Parte Teórica

5. (15 pts.) Sean W_1, W_2 dos subespacios de un espacio vectorial V y sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de W_1 y W_2, respectivamente. Probar que:

   a) $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

   b) Si $V = W_1 \oplus W_2$ entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es una base de V

6. (13 pts.) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

   a) A es inversible.

   b) A es producto de matrices elementales.

   c) $\det(A) \neq 0$.

7. (12 pts.) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar o dar un contraejemplo según el caso.

   a) Existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ tal que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathbb{C}^2$ a $\mathcal{B}$.

   b) Si $\lambda = 0$ es autovalor de una transformación lineal $T : V \to V$ entonces existe $\mathcal{B}$ una base de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ tiene una columna nula.

   c) Si $T : V \to W$ una transformación lineal y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V entonces $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ es una base de W.

Importante: Para aprobar se deben sumar al menos la mitad de los puntos de cada parte: práctica (30 puntos) y teórica (20 puntos). Justificar adecuadamente todas las respuestas.

Parte Práctica

1. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal dada por

$$T(x,y,z,w) = (3x+6y-3z-3w, -6x-2y-4z+6w, 3x-2y+5z-3w, 3x+4y-z-3w)$$

   a) Dar una base del núcleo de T.
   b) Describir implícitamente y dar una base de la imagen de T.
   c) Dar una base de $\mathrm{Nu}(T) \cap \mathrm{Im}(T)$.

2. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T\big((1,1)\big) = (4,6) \quad \text{y} \quad T\big((1,-1)\big) = (8,-2)$$

   a) Sea $\mathcal{B} = \{(1,1)\,,\,(1,-1)\}$. Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.
   b) Calcular la matriz de T en la base canónica $\mathcal{C}$.
   c) Hallar la matriz de cambio de base P que verifica que $[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$.
   d) Determinar si T es diagonalizable. Justificar.

3. (10 pts.) Sean los vectores de $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (2,4,1,3)$, $v_3 = (1,2,1,2)$
   a) Determinar si el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.
   b) Hallar una base del subespacio generado por ellos.
   c) Extender esa base a una base de $\mathbb{R}^4$.

4. (20 pts.) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Calcular los autovalores de A.
   b) Para cada autovalor, hallar una base del autoespacio asociado.
   c) ¿Es diagonalizable A? En caso afirmativo, dar una base de autovectores.
   d) Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$. (No es necesario calcular la inversa de P ni hacer el producto pero si es necesario justificar bien).