

# Aplikace fuzzy a pravděpodobnostních automatů

Martin Jašek

12. září 2016 — ??

## Obsah

|             |   |          |
|-------------|---|----------|
| 0.1         | Ostatní důležité pojmy . . . . .                            | 2        |
| 0.2         | Další pojmy z úvodu do teorie automatů . . . . .            | 2        |
| 0.2.1       | Gramatiky . . . . .   | 2        |
| <b>1</b>    | <b>Fuzzy automaty, jazyky, gramatiky a regulérní výrazy</b> | <b>3</b> |
| 1.1         | Jazyk rozpoznávaný fuzzy automatem . . . . .                | 3        |
| 10 1.2      | Fuzzy a bivalentní regulérní jazyky . . . . .               | 3        |
| 1.3         | Fuzzy regulární výrazy . . . . .                            | 4        |
| <b>2</b>    | <b>Fuzzy tree automaty</b>                                  | <b>5</b> |
| 2.1         | Použití fuzzy tree automatů . . . . .                       | 5        |
| <b>3</b>    | <b>Buněčné fuzzy automaty</b>                               | <b>5</b> |
| 3.1         | Obecně k aplikacím . . . . .                                | 5        |
| 3.2         | Zpracování obrazu . . . . .                                 | 6        |
| <b>4</b>    | <b>Strojové učení</b>                                       | <b>6</b> |
| 4.1         | Reálné příklady použití . . . . .                           | 6        |
| <b>5</b>    | <b>Biologie a medicína</b>                                  | <b>6</b> |
| 20 <b>6</b> | <b>Další aplikace</b>                                       | <b>7</b> |
| 6.1         | Pattern matching, další příklady . . . . .                  | 7        |
| 6.2         | Ostatní a nezařazeno . . . . .                              | 7        |
| <b>7</b>    | <b>Pravděpodobnostní automaty</b>                           | <b>7</b> |
| <b>8</b>    | <b>Konkrétní příklady</b>                                   | <b>7</b> |
| 8.1         | Automat jako „lepší“ reprezentace něčeho . . . . .          | 7        |

## 0.1 Ostatní důležité pojmy

### Nedeterministický fuzzy automat s $\epsilon$ přechody

{def-NedFuzzAutEpsPre}

**Definice 0.1** (Nedeterministický fuzzy automat s  $\epsilon$  přechody). (zde bude doplněno: dohledat přesně, zkontrolovat a ozdrojovat) Nedeterministický fuzzy automat  $A$  je pětice  $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$ , kde  $Q$  je konečná množina stavů,  $\Sigma$  je abeceda,  $\mu$  je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace  $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q \rightarrow [0, 1]$ ) a  $\sigma$  a  $\eta$  jsou po řadě fuzzy množiny nad  $Q$  počátečních, resp. koncových stavů.

(zde bude doplněno: Tady by asi bylo vhodné rozebrat  $\epsilon$ -uzávěry)

### Reprezentace fuzzy automatu

(zde bude doplněno: dohledat zdroje)

(zde bude doplněno: Značení fuzzy množiny  $\sigma = \{x/0.5\}$  vs.  $\sigma(x) = 0.5$ )

Přechodový diagram: Notace s lomítky např. zde: [3].

Tabulka: stav  $\times$  symbol nebo stav  $\times$  stav [4]?

## 0.2 Další pojmy z úvodu do teorie automatů

### 0.2.1 Gramatiky

Gramatiky (přesněji „formální gramatiky“) jsou nástroje pro popis jazyků. Gramatika určuje, jakým způsobem lze jazyk vygenerovat. Následující pojmy jsou převzaty z [?].

#### Gramatika

**Definice 0.2** (Formální gramatika). Jako formální gramatiku označujeme čtveřici  $(N, T, P, S)$ , kde

1.  $N$  je abeceda tzv. neterminálních symbolů
2.  $T$  je abeceda tzv. terminálních symbolů ( $T \cap N = \emptyset$ )
3.  $P$  je množina přechodových pravidel, kde každé pravidlo je ve tvaru  $x \rightarrow y$ ,  
50  $x, y \in (N \cup T)^*$  a  $x$  obsahuje alespoň jeden neterminál
4.  $S$  je počáteční neterminál ( $S \in N$ )

Mějme gramatiku  $G = (N, T, P, S)$  takovou, že  $X \in N$ ,  $y \in T$  a  $X \rightarrow y \in P$ . Pak pro libovolné  $u, v \in (N \cup T)^*$  o řetězci  $uyv$  říkáme, že vznikl přímým odvozením z řetězce  $uXv$  (píšeme  $uXv \Rightarrow uyv$ ). Posloupnost  $w_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow w_n$  řetězců  $w_1, \dots, w_n \in (N \cup T)^*$  zapisujeme  $w_1 \Rightarrow^* w_n$  a nazýváme derivace.

Jako jazyk generovaný gramatikou  $G$  značíme následující množinu:

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

**Příklad 0.1.** Mějme gramatiku  $G = (N, T, P, S)$ , kde  $N = \{M\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{S \rightarrow aM, M \rightarrow Sb, M \rightarrow b\}$ . Pak platí  $S \Rightarrow aM \Rightarrow aSb \Rightarrow aaMb \Rightarrow aabb$  a  $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ .

## Regulérní gramatika

60 Regulérní gramatika je speciálním případem gramatiky. Tento typ gramatiky má zásadní vliv pro studium automatů.

**Definice 0.3** (Regulérní gramatika). *Gramatika  $G = (N, T, P, S)$  se nazývá regulérní, pokud každé z jejích pravidel je ve tvaru  $X \Rightarrow aY$  nebo  $X \Rightarrow a$ , kde  $X, Y \in N$  a  $a \in T$  a dále platí, že  $S$  se nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla.*

Jazyk generovaný regulérní gramatikou se nazývá regulérní jazyk.

**Příklad 0.2.** *Regulérní gramatikou je například gramatika  $G = (N, T, P, S)$ , kde  $N = \{R\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $P = \{ S \rightarrow aR, R \rightarrow aR, R \rightarrow bR, R \rightarrow a \}$ .*

Regulérní gramatiky (a jim odpovídající jazyky) mají spoustu zajímavých 70 vlastností. Uvedeme zde pouze jednu důležitou vlastnost.

**Věta 0.1.** *Každý konečný jazyk  $L$  je regulérním jazykem.*

{the:FinRegLang}

*Důkaz.* Má-li být jazyk  $L$  regulérním pak pro něj musí existovat gramatika  $G$ , která jej generuje. Podrobnější důkaz lze najít v literatuře.  $\square$

## 1 Fuzzy automaty, jazyky, gramatiky a regulérní výrazy

*(zde bude doplněno: nějak to uvést. Budou pojmy jako regulérní jazyk a gramatika popsány v nějaké předchozí kapitole?)*

*(zde bude doplněno: pojem „Lattice language“)*

80 *(zde bude doplněno: značení: „Fuzzy množina  $\phi$ “ vs. „ $L$ -množina  $\phi : X \rightarrow L$ “; „fuzzy podmnožina“ vs. „fuzzy množina nad“)*

### 1.1 Jazyk rozpoznávaný fuzzy automatem

Věta 6.3 [6] (pro lattice monoid, není to někde jen pro  $[0, 1]$ ?).

Dle definice 4 [3] je fuzzy regulární jazyk fuzzy podmnožina bivalentního.

Automat s bivalentní  $\mu$  and  $\eta$  (a fuzzy  $\sigma$ ) taky rozpoznává fuzzy regulérní jazyk [2]. Neřešil něco takového i Bel? Jinak řečeno, support konečný automat [3].

Dále např. [?].

### 1.2 Fuzzy a bivalentní regulérní jazyky

Univerzum fuzzy jazyka je regulérní jazyk, pozorování 6.1 [6].

90 Stejně tak, zaříznutý jazyk ( $\alpha$ -řez jazyka) je také regulérní, věta 2.2 [2].

Pumping lemma pro fuzzy regulérní jazyky, lemma 4-7 pro různé typy automatů [3].

Uzávěrové vlastnosti fuzzy regulérních jazyků, např. [2].

### 1.3 Fuzzy regulární výrazy

LiPed-FuzzFinAutFuzzRegExMembValLattOrdMon, definice 5.1, 5.2 (+ opsat důkaz, že  $[0, 1]$  je lattice monoid) [6].

Algoritmus převodu reg na aut, [5]. Ale zdá se mi to až moc složité.

## 2 Fuzzy tree automaty

100 V následujících podkapitolách budou fuzzy tree automaty demonstrovány na konkrétních příkladech.

### 2.1 Použití fuzy tree automatů

Fuzzy tree automaty je možné použít všude tam, kde je třeba rozpoznávat určitým způsobem stromově strukturovaná data. Konečnost množiny  $\mathcal{Q}$ , pro kterou je definována přechodová funkce  $\mu_X$  neterminálů  $X \in N$  však přináší omezení na aritu každého uzlu, která tak vždy musí být konečným číslem.

Konečnost množiny  $\mathcal{Q}$  však teoreticky nemusí být nutná. Teoreticky by šlo jako vzory funkce  $\mu_X$  namísto konkrétních řetězců nad  $\mathcal{Q}$  použít například regulární výraz popisující celou třídu takových řetězců (například  $(q_0 \mid q_1)^+$ ). To by však zkomplikovalo implementaci takového automatu a proto toto rozšíření 110 nebude uvažováno.

Důležité však je, že automat umožňuje rozpoznávat rekurzivní stromy. Rekurze je dosaženo (opakovaným) přechodem ze stavu do téže stavu (v nenulovém stupni).

## 3 Buněčné fuzzy automaty

### 3.1 Obecně k aplikacím

Buněčné automaty (obecně) nacházejí široké uplatnění v rozličných oblastech. Dle [?] se s nimi lze setkat v matematice, informatice, fyzice, biologii, společenských vědách, např. filozofii a umění. Používají se například pro simulace fyzikálních dějů (např. difuze, tok tekutin), krystalizace, biologickým, urbanistickým, envi- 120 ronmentalistickým a geografickým simulacím či například ke generování fraktálů.

Co se buněčných fuzzy automatů týče, jejich aplikace nejsou tak rozšířené. Jedním z důvodů, proč tomu tak je, je velká podobnost bivalentních buněčných automatů a buněčných fuzzy automatů. Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole,  $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat je jen speciálním případem klasického byvalentního. Obdobně, práce s fuzzy If-Then pravidly je vlastně jen speciální případ klasických If-Then pravidel.

Například [?] používá čísla z intervalu  $[0, 1]$  jako vstupní informaci. [?] používá automat podobný buněčnému automatu s fuzzy logikou, který navíc pracuje se stavy na intervalu  $[0, 1]$ . Obdobně, [1] používá buněčné automaty v kombinaci s 130 určitou formou fuzzy logiky (avšak automat napovažují za buněčný fuzzy automat). V [?] je použit automat pracující na intervalu  $[0, 255]$ , který by šel snadnou modifikací konvertován na  $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat. Automat v [?] vykazuje určitou náhodnost a bylo by tak možné považovat jej za pravděpodobnostní.

Další varianty buněčných automatů a jejich uplanění jsou vyjmenovány v [?]. Ve všech případech se uvažují vždy dvoudimenzionální buněčné automaty.

Aplikace fuzzy automatů se dají rozdělit do dvou kategorií. Do první z nich spadají urbanistické simulace. Pomocí buněčných fuzzy automatů tak byly řešeny simulace hustoty dopravy [?], růstu mořských řas u pobřeží [?] či plánování elektrické rozvodné sítě. Zdaleka nečastější však bylo nasazení buněčných fuzzy 140 automatů na řešení problému městského růstu. Z tohoto důvodu bude tomuto problému věnována samostatná podkapitola.

Další oblastí, kde nalezly buněčné fuzzy automaty uplatnění je zpracování obrazu. Používají se například na zaostřování obrazů [?][?], hledání hran [?][?], vyhledávání vzorů [?][?] či odstranění šumu [?][?][?]. V následujících podkapitolách budou některé takové techniky rozebrány podrobněji.

Co se pravděpodobnostních buněčných automatů týče, ty nacházejí uplatnění všude tam, kde je třeba dodat náhodnost a nepravidelnost. Například pro problém simulace městského růstu [?][?]. Dále pak například pro náhodné generátory, generátory šumu, simulace pohybu částic, difuze částic či nukleace (vznik krystalů) [?].

Před studiem samotných aplikací je nutné dodat, že aplikace zde popsané jsou pouze teoretickým popisem sestaveným na základě použitých zdrojů. Každá z těchto aplikací vyžaduje kalibraci parametrů (např. počet generací, návrh fuzzy množin) a přizpůsobení na míru konkrétní instance problému. Většina zdrojů proto automaticky kombinuje několik technik dohromady. Například [?][?] využívají buněčné fuzzy automaty v kombinaci s neuronovými sítěmi, v [?] s genetickými algoritmy a [?][?] s pomocí učícího se automatu. *(zde bude doplněno: dohledat, vysvětlit a ocitovat, co to je učící se automat)* Většinou je také nutná hluboká znalost dané problematiky, nejlépe přítomnost experta.

### 3.2 Zpracování obrazu

## 4 Strojové učení

### 4.1 Reálné příklady použití

Autor sám přichází s myšlenkou, že kombinace fuzzy automatů a strojového učení má poměrně značný potenciál pro uplatnění v praxi. Kombinace fuzzy automatů, které poměrně jednoduše, avšak poměrně restriktivně popisují určitý jazyk mohou být pomocí strojového učení snadno upraveny na mocnější nástroje. Důvod, proč se však nepoužívají vidí v současném boomu neuronových sítí jako takových, které utlačují všechny ostatní techniky strojového učení.

## 5 Biologie a medicína

## 6 Další aplikace

### 6.1 Pattern matching, další příklady

*(zde bude doplněno: zavést pojem lingvistická veličina (aka takový to fuzzy výrok/fuzzy množina)? L. A. Zadeh, “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning”, Information sciences, 1975.)*

### 6.2 Ostatní a nezařezeno

V [?] používají fuzzy automat pro vylepšení (zefektivnění) human-robot interakce. Nikde však neuvádějí, jak konkrétně.

## 7 Pravděpodobností automaty

## 8 Konkrétní příklady

### 8.1 Automat jako „lepší“ reprezentace něčeho

Markovův řetěz (probabilistický (dvoj)stavový systém). Petriho sítě (petri nets). Rozhodovací stromy. Řídicí systémy, událostní systémy (ale není to to samé, co petriho sítě?). [?]

## Reference

- [1] Prof. Sagar A. More Dhiraj Kumar Patel. Edge detection technique by fuzzy logic and cellular learning automata using fuzzy image processing. *International Conference on Computer Communication and Informatics*, 2013.
- [2] S.S. Yau G.F. DePalma. Fractionally fuzzy grammars with application to pattern recognition. *US–Japan Seminar on Fuzzy Sets and their Applications*, 1974. článek jako e-book: <http://bit.ly/2cumxjz>, výcuc v MorMal-FuzzAutAndLangs 10.7.
- [3] José R. Garitagoitia José R. González de Mendivil. Fuzzy languages with infinite range accepted by fuzzy automata: Pumping lemma and determinization procedure. *Fuzzy sets and Systems*, 2014.
- [4] S. C. Kremer M. Doostfateme. New directions in fuzzy automata. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2004.
- [5] Miroslav Stamenkovic, Aleksandar; Ciric. Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012.
- [6] Witold Pedrycz Yongming Li. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005.