Université de Liège

Faculté des sciences appliquées

éléments de mécanique des fluides

Projet Laplace

Professeur
Pirotton Michel

Assistant
Schmitz Vincent

Étudiants
Binstok Quentin
s222640

Servais Joël
s990929

van Lochem Alex
s221037

Année académique 2023-2024

1 De quel(s) principe(s) fondamental(aux) découle l'équation $\Delta\Psi = 0$ résolue dans ce projet, Ψ étant la fonction de courant ?

L'équation $\Delta\Psi = 0$ découle de la condition d'irrotationnalité pour un écoulement : $\Omega = \nabla \wedge \mathbf{U} = 0$.

Dans cette équation, la vitesse est remplacée par son expression selon le vecteur potentiel : $\mathbf{U} = \frac{\rho_0}{\rho}\nabla \wedge \mathbf{A}$. Cela est possible pour un écoulement incompressible ou compressible stationnaire. En effet, cette expression découle de l'équation $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ou de l'équation $\nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) = 0$, correspondant respectivement aux cas énoncés, étant donné que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle.

De plus, pour un écoulement plan dans xy, le vecteur potentiel peut être choisi tel que $\mathbf{A} = \Psi\mathbf{e_z}$, où Ψ est la fonction de courant.

A partir de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{U} = 0$, il est donc possible de déduire

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = 0 \Leftrightarrow \Delta\Psi = 0$$

2 Dans le cadre de ce projet, comment se traduit numériquement la résolution de l'équation $\Delta\Psi = 0$? Comment les conditions aux limites sont-elles prises en compte ?

Dans ce projet, l'équation $\Delta\Psi = 0$ est résolue par la méthode des différences finies permettant d'obtenir, pour chaque noeud, une équation de type $\Psi_{i-1,j} + \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i,j-1} + \Psi_{i,j+1} - 4\Psi_{i,j} = 0$. Cette équation est déduite directement de l'expression de la dérivée seconde en utilisant un développement de Taylor d'ordre 1, en tenant compte du terme d'erreur. Ces équations sont ensuite regroupées dans une matrice pour résoudre le système linéaire.

Les conditions limites considérées sont des conditions de Dirichlet : ce qui signifie que la valeur de la fonction de courant est fixée aux noeuds limites. Cela se traduit par l'équation $\Psi_{i,j} = c$, qui est aussi introduite dans le système linéaire.

3 Pour un écoulement irrotationnel, quelles sont les hypothèses nécessaires et suffisantes pour avoir une charge uniforme dans l'écoulement ?

Il est nécessaire d'ajouter plusieurs hypothèses supplémentaires pour que la fonction d'Helmholtz $\mathscr{H}$ soit constante sur tout le domaine.

Tout d'abord, le système de Navier-Stokes sous sa formulation de Lamb peut être simplifié en faisant l'hypothèse d'un fluide Newtonien. Dans ce cas, le terme des contraintes $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$ est égal à $\nu \Delta u_i$. Or, vu que le fluide est en écoulement irrotationnel et donc que $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$, il vient $\nu \Delta u_i = \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. En inversant ensuite l'ordre de dérivation, on obtient

$$\nu \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

Il est ensuite possible d'ajouter l'hypothèse d'un fluide incompressible. Dans ce cas, l'équation de conservation de la masse devient $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$ et que, de ce fait, les contraintes s'annulent.

Si, en plus, les forces volumiques et la vitesse dérivent d'un potentiel, la conservation de la quantité de mouvement devient

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\mathbf{F} + \nabla\left(\frac{\|\mathbf{U}\|^2}{2}\right) = \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(gZ + \frac{\|\mathbf{U}\|^2}{2}\right)\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p$$

Or, pour un fluide barotrope, $-\frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla \int \frac{dp}{\rho}$ mais cette hypothèse n'en est pas vraiment une. En effet, en appliquant le rotationnel sur les deux membres et après simplifications, on en déduit que les gradients de p et de ρ sont parallèles, ce qui signifie que ρ ne varie qu'avec p.

Il est ensuite possible de faire entrer l'intégrale dans le membre de gauche, ce qui donne

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(gZ + \int \frac{dp}{\rho} + \frac{\|\mathbf{U}\|^2}{2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathscr{H} = C(t)$$

Finalement, en ajoutant l'hypothèse d'un écoulement stationnaire, il vient

$$\mathscr{H} = C$$

sur tout le domaine.

4 Cas 2 - Où les conditions aux limites doivent-elles être imposées dans cette configuration pour obtenir un écoulement symétrique autour de l'îlot ? Pour un débit d'entrée imposé (voir Annexe) et une composante longitudinale de la vitesse uniforme sur l'entrée et la sortie du canal, quelles valeurs doivent-elles prendre, et pourquoi ?

Les conditions limites sont imposées aux noeuds de type 2. Ceux-ci peuvent être divisés en deux catégories : les limites du domaine, et l'îlot.

La valeur de la fonction de courant imposée aux limites du domaine dépend de l'endroit. Elle a une croissance linéaire à l'entrée et à la sortie du canal, afin d'avoir un profil de vitesse uniforme. Cette évolution va de 0 jusqu'au débit imposé, qui est ici de 5 $[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$. Les parois du canal étant imperméables, la valeur de la fonction de courant ne peut pas y varier. Elle prend donc comme valeur 0 ou 5, de façon à être continu avec l'entrée et la sortie.

Par ailleurs, l'îlot étant lui aussi imperméable, la valeur de la fonction de courant autour de lui est aussi constante. Vu que le problème est symétrique, mettre une circulation de 2.5 donne de bons résultats.

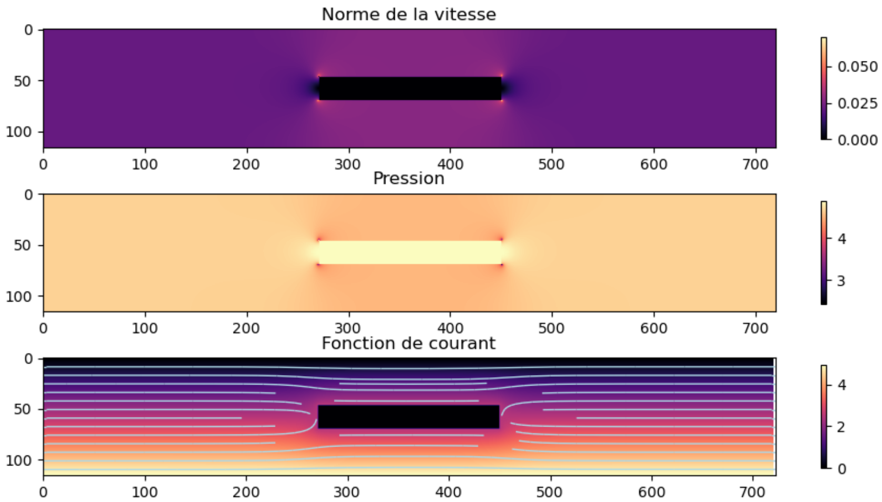

Figure 1: Cas 2

5 Quelles sont les valeurs de traînée et portance appliquées sur l'îlot et quelle est la circulation autour de celui-ci ?

La traînée obtenue est -0.037018948 $[N]$, la portance -5.38959124 $[N]$, et la circulation 0.0285839 [m^2/s].

Vu que la circulation n'est pas nulle, le fait qu'il y ait de la traînée n'est pas en désaccord avec le paradoxe de D'Alembert. De plus, cela explique la portance, bien qu'on ne puisse pas appliquer la formule $F = -\rho u_\infty \Gamma$.

6 Cas 3 - Comment le débit se répartit-il au droit de l'îlot ? Pourquoi observe-t-on cette répartition ?

Le débit se répartit de façon symétrique autour de l'îlot. Cela reste logique étant donné que le débit peut être calculé comme suit : $Q = \rho(\Psi_A - \Psi_B)$. Vu que la différence entre la valeur de Ψ à la paroi et celle sur l'îlot est la même des deux côtés de ce dernier, les deux débits doivent aussi être égaux.

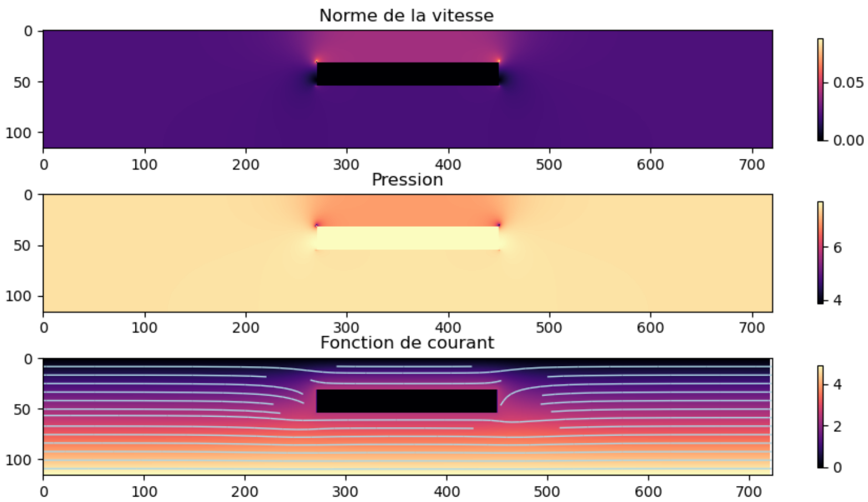

Figure 2: Cas 3

7 Quelles sont les valeurs de traînée, portance et circulation dans ce cas ?

La portance obtenue est 0.99764862 $[N]$, la traînée -0.00137607 $[N]$, et la circulation -0.002585392 [m^2/s].

La portance ici est positive, alors que celle obtenue au point 5 est négative. Cela peut être expliqué par l'augmentation de pression au-dessus de l'îlot, qui est elle-même induite par l'augmentation de vitesse nécessaire pour maintenenir le même débit. De plus, la traînée et la circulation sont toutes deux plus faibles.

8 Quelle doit être la condition limite à imposer autour de l'îlot pour vérifier la condition de Kutta à l'extrémité aval de l'île et pourquoi faut-il respecter cette condition ? Quelle circulation obtenez-vous ?

La condition limite sur l'îlot permettant de respecter la condition de Kutta est une fonction de courant de 1.765 [m^2/s]. D'ailleurs, la condition de Kutta doit être respectée sinon un point de vitesse infinie apparait. Cela peut être montré par une transformation conforme dans le cas d'un cercle.

La circulation obtenue est -0.00132020 [m^2/s]. Nous avons obtenu cette valeur en l'optimisant avec, comme critère, une pression égale pour deux points de part et d'autre de l'îlot. Cela évite de devoir tester des valeurs "à la main". Cette méthode n'a pas de signification particulière, mis à part qu'elle nous a permis d'obtenir un résultat respectant la condition de Kutta.

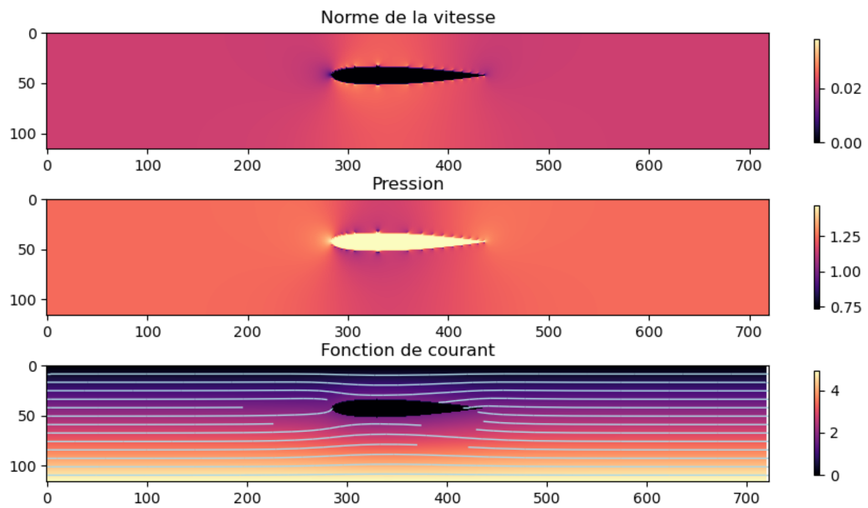

Figure 3: Cas 4