МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Лабораторная работа № 1
Вариант 14

Выполнила
студентка 3 курса 5 группы
Кадакова Надежда

Преподаватель
доктор физ.-мат. наук
профессор
Корзюк Виктор Иванович

Минск 2017

Задание 2.1 (Вариант 14)

Используя формулу Остроградского проинтегрировать по частям следующее выражение:

$$\int_Q (\partial_{x0}u + a^2 \sum_{j=1}^{n} \partial_{xj}^2\, u)\, vdx\,,\ x = (x_0, \ldots , x_n) \in \Re^{n+1}, u, v \in C^2(\overline{Q}), a^2 \in \Re$$

Дополнительные сведения.

В ходе решения будут применены следующие формулы:

$\int div\tau\, dx = \int_{\partial Q} (\tau, \upsilon) ds$ - формула *Остроградского* (*)

$\int_Q \Delta uvdx = \int_{\partial Q} v\partial_\gamma u - \int_{\partial Q} u\partial_\gamma v + \int_{\partial} u\Delta vdx$ (**) , где $\Delta v = div(grad\, u)$ - оператор Лапласа.

$v\ \cdot \partial_\gamma u = (vgrad\, u,\ \gamma)$ - скалярное произведение единичного вектора γ к поверхности ∂Q и $vgrad\, u$.

Аналогично, $u\ \cdot \partial_\gamma v = (ugrad\, v,\ \gamma)$.

Решение.

$$I = \int_Q (\partial_{x0}u + a^2 \sum_{j=1}^{n} \partial_{xj}^2\, u)\, vdx\,,\ x = (x_0, \ldots , x_n) \in \Re^{n+1}, u, v \in C^2(\overline{Q}), a^2 \in \Re$$

$\overline{Q}$ - замыкание области Q, то есть множество, содержащее точки области Q и границу ∂Q этой области.

Из вышесказанного следует, что:

$\overline{Q} = Q \cup \partial Q$

$\partial_{xj}^2\, u$ - это вторая производная (частная) по x_j функции u.

Тогда, $\sum_{j=0}^{n} \partial_{xj}^2\, u = \Delta u.$

В выражении $\sum_{j=1}^{n} \partial_{xj}^2 u$ прибавим и вычтем $\partial_{x0}^2 u$. Получим:

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_{xj}^2 u + \partial_{x0}^2 u - \partial_{x0}^2 u = \underbrace{\partial_{x0}^2 u + \partial_{x1}^2 u + \partial_{x2}^2 u + \ldots + \partial_{xn}^2 u}_{\Delta u} - \partial_{x0}^2 u$$

Тогда имеем: $\sum_{j=1}^{n} \partial_{xj}^2 u + \partial_{x0}^2 u - \partial_{x0}^2 u = \Delta u - \partial_{x0}^2 u$ (***)

Подставив (***) в исходное выражение, получаем:

$$I = \int_{Q} (\partial_{x0} u + a^2(\Delta u - \partial_{x0}^2 u)) v dx$$

Применяя формулы (*), (**), а также (***), имеем:

$$I = \underbrace{\int_{Q} (\partial_{x0} u - \partial_{x0}^2 u) v dx}_{I_1} + \underbrace{a^2 \int_{Q} \Delta u v dx}_{I_2} = I_1 + I_2 ,$$

где $I_2 = a^2 \left[\int_{\partial Q} v \partial_{\gamma} u - \int_{\partial Q} u \partial_{\gamma} v + \int_{\partial} u \Delta v dx \right]$.

Окончательно получаем:

$$I = I_1 + I_2 = \int_{Q} (\partial_{x0} u - \partial_{x0}^2 u) v dx + a^2 \left[\int_{\partial Q} v \partial_{\gamma} u - \int_{\partial Q} u \partial_{\gamma} v \right] + a^2 \int_{\partial} u \Delta v dx .$$