МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 7
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 7.2. *Найти наибольшую область, в которой поставленная задача имеет единственное решение, и найти это решение.*

7.42 $\partial_x\partial_x u + 6\,\partial_x\partial_y u + 5\,\partial_y\partial_y u + \partial_x u + 4\,\partial_y u = 0, \quad |x| < \infty, \quad u(x, e^x) = x,\ \partial_y u(x, e^x) = 1.$

Данное уравнение имеет всюду гиперболический тип, т.к. его дискриминант

$$\Delta = 3^2 - 1\cdot 5 = 4 > 0.$$

Характеристическое уравнение

$$(dy)^2 - 6dxdy + 5(dx)^2 = 0$$

может быть записано в виде

$$(dy - dx)(dy - 5dx) = 0,$$

откуда

$$d(y - x)\cdot d(y - 5x) = 0$$

и уравнения характеристик -

$$y - x = const, \quad y - 5x = const.$$

Множество всех характеристик данного уравнения образуют два семейства прямых

$$y = x + C_1, \quad y = 5x + C_2, \quad -\infty < C_{1,2} < +\infty.$$

Как известно, решение задачи для уравнения 2-го порядка гиперболического типа с гладкими начальными условиями на некоторой гладкой кривой L существует и единственно в криволинейной треугольной области, ограниченной двумя характеристиками, проходящими через некоторую точку (x_0, y_0), и отрезком кривой L, который они ограничивают, если характеристики не являются касательными к кривой и каждая из них пересекают кривую в единственной точке. Соответственно, наибольшая область, в которой решение существует и единственно, является объединением всех таких криволинейных треугольников.

В данном случае, если какая-либо прямая вида $y = x + C$ пересекает кривую $y = e^x$ в некоторой точке $x = x_1$, то число x_1 является корнем уравнения

$$e^x - x = C.$$

В то же время, функция

$$f(x) = e^x - x$$

имеет единственный минимум $f_{min} = 1$ в точке $x_{min} = 0$, т.к. её производная

$$f'(x) = e^x$$

монотонно возрастает, а при $x = 0$ обращается в нуль. Если корень x_1 существует, то $C > f_{min} = 1$, причём неравенство – строгое, т.к. прямая не является касательной. Но в таком случае на каждом из лучей $(-\infty; 0]$ и $[0;+\infty)$ функция

$$g(x) = e^x - x - C$$

непрерывна, монотонна и принимает значения разных знаков на концах. Значит, на каждом из этих двух промежутков она имеет точно один нуль, т.е. вместе с корнем x_1 должен существовать ещё точно один корень x_2.

Таким образом, любая прямая вида $y = x + C$, не являющаяся касательной к кривой $y = e^x$, и пересекающая её в какой-либо точке, пересекает её ещё в одной точке.

Аналогичное утверждение верно и в отношении прямых вида $y = 5x + C$, т.к функция

$$h(x) = e^x - 5x$$

также имеет единственный минимум и монотонна по обе стороны от него.

Значит, некасательные характеристики уравнения либо не пересекают кривую $y = e^x$, либо пересекают её в 2-х точках. Отсюда следует, что, поставленная задача нигде не имеет единственного решения.