Leçon 924 - Théories et modèles en logique du premier ordre. Exemples.

17 juillet 2019

1 Extraits du Rapport

Rapport de jury 2018

Le jury s'attend à ce que la leçon soit abordée dans l'esprit de l'option informatique, en insistant plus sur la décidabilité/indécidabilité des théories du premier ordre que sur la théorie des modèles. Il est attendu que le candidat donne au moins un exemple de théorie décidable (respectivement complète) et un exemple de théorie indécidable. Si le jury peut s'attendre à ce que le candidat connaisse l'existence du théorème d'incomplétude, il ne s'attend pas à ce que le candidat en maîtrise la démonstration.

2 Cœur de la leçon

— Syntaxe et Sémantique. Interprétation d'une formule dans un modèle. Validité et satisfiabilité.

— Cohérence et complétude.

— Décidabilité et indécidabilité

— Exemples de théories.

3 À savoir

— Théorie de l'égalité, arithmétique de Peano.

— Théorème de complétude du calcul des prédicats du premier ordre.

— Théorème d'incomplétude.

— Théorème de compacité.

4 Ouvertures possibles

— Théorie de Presburger, Groupes.

— Théorème de Löwenheim-Skolem.

— Modèle et Théorème de Herbrand, complétude de la résolution.

— Axiome indépendant.

— Élimination des quantificateurs.

5 Conseils au candidat

— Sujet vaste où il est facile de se perdre. Il faut essayer de bien comprendre la signification et les implications des théorèmes et des propriétés, et non juste leur formulation.

— Il faut avoir en tête (ou dans ses notes) des petits exemples simples de théories de différents types.

— Avoir un petit exemple de preuve dans une certaine théorie (par exemple l'égalité).

— On peut montrer la décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER avec des automates. On peut montrer l'indécidabilité de l'arithmétique de PEANO en passant par l'indécidabilité de la terminaison d'un programme. On peut considérer l'ensemble des relations définissables, ce qui mène a considérer les bases de données relationnelles. Les modèles de HERBRAND mènent à la complétude de la méthode de résolution. Bref, il y a des liens avec les autres leçons, il faut en avoir conscience.

— Certains résultats (compacité par exemple) ne sont plus vrais en théorie des modèles *Finis*. Les modèles finis font encore un lien avec la leçon 932.

— Ne pas confondre la notion de complétude d'un système de preuve et la complétude d'une théorie.

— Il peut être bien d'avoir quelques idées d'applications en tête : il existe des groupes de toute cardinalités, ...

6 Questions classiques

— Est-ce que la théorie des groupes est cohérente ? complète ?

— Exemple d'un modèle non standard de l'arithmétique de PEANO ?

— Comment prouver qu'une théorie n'est pas contradictoire ?

— Un exemple de théorie complète ? décidable ? indécidable ? ...

— Peut-on avoir une théorie complète et décidable ? complète et indécidable ? incomplète et décidable ?

— La théorie vide est-elle décidable ? Complète ?

— Est-ce que $T \vdash A \Leftrightarrow B$ si et seulement si $T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash B$?

— Le théorème de compacité est-il vrai si on se limite aux modèles finis ?

7 Références

— [*Go*] Proof Theory and Automated Deduction - Jean GOUBAULT-LARRECQ - à la BU/LSV
Le must pour la logique

— [*Da*] Introduction à la logique - R. DAVID, K. NOUR, C. RAFFALLI - à la BU/LSV
L'autre must pour la logique

— [*Dow*] Les démonstrations et les algorithmes - Introduction à la logique et à la calculabilité - Gilles DOWEK - à la BU ?
Très bien pour prendre du recul.

8 Dev

++ Indécidabilité de l'arithmétique de PEANO - (?) - 914,924
Passer par l'encodage des fonctions calculables. Assez long si on fait tout.

++ Décidabilité de l'arithmétique de PRESBURGER - ([Car], *Thm 3.63 p.164*) - 909,914,924
Idée générale simple, mais attention aux détails. Réfléchir au codage, à sa sémantique, et à la complexité globale de la construction.