

UE Probabilité et Statistique - Mathématiques

Devoir Maison n°8

Vincent Escoffier, Adrien Jallais, Théo Martel, Louis Muzellec.

15 mai 2022

Contents

Préparation de l'environnement	1
Exercice 1	2
Contexte	2
Intervalle de confiance (IC) unilatéral pour λ	2
Peut-on accepter l'hypothèse que $\lambda = 1$?	4
Exercice 2	5
Contexte	5
Description du modèle de données	5
Observation ponctuelle	5
Point de vue du fabricant (TH_1)	5
Point de vue du client (TH_2)	6
Commentaires	6
Exercice 3	7
Contexte	7
Estimation du paramètre θ	7
Estimation ponctuelle du paramètre θ	8

Préparation de l'environnement

R et Rstudio seront utilisés pour la rédaction de ce DM, ainsi que les packages suivants :

```
library(readr)
library(dplyr)
library(ggplot2)
```

Exercice 1

Contexte

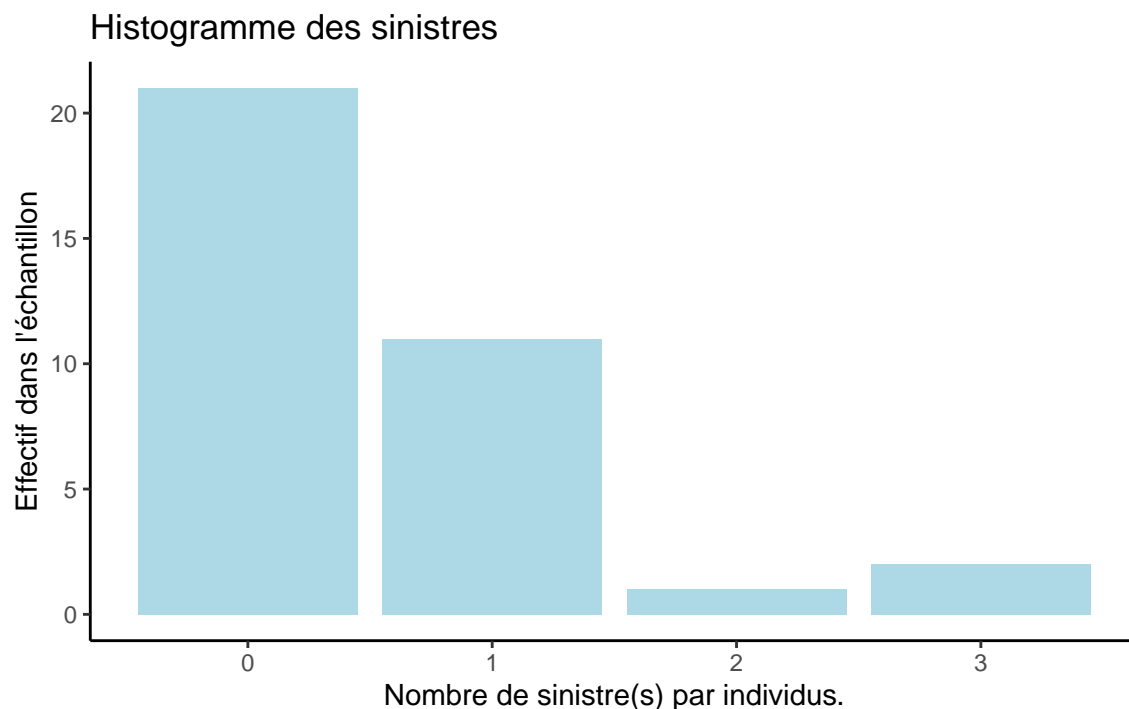
Soit X , la variable aléatoire représentant le nombre d'accidents par assuré. X est une variables aléatoire discrète et il est admis que l'occurrence des sinistres X suit une loi de Poisson pour laquelle on recherche le paramètre inconnu $\lambda > 0$ (notée \mathcal{P}_λ).

Pour cela, on a disposition un échantillon aléatoire bernouillien $\underline{X}_n = (X_1 \dots X_n)$, $n \geq 1$. Le modèle d'échantillonnage associé est le suivant : $(\mathbb{N}, (\mathcal{P}_\lambda)_{\lambda>0})^n$.

La statistique de test associée à cet échantillon est $n\bar{X}_n$, qui représente le nombre total d'observations.

Description des données

L'histogramme suivant résumant la dispersion de nos données :



L'effectif de l'échantillon est de 35. A partir de $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=0}^n x_i}{n} = 0.54$, on a $n\bar{X}_n = 19$.

Intervalle de confiance (IC) unilatéral pour λ

Pour rechercher une estimation de λ , on peut utiliser, à distance finie, la fonction pivotale $n\bar{X}_n$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$: $n\bar{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{P}_{n\lambda}$.

Notre modèle étant discret, avec le livret du module 2 du cours (page 45), on peut déduire l'intervalle de confiance par excès du paramètre λ :

$$IC_{\underline{X}_n}^{1-\alpha+}(\lambda) = \left[\frac{\chi_{2n\bar{X}_n}^2(\alpha_2)}{2n}; \frac{\chi_{2(n\bar{X}_n+1)}^2(1-\alpha_1)}{2n} \right] \text{ avec } \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 : (IC_1)$$

Or la table statistique des fractiles de la loi du χ^2 fournie, ne nous permet pas de connaître les fractiles d'un χ^2 de degré de liberté supérieur à 30. En effet, on a $2n\bar{X}_n = 38$ et $2(n\bar{X}_n + 1) = 40$. Nous ne pouvons donc utiliser l' IC_1 .

Ainsi on considérera l'effectif de notre échantillon grand. Dès lors, on donne la fonction pivotale asymptotique suivante :

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\bar{X}_n}} \xrightarrow{CL} N(0, 1)$$

On en déduit donc un intervalle de confiance par excès (IC_2) asymptotique, en utilisant les fractiles de loi normale :

$$IC_{\bar{X}_n}^{1-\alpha, \text{asympt}}(\lambda) = \left[\bar{X}_n - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}; \bar{X}_n + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} \right] : (IC_2)$$

Dans la suite de cet exercice, nous utiliserons l' IC_2 pour l'estimation du paramètre λ .

1. Calcul d'un interval de confiance asymptotique unilatéral gauche de niveau 95% pour λ (IC_g)

On obtient un IC_g tel que :

$$\begin{aligned} IC_{\bar{X}_n}^{1-\alpha, \text{asympt}}(\lambda) &= \left[\bar{X}_n - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} < \lambda \right] : (1) \\ (1) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = \left[0,543 - Z_{1-\frac{0,05}{2}} \times \sqrt{\frac{0,543}{35}} < \lambda \right] \\ (1) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = \left[0,543 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,543}{35}} < \lambda \right] \\ (1) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = [0,298 < \lambda] \end{aligned}$$

2. Calcul d'un interval de confiance asymptotique unilatéral droit de niveau 95% pour λ (IC_d)

On obtient un IC_d tel que :

$$\begin{aligned} IC_{\bar{X}_n}^{1+\alpha, \text{asympt}}(\lambda) &= \left[\bar{X}_n + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}} > \lambda \right] : (2) \\ (2) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = \left[0,543 + Z_{1-\frac{0,05}{2}} \times \sqrt{\frac{0,543}{35}} > \lambda \right] \\ (2) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = \left[0,543 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,543}{35}} > \lambda \right] \\ (2) &\Leftrightarrow IC_{\bar{X}_n}^{0,95, \text{asympt}}(\lambda) = [0,787 > \lambda] \end{aligned}$$

Commentaires

L'utilisation d'intervalles de confiance unilatéraux est inadapté pour les lois symétriques comme la loi normale, si nous en avons eu la possibilité, il aurait fallu utiliser l' IC_1 .

Peut-on accepter l'hypothèse que $\lambda = 1$?

Nous répondrons à cette question, en évaluant un test d'hypothèse.

Test d'hypothèses

On pose $H_0 : \lambda = 1$ contre $H_1 : \lambda \neq 1$.

Observations

On observe que selon H_0 , on a $\lambda \notin IC_g$ et $\lambda \notin IC_d$. Autrement dit $\lambda \notin [0.298; 0.787]$

Décision

On rejette H_0 , jusqu'à preuve du contraire.

Conclusion

Par conséquent, on ne peut accepter l'hypothèse $\lambda = 1$, et donc on a $\lambda \neq 1$.

Commentaires

On peut vérifier cette négation, avec l'estimateur $W_{\underline{X}_n}^{-\alpha}(\lambda)$ de la manière suivante :

$$W_{\underline{X}_n}^{\alpha}(\lambda) = \left[\frac{X_n}{\overline{X}_n} < a_{\alpha} \right] \text{ ou } W_{\underline{X}_n}^{\alpha}(\lambda) = [\overline{X}_n > b_{\alpha}]$$
$$P_{\lambda=1}(W_{\underline{X}_n}^{-\alpha}(\lambda)) \leq \alpha \text{ et } P_{\lambda \neq 1}(W_{\underline{X}_n}^{\alpha}(\lambda)) \geq \alpha$$

Exercice 2

Contexte

Soit X , une variable aléatoire discrète représentant le nombre de pièces défectueuses par échantillon (représentée par une commande ou un lot). Les pièces peuvent être soit défectueuses, soit fonctionnelles. Notre échantillonnage est donc extrait d'une épreuve de Bernoulli. La taille de l'échantillon est grande : $n > 100$ avec $n = 140$.

On souhaite savoir si le client acceptera cet échantillon, et pour cela il faut qu'il contienne au moins 120 composants fonctionnels.

Description du modèle de données

Notre échantillonnage aléatoire est simple tel que : $X_n = (X_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec le modèle suivant : $(0, 1(B(1, p)_p)_{p \in [0, 1]})$ sachant $p = 10\% = 0,1$.

On va comparer ce paramètre avec une estimation ponctuelle, afin de savoir si l'affirmation du fabricant est vraie. Pour cela nous allons réaliser deux tests : le premier du point de vue du fabricant (TH_1), le second du point de vue du client (TH_2).

Observation ponctuelle

Dans notre observation ponctuelle (lot), on a observé que la proportion de pièces défectueuses est de 0.0857143 (= 12/140).

Point de vue du fabricant (TH_1)

Test d'hypothèses

$$H_0 : p_0 \leq 0,1 \text{ contre } H_1 : p_0 > 0,1$$

$$W_{X_n}^{\alpha, \text{asympt}}(p) = \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > p + \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \times \sqrt{p(1-p)} \right\} : (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow W_{140}^{0,05, \text{asympt}}(p) = \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > 0,1 + \frac{1,96}{\sqrt{140}} \times \sqrt{0,1(1-0,1)} \right\}$$

$$(3) \Leftrightarrow W_{140}^{0,05, \text{asympt}}(p) = \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > 0,1496 \right\}$$

Observations

$$\frac{X_n}{\bar{X}_n} = 0,0857 \notin W_{X_n}^{\alpha, \text{asympt}}(p)$$

Décision

Pour le TH_1 , on ne rejette pas l'hypothèse H_0 jusqu'à preuve du contraire.

Conclusion

Jusqu'à preuve du contraire, le client acceptera le lot.

Point de vue du client (TH_2)

Test d'hypothèses

$$H_0 : p_0 \geq 0,1 \text{ contre } H_1 : p_0 < 0,1$$

$$\begin{aligned} W_{X_n}^{\alpha, \text{asympt}}(p) &= \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > p - \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \times \sqrt{p(1-p)} \right\} : (3) \\ (3) &\Leftrightarrow W_{140}^{0,05, \text{asympt}}(p) = \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > 0,1 - \frac{1,96}{\sqrt{140}} \times \sqrt{0,1(1-0,1)} \right\} \\ (3) &\Leftrightarrow W_{140}^{0,05, \text{asympt}}(p) = \left\{ \frac{X_n}{\bar{X}_n} > 0,0503 \right\} \end{aligned}$$

Observations

$$\frac{X_n}{\bar{X}_n} = 0,0857 \notin W_{X_n}^{\alpha, \text{asympt}}(p)$$

Décision

Pour le TH_2 , on accepte donc H_0 .

Conclusion

Jusqu'à preuve du contraire, le client n'acceptera pas le lot. ??Problème de formulation ou de conclusion -> à vérifier??

Commentaires

L'acceptation du lot a été évaluée depuis les points de vues des deux parties.

On se place du point de vue du client, il ne faudrait donc pas tester TH_2 mais seulement TH_1 . En effet, en se plaçant du côté du client, on souhaite seulement évaluer ce que craint le client de rejeter à tort. On a réalisé deux tests, si ils sont contradictoires => prendre le test du point de vue client.

??? TODO : vérifier la formulation des deux tests, avec le livret de cours module 2 (page 62).????

Exercice 3

LA PROF VEUT QUASI LA MEME CHOSE QUE L'EXO FAIT EN COURS (feuille donnée au dernier cours sur la regression)

Contexte

Nous introduisons les variables x , A , S , E , Y , θ , et Z comme suit : Une expérience chimique consiste à ajouter une dose x d'un agent A dans une solution S . Après réaction, on mesure la quantité d'une espèce E . Pour x donné, on suppose qu'il est pertinent de représenter cette mesure par une variable aléatoire $Y = \theta x^2 + aZ$, a connu, θ un paramètre réel inconnu et Z une variable aléatoire normale centrée réduite.

Estimation du paramètre θ

Pour estimer le paramètre θ , on fait $n(n \geq 1)$ essais indépendants avec des doses de l'agent A notées X_1, \dots, X_n . De Y , on extrait donc un échantillon aléatoire bernoullien $\underline{Y}_n = (Y_1 \dots Y_n)$.

Modèle statistique associé à \underline{Y}_n

On pose le modèle statistique suivant à deux paramètres :

$$(\mathbb{R}^n, \otimes_{i=1}^n N(\theta x^2, a^2))_{(\theta, a) \in \mathbb{R}^2 \times]0; +\infty[)}$$

Avec pour vraisemblance :

$$L(\underline{Y}_{\underline{X}_n}, \theta, a^2) = (2\pi a^2)^{-\frac{n}{2}} \times e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \theta x_i^2)^2}{2a^2}}$$

et

$$\log L(\underline{Y}_{\underline{X}_n}, \theta, a^2) = \log(2\pi)^{-\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \ln a^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \theta x_i^2)^2}{2a^2} = g(\theta, a^2)$$

??attention est ce que les formules plus haut sont correctes, la prof ne semblait pas les valider : => regarder la photo de la prof??

Régularité du modèle \underline{Y}_n

On pose Z une variable aléatoire normale centrée réduite, tel qu'en utilisant les notations précédentes : $Z = \frac{Y - \theta x^2}{a}$.

Or on sait selon le théorème 1 du chapitre sur la régression linéaire que le modèle : $(\mathbb{R}^n, \otimes_{i=1}^n N(\theta_0 + \theta_1 x^2, a^2))_{(\theta_0, \theta_1, a) \in \mathbb{R}^3 \times]0; +\infty[)}$: (3) Et sachant $\theta_0 = 0$ et $x' = x^2$ on a : (3) $\Rightarrow (\mathbb{R}^n, \otimes_{i=1}^n N(\theta x^2, a^2))_{(\theta, a) \in \mathbb{R}^2 \times]0; +\infty[)}$

Ainsi le modèle de \underline{Y}_n , cité plus haut, est régulier.

Calcul de la borne de Cramer-Rao pour θ

Pour θ on a la borne de Cramer-Rao suivante :

$$I_{\underline{X}_n}(\theta)^{-1} = \frac{a^2}{n S_{\underline{X}_n}^2}$$

Calcul de l'EMV $\hat{\theta}_n$

On a :

$$EMV\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}_n^2)(Y_n - Y_i)}{nS_{\underline{X}_n}^2}$$

??? Montrer que c'est une EMM e θ ???

Démonstration de $\hat{\theta}_n$ en tant qu'estimateur efficace de θ

??? Need help here ???

Identification de la loi de $\hat{\theta}_n$

On a $\hat{\theta}_n$ tel que :

$$\hat{\theta}_n \rightsquigarrow N(\theta_1, \frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2})$$

Calcul d'un intervalle de confiance (IC) de niveau $1 - \alpha$ pour θ

Soit l'intervalle de confiance (IC) de $\hat{\theta}_n$ tel que :

??IC de $\hat{\theta}_n$ et non θ ???

$$IC_{Y_{\underline{X}_n}}^{1-\alpha}(\theta) = \left[\theta - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2}}; \theta + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2}} \right]$$

Estimation ponctuelle du paramètre θ

Description des données

L'effectif des données est de 10.

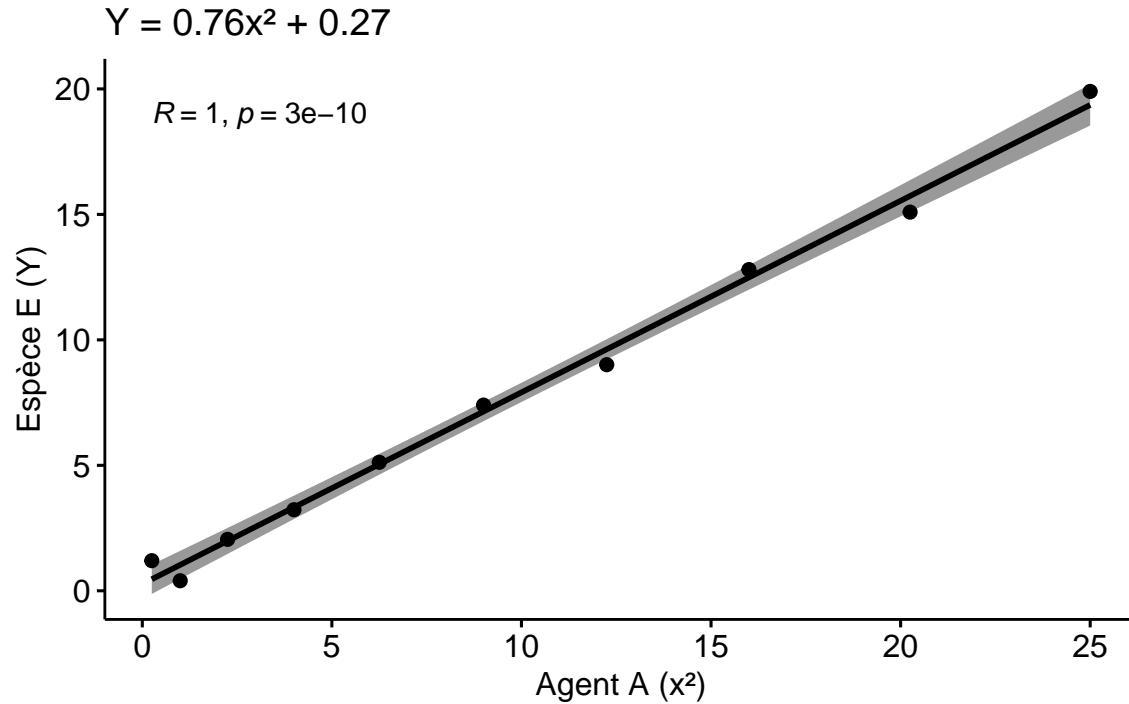
La table suivante résume la dispersion de nos données :

##	x	y
##	Min. :0.500	Min. : 0.400
##	1st Qu.:1.625	1st Qu.: 2.345
##	Median :2.750	Median : 6.260
##	Mean :2.750	Mean : 7.620
##	3rd Qu.:3.875	3rd Qu.:11.852
##	Max. :5.000	Max. :19.900

TODO : ne pas afficher output de la commande summary mais seulement ce qui nous interesse (ici moyenne) TODO : la prof ne veut pas le summary, mais les données brutes avec une autre colonne : x2

Le graphique, ci-dessous illustre le modèle aléatoire suivant $Y = \theta x^2 + aZ$ soulignant la relation linéaire entre Y et x^2 , tel que $Y = ax^2 + b$ avec $a=0.76$ et $b=0.27$.

??? supprimer les estimations a et b ci dessus ??? non on peut laisser selon la prof, mais ajouter qu'ils ont été calculé avec Pearson



Calcul d'une estimation ponctuelle de θ

Il a pu être défini que :

??? Pas certain : de Y_{xi} et Y_{xn} ???

$$\hat{\theta}_{1n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x_n^2})(Y_{x_i} - \overline{Y_{X_n}})}{nS_{\underline{X_n}}^2}$$

Ainsi à partir de l'échantillon, comme on a :

$$nS_{\underline{X_n}}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x_n^2}) = 656,906$$

et

$$nS_{\underline{X_n}}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x_n^2})(Y_{x_i} - \overline{Y_{X_n}}) = 501,653$$

On peut en déduire $\hat{\theta}_{1n}$, tel que :

$$\hat{\theta}_{1n} = \theta = 0,7637$$

Par ailleurs, on obtient un écart résiduel non nul, en effet, on a :

$$\sum_{i=1}^n \tilde{e}_i = 2,7$$

Calcul d'un intervalle de confiance (IC) de niveau 95% pour θ

$$\left[\theta - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2}}; \theta + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2}} \right] : (3)$$

Or on support que l'écart-type (a) est tel que $a = 0,5$, ainsi :

$$(3) \Leftrightarrow \left[0,7637 - 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5^2}{656,906}}; 0,7637 + 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5^2}{656,906}} \right]$$

$$(3) \Leftrightarrow [0,7254; 0,8019]$$

Evaluation d'une évolution significative de θ

On ne souhaite ici évaluer une croissance ou une décroissance, de θ ; mais seulement savoir s'il y a une différence.

Ainsi, on souhaite savoir si l'on peut accepter au seuil de 5% l'hypothèse $H_1 : \theta = \theta_{pass} \Leftrightarrow H_0 : \theta = 0,9$ contre $H_1 : \theta \neq 0,9$.

Test d'hypothèses

$$W_{Y_{\underline{X}_n}}^\alpha(\theta) = \left\{ |\hat{\theta}_n - 0,9| > Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{a^2}{nS_{\underline{X}_n}^2}} \right\} : (4)$$

$$(4) \Leftrightarrow W_{Y_{\underline{X}_n}}^\alpha(\theta) = \left\{ |\hat{\theta}_n - 0,9| > 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5^2}{656,906}} \right\}$$

$$(4) \Leftrightarrow W_{Y_{\underline{X}_n}}^\alpha(\theta) = \left\{ |\hat{\theta}_n - 0,9| > 0,038 \right\}$$

Observations On observe :

$$|\hat{\theta}_n - 0,9| = |0,7637 - 0,9| = |-0.1363| = 0.1363 : (5)$$

$$(5) \Leftrightarrow |\hat{\theta}_n - 0,9| \in W_{Y_{\underline{X}_n}}^\alpha$$

Décision On accepte H_1 , au seuil de 5%.

Conclusion On en conclue que la valeur du paramètre θ a évolué significativement par rapport aux mesures précédentes.