial_\eta\partial_\xi u + \partial_\xi\partial_\eta u + \partial_\eta^2 u = \partial_\xi^2 u + 2\partial_\eta\partial_\xi u + \partial_\eta^2 u\,.$

Подставляем в исходное уравнение выражения для найденных производных:

$$4\partial_\xi^2 u + 4\left(-2\partial_\xi^2 u - 2\partial_\eta\partial_\xi u\right) + 4\left(\partial_\xi^2 u + 2\partial_\eta\partial_\xi u + \partial_\eta^2 u\right) - \left(-2\partial_\xi u\right) -$$

$$-2(\partial_\xi u + \partial_\eta u) = 0,$$

$$4\partial_\eta^2 u - 2\partial_\eta u = 0$$

разделив на 4 обе части равенства, получам канонический вид уравнения:

$$\partial_\eta^2 u - \frac{1}{2}\partial_\eta u = 0. \qquad (**)$$

Теперь найдем общее решение полученного уравнения (**).

СПОСОБ 1

Перепишем уравнение в виде:

$$\partial_\eta\left(\partial_\eta u - \frac{1}{2}u\right) = 0.$$

В этом случае уравнение можно проинтегрировать. С этой целью сделаем замену:

$$\partial_\eta u - \frac{1}{2}u = v.$$

Получим уравнение

$$\partial_\eta v = 0.$$

Интегрируя обе части по η, получаем:

$v(\xi,\eta) = \widetilde{C_1}$ или

$v(\xi,\eta) = \widetilde{C_1}(\xi)$

вместо постоянной интегрирования $\widetilde{C_1}$ берем $\widetilde{C_1}(\xi)$.

Так как $\partial_\eta u - \frac{1}{2}u = v,$ то уравнение для u будет следующим:

$$\partial_\eta u - \frac{1}{2}u = \widetilde{C_1}(\xi). \qquad (1)$$

Наше задание – найти функцию $u = u(\xi,\eta)$.

Пусть ξ – параметр.

Тогда $\partial_\eta u = \frac{du}{d\eta}$, получаем

$$\frac{du}{d\eta} - \frac{1}{2}u = \widetilde{C_1}(\xi) \qquad (2)$$

это неоднородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка (относительно переменной η).

Сначало решим однородное уравнение:

$$\frac{du}{d\eta} - \frac{1}{2}u = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{1}{2}u$$

это уравнение с разделющимися переменными.

Разделим обе части на u и умножаем на $d\eta$:

$$\frac{du}{u} = \frac{1}{2}d\eta$$

интегрируем обе части

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{1}{2}d\eta \qquad \Rightarrow \qquad \ln|u| = \frac{1}{2}\eta + \ln|C^*|$$

Получаем решение однородного уравнения (3):

$$u = C^* \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

Заменим C^* на функцию $C^*(\eta)$, тогда

$$u = C^*(\eta) \cdot e^{\frac{\eta}{2}} \qquad (4)$$

Продифференцируем последнее выражение по η:

$$\frac{du}{d\eta} = \left(C^*(\eta) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}\right)' = \left(C^*(\eta)\right)' \cdot e^{\frac{\eta}{2}} + C^*(\eta) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{\eta}{2}},$$

подставляем выражения для $\frac{du}{d\eta}$ и u в неоднородное уравнение (2):

$$\left(C^*(\eta)\right)' \cdot e^{\frac{\eta}{2}} + C^*(\eta) \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{\eta}{2}} - \frac{1}{2}C^*(\eta) \cdot e^{\frac{\eta}{2}} = \widetilde{C_1}(\xi),$$

$$\left(C^*(\eta)\right)' \cdot e^{\frac{\eta}{2}} = \widetilde{C_1}(\xi),$$

$$\left(C^*(\eta)\right)' = e^{-\frac{\eta}{2}} \cdot \widetilde{C_1}(\xi)$$

интегрируем обе части по η:

$$C^*(\eta) = \int e^{-\frac{\eta}{2}} \cdot \widetilde{C_1}(\xi)d\eta = \widetilde{C_1}(\xi)\int e^{-\frac{\eta}{2}}d\eta = -2\,\widetilde{C_1}(\xi) \cdot e^{-\frac{\eta}{2}} + C_2(\xi)$$

тут вместо постоянной интегрирования взяли $C_2(\xi)$.

Подставляем найденное выражение $C^*(\eta)$ в (4), получаем общее решение неоднородного уравнения (2) (а значит и уравнения (1)):

$$u = \left(-2\widetilde{C_1}(\xi) \cdot e^{-\frac{\eta}{2}} + C_2(\xi)\right) \cdot e^{\frac{\eta}{2}} = -2\widetilde{C_1}(\xi) + C_2(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

Обозначим $-2\widetilde{C_1}(\xi) \equiv C_1(\xi)$, тогда решение уравнения (**) будет иметь вид:

$$u(\xi,\eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

СПОСОБ 2

Пусть ξ – параметр, тогда

$$\partial_\eta^2 u = \frac{d^2u}{dx^2} = u'', \qquad \partial_\eta u = \frac{du}{d\eta} = u'$$

Следовательно, уравнение (**) имеет вид:

$$u'' - \frac{1}{2}u' = 0$$

т.е., имеем линейное дифференциальное уравнение (относительно функции u и переменной η) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Сопоставляя $u'' \to \lambda^2$, $u' \to \lambda$, получаем характетистическое уравнение:

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Корни действительные и разные, значит общее решение уравнения будет иметь вид:

$$u = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \eta} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \eta} = C_1 + C_2 \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

Так как ξ – параметр, то вместо постоянных C_1, C_2 берем $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$.
Таким образом, общее решение уравнения (**) такое:

$$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

Как видно, получили один и тот же вид решение уравнения (**).
Теперь вернемся к старым переменным.
Так как

$$\begin{cases} \xi = y - 2x \\ \eta = y \end{cases}$$

то общее решение исходного уравнения (*) такое:

$$u(x, y) = C_1(y - 2x) + C_2(y - 2x) \cdot e^{\frac{y}{2}}$$

Ответ:

$$u(x, y) = C_1(y - 2x) + C_2(y - 2x) \cdot e^{\frac{y}{2}}$$

$$\partial_\eta^2 u - \frac{1}{2}\partial_\eta u = 0. \qquad (**)$$

Теперь найдем общее решение полученного уравнения (**).

СПОСОБ 3

Полагая, что ξ – параметр, проводим замену: $\partial_\eta u = v$

Тогда уравнение (**) имеет вид:

$$v' - \frac{1}{2}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{d\eta} = \frac{1}{2}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}d\eta$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{1}{2}d\eta \quad \Rightarrow$$

$$\ln|v| = \frac{\eta}{2} + \ln\left|\tilde{C}\right| \quad \Rightarrow \quad v = \tilde{C} \cdot e^{\frac{\eta}{2}}.$$

Вместо постоянной $\tilde{C}$ берем $\tilde{C}(\xi)$ и получаем:

$$v = \tilde{C}(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

Тогда

$$\partial_\eta u = \tilde{C}(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}},$$

интегрируя, находим

$$u = \int \tilde{C}(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}} d\eta = 2\tilde{C}(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}} + C_1,$$

вместо постоянной C_1 берем $C_1(\xi)$ и обозначим $2\tilde{C}(\xi) \equiv C_2(\xi)$.

Получаем общее решение уравнения (**):

$$u(\xi, \eta) = C_1(\xi) + C_2(\xi) \cdot e^{\frac{\eta}{2}}$$

https://drive.google.com/file/d/1BYuHUnzgheMhVWGrDMwcxhTCTXdaGl73/view
https://drive.google.com/file/d/1FwkhcipTIvnPSjN4SjRV8Pg4K1T1dqmS/view