МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 8
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 7.3. *Решить следующие задачи Гурса:*

7.50 $\partial_x^2 u + 6\,\partial_x\partial_y u + 5\,\partial_y^2 u = 0, \quad x, y < 5\,x,\; x > 0, \quad u(x,x) = \cos x,\; u(x,5x) = \cos 2\,x.$

$$\{\partial_x\partial_x u + 6\partial_x\partial_y u + 5\partial_y\partial_y u + \partial_x u + 4\partial_y u = 0,\;\; x < y < 5x,\;\; x > 0;\; u(x,x) = cos\,x\,,\; u(x,5x) = cos\,2x\,.$$

Данное уравнение имеет всюду гиперболический тип, т.к. его дискриминант

$$\Delta = 3^2 - 1\cdot 5 = 4 > 0.$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 6dxdy + 5(dx)^2 = 0$$

может быть записано в виде

$$(dy - dx)(dy - 5dx) = 0,$$

откуда

$$d(y - x)\cdot d(y - 5x) = 0$$

и два первых интеграла -

$$y - x = const,\;\; y - 5x = const.$$

Следовательно, в качестве характеристических переменных можно взять

$$y - x = \xi,\;\; y - 5x = \eta.$$

При этом обратная замена -

$$x = \tfrac{\xi-\eta}{4},\;\; y = \tfrac{5\xi-\eta}{4}.$$

В гиперболическом случае достаточно выразить смешанную производную по характеристическим переменным. По формулам производных сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{5}{4}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial y} =- \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} = (-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y})(\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{5}{4}\frac{\partial}{\partial y}) =- \frac{1}{16}(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} + 5\frac{\partial}{\partial y}) ==- \frac{1}{16}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2}{\partial y^2}).$$

Значит,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + 5\frac{\partial^2}{\partial y^2} =- 16\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}.$$

Поэтому, если положить

$$v(\xi,\eta) = u(x,y),$$

то

$$\partial_x\partial_x u + 6\partial_x\partial_y u + 5\partial_y\partial_y u =- 16\partial_\xi\partial_\eta v,$$

и новая неизвестная функция будет удовлетворять уравнению

$$\partial_\xi\partial_\eta v = 0.$$

Общее решение этого уравнения выражается через две произвольные дважды дифференцируемые функции одной переменной

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta).$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения -

$$u(x, y) = f(y - x) + g(y - 5x).$$

Из первого условия следует, что

$$u(x, x) = f(0) + g(-4x) = \cos x\ .$$

Пусть

$$-4x \equiv z,\ \ z < 0.$$

Тогда

$$g(z) = \cos\tfrac{z}{4} - f(0),\ \ z < 0.$$

Аналогично, из другого условия -

$$u(x, 5x) = f(4x) + g(0) = \cos 2x\ .$$

Положим

$$4x \equiv z,\ \ z > 0.$$

Тогда

$$f(z) = \cos\tfrac{z}{2} - g(0),\ \ z > 0.$$

Из двойного неравенства

$$x < y < 5x$$

следует, что

$$y - x > 0,\ \ y - 5x < 0.$$

Тогда

$$f(y - x) + g(y - 5x) = \cos\tfrac{y-x}{2} - g(0) + \cos\tfrac{y-5x}{4} - f(0),$$

причём левая часть определена при всех допустимых x и y.

Обе функции непрерывны. Тогда в пределе при $x \to 0, \quad y \to 0$

$$f(0) + g(0) = 1 - g(0) + 1 - f(0),$$

откуда

$$f(0) + g(0) = 1.$$

Окончательно, решение поставленной задачи Гурса -

$$u(x, y) = cos\,\frac{y-x}{2} + cos\,\frac{y-5x}{4} - 1.$$