Fondements Mathématiques du Moteur de Pricing Monte Carlo

Documentation Technique

18 décembre 2025

1 Introduction

Ce document explicite les modèles mathématiques utilisés dans le moteur de pricing d'options Européennes (Call/Put). L'objectif est d'évaluer le prix d'une option V_0 à l'instant $t = 0$, donnée par l'espérance actualisée de son payoff futur sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$.

2 1. Modélisation de l'Actif (Black-Scholes)

L'évolution du prix de l'actif sous-jacent S_t est modélisée par un **Mouvement Brownien Géométrique** (GBM). L'équation différentielle stochastique (SDE) est :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \tag{1}$$

Où :

— S_t est le prix de l'actif au temps t.

— r est le taux d'intérêt sans risque (le *drift* risque-neutre).

— σ est la volatilité constante de l'actif.

— W_t est un processus de Wiener (Mouvement Brownien standard).

3 2. Solution et Discrétisation (Le lien avec le Code)

Pour simuler le prix à maturité T sans itérer seconde par seconde, nous résolvons l'équation précédente grâce au **Lemme d'Itô**.

En posant $f(S_t) = \ln(S_t)$, on obtient la dynamique du logarithme du prix :

$$d(\ln S_t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t \tag{2}$$

Note importante : Le terme $-\frac{1}{2}\sigma^2$ (correction d'Itô) explique pourquoi, dans le code Python, la variable `drift` n'est pas simplement r, mais $(r - 0.5\sigma^2)$.

En intégrant de 0 à T, on obtient la solution exacte :

$$S_T = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) T + \sigma(W_T - W_0)\right) \tag{3}$$

Sachant que l'incrément brownien $(W_T - W_0)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, T)$, on peut le réécrire $\sqrt{T}Z$ où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

D'où la formule finale utilisée pour la vectorisation :

$$\boxed{S_T = S_0 \cdot \exp\left(\underbrace{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}_{\text{Code : drift}} + \underbrace{\sigma\sqrt{T}}_{\text{Code : vol}} \cdot Z\right)} \tag{4}$$

4 3. L'Estimateur de Monte Carlo

Le prix de l'option à $t = 0$ est donné par l'actualisation de l'espérance du payoff :

$$V_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{Payoff}(S_T)] \tag{5}$$

Pour un Call Européen, le payoff est $\max(S_T - K, 0)$. Comme l'intégrale de l'espérance n'est pas calculable analytiquement pour des options complexes, nous l'approximons par la moyenne empirique selon la **Loi des Grands Nombres** :

$$\hat{V}_{MC} = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\max(S_T^{(i)} - K, 0) \tag{6}$$

Où N est le nombre de simulations (ex : $N = 1\,000\,000$).

5 4. Précision et Convergence

La méthode de Monte Carlo fournit une estimation statistique. L'erreur commise converge vers 0 au rythme de $\frac{1}{\sqrt{N}}$. L'écart-type de l'estimateur (Standard Error) est calculé par :

$$SE = \frac{\hat{\sigma}_{\text{payoffs}}}{\sqrt{N}} \tag{7}$$

Cela signifie que pour diviser l'erreur par 10, il faut multiplier le nombre de simulations par 100. C'est pourquoi l'optimisation informatique (C++, Vectorisation, GPU) est critique pour obtenir une précision élevée en un temps raisonnable.