МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 10
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 8.19
Решить задачу Коши методом Римана

$$\partial_x\partial_y u + \partial_x u = 0,\ x > 0,\ y > x^3 - 2$$
$$u(x, x^3 - 2) = 1$$
$$\partial_y u(x, x^3 - 2) = 1$$

$$u(x_0, y_0) = \tfrac{1}{2}(uv)_P + \tfrac{1}{2}(uv)_Q + \iint vf dx dy + \tfrac{1}{2}\int\limits_{PQ} (v\partial_x u - u\partial_x v + 2buv)dx -$$
$$-(v\partial_y u - u\partial_y v + 2auv)dy$$

В нашем уравнении

$$a = 1, b = c = 0,\ f(x, y) \equiv 0$$

Функция Римана v. Тогда решение:

$$\partial_x\partial_y v + (av)_x - b(v)_y + cv = 0$$

Решаем задачу Гурса

$$\partial_x\partial_y u + \partial_x u = 0\ \ (*)$$
$$v(x_0, y) = e^{\int\limits_{y0}^{y} a dy}$$
$$v(x, y_0) = e^{\int\limits_{x0}^{x} b dx}$$

при $a = 1, b = 0$

имеем $\quad v(x_0, y) = e^{y - y0}\quad (**)$
$\quad v(x, y_0) = 1$

Интегрируя уравнение (*), получаем:

$$v(x, y) = f_1(x)e^y + f_2(y)$$

Убеждаемся подстановкой:

$$\partial_x v = (f_1(x)e^y + f_2(y))'_x = f_1{}'(x)e^y$$
$$\partial_x\partial_y u = ([f_1(x)e^y + f_2(y)]'_x)'_y = (f_1{}'(x)e^y)'_y = f_1{}'(x)e^y$$
$$\partial_x\partial_y v - \partial_x v = f_1{}'(x)e^y - f_1{}'(x)e^y \equiv 0$$

Имеем систему уравнений, воспользовавшись условиями (**):

$$f_1(x)e^y + f_2(y) = e^{y - y0}\ \ \&\&\ f_1(x)e^y + f_2(y) = 1$$

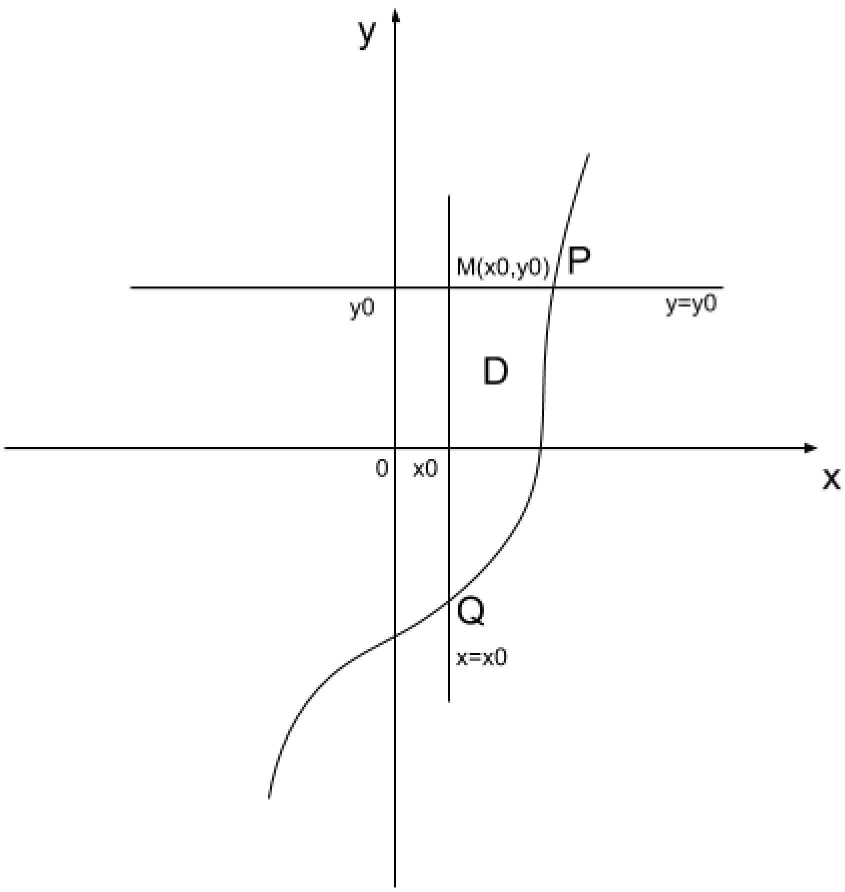
Отсюда имеем

$$f_1(x)e^{y0} + f_2(y) = 1$$

Сделаем рисунок. P и Q - это точки пересечения линии

$$y = x^3 - 2$$

с характеристиками $y = y_0$ и $x = x_0$



$x > 0$

$y > x^3 - 2$

точка P имеет координаты $P(\sqrt[3]{2+y_0}; y_0)$

точка Q имеет координаты $Q(x_0,\ x_0^3 - 2)$

В таком случае

$\frac{1}{2}(uv)_P = \frac{1}{2}(1 * 1) = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}(uv)_Q = \frac{1}{2}(1 * 1) = \frac{1}{2}$

Здесь использовалось начальное условие.

Для точки P имеем $x = \sqrt[3]{2+y_0}$, $u(x, y_0) = 1$

Для точки Q имеем $u(x_0,\ x_0^3 - 2) = 1$

$\iint vf dxdy = \iint 0 * v dxdy = 0$

Теперь считаем криволинейные интегралы

т.к $v(x,y)=f_1(x)e^y+f_2(y)$, то $\partial_x v=f_1{}'(x)e^y$, $\partial_y v=f_1(x)e^y+f_2{}'(y)$

$U_x|_{y=x^3-2}=1'-1*(x^3-2)'=-3x^2$

$$\frac{1}{2}\int_{PQ}(v\partial_x u-u\partial_x v+2*0*uv)dx-(v\partial_y u-u\partial_y v+2uv)dy=\frac{1}{2}\int_{PQ}((f_1(x)e^y+f_2(y))*1-$$

$$-1*(f_1(x)e^y)dx-(f_1(x)e^y+f_2(y))*(3x^2)-1(f_1(x)e^y+2*1*(f_1(x)e^y+f_2(y))*3x^2)dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x_0^3-2}(f_2(y)-3x^2(f_1(x)e^y+2f_1(x)e^y+2f_2(y)))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0^3-2}\left[f_2(x^3-2)-3x^2*3(f_1(x)e^{x^3-2}+6x^2f_2(x^3-2)\right]dx$$