МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
## **Лабораторная работа № 9**
## **Вариант 14**

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
**Кадакова Надежда**

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
**Корзюк Виктор Иванович**

Минск 2017

**9.29** $\partial_t^2 u = a^2 \Delta u, \quad u(x,0) = e^r, \ \partial_t u(x,0) = e^r;$

Поставленную задачу

$$\{\partial_t^2 u = a^2 \Delta u, \ u(x,0) = e^r, \ u_t(x,0) = e^r \}$$

можно записать в виде

$$\{\partial_t^2 u = a^2 \Delta u + f(x,t), \ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x)\},$$

где

$$f(x,t) \equiv 0, \quad \varphi(x) = \psi(x) = e^r.$$

Решение такой задачи выражается формулой Кирхгофа

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{|\xi - x| < at} \frac{1}{|\xi - x|} f(\xi, t - \tfrac{|\xi - x|}{a}) d\xi + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| = at} \psi(\xi) dS +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t (\frac{1}{t} \int\limits_{|\xi - x| = at} \varphi(\xi) dS).$$

В данном случае

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{|\xi - x| = at} e^r dS + \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t (\frac{1}{t} \int\limits_{|\xi - x| = at} e^r dS),$$

или

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} I(x,t) + \frac{1}{4\pi a^2} \partial_t [\tfrac{1}{t} I(x,t)],$$

где

$$I(x,t) = \int\limits_{|\xi - x| = at} e^r dS.$$

Пусть

$$|x| > 0, \quad t > 0.$$

Направим ось $OZ$ на точку $x$. Тогда

$$x = (0, 0, |x|).$$

Интеграл будем вычислять в сферической системе координат, начало которой совпадает с точкой $x$, а ось сонаправлена с осью $OZ$. Тогда на сфере $|\xi - x| = at$

$$\xi = (at\sin\theta\cos\varphi, at\sin\theta\sin\varphi, |x| + at\cos\theta),$$

$$|\xi|^2 = a^2 t^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + a^2 t^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + |x|^2 + 2at|x|\cos\theta + a^2 t^2 \cos^2\theta ==$$

$$== a^2 t^2 + |x|^2 + 2at|x|\cos\theta,$$

и

$$\int\limits_{|\xi-x|=at} e^{|\xi|}dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2+2at|x|\cos\theta}}\sin\theta\, d\theta d\varphi = 2\pi\int\limits_0^{\pi} e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2+2at|x|\cos\theta}}\sin\theta\, d\theta.$$

Выполним замену

$$a^2t^2 + |x|^2 + 2at|x|\cos\theta = z = z(\theta).$$

Если полярный угол изменяется в пределах $0 \le \theta \le \pi$, то его косинус -

$$-1 \le \cos\theta \le 1,$$

причём оба промежутка проходятся в противоположных направлениях. Отсюда

$$a^2t^2 + |x|^2 - 2at|x| \le z \le a^2t^2 + |x|^2 + 2at|x|,$$
$$(|x| - at)^2 \le z \le (|x| + at)^2.$$

Кроме того,

$$dz = -2at|x|\sin\theta\, d\theta,$$
$$\sin\theta\, d\theta = -\frac{1}{2at|x|}dz.$$

Значит,

$$2\pi\int\limits_0^{\pi} e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2+2at|x|\cos\theta}}\sin\theta\, d\theta = -\frac{\pi}{at|x|}\int\limits_{(|x|+at)^2}^{(|x|-at)^2} e^{\sqrt{z}}dz = \frac{\pi}{at|x|}\int\limits_{(|x|-at)^2}^{(|x|+at)^2} e^{\sqrt{z}}dz.$$

Вычисляя полученный интеграл, находим:

$$\int e^{\sqrt{z}}dz = \int 2\sqrt{z}\cdot\frac{1}{2\sqrt{z}}e^{\sqrt{z}}dz = 2\int\sqrt{z}\,d(e^{\sqrt{z}}) = 2\sqrt{z}e^{\sqrt{z}} - 2\int e^{\sqrt{z}}d(\sqrt{z}) ==$$

$$== 2\sqrt{z}e^{\sqrt{z}} - 2\int d(e^{\sqrt{z}}) = 2\sqrt{z}e^{\sqrt{z}} - 2e^{\sqrt{z}} + const = 2(\sqrt{z} - 1)e^{\sqrt{z}} + const,$$

$$\int\limits_{(|x|-at)^2}^{(|x|+at)^2} e^{\sqrt{z}}dz = 2(\sqrt{z} - 1)e^{\sqrt{z}}\Big|_{z=(|x|-at)^2}^{(|x|+at)^2} = 2[(|x| + at - 1)e^{|x|+at} - (||x| - at| - 1)e^{||x|-at|}].$$

Таким образом, при $|x| > 0,\ \ t > 0$

$$I(x,t) = \frac{\pi}{at|x|}\int\limits_{(x-at)^2}^{(x+at)^2} e^{\sqrt{z}}dz = \frac{2\pi}{at|x|}[(|x| + at - 1)e^{|x|+at} - (||x| - at| - 1)e^{||x|-at|}].$$

Если $|x| = 0$ либо $t = 0$, то

$$2\pi\int\limits_0^{\pi} e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2+2at|x|\cos\theta}}\sin\theta\, d\theta = 2\pi e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2}}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = 4\pi e^{\sqrt{a^2t^2+|x|^2}}.$$

Учитывая, что $|x| = r$, результат можно записать в виде

$$I(x,t) = \{4\pi e^{\sqrt{a^2t^2+r^2}},\ \ rt = 0,\ \ \tfrac{2\pi}{atr}[(r+at-1)e^{r+at} - (|r-at|-1)e^{|r-at|}],\ \ rt > 0\},$$

и полученное выражение не зависит от направления оси $OZ$.

В содержательном случае $rt > 0$ результат можно переписать в виде

$$\tfrac{a}{4\pi}I(x,t) = \{\tfrac{(r+at-1)e^{r+at}-(r-at-1)e^{r-at}}{2rt},\ \ 0 < at < r,\ \ \tfrac{(r+at-1)e^{r+at}-(at-r-1)e^{at-r}}{2rt},\ \ 0 < r < at\}.$$

При этом, если

$$0 < at < r,$$

то

$$(r+at-1)e^{r+at} - (|r-at|-1)e^{|r-at|} = (r+at-1)e^{r+at} - (r-at-1)e^{r-at} ==$$

$$== e^r[(r-1)(e^{at}-e^{-at}) + at(e^{at}+e^{-at})] = 2e^r[(r-1)sh\ at\ + atch\ at\ ],$$

а если

$$0 < r < at,$$

то

$$(r+at-1)e^{r+at} - (|r-at|-1)e^{|r-at|} = (r+at-1)e^{r+at} + (r-at+1)e^{at-r} ==$$

$$== e^{at}[r(e^r+e^{-r}) + (at-1)(e^r-e^{-r})] = 2e^{at}[rch\ r\ + (at-1)sh\ r\ ].$$

Значит,

$$\tfrac{a}{4\pi}I(x,t) = \{\tfrac{e^r}{r}[(r-1)\tfrac{sh\ at}{at} + ch\ at\ ],\ \ 0 < at < r,\ \ \tfrac{e^{at}}{at}[(at-1)\tfrac{sh\ r}{r} + ch\ r\ ],\ \ 0 < r < at.$$

Следовательно, если

$$0 < at < r,$$

то

$$\partial_t[\tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{a}{4\pi}I(x,t)] = \{\tfrac{e^r}{r}[(r-1)\tfrac{sh\ at}{at} + ch\ at\ ]\}'_t = \tfrac{e^r}{r}[(r-1)\tfrac{atch\ at-2sh\ at}{at^3} + \tfrac{atsh\ at-ch\ at}{t^2}] =$$

$$= \tfrac{e^r}{rt^2}[(a^2t^2-2r+2)\tfrac{sh\ at}{at} + (r-2)ch\ at\ ],$$

а если

$$0 < r < at,$$

то

$$\partial_t[\tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{a}{4\pi}I(x,t)] = \{\tfrac{e^{at}}{at^2}[(at-1)\tfrac{sh\ r}{r} + ch\ r\ ]\}'_t = \tfrac{(at-2)e^{at}}{at^3}[(at-1)\tfrac{sh\ r}{r} + ch\ r\ ] + \tfrac{e^{at}}{at^2}\cdot a\tfrac{sh\ r}{r} =$$

$$= \tfrac{e^{at}}{at^3}[(a^2t^2-2at+2)\tfrac{sh\ r}{r} + (at-2)ch\ r\ ].$$

Соответственно, если

$$0 < at < r,$$

то

$$u(x,t) = \tfrac{1}{a^3}\{\tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{a}{4\pi}I(x,t) + \partial_t[\tfrac{1}{t}\cdot\tfrac{a}{4\pi}I(x,t)]\} == \tfrac{1}{a^3}\{\tfrac{e^r}{rt}[(r-1)\tfrac{sh\ at}{at} + ch\ at\ ] +$$

$$= \frac{e^r}{rt^2}[(a^2t^2 - 2r + 2)\frac{sh\ at}{at} + (r-2)ch\ at\ ]\} ==$$

$$== \frac{e^r}{a^3rt^2}\{[a^2t^2 + (r-1)(t-2)]\frac{sh\ at}{at} + (r+t-2)ch\ at\ \},$$

а если

$$0 < r < at,$$

то

$$u(x,t) = \frac{1}{a^3}\{\frac{1}{t}\cdot\frac{a}{4\pi}I(x,t) + \partial_t[\frac{1}{t}\cdot\frac{a}{4\pi}I(x,t)]\} == \frac{1}{a^3}\{\frac{e^{at}}{at^2}[(at-1)\frac{sh\ r}{r} + ch\ r\ ] +$$

$$+ \frac{e^{at}}{at^3}[(a^2t^2 - 2at + 2)\frac{sh\ r}{r} + (at-2)ch\ r\ ]\} ==$$

$$\frac{e^{at}}{a^4t^3}\{[a^2t^2 + (at-1)(t-2)]\frac{sh\ r}{r} + [(a+1)t-2]ch\ r\ \}.$$

Таким образом, решение задачи -

$$u(x,t) = \{\frac{e^r}{a^3rt^2}\{[a^2t^2 + (r-1)(t-2)]\frac{sh\ at}{at} + (r+t-2)ch\ at\ \},\quad 0 < at < r,$$

$$\frac{e^{at}}{a^4t^3}\{[a^2t^2 + (at-1)(t-2)]\frac{sh\ r}{r} + (at+t-2)ch\ r\ \},\quad 0 < r < at,$$

или

$$u(x,t) = \frac{e^{s_>}}{a^3t^2s_>}\{[a^2t^2 + (s_> - 1)(t-2)]\frac{sh\ s_<}{s_<} + (s_> + t - 2)ch\ s_<\ \},$$

где

$$s_> = max\ (r, at)\ ,\quad s_< = min\ (r, at)\ .$$