

Aplikace fuzzy a pravděpodobnostních automatů

Martin Jašek

12. září 2016 — ???

Obsah

1	Úvod	4
2	Úvodní pojmy	4
	2.1 Fuzzy množiny a fuzzy logiky	4
	2.2 Pravděpodobnostní počet	6
	2.3 Fuzzy vs. pravděpodobnostní přístup	7
10	2.4 Popis v přirozeném jazyce	8
	2.5 Základní pojmy z teorie automatů	10
3	Definice fuzzy automatu	10
	3.1 Koncept automatu	11
	3.2 Nedeterministický bivalentní automat	11
	3.3 Nedeterministický fuzzy automat	12
	3.4 Reprezentace nedeterministického fuzzy automatu	13
	3.5 Výpočet nedeterministického fuzzy automatu	15
	3.6 Pravděpodobností automat	17
4	Varianty fuzzy automatů	18
20	4.1 Deterministický fuzzy automat	18
	4.2 Nedeterministický fuzzy automat s ϵ -přechody	19
	4.3 Zobecněné automaty	19
	4.4 Fuzzy automat s výstupem	19
	4.5 Fuzzy stavový stroj	19
	4.6 Událostmi řízený fuzzy automat	20
	4.7 Zásobníkový fuzzy automat	20
5	Další modely podobné fuzzy automatům	20
	5.1 Fuzzy tree automaty	20
	5.2 Buněčné fuzzy automaty	22
30	6 Užitečné techniky pro práci s fuzzy automaty	24
	6.1 Fuzzy automat bivalentního automatu	24
	6.2 Fuzzy automat rozpoznávající w	25
	6.3 Podobnost symbolů	25
	6.4 Editační operace, deformovaný automat	26
	6.5 Učící se fuzzy automaty	28
	6.6 Fuzzy automaty a neuronové sítě	29

	7 Rozpoznávání, klasifikace a korekce textových dat	30
	7.1 Výpočet podobnosti řetězců	30
	7.2 Klasifikace a korekce textových řetězců	30
40	7.3 Detekce překlepů	31
	7.4 Fuzzy lexikální analyzátor	31
	7.5 Pravděpodobnostní rozpoznávání přirozeného textu	31
	7.6 Dvouúrovňové vyhledávání v dlouhém textu	31
	7.7 Parsování referencí	32
	8 Další oblasti pro rozpoznávání	32
	8.1 Rozpoznávání signálů	32
	8.2 Rozpoznávání dvourozměrného signálu	33
	8.3 Rozpoznávání ručně psaného textu	33
	8.4 Rozpoznávání gest	33
50	8.5 Práce se zvukem	34
	8.6 Fuzzy programy	34
	8.7 Metoda lisování dat	34
	8.8 Detekce úplných m -árních stromů	35
	9 Modelování a simulace	35
	9.1 Markovův řetězec	36
	9.2 Automobilismus	36
	9.3 Monitorování elektrických a počítačových sítí	36
	9.4 Teorie her, počítačové hry	37
	9.5 Interakce s člověkem	38
60	9.6 Sledování pohybu a aktivit osoby	39
	9.7 Průmyslové řídicí systémy, fuzzy kontroléry	39
	9.8 Problém městského růstu	40
	9.9 Další uplatnění	40
	10 Zpracování obrazu	43
	10.1 Konvoluce	43
	10.2 Hledání hran	44
	10.3 Ostraňování šumu	45
	10.4 Rozpoznávání jednoduchých vzorů	45
	10.5 Složené geometrické útvary	46
70	10.6 Detekce požárů	46
	11 Biologie a medicína	47
	11.1 Rozpoznávání řetězců DNA	47
	11.2 Biologické simulace	47
	11.3 Analýza zdravotního stavu pacienta	48
	11.4 Analýza lékařských snímků	48
	11.5 Další aplikace	49
	12 Implementace vybraných problémů	49
	12.1 Základní informace	50
	12.2 Korekce překlepů	50
80	12.3 Rozpoznávání ručně psaného textu	51
	12.4 Detekce úplných m -árních stromů	52

12.5 Simulace spotřeby elektrického produktu	52
12.6 Zpracování obrazu	52
12.7 Metoda lisování dat	52
13 Závěr	53

1 Úvod

Fuzzy automaty jsou výpočetní modely, které propojují teorii automatů s fuzzy množinami. Obdobně, pravděpodobnostní automaty spojují teorii automatů s pravděpodobnostním počtem.

90 Teorie automatů, fuzzy množiny i pravděpodobnostní počet jsou v současné době poměrně hluboce prozkoumány. Je proto přirozené, že se současný výzkum zabývá také jejich vzájemným propojováním, tj. fuzzy a pravděpodobnostními automaty. Teoretický výzkum těchto modelů přinesl mnohé výsledky. Otázkou však je, jaké je uplatnění těchto modelů v praxi.

Fuzzy množiny a pravděpodobnostní počet slouží k popisu různých forem neurčitosti, nepřesnosti či nejistoty. To jsou jevy, se kterými se setkáváme v běžném životě prakticky denně. Fuzzy a pravděpodobnostní automaty by tak mohly mít velký potenciál pro uplatnění v praxi. Úkolem této práce je tuto hypotézu ověřit.

100 V první části této práce jsou uvedeny základní teoretické poznatky studia fuzzy a pravděpodobnostních automatů. Větší část práce je poté věnována popisu samotných aplikací. Kromě teoretického popisu možností uplatnění tato práce prezentuje reálné ukázky uplatnění a konkrétní příklady. Závěr práce je věnován popisu softwaru, který některé z aplikací přímo implementuje.

2 Úvodní pojmy

V této kapitole budou popsány základní pojmy, bez kterých nebude možné se studiu fuzzy a pravděpodobnostních automatů věnovat. Bude zde představen koncept fuzzy množin, pravděpodobnostního počtu a základní pojmy z teorie automatů.

110 2.1 Fuzzy množiny a fuzzy logiky

Pomocí matematiky můžeme formalizovat svět kolem nás. Zatímco matematika je založena na přesnosti, většinu okolního světa lze přesně popsat jen s těží. Při popisu okolního světa pravujeme mnohem častěji s vágními pojmy jako „málo“, „téměř“ či „trochu“ než s jednoznačným „ano“ a „ne“. Například, tvrzení „student učivo umí“ lze těžko ohodnotit pravdou či nepravdou, pokud student z testu získal 50% bodů. Naopak, říci, že „student učivo umí z 1/2“ je mnohem přirozenější. V případech jako je tento mohou fuzzy množiny přinést značné zpřehlednění.

120 Podobně jako například predikátová logika tvoří matematický nástroj pro popis logického uvažování, fuzzy množiny (případně fuzzy logiky od nich odvozené) jsou matematický nástroj pro práci s nepřesnými pojmy¹. Oproti „klasické“ množině, která prvek buďto obsahuje nebo neobsahuje, fuzzy množině může prvek náležet v určitém stupni, který se nachází někde mezi „nenáleží vůbec“ a „náleží plně“. Obdobně, pravdivost tvrzení (tedy formule vyjádřená v přirozeném jazyce) ve fuzzy logice nemusí být pouze pravdivé či nepravdivé, ale může nabývat libovolného stupně pravdivosti.

Fuzzy množiny jsou tedy matematickým nástrojem. Následuje jejich formální definice. Definice a související pojmy jsou přejaty z [22].

¹Slovo „fuzzy“ v angličtině znamená „nejasný“, „rozmazaný“, „neostrý“

Definice 2.1 (Fuzzy množina). *Mějme libovolnou neprázdnou množinu U (tzv. univerzum). Pak zobrazení $\rho : U \rightarrow [0, 1]$ nazvěme fuzzy množina nad U . Pro $x \in U$ říkáme, že prvek x náleží do množiny ρ ve stupni $\rho(x)$.*

Značení. Abychom rozlišili „klasické“ (tzv. bivalentní) množiny od fuzzy množin, budou fuzzy množiny v tomto textu obvykle značeny malými řeckými písmeny. Fakt, že fuzzy množina ρ obsahuje prvky $x_1, \dots, x_n \in U$ ve stupních $d_1, \dots, d_n \in [0, 1]$ budeme psát $\rho = \{x_1/d_1, \dots, x_n/d_n\}$.

V této práci se dopouštíme významného zjednodušení. Množina stupňů pravdivosti, kterou zde uvažujeme jako interval $[0, 1]$, může být ve skutečnosti mnohem obecnější. Takové zobecnění by však vyžadovalo výrazně hlubší popis jejich vlastností, který je u intervalu $[0, 1]$ intuitivní. Navíc, použití intervalu $[0, 1]$ je pro člověka přirozené, 0 přirozeně odpovídá „nulové pravdivosti“ a 1 „plné pravdivosti“. V neposlední řadě, použití intervalu $[0, 1]$ je výhodné také z implementace na počítači.

Nyní se podíváme na základní množinové operace nad fuzzy množinami.

Definice 2.2 (Operace nad fuzzy množinami). *Mějme dvě fuzzy množiny π a ρ nad univerzem U . Pak definujeme jejich průnik, sjednocení a doplňek (komplement) jako fuzzy množiny $\pi \cap \rho$, $\pi \cup \rho$ a $\neg\pi$ nad téže univerzem, které pro všechna $x \in U$ splňují:*

$$\begin{aligned}(\pi \cap \rho)(x) &= \pi(x) \wedge \rho(x) \\(\pi \cup \rho)(x) &= \pi(x) \vee \rho(x) \\(\neg\pi)(x) &= 1 - \pi(x)\end{aligned}$$

Definice 2.3 (Relace mezi fuzzy množinami). *Mějme dvě fuzzy množiny π a ρ nad univerzem U . Pak definujeme jejich rovnost a inkluzi (relaci „býti podmnožinou“) jako relace $=, \subseteq : (U \rightarrow [0, 1]) \times (U \rightarrow [0, 1])$:*

$$\begin{aligned}\pi &= \rho \text{ právě tehdy když } \pi(x) = \rho(x) \text{ pro každé } x \in U \\ \pi &\subseteq \rho \text{ právě tehdy když } \pi(x) \leq \rho(x) \text{ pro každé } x \in U\end{aligned}$$

Připomeňme, že operátory $\wedge \vee$ na reálném intervalu $[0, 1]$ jsou definovány jako \min a \max . Operátor \leq značí přirozené uspořádání čísel a $=$ jejich rovnost.

Kromě operací s fuzzy množinami ještě budeme pracovat s operacemi t-norma a t-konorma, což jsou binární operace na množině $[0, 1]$.

Definice 2.4 (T-norma a t-konorma). *Binární operace \otimes (t-norma) na množině $[0, 1]$ je asociativní, komutativní, monotonní operátor s neutrálním prvkem 1. Binární operace \oplus (t-konorma) na množině $[0, 1]$ je asociativní, komutativní, monotonní operátor s neutrálním prvkem 0.*

Operace t-norma a t-konorma si lze představit jako zobecnění disjunkce a konjunkce. Je proto vhodné, aby t-norma a t-konorma splňovaly zobecněný De Morganův zákon, tj. aby pro všechna $a, b \in [0, 1]$ platila následující rovnost:

$$a \oplus b = 1 - ((1 - a) \otimes (1 - b))$$

t-norma		t-konorma	
název	$a \otimes b$	název	$a \oplus b$
Gödelova (minimální)	$\min(a, b)$	maximální	$\max(a, b)$
Produktová	ab	probabilistický součet	$a + b - ab$
Łukasiewiczova	$\max(0, a + b - 1)$	ohraničený součet	$\min(a + b, 1)$

Tabulka 1: Tři nejpoužívanější t-normy a jim odpovídající t-konormy tak, aby splňovaly zobecněný De Morganův zákon

{tbl:Norms}

popř. ekvivalentně:

$$a \otimes b = 1 - ((1 - a) \oplus (1 - b))$$

V tabulce 1 jsou uvedeny nejpoužívanější tři t-normy a jim odpovídající t-konormy, tak, aby splňovaly zobecněný De Morganův zákon.

Množinu všech fuzzy množin nad univerzem U (tedy protějšek potenční množiny u „klasických“ množin) budeme značit $\mathcal{F}(U)$. Posledním z důležitých pojmů je fuzzy relace.

Definice 2.5 (Fuzzy relace). *Jako fuzzy relaci na fuzzy množinách U_1, \dots, U_n nazýváme fuzzy množinu nad $U_1 \times \dots \times U_n$ (tj. nad kartézským součinem těchto množin).*

160 **Příklad 2.1** (Fuzzy množiny a fuzzy relace). *Příkladem fuzzy množiny může být fuzzy množina reálných čísel, která jsou blízko nule. Taková fuzzy množina bude mít univerzum $U = \mathbb{R}$ a předpis například $\zeta(x) = 2^{-|x|}$, tj. $\zeta(x) = \{x/d \mid x \in U, d = 2^{-|x|}\}$. Pak platí $\zeta(0) = 1$ (tj. číslo 0 je blízko nule v jednotkovém stupni), $\zeta(1) = 1/2$ (tj. pravdivost tvrzení „číslo 1 je blízko nule“ je 0,5), $\zeta(2) = 1/4$ a podob.*

Příklad fuzzy relace může být podobnost čísel. Tedy fuzzy relace popsující vztah „číslo x a y jsou si podobná ve stupni $\sigma(x, y)$ “. Jedná se tedy o fuzzy relaci na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a dána může být například předpisem: $\sigma(x, y) = 2^{-|x-y|}$. Přirozeně, pak platí například $\sigma(1, 1) = 1$, $\sigma(1, 2) = 1/2$, $\sigma(1, 3) = 1/4$ a podob.

170 2.2 Pravděpodobnostní počet

Pravděpodobnost je další forma neurčitosti. Pozorujeme-li nějaký jev, pak pravděpodobnost vyjadřuje, jak moc je jisté, že tento jev nastane i v budoucnu.

Z pohledu aplikací pravděpodobnostních automatů pro nás bude pravděpodobnost – podobně, jako stupeň pravdivosti – číslo z reálného intervalu $[0, 1]$ s některými dalšími vlastnostmi. Definice a vlastnosti pravděpodobností zde budou uvedeny ve zjednodušené podobě a jsou převzaty z [62].

Definice 2.6 (Prostor jevů, jev). *Označme neprázdnou množinu Ω jako prostor jevů, její prvky jako elementární jevy a její podmnožiny jako jevy.*

180 **Definice 2.7** (Pravděpodobnost elementárních jevů). *Pravděpodobnost (resp. pravděpodobnostní míra) elementárního jevu je zobrazení $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$, (tj. zobrazení, které každému elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ přiřazuje jeho pravděpodobnost $P(\omega)$) takové, že $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.*

Definice 2.8 (Pravděpodobnostní míra). *Mějme prostor jevů Ω a pravděpodobnost P elementárních jevů z tohoto prostoru. Pak jako pravděpodobnost (pravděpodobnostní míra) jevu $A \subset \Omega$ nazýváme zobrazení $P : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$ dané následujícím předpisem:*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

Libovolná pravděpodobnostní míra P pro každý prostor jevů Ω a libovolné jevy $A, B \subseteq \Omega$ dále splňuje následující vlastnosti:

1. $P(\emptyset) = 0$ (tzv. nemožný jev)
2. $P(\Omega) = 1$ (tzv. jistý jev)
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- 190 6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Dalším důležitým pojmem je podmíněná pravděpodobnost. Zjednodušeně řečeno, podmíněná pravděpodobnost nám říká, s jakou pravděpodobností nastal jev A jestliže víme, že nastal jev B .

Definice 2.9 (Podmíněná pravděpodobnost). *Mějme pravděpodobnostní prostor Ω a dva jevy $A, B \subseteq \Omega$ z tohoto prostoru tak, že $P(B) > 0$. Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastal jev B je pravděpodobnost*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Příklad 2.2 (Pravděpodobnost). *Uvažujme příklad s klasickou šestistěnnou hrací kostkou. Prostor jevů je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Označme $A = \{2, 4, 6\}$ jako jev „padlo sudé číslo“ a $B = \{5, 6\}$ jako „padlo číslo větší než 4“.*

Pravděpodobnost jevu A je $\frac{1}{2}$, pravděpodobnost jevu B je $\frac{1}{3}$ a $P(A|B) = 1/2$ (tj. pravděpodobnost, že padlo sudé číslo za předpokladu, že padlo číslo větší než 4 je $1/2$).

200 2.3 Fuzzy vs. pravděpodobnostní přístup

{subsec:FuzzyVsProb}

V předchozích dvou podkapitolách byly zavedeny základní pojmy z oblasti fuzzy množin a pravděpodobnostního počtu. Je vidět, že jak stupeň pravdivosti, tak pravděpodobnostní míra, jsou obě reálná čísla z intervalu $[0, 1]$. Oba tyto pojmy totiž popisují určitou formu neurčitosti, avšak každá jinou.

Popisujeme-li nějaký jev, pak stupeň pravdivosti udává, jak moc jev odpovídá jeho popisu. Například tvrzení „osoba X je vysoká“ může být pravdivé ve stupni 1, pokud je osoba vysoká 180 centimetrů a víc a ve stupni 0,5, pokud osoba měří 160 centimetrů. Popisujeme tedy skutečnost, která je nám známá, avšak při jejím popisu používáme vágní pojem („vysoká“). Ohodnocení stupněm
210 pravdivosti tak záleží významu tohoto pojmu.

Naopak, tvrzení „zítra mi ujede autobus“ je popsáno přesně (nepoužívá žádné vágní pojmy), avšak nejistota je zde skryta v pozorovaném jevu. Zda-li

tento jev nastane (a tvrzení je tudíž pravdivé) nebo nenastane nám není známo. Můžeme se však bavit o pravděpodobnosti, s jakou nastane.

Matoucí může být tvrzení „uživatel píše slovo X “. Na jednu stranu může být chápáno ve smyslu pravděpodobnosti. Tedy, že na základě určitých pozorování predikujeme s jakou pravděpodobností slovo, které uživatel píše, je slovem X . Na druhou stranu toto tvrzení může být chápáno tak, že víme, (se stoprocentní jistotou) jaké slovo uživatel píše, a pak můžeme studovat stupeň pravivosti, v jakém je psané slovo slovem X .

Poněkud jinou situaci je tvrzení „zítra bude pěkné počasí“. Toto tvrzení totiž obsahuje jak vágní pojem „pěkné“, tak nejistotu (nevíme, jaké bude počasí). Využívá tedy obou přístupů současně.

Při návrhu systému pracujícího s neurčitostí je tedy nutné se vždy zamyslet, jestli jeho neurčitost tkví spíše v nepřesném označení nebo naopak v nepřesné znalosti popisované situace.

Poznámka 2.1. *Existují snahy fuzzy a pravděpodobnostní přístup sjednotit. Takovýto „univerzálním stupňům neurčitosti“ se obvykle říká „váhy“. Systém pracující s vahami však nemá oporu v logickém popisu okolního světa a tak není vhodné jej používat v reálných aplikacích. Sloužit může jen jako teoretický model.*

2.4 Popis v přirozeném jazyce

Vzhledem k tomu, že účelem této práce je studovat uplatnění fuzzy a pravděpodobnostních automatů v praxi, je nutné seznámit se s nástroji pro propojení matematického světa (tj. fuzzy množin a pravděpodobnostního počtu) a popisu v přirozeném jazyce.

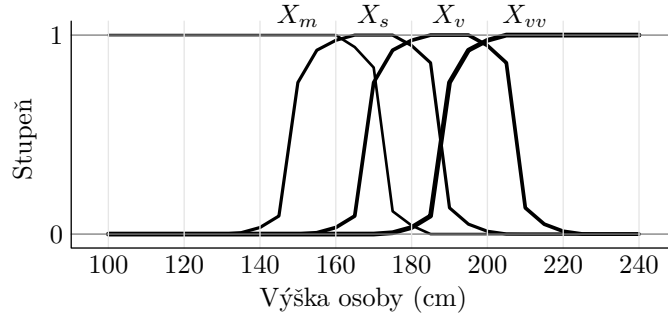
Pravděpodobnostní počet k tomuto účelu používá slovní označení jevů. Je poměrně přirozené říkat „Pravděpodobnost jevu e je p .“ nebo „Jev e jistý“.

Pro popis stupňů pravdivosti by bylo možné používat obdobný přístup, tj. říkat „Tvrzení t je pravdivé ve stupni d .“. Taková formulace však zní poněkud kostrbatě. Mnohem elegantněji lze podobná tvrzení vyjádřit pomocí tzv. lingvistických proměnných [137]. Každá lingvistická proměnná α je tvořena univerzem U hodnot a množinou lingvistických štítků T . Pro každý štítek $X \in T$ pak α definuje jeho význam $M(X)$ (významovou funkci) jako fuzzy množinu nad U (tj. funkci, která hodnotě z univerza přiřadí stupeň pravdivosti). Fakt, že lingvistická proměnná α nabývá „hodnoty“ X budeme zapisovat $\alpha = X$.

Příklad 2.3 (Lingvistické proměnné). *Mějme lingvistickou proměnnou α s významem „výška osoby“. Univerzem hodnot jsou všechna nezáporná reálná čísla. Lingvistické štítky jsou X_m („malá“), X_s („střední“), X_v („velká“) a X_{vv} („velmi velká“). Významové funkce jednotlivých štítků jsou vyobrazeny na obrázku 1.*

Mějme výšku h osoby. Namísto „Platnost tvrzení „výška h osoby je střední“ je ve stupni $M(X_s)(h)$ “ můžeme říkat „výška h osoby je střední“. Symbolicky zapsáno: $\alpha = X_s$.

Poznámka 2.2. *Někdy se můžeme setkat s lingvistickými proměnnými, které mají jen jeden štítek. Například, lingvistická proměnná „závodník se nachází“ se štítkem „v cíli“. V takovém případě můžeme psát rovnou „závodník se nachází v cíli“.*



Obrázek 1: Graf významových funkcí šítků X_m („malá“), X_s („střední“), X_v („velká“) a X_{vv} („velmi velká“) lingvistické proměnné „výška osoby“.

{fig:lingVarsMeansChart}

Pro popis netriviálních faktů je potřeba pokročilejší nástroj. Vztahy tak budeme popisovat pomocí tzv. fuzzy IF–THEN pravidel[59]. Klasické bivalentní IF–THEN pravidlo je výrok ve tvaru:

Jestliže x_1, \dots, x_n , pak y

kde x_1, \dots, x_n, y jsou podvýroky².

Příklad 2.4 (IF–THEN pravidla). *Následující výroky jsou IF–THEN pravidla:*

- Jestliže je spínač sepnut, pak žárovka svítí
- Jestliže je věk(p) < 15 , pak p je dítě
- Je-li $x \in \mathbb{N}$, $x > 2$, $\nexists y < x : y|x$, pak x je prvočíslo

Fuzzy IF–THEN pravidla pak budou vypadat následovně:

Jestliže $\alpha_1 = x_1, \dots, \alpha_n = x_n$, pak $\beta = y$

kde $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ jsou lingvistické proměnné a x_1, \dots, x_n, y jsou po řadě jejich šítky.

Příklad 2.5 (Fuzzy IF–THEN pravidla). *Uvažujme systém, u kterého známe tlak (lingvistická proměnná α_t) a průtok (lingvistická proměnná α_p) a popisujeme úroveň otevření bezpečnostního ventilu (lingvistická proměnná α_v). Označme šítky t_M („tlak je malý“), t_N („tlak je normální“), t_V („tlak je velký“) a dále p_N („průtok je v normě“) a p_Z („průtok je zvýšený“). Konečně zavedme šítky*

*v_U („ventil je uzavřen“) a v_O („ventil je otevřen“).
Pak pravidla*

Pokud je tlak malý a průtok je v normě, pak ventil je uzavřen

Pokud je tlak velký a průtok je zvýšený, pak ventil je otevřen

jsou fuzzy IF–THEN pravidla. Symbolicky zapsána:

Jestliže $\alpha_t = t_M, \alpha_p = p_N$ pak $\alpha_v = v_U$

Jestliže $\alpha_t = t_V, \alpha_p = p_Z$ pak $\alpha_v = v_O$

²Zapišeme-li IF–THEN pravidlo jako formuli, obdržíme Hornovskou klauzuli.

2.5 Základní pojmy z teorie automatů

Definice a značení následujících pojmů jsou převzaty z [66].

Základním pojmem při studiu automatů je abeceda. Abeceda je neprázdná a konečná množina symbolů a značí se typicky Σ , případně jiným velkým písmenem řecké abecedy. Abecedou může být například „všechna malá písmena latinky“, nebo např. číslice 0 – 9.

Posloupnost $u = a_1 a_2 \dots a_n$ (kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$) se nazývá řetězec u nad abecedou Σ . Číslo n je pak délka řetězce u , která se jinak značí $|u|$. Řetězec, který má nulovou délku, značíme ε .

Řetězec $u \circ v = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ (častěji však uv) se nazývá zřetězení (konkatenace) řetězců $u = a_1 \dots a_n$ a $v = b_1 \dots b_m$. Přirozeně platí $|uv| = n + m$. Jako n -tá mocnina u^n řetězce u se označuje řetězec:

$$u^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{pokud } n = 0 \\ uu^{n-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

280 Symbolem Σ^* se značí množina všech řetězců nad abecedou Σ (včetně ε). Symbol Σ^+ pak značí všechny řetězce nad abecedou Σ vyjma ε .

Pojmem (formální) jazyk nad abecedou Σ se označuje určitá vybraná množina \mathcal{L} řetězců nad touto abecedou, tj. $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$.

Je-li jazyk konečná množina, tj. obsahuje konečně mnoho řetězců, nazýváme jej konečný. V opačném případě říkáme, že je jazyk nekonečný.

Obdobně, fuzzy jazyk λ nad abecedou Σ je její libovolná fuzzy podmnožina, tj. $\lambda \in \mathcal{F}(\Sigma^*)$.

290 **Poznámka 2.3.** V teorii automatů se dále pracuje s pojmy regulérní jazyk, regulérní gramatika a regulérní výraz (a jim odpovídající regulérní fuzzy jazyk, regulérní fuzzy gramatika a regulérní fuzzy výraz). S těmito pojmy tato práce pracuje jen okrajově, takže se spokojíme jen s velmi zjednodušeným popisem těchto pojmů. Regulérní jazyk je jazyk rozpoznávaný konečným „bivalentním“ automatem (deterministickým nebo nedeterministickým). Regulérní gramatika je předpis popisující konstrukci řetězců regulérního jazyka. Regulérní výraz je způsob, jak poměrně přehledně popsat regulérní jazyk.

300 Dalším třídou jazyků jsou bezkontextové jazyky. Zatímco regulérní jazyk si lze představit jako množinu lineárních sekvencí symbolů, bezkontextový jazyk umožňuje u řetězců rekurenci. Typickým regulérním jazykem je například jazyk sudých čísel zapsaných v binárním tvaru (tj. řetězce 0 a 1 končící vždy 0), typickým regulérním jazykem je jazyk aritmetických výrazů (tvořený čísly, operátory a závorkami).

Důležitou vlastností regulérních jazyků, se kterou se v této práci opakovaně setkáme, je, že každý konečný jazyk je regulérním. Pro každý konečný jazyk tak existuje konečný „bivalentní“ automat, který tento jazyk rozpoznává.

{note:RegLangsExprsGrams}

3 Definice fuzzy automatu

V této kapitole bude podrobně popsán a formálně definován „fuzzy automat“ a proces jeho výpočtu. Pro snazší ilustraci bude nejdříve popsán automat bivalentní a následně odvozen fuzzy automat. Popis bivalentního automatu je převzat z [55], popis fuzzy automatu z [31] (pokud není uvedeno jinak).

310 Hned na úvod je třeba zdůraznit terminologii. Jak bývá u automatů zvykem, pojem „automat“ označuje souhrnně různé varianty automatů, typicky nedeterministický i deterministický, bez dalšího rozlišování. Vzhledem k tomu, že základním (a nejpoužívanějším) fuzzy automatem je automat nedeterministický, bude proto druhá polovina této kapitoly věnována právě nedeterministickému fuzzy automatu. Zbývající známé varianty fuzzy automatů budou poté shrnuty v následující kapitole.

*

3.1 Koncept automatu

Automat se řadí mezi tzv. výpočetní modely. Výpočetní model je označení pro 320 matematický formalismus, který popisuje určitý výpočet, algoritmus. Spolu s automaty (ve všech jejich variantách a modifikacích) se k výpočetním modelům řadí například také Turingovy stroje [86].

Automaty také často bývají nazývány jako stavové stroje. Na automat lze totiž nahlížet jako na určité zařízení. Toto zařízení je charakterizováno svým vnitřním stavem a v závislosti na vstupu se tento stav diskrétně mění, tj. můžeme tvrdit, že automat přechází od jednoho stavu k jinému.

Důležité je také dělení automatů na deterministické a nedeterministické. Obecná definice říká, že u deterministického automatu je jednoznačně dáno, do kterého stavu v každý moment výpočtu automat přejde. Naopak u nedeterministického tento předpoklad neplatí, tj. výpočet automatu se může octnout v 330 situaci, kdy má možnost přejít do dvou a více stavů „současně“.

Tuto situaci budeme u nedeterministických automatů reprezentovat tak, že automat se při svém výpočtu nebude nacházet vždy v jednom stavu, ale jeho „aktuální stav“ bude popsán celou množinou stavů, ve kterých se aktuálně nachází.

Automat tedy musí zcela určitě obsahovat stavy, ve kterých se při svém výpočtu může nacházet. Spolu s nimi je každý automat určen vstupy, se kterými dokáže pracovat. Vstupy pro automat budou řetězce nad nějakou danou abecedou. O popis přechodů mezi stavy se bude starat přechodová funkce.

340 Dále, u každého automatu musí být stanoven počáteční stav. Vzhledem k tomu, že se budeme bavit o automatu nedeterministickém, budeme uvažovat množinu počátečních stavů.

Automaty původně vznikly jako nástroje pro rozpoznávání určité třídy jazyků. To znamená, že automat musí pro libovolný řetězec určit, zda-li do uvedeného jazyka patří nebo ne. U automatů je toto řešeno pomocí tzv. koncových stavů. Pokud výpočet automatu zkončí v koncovém stavu, pak je řetězec automatem zpracováván přijat, v opačném případě zamítnut.

Nyní máme známu obecnou představu, jak by měl automat vypadat. Následuje tedy definice nedeterministického bivalentního automatu, spolu se stručným popisem jeho činnosti. Následně je pak odvozena definice nedeterministického fuzzy automatu a jeho výpočtu. 350

3.2 Nedeterministický bivalentní automat

Nedeterministický bivalentní automat je definován následovně:

{def-NedBivAut}

Definice 3.1 (Nedeterministický bivalentní automat). *Nedeterministický konečný (bivalentní) automat \mathbf{A} je pětice (Q, Σ, μ, I, F) , kde Q je konečná neprázdná množina stavů, Σ je abeceda, $\mu : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ je přechodová funkce a $I \subseteq Q$ a $F \subseteq Q$ je množina počátečních a koncových stavů.*

Výpočet automatu, tedy zpracování vstupního řetězce, je definován jako posloupnost konfigurací. Konfigurace je popis aktuálního „stavu“ výpočtu (tzn. doposud nezpracovaná část vstupního řetězce a množina stavů, ve kterých se automat nachází). Na počátku se výpočet nachází v tzv. počáteční konfiguraci, tj. nezpracovanou částí celého řetězce je celý vstupní řetězec a množinou stavů, ve kterých se automat nachází je množina I .

Automat čte ze vstupu postupně symboly. Pokud se automat nachází ve stavu q a právě přečteným symbolem je symbol a , pak automat přechází do stavu q' (a symbol a je ze vstupu odebrán) pokud $q' \in \mu(q, a)$. Vyprázdní-li takto automat celý vstup (na vstupu je prázdný řetězec), ocitá se v tzv. koncové konfiguraci. Pokud alespoň jeden ze stavů, ve kterém se automat nachází, je koncový, nazývá se tato konfigurace přijímací, v opačném případě zamítací.

Pokud výpočet automatu pro řetězec w zkončí přijímací konfigurací, říkáme, že automat řetězec přijímá. Pokud zkončí zamítací konfigurací, pak říkáme, že je řetězec zamítán. Jazyk rozpoznávaný automatem je pak množina takových řetězců $w \in \Sigma^*$, které automat přijímá.

Ekvivalentním způsobem, jak určit, zda-li je řetězec automatem přijímán či zamítán je pomocí rozšířené přechodové funkce $\mu^* : 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$. Rozšířenou přechodovou funkci μ^* tak lze číst „nachází-li se automat v množině stavů Q' a na vstupu je řetězec w , pak automat přejde do množiny stavů $\mu^*(Q', w)$ “.

Příklad 3.1 (Nedeterministický bivalentní automat). *Mějme $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $I = \{q_0\}$, $F = \{q_1\}$ a přechodovou funkci $\mu(q_0, a) = \{q_0, q_1\}$, $\mu(q_0, b) = \{q_0\}$, $\mu(q_1, a) = \{q_0\}$ a $\mu(q_1, b) = \emptyset$. Pak $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, I, F)$ je nedeterministický bivalentní automat.*

Uvažujme řetězec $a b a$. Z počáteční konfigurace (vstup $a b a$ a aktuální stavy $\{q_0\}$) přejde zpracováním a do množiny stavů $\{q_0, q_1\}$. Dále pak zpracováním b přejde do $\{q_0\}$ a následně zpracováním a do $\{q_0, q_1\}$. Automat se ocitá v koncové konfiguraci a protože se nachází ve stavech $\{q_0, q_1\}$ z nichž stav q_1 je koncový, je řetězec $a b a$ automatem přijat. Stejnětak je přijat například řetězec $b a$ nebo $a a b a$. Řetězec $a b$ je automatem zamítán.

Následuje popis, jak pojmy týkající se nedeterministického bivalentního automatu „zobecnit“ na odpovídající pojmy z oblasti fuzzy automatů.

3.3 Nedeterministický fuzzy automat

Stejně tak, jak fuzzy množiny jsou zobecněním klasických „bivalentních“ množin, dá se předpokládat, že i fuzzy automaty budou v určitém smyslu zobecněním klasických bivalentních automatů. A nebude tomu jinak ani u nedeterministického automatu. Je však třeba stanovit, co má či nemá smysl zobecňovat na fuzzy množiny či relace.

Abeceda symbolů i množina stavů zcela určitě musí zůstat zachována jako konečné bivalentní množiny. U přechodové funkce naopak ostupňovanost přechodové funkce (tj. fuzzy přechodová funkce) je poměrně vhodné (je přirozené

říkat „automat přejde do stavu q ve stupni d “. Co se počátečních a koncových stavů týče, někde se lze setkat s reprezentací bivalentní množinou (např. v. [8, 116]), jinde zase s fuzzy množinami ([117, 10, 21, 31])³. Vzhledem k tomu, že druhý jmenovaný, tj. automat s fuzzy množinou vstupních i výstupních stavů, je zřejmě obecnější, bude nadále uvažován pouze tento.

{def-ZaklDefNedFuzzAut}

Definice 3.2 (Nedeterministický fuzzy automat). *Nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} je pětice $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, μ je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace $Q \times \Sigma \times 2^Q \rightarrow [0, 1]$) a σ a η jsou po řadě fuzzy množiny nad Q počátečních, resp. koncových stavů.*

{not:muOverSym}

Značení 1. Označme $\mu_x(p, q) = \mu(p, x, q)$, tj. přechody realizované přes symbol x .

Před tím, než bude popsán výpočet automatu budou ukázány možnosti, jak fuzzy automat reprezentovat.

3.4 Reprezentace nedeterministického fuzzy automatu

Nedeterministické fuzzy automaty se typicky reprezentují třemi způsoby. Prvním z nich je přechodová tabulka (např. [32]).

Jedná se o tabulku, která v řádcích obsahuje aktuální stavy a ve sloupcích následující stavy. Poté buňka na řádku q a ve sloupci q' obsahuje $\mu(q, q')$, tj. výčet symbolů a stupňů pravdivosti těchto přechodů. Dále tabulka obsahuje dva dodatečné sloupce pro určení stupně počátečního a koncového stavu každého stavu.

Tabulka však často může být rozsáhlá, proto se reprezentace tabulkou často nahrazuje maticovým způsobem (např. [116, 117]). Očíslujme si stavy $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$. Poté pro každý symbol $x \in \Sigma$ sestavíme matici μ_x takovou, že $\mu_{x_{i,j}} = \mu(q_i, x, q_j)$ pro $0 \leq i, j \leq n$. Dále přiložíme vektor počátečních (resp. koncových) stavů takový, že i -tá složka vektoru je rovna hodnotě $\sigma(q_i)$ (resp. $\eta(q_i)$).

Posledním používaným způsobem je reprezentace grafem (např. [32, 31, 117]). Jedná se o orientovaný ohodnocený graf, kde:

- stavy automatu tvoří uzly grafu
- každý uzel stavu q je označen $q/\sigma(q)/\eta(q)$
- hrana od uzlu q k uzlu q' je ohodnocena seznamem takových x/d , pro které $\mu(q, x, q') = d$

Pokud je některý ze stupňů pravidla roven 0, tak se pravidlo v grafu vynechává.

{ex:FuzAut}

Příklad 3.2 (Fuzzy automat a jeho reprezentace). *V tabulce 2 je uveden příklad reprezentace fuzzy automatu pomocí tabulky. Na obrázku 2 je též automat reprezentován grafem. Maticově reprezentován by tento automat vypadal následovně:*

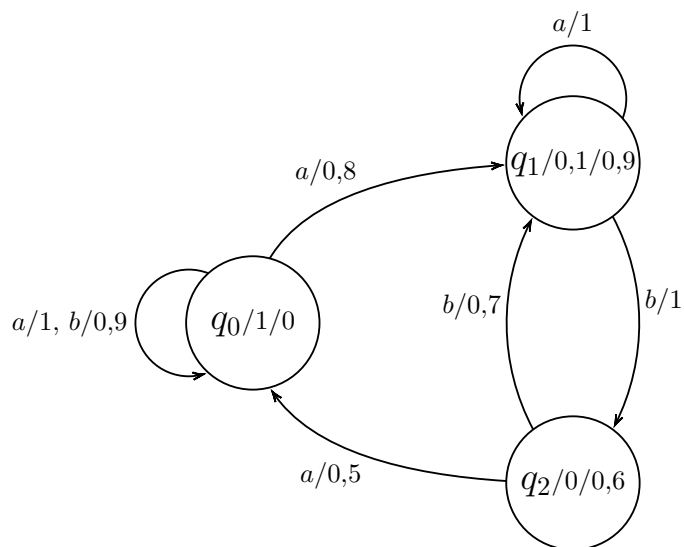
$$\mu_a = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu_b = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}, \sigma' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

³Mezi oběma druhy automatů existuje ekvivalence (resp. vzájemná převoditelnost).

$q \backslash q'$	$\mu(q, q')$			$\sigma(q)$	$\eta(q)$
	q_0	q_1	q_2		
q_0	$a/1, b/0,9$	$a/0,8$	\emptyset	1	0
q_1	\emptyset	$a/1$	$b/1$	0,1	0,9
q_2	$a/0,5$	$b/0,7$	\emptyset	0	0,6

Tabulka 2: Fuzzy automat reprezentovaný tabulkou

{tab:FuzAutTab}



Obrázek 2: Fuzzy automat reprezentován grafem

{img:FuzAutDiag}

3.5 Výpočet nedeterministického fuzzy automatu

Výpočet nedeterministického fuzzy automatu vychází z výpočtu nedeterministického bivalentního automatu. U bivalentního automatu jsme uvažovali, že automat se může nacházet ve více stavech současně, tj. součástí konfigurace výpočtu je množina stavů, ve kterých se automat nachází. Nedeterministický fuzzy automat se této koncepci drží. Množina stavů, ve kterých se automat může nacházet, je však fuzzy množinou. Tutu množinu budeme nazývat fuzzy stav.

440 {def-FuzzStav}

Definice 3.3 (Fuzzy stav). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak jako fuzzy stav označujeme každou fuzzy podmnožinu jeho stavů, tj. $\hat{Q} \in \mathcal{F}(Q)$.*

Poznámka 3.1. *Fuzzy množiny počátečních a koncových stavů jsou ve své podstatě také fuzzy stavy.*

Obdobně jako u bivalentního automatu, nezpracovaná část řetězce na vstupu spolu s (fuzzy) množinou stavů, ve kterých se automat nachází, označujeme jako konfigurace automatu. Posloupnost konfigurací nazýváme výpočet. Formální definice výpočtu je však mírně složitější a pro jeho zavedení bude potřeba pár dalších pojmů, které budou nyní uvedeny.

450 **Definice 3.4** (Konfigurace nedeterministického fuzzy automatu). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak každý prvek (w, \hat{Q}) relace $\Sigma^* \times \mathcal{F}(Q)$ nazýváme konfigurace automatu \mathbf{A} .*

Definice 3.5 (Aplikace fuzzy relace na fuzzy stav (tzv. t-kompozice)). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} a fuzzy stav \hat{Q} . Pak aplikací binární fuzzy relace $R : Q \times Q \rightarrow [0, 1]$ na fuzzy stav \hat{Q} obdržíme fuzzy stav $\hat{Q} \circ R$ splňující pro každé $q' \in Q$: $(\hat{Q} \circ R)(q') = \bigoplus_{q \in Q} (\hat{Q}(q) \otimes R(q, q'))$.*

{def-PreFunFuzzStav}

Definice 3.6 (Přechodová funkce fuzzy stavů). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak přechodová funkce fuzzy stavů je fuzzy relace $\hat{\mu} : \mathcal{F}(F) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{F}(F)$ taková, že pro každý fuzzy stav $\hat{Q} \in \mathcal{F}(Q)$ a symbol $x \in \Sigma$ je $\hat{\mu}(\hat{Q}, x) = \hat{Q} \circ \mu_x$.*

460

Definice 3.7 (Výpočet nedeterministického fuzzy automatu). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Každou posloupnost konfigurací $(w_0, \hat{Q}_0), \dots, (w_m, \hat{Q}_m)$ splňující pro každé $0 \leq i < m$*

1. $w_i = aw_{i+1}$ kde $a \in \Sigma$

2. $\hat{Q}_{i+1} = \hat{Q}_i \circ \hat{\mu}(\hat{Q}_i, a)$

nazýváme výpočet automatu \mathbf{A} z fuzzy stavu \hat{Q}_0 při vstupu w_0 .

Vidíme, že výpočet je definován rekurentně. Zápis můžeme přetransformovat do podoby rozšířené přechodové funkce [58].

{def-RozPreFunFuzzStav}

Definice 3.8 (Rozšířená přechodová funkce). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak rozšířená přechodová funkce je fuzzy relace $\mu^* : Q \times \Sigma^* \times Q \rightarrow [0, 1]$ daná následujícím předpisem:*

470

1. $\mu^*(q, \epsilon, q) = 1$ pro všechna $q \in Q$

$$2. \mu^*(q, ua, q') = \bigoplus_{p \in Q} \mu^*(q, u, p) \otimes \mu(p, a, q') \text{ pro všechna } q, q' \in Q, u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

Rozšířená přechodová funkce fuzzy stavů zřejmě plní funkci výpočtu automatu. Výraz $\mu^*(q, w, q')$ odpovídá stupni, v jakém automat přejde při zpracování řetězce w ze stavu q do stavu q' .

480 Stupeň $\mathbf{A}(w)$, v jakém je řetězec w automatem \mathbf{A} přijat, je určen pro všechny dvojice stavů q a q' pravdivostí tvrzení „stav q je počáteční a současně automat přejde při vstupu w ze stavu q do stavu q' a současně stav q' je koncový“. Je tedy třeba určit t-normu hodnot $\sigma(q)$, $\mu^*(q, w, q')$ a $\eta(q')$. Ze všech dvojic stavů q, q' nás zajímá ta, při které je výpočet prováděn v nejvyšším stupni. Můžeme tedy zapsat:

Definice 3.9 (Řetězec přijímaný automatem). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak řetězec $w \in \Sigma^*$ je automatem \mathbf{A} přijat ve stupni*

{def-RetPriAut}

$$\mathbf{A}(w) = \bigoplus_{q, q' \in Q} (\sigma(q) \otimes \mu^*(q, w, q') \otimes \eta(q')) \quad (1) \quad \{\text{eq-RetPriAut}\}$$

Poznámka 3.2. V literatuře (např. [112, 58, 21]) se obvykle lze setkat s „techničtějším“ zápisem ať už jen rozšířené přechodové funkce, tak $\mathbf{A}(w)$. Pro řetězec $w = a_0 \dots a_n$ rozvojem rekurence μ^* můžeme napsat (poznamenejme, že $\mu^*(q, \epsilon, p_0) = 1$ pokud $q = p_0$, jinak 0):

$$\begin{aligned} \mu^*(q, a_0 \dots a_n, q') &= \\ &= \bigoplus_{p_n \in Q} \left(\dots \bigoplus_{p_0 \in Q} (\mu^*(q, \epsilon, p_0) \otimes \mu(p_0, a_0, p_1)) \dots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \right) = \\ &= \bigoplus_{p_n \in Q} \dots \bigoplus_{p_1 \in Q} (\mu(q, a_0, p_1) \otimes \mu(p_1, a_1, p_2) \otimes \dots \otimes \mu(p_n, a_n, q')) = \\ &= \bigoplus_{(p_n, \dots, p_1) \in Q^n} \mu(q, a_0, p_1) \otimes \mu(p_1, a_1, p_2) \otimes \dots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \end{aligned}$$

Poté může být (1) zapsána jako:

$$\mathbf{A}(a_0 \dots a_n) = \bigoplus_{(q, p_n, \dots, p_1, q') \in Q^{n+1}} (\sigma(q) \otimes \mu(q, a_0, p_1) \otimes \mu(p_1, a_1, p_2) \dots \dots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \otimes \eta(q'))$$

Tento zápis intuitivněji popisuje výpočet automatu. Tento zápis totiž můžeme chápat tak, že automat projde všechny $(n+1)$ prvkové posloupnosti stavů q, q_n, \dots, q_1, q (tj. všechny možné cesty v grafu automatu) pro každou z nich spočítá stupeň, v jakém by byl automatem přijat a vybere tu s nejvyšším stupněm.

Vzhledem k tomu, že počet cest je roven $|Q|^{n+1}$ a každá cesta je tvořena $n+1$ stavy, automat při svém výpočtu musí navštívit $|Q|^{n+1}(n+1)$ stavů. Časová složitost je tak exponenciální vzhledem k délce vstupního řetězce⁴.

490

⁴Výpočet však může být optimalizován. Pokud některý přechod není definován (tj. automat by jej realizoval v nulovém stupni) můžou být cesty, procházející tímto přechodem při výpočtu vynechány.

Podobně, jak u bivalentních automatů, jazyk rozpoznávaný automatem je množina všech řetězců, které jsou tímto automatem rozpoznávány. U fuzzy automatu se však bude pochopitelně jednat o fuzzy jazyk.

{def-JazRozpAut}

Definice 3.10 (Jazyk rozpoznávaný automatem). *Mějme nedeterministický fuzzy automat \mathbf{A} . Pak fuzzy množinu $\mathcal{L}(\mathbf{A})(w) = \mathbf{A}(w)$ nad univerzem Σ^* nazýváme fuzzy jazyk rozpoznávaný automatem \mathbf{A} .*

Příklad 3.3 (Výpočet fuzzy automatu). *Uvažujme automat \mathbf{A} z příkladu 3.2 a řetězec a b a . Použijeme-li Gödelovu t -normu, pak automat postupně projde při svém výpočtu následujícími fuzzy stavů:*

$$\{q_0/1, q_1/0,1\}, \{q_0/1, q_1/0,8\}, \{q_0/0,9, q_2/0,8\}, \{q_0/0,9, q_1/0,8\}$$

Řetězec je tak přijímán ve stupni 0,8.⁵

Dále pak řetězec a a b b a je přijímán ve stupni 0,6 a řetězec b a ve stupni 0,8.

500 3.6 Pravděpodobnostní automat

Pravděpodobnostní automat je opět jen určitým rozšířením „klasického“ automatu. Očekáváme od něj, že přechody mezi stavy budou prováděny s určitou pravděpodobností. Tedy, že nachází-li se automat v určitém stavu a na vstupu je určitý symbol, stav, do kterého automat přejde, bude vybrán náhodně. Přechodová funkce pak bude určovat, s jakou pravděpodobností do kterého stavu automat má přejít.

Pravděpodobnostní automat bude přirozeně uvažovat jako deterministický. Z tohoto důvodu bude mít automat jen jeden počáteční stav. Množina koncových stavů bude „klasická“ množina stavů, stav tedy bude vždy buďto koncový nebo

510 nekonečný.

Následuje definice pravděpodobnostního automatu. Byla převzata z [100].

Definice 3.11 (Pravděpodobnostní automat). *Jako pravděpodobnostní automat označujeme strukturu (Q, Σ, μ, q_0, F) , kde Σ je abeceda, Q je neprázdna množina stavů, $q_0 \in Q$ je počáteční stav, $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů a $\mu : Q \times \Sigma \rightarrow (Q \rightarrow [0, 1])$ je pravděpodobnostní přechodová funkce⁶, která každému $q \in Q$ a $a \in \Sigma$ přiřazuje pravděpodobnost $P_{q,a} : Q \rightarrow [0, 1]$ takovou, že:*

$$\sum_{q' \in Q} P_{q,a}(q') = 1$$

Přechodovou funkci lze číst následujícím způsobem: Pro libovolné $(q, a, q', p) \in \mu$: „jestliže se automat nachází ve stavu q a na vstupu je symbol a , automat přejde do stavu q' s pravděpodobností p “.

Přejdeme nyní k popisu výpočtu automatu. Očíslujme si stavy $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$. Dále označme $B(a)$ jako čtvercovou matici velikosti $n \times n$ symbolu $a \in \Sigma$ tak, že:

$$B(a)_{i,j} = P_{q_i,a}(q_j)$$

⁵Pokud namísto Gödelovy t -normy použijeme Lukasiewiczovu, je řetězec přijímán ve stupni 0,7. Pokud použijeme produktovou, je přijímán ve stupni 0,72.

⁶V literatuře (např. v [110]) se můžeme setkat s alternativní definicí. Přechodová funkce je definována jako podmíněná pravděpodobnost, že automat přejde do stavu q' za předpokladu, že se nachází ve stavu q a na vstupu je a .

Dále definujeme matici $B(w)$, kde $a_1 \dots a_m = w \in \Sigma^*$ jako

$$B(w) = B(a_1) \times \dots \times B(a_m)$$

kde operátor \times značí násobení matic. Každý prvek $B(w)_{i,j}$ pak symbolizuje pravděpodobnost, s jakou automat přejde ze stavu q_i do stavu q_j , je-li na vstupu řetězec w . Pak $\sum_{q_k \in F} A(w)_{0,k}$ je pravděpodobnost, že automat přejde z počátečního stavu (q_0) do některého z koncových stavů.

Definice 3.12 (Pravděpodobnost přijetí řetězce). *Mějme pravděpodobnostní automat $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, q_0, F)$ a řetězec $w \in \Sigma^*$. Pak*

$$P_{\mathbf{A}}(w) = \sum_{q_k \in F} B(w)_{0,k}$$

kde $B(w)$ je matice popsána výše, je pravděpodobnost přijetí řetězce w automatem \mathbf{A} .

Jazyk řetězců rozpoznávaných automatem je pak určen tzv. řezem (tj. minimální pravděpodobností, s jakou je řetězec přijímán).

Definice 3.13 (Jazyk rozpoznávaný pravděpodobnostním automatem). *Pravděpodobnostní automat $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, q_0, F)$ rozpoznává s řezem $0 \leq \lambda < 1$ jazyk*

$$L_{\mathbf{A},\lambda} = \{w \in \Sigma^* \mid \lambda < P_{\mathbf{A}}(w)\}$$

Příklad 3.4 (Pravděpodobnostní automat). *Mějme $Q = \{q_0, q_1\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $F = \{q_1\}$ a $\mu(q_0, a) = \mu(q_0, b) = \{(q_0, 1/2), (q_1, 1/2)\}$, $\mu(q_1, a) = \{(q_0, 1)\}$, $\mu(q_1, b) = \{(q_1, 1)\}$. Pak $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, q_0, F)$ je pravděpodobnostní automat.*

Tento automat řetězec a b přijímá s pravděpodobností $1/8$ a řetězec a a b s pravděpodobností $5/8$.

4 Varianty fuzzy automatů

V této kapitole budou uvedeny další typy fuzzy automatů. Kromě nedeterministického fuzzy automatu, kterému byla věnována předchozí kapitola, se v souvislosti s fuzzy automaty často mluví s o dalších výpočetních modelech. A právě ty jsou předmětem této kapitoly.

Vzhledem k tomu, že se obvykle jedná o modifikace obvykle elementární, nebudou rozebírány do hloubky. Podrobnější informace o těchto automatech jsou k nalezení v literatuře.

Poznámka 4.1. *Vybranné varianty automatů se mohou kombinovat. Například automat může být současně deterministický, událostmi řízený i zásobníkový.*

4.1 Deterministický fuzzy automat

V klasické teorii automatů je nedeterministický automat považován za zobecnění deterministického. U fuzzy automatů tomu je přesně naopak. Deterministický fuzzy automat se obvykle definuje pouze jako speciální případ nedeterministického.

Podobně jako u nedeterministického automatu existuje několik různých definic. V [21] je definován jako deterministický bivalentní automat, jen koncové stavy jsou fuzzy množinou. Dle [70] je to deterministický bivalentní automat, ale s fuzzy počátečními stavy, koncovými stavy i přechodovými funkcemi.

V [31] definují deterministický fuzzy automat jako nedeterministický fuzzy automat s tím, že je jeho přechodová funkce omezena tak, že z každého stavu při každém vstupním symbolu automat může přejít do nejvýše jednoho stavu.

550 Deterministické fuzzy automaty mají význam především pro implementace. Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, časová složitost výpočtu nedeterministického fuzzy automatu je exponenciální vzhledem k délce vstupu. U deterministického automatu je tato složitost lineární. Obvykle však bývá vykoupena mnohonásobně vyšším počtem stavů automatu a jeho zvýšenou nepřehledností.

Pro každý nedeterministický fuzzy automat existuje algoritmus, jak k němu zkonstruovat jemu odpovídající (rozpoznávající stejný jazyk) deterministický. Algoritmy pro jednotlivé definice automatů jsou k nalezení v literatuře.

4.2 Nedeterministický fuzzy automat s ϵ -přechody

560 Nedeterministický fuzzy automat s ϵ -přechody je rozšíření nedeterministického fuzzy automatu. Toto rozšíření spočívá v přidání tzv. ϵ -přechodů. „Klasický“ přechod je automatem realizován, je-li na vstupu symbol odpovídající symbolu pravidla. Oproti tomu ϵ -přechod však automat může realizovat kdykoliv, bez ohledu na symbol na vstupu.

Takovýto automat nalézá uplatnění především v praktických aplikacích. S jeho pomocí lze velmi elegantně vyřešit např. rozvoj výpočtu nebo přesun výpočtu do jiného stavu, a to bez ohledu na vstup. Formální definice tohoto automatu lze nalézt např. v [116, 70].

4.3 Zobecněné automaty

570 V kapitole 2.3 byl rozebírán rozdíl mezi stupněm pravdivosti a pravděpodobností. Ve snaze zobecnit tyto dva přístupy na tzv. váhy vzniklo proto několik různých automatů pracujících s váhami. Označují se např. zobecněný automat, automat s váhami či např. Max-Min automat. O takovýchto automatech se lze dočíst např. v [86, 32, 109].

4.4 Fuzzy automat s výstupem

580 Rozšířením klasického automatu lze získat automat s výstupem. Automat kromě přechodové funkce (které se pak říká „vstupní“) disponuje také výstupní přechodovou funkcí, která při přechodu mezi stavy odesílá na výstup symboly. Úkolem těchto automatů není řetězce rozpoznávat, ale transformovat na jiné. Většinou tak nedisponují koncovými stavy. S fuzzy automaty s výstupem se lze setkat např. v [18, 96, 17, 27, 82].

4.5 Fuzzy stavový stroj

Fuzzy stavový stroj je typ fuzzy automatu, který nedisponuje žádnou formou výstupu. U stavových strojů není totiž důležitý výsledek výpočtu, ale jeho průběh.

Takovýto automat je uveden např. v [99, 6].

4.6 Událostmi řízený fuzzy automat

{subsec:FuzzEvMach}

Jako událostmi řízené fuzzy automaty se obvykle označuje další třída výpočetních modelů, které zobecňují fuzzy automaty. Vycházejí z myšlenky, že přechodová funkce běžného fuzzy automatu je vlastně tvořena fuzzy IF–THEN pravidly. Slovní popis činnosti přechodu $(q, a, q', d) \in \mu$ je totiž následující:

Jestliže je automat ve stavu q a na vstupu je symbol a ,
pak automat přejde do stavu q' ve stupni d

Událostmi řízené fuzzy automaty pak tyto pravidla nahrazují libovolnými fuzzy IF–THEN pravidly. Takovýto automat má velké praktické uplatnění, protože popis pomocí fuzzy IF–THEN pravidel je mnohem přirozenější a flexibilnější, než pomocí symbolů. Setkat se s nimi můžeme např. v [121, 6, 124].

Značení 2. *Lingvistické proměnné a jejich štitky, které popsují přechody automatu, budeme označovat jako události. Jejich množinu budeme nazývat abeceda událostí.*

4.7 Zásobníkový fuzzy automat

Podobně jako v „klasické“ teorii automatů, existuje i zásobníkový fuzzy automat. Jedná se o nedeterministický fuzzy automat, který je navíc vybaven tzv. zásobníkem. Zásobník je struktura typu Li–Fo tvořena symboly tzv. zásobníkové abecedy. Přechodová funkce automatu pak kromě symbolu na vstupu sleduje také symbol na vrcholu zásobníku a při přechodu – kromě změny stavu – také provádí vložení, odebrání či nahrazení symbolu na vrcholu zásobníku. Definice zásobníkového automatu je uvedena např. v [20].

5 Další modely podobné fuzzy automatům

V této kapitole bude navázáno na kapitolu předcházející. Budou zde představeny výpočetní modely, které se také automatům podobají. Oproti automatům v předchozí kapitole se však od „běžného“ nedeterministického automatu liší více a proto je třeba pro jejich zavedení doplnit některé související pojmy.

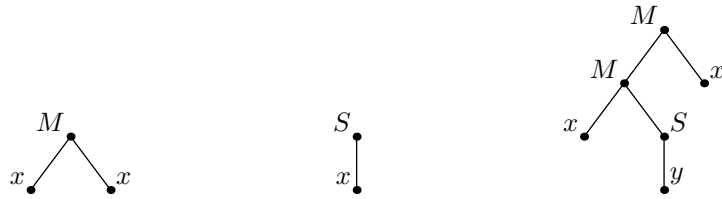
5.1 Fuzzy tree automaty

Fuzzy tree automaty jsou speciální třídou automatů, které jsou navrženy pro rozpoznávání dat, které mají v sobě obsaženu určitou stromovou strukturu.

Fuzzy tree automaty byly odvozeny od „klasických“ bivalentních tree automatů. O „klasických“ tree automatech je možné se dočíst více informací např. v [28, 56, 15]. Problematické fuzzy tree automatů se věnuje například [69, 84, 25, 37, 86].

Zatímco běžné konečné (fuzzy) automaty pracují s řetězci symbolů, (fuzzy) tree automaty pracují se speciálními strukturami symbolů, tzv. S-term⁷. S-term

⁷S-term^y jsou podobné termům známým například z predikátové logiky.



Obrázek 3: Stromy S-termů $M(xx)$ (vlevo), $S(x)$ (uprostřed), $M(M(xS(y))x)$ (vpravo)

{img:Tree}

je řetězec tvořený symboly z $(N \cup T \cup \{ (,) \})$ (za předpokladu, že $(N \cap T \cap \{ (,) \}) = \emptyset$) takový, že:

1. S-term je každé $t \in T$
2. S-term je každý řetězec $X(t_1 \dots t_m)$ takový, že $X \in N$, $m > 0$ a t_1, \dots, t_m jsou S-termy

620

S-termem je tedy buďto symbol z abecedy T (tzv. abecedy terminálních symbolů) nebo řetězec tvořený symbolem z abecedy N (tzv. abecedy neterminálních symbolů) následovaný symbolem otevírající závorky, neprázdnou posloupností S-termů a zakončen symbolem uzavírající závorky.

V tomto textu budeme jako abecedu terminálních symbolů uvažovat malá písmena abecedy (minusky) a jako množinu neterminálních symbolů velká písmena abecedy (verzálky). Pak S-termem jsou například následující řetězce: x , $P(xy)$, $S(P(xK(zz)yz))$.

Je patrné, že S-termy mají rekurentní strukturu, tj. že S-term může obsahovat další S-term(y). S-term má tedy stromovou strukturu. Je-li S-term ve tvaru $X(t_1 \dots t_m)$, pak S-term t_1, \dots, t_m jsou jeho potomky. Takový S-term budeme nazývat vnitřní S-term. S-Term $t \in T$ žádné potomky nemá a jedná se proto o listový S-term. Grafické znázornění stromu S-termu je vyobrazeno na obrázku 3.

630

Vzhledem k tomu, že S-termy jsou řetězce, můžeme hovořit o jazycích S-termů, případně fuzzy jazycích S-termů.

Fuzzy tree automaty jsou nástrojem, který rozpoznává S-term, resp. fuzzy jazyky S-termů. Automat má na svém vstupu S-term x . Automat rekurzivně prochází podtermy vstupního S-termu, při výpočtu si tedy udržuje zásobník zpracovávaných S-termů. Zpracováním listového S-termu automat přechází do určeného stavu. Při zpracování vnitřního S-termu přechází z n -tice (řetězce) stavů (odpovídající stavům, do kterých přešel zpracováním jednotlivých podtermů) do nového stavu. Přejít do jakých stavů (a v jakém stupni pravdivosti). Dále pak, nachází-li se automat ve stavech $q_1 \dots q_n$ a právě zpracovávaný term je $X(t_1 \dots t_n)$, (kde $t_1 \dots t_n$ jsou libovolné podtermy), do jakých stavů (a v jakém stupni) má přejít.

640

Stupeň pravdivosti, v jakém je S-term přijímán, je dán 1) průnikem (t-normou) pravdivostí jednotlivých přechodů a 2) zda-li výpočet zkončil v koncovém nebo stavu či nikoliv. Jazyk S-termů rozpoznávaný fuzzy tree automatem pak fuzzy množina všech S-termů ve stupni, v jakém jsou automatem přijímány.

650

Příklad 5.1 (Fuzzy tree automat). *Uvažujme fuzzy tree automat o stavech q_1, q_2 . V tabulce 3 je uveden příklad jeho možných přechodových pravidel.*

zpracováváný S-term	ze stavů	do stavu	
		q_1	q_2
x	—	1	1
y	—	1	0
$S(t_1)$	q_1	0	1
$S(t_1)$	q_2	0	0,4
$S(t_1 t_2)$	$q_1 q_1$	0	0,3

zpracováváný S-term	ze stavů	do stavu	
		q_1	q_2
$M(t_1)$	q_1	0,1	0,8
$M(t_1)$	q_2	0	0,5
$M(t_1 t_2)$	$q_1 q_1$	0	0,6
$M(t_1 t_2)$	$q_1 q_2$	0	1
$M(t_1 t_2)$	$q_2 q_1$	0	0,7

Tabulka 3: Příklad přechodů fuzzy tree automatu. x, y jsou terminální symboly, M, S neterminální a t_1, t_2 jsou označení pro libovolné S-termíny.

{tab:FuzTreAutTrans}

5.2 Buněčné fuzzy automaty

Buněčné automaty a buněčné fuzzy automaty jsou výpočetní modely, které se koncepčně značně liší od klasických automatů. Dle [134] je jejich studium dokonce označováno za naprosto samostatné matematické paradigma. I přesto je v určitém smyslu možné považovat za modifikaci „klasických“ deterministických automatů. Dá se totiž říci, že se jedná o n -dimenzionální mřížku tvořenou instancemi téže automatu.

660 Přesné vymezení pojmu „buněčný automat“ se často různí. Některé definice uvažují nekonečnou mřížku (např. [134, 133, 14]) jiné zase konečnou (např. [135]). Také se často kromě klasické čtvercové mřížky pracuje s mřížkou trojúhelníkovou nebo šestiúhelníkovou (např. [42]). V této práci se pro jednoduchost omezíme jen na automat se čtvercovou mřížkou velikosti m .

Buněčný automat je tedy mřížka $m \times m$ tvořena buňkami c_{ij} , $i, j \in [1, m]$. Každá buňka se nachází ve nějakém stavu q z množiny Q . Přechody mezi těmito stavy jsou realizovány přechodovými pravidly.

Přechodová pravidla obvykle určují nový stav buňky na základě okolních buněk. Okolí buňky $c_{i,j}$ je osmice jejich sousedních buněk⁸:

$$\text{round}(c_{i,j}) = (c_{i-1,j-1}, c_{i,j-1}, c_{i+1,j-1}, \\ c_{i-1,j}, c_{i+1,j}, \\ c_{i-1,j+1}, c_{i,j+1}, c_{i+1,j+1})$$

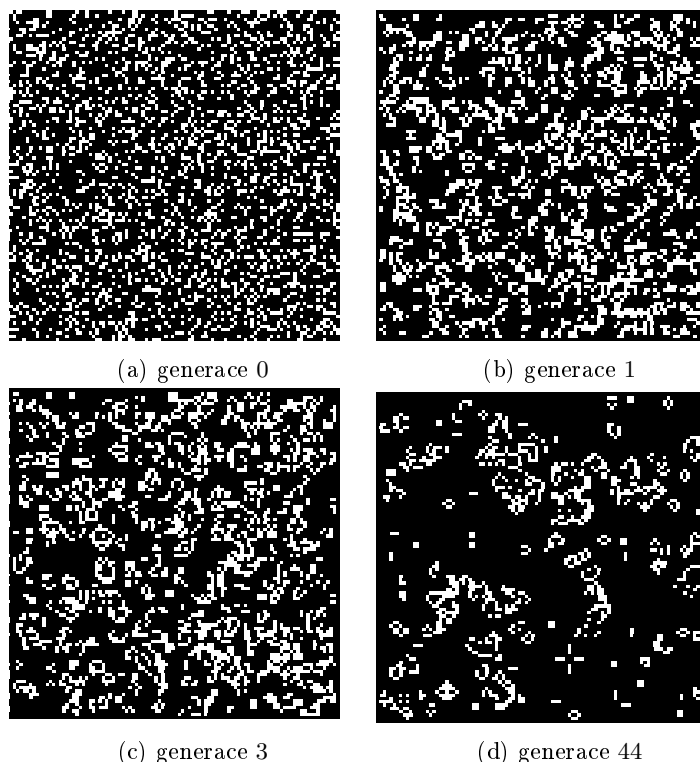
{ex:GameOfLife}

Příklad 5.2 (Buněčný automat Hra života). *Typickým příkladem buněčného automatu je tzv. Hra života (Game of Life) (např. [120]).*

670 *Hra života uvažuje dvoustavovou množinu stavů, tj. $Q = \{0, 1\}$. Je-li hodnota buňky c rovna 1 hovoříme, že je buňka „živá“, je-li rovna 0 nazýváme buňku „mrtvou“. Pravidla popisující její chod jsou následující:*

1. *Je-li buňka c živá a je v jejím okolí méně, než 2 živé buňky, buňka umírá (ve smyslu „samoty“)*
2. *Je-li buňka c živá a je v jejím okolí více, než 3 živé buňky, buňka umírá (ve smyslu „vyčerpání zdrojů“)*
3. *Je-li buňka c mrtvá, a v jejím okolí jsou přesně 4 živé buňky, je buňka oživena*

⁸U krajních buněk se poté okolí dodefinovává dodatečně



Obrázek 4: Několik generací výpočtu buněčného automatu „Hra života“ s náhodnou počáteční konfigurací

{img:GameOfLife}

4. Ve všech ostatních případech zůstává buňka buďto mrtvá nebo živá

680 Soubor všech stavů všech buněk nazvěme konfigurací buněčného automatu. Dvojice konfigurací tvoří krok výpočtu, pokud platí, že stav každé z buněk v první konfiguraci odpovídá stavu v druhé konfiguraci podle pravidel automatu. Posloupnost konfigurací, jejíž po sobě jdoucí dvojice konfigurací tvoří kroky výpočtu, se nazývá výpočet buněčného automatu.

Vzhledem k tomu, že pro každou konfiguraci existuje vždy právě jedna taková, která spolu s ní tvoří krok výpočtu, výpočet je tak jednoznačně určen svou první konfigurací. Tuto konfiguraci nazýváme počáteční konfigurace. Konfigurace pak číslujeme nultá, první, ..., (případně konfigurace nulté generace, konfigurace první generace a podob). Je zjevné, že výpočet buněčného automatu
690 je obecně nekonečný. Nemá tedy smysl uvažovat konfiguraci koncovou.

Konfigurace buněčného automatu se často zobrazuje graficky. Zakresluje se jako bitmapa, kde jednotlivé pixely reprezentují stavy buněk na odpovídajících souřadnicích. Každému stavu je přiřazena barva, kterou je tento stav znázorněn. Pro zobrazení výpočtu se obvykle používá obrazová animace či videosekvence.

Příklad 5.3 (Výpočet buněčného automatu). *Ukázka výpočtu automatu **A** se čtvercovou mřížkou velikosti 100 realizující Hru života je na obrázku 4. Černá barva symbolizuje mrtvou buňku, bílá pak živou.*

Buněčné fuzzy automaty se poté definují značně různě. Např. [42, 87] jej

700 definuje jako buněčný automat, jehož množina stavů je interval $[0, 1]$. Častěji však bývá chápán jako buněčný automat, jehož přechodová pravidla jsou IF–THEN pravidla. Takovéto automaty často bývají nazývány buněčné automaty s fuzzy logikou. Takto bude buněčný fuzzy automat chápán i v této práci.

Příklad 5.4 (Buněčný fuzzy automat). *Příkladem buněčného fuzzy automatu může být například následující automat. Množina stavů bude obsahovat přirozená čísla z intervalu $[0, 150)$. Mějme lingvistickou proměnné γ („hodnota buňky c je“) a ς („průměrná hodnota okolí buňky c je“), obě s univerzem Q a štítky γ_M, ς_M („malá“), γ_S, ς_S („střední“), a γ_V, ς_V („velká“).*

Pravidla automatu pak mohou vypadat následovně:

- Pokud $\gamma(c^{(t)}) = \gamma_V$, pak $\gamma(q^{(t+1)}) = \gamma_V$
- 710 • Pokud $\gamma(c^{(t)}) = \gamma_M$ a $\varsigma(c^{(t)}) = \varsigma_M$, pak $\gamma(q^{(t+1)}) = \gamma_M$
- Pokud $\gamma(c^{(t)}) = \gamma_M$ a $\varsigma(c^{(t)}) = \varsigma_V$, pak $\gamma(q^{(t+1)}) = \gamma_S$

6 Užitečné techniky pro práci s fuzzy automaty

Fuzzy automaty zavedené v předchozích kapitolách jsou z pohledu praktických aplikací pouze teoretické modely. V reálných aplikacích je často nutné pracovat s těmito modely spíše jen jako s kóstrou, od které je poté odvozen výsledný model nebo algoritmus.

V této kapitole budou některé ze základních technik, jak fuzzy automaty přiblížit reálným aplikacím, odprezentovány. Demonstrovány budou na nedeterministickém fuzzy automatu, nicméně není problém aplikovat je na jakýkoliv 720 jiný typ fuzzy (popř. pravděpodobnostního) automatu.

6.1 Fuzzy automat bivalentního automatu

V některých situacích máme k dispozici „klasický“ bivalentní automat⁹ a potřebujeme k němu sestavit odpovídající fuzzy automat. Odpovídající ve smyslu, že řetězce, které bivalentní automat přijímá (zamítá) musí fuzzy automat přijímat ve stupni 1 (0).

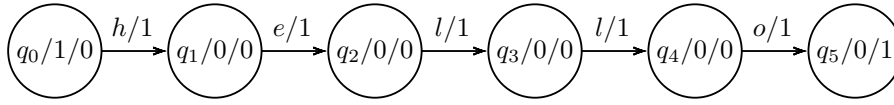
Uvažujme automat $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, I, F)$ z definice 3.1. Pak fuzzy automat $\mathbf{A}' = (Q, \Sigma, \mu', \sigma, \eta)$ odpovídající tomuto automatu je následující:

- množina stavů Q a abeceda Σ zůstávají stejné
- přechodová funkce μ' je dána předpisem (pro všechny $q, q' \in Q$ a $a \in \Sigma$):

$$\mu'(q, a, q') = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (q, a, q') \in \mu \\ 0 & \text{pokud } (q, a, q') \notin \mu \end{cases}$$

- množina počátečních stavů $\sigma(q) = 1$ pro všechny stavy $q \in I$, jinak 0
- 730 • množina počátečních stavů $\eta(q) = 1$ pro všechny stavy $q \in F$, jinak 0

⁹Případně regulérní výraz či regulérní gramatiku je, u odpovídající



Obrázek 5: Automat rozpoznávající *hello*

{diag-AutRozpHell}

6.2 Fuzzy automat rozpoznávající w

{sec:FuzAutRozp0me}

Další ze základních pomůcek pro práci s fuzzy automaty je automat, který v jednotkovém stupni rozpoznává pouze jeden konkrétní řetězec. Tento řetězec budeme v této a některých dalších podkapitolách nazývat „vzorový“ a značit w .

Chceme-li sestavit fuzzy automat rozpoznávající jeden řetězec, mohli bychom využít následující postup:

1. Označme $\mathcal{L}(w)$ jako jednoprvkový jazyk obsahující řetězec w ve stupni 1
2. Jazyk $\mathcal{L}(w)$ je konečný a tudíž i regulérní (viz poznámka 2.3).
3. Můžeme proto sestavit konečný bivalentní automat \mathbf{A}' , který jazyk $\mathcal{L}(w)$ rozpoznává.
4. Pomocí postupu uvedeného v předchozí kapitole můžeme automatu \mathbf{A}' sestavit fuzzy automat rozpoznávající řetězec w .

740

My však použijeme jinou, intuitivnější, úvahu. Automat bude v každém kroku zpracovávat symboly ze vstupního řetězce a porovnávat je se symboly vzorového řetězce na odpovídajících pozicích. Pokud dojde ke shodě na všech pozicích, automat dojde v jednotkovém stupni pravdivosti do koncového stavu (stavu, který bude koncový ve stupni 1) a sledovaný řetězec tak přijme ve stupni 1. Pokud se symboly shodovat nebudou, automat nebude mít definován žádný odpovídající přechod s nenulovým stupněm pravdivosti, a řetězec tak zamítne (přijme v nulovém stupni). Formálně pak:

750

Definice 6.1 (Fuzzy automat rozpoznávající w). *Mějme řetězec w nad abecedou Σ a délky n . Fuzzy automat rozpoznávající w je pak automat $\mathbf{A}(w) = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$ kde*

{def-FuzzAutRozp0me}

- $\sigma(q_0) = 1$ a pro všechna $i > 0$: $\sigma(q_i) = 0$
- $\eta(q_n) = 1$ a pro všechna $i < n$: $\eta(q_i) = 0$
- $\mu(q_k, a_k, q_{k+1}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } a_k \text{ } k\text{-tý symbol řetězce } w \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Příklad 6.1 (Automat rozpoznávající w). *Příklad fuzzy automatu rozpoznávající řetězec $w = \text{hello}$ se nachází na obrázku 5.*

6.3 Podobnost symbolů

V této a následujících podkapitolách budou popsány základní techniky, jak chování automatu upravit tak, aby více odpovídal reálným aplikacím. Například, máme fuzzy automat, který rozpoznává určitý fuzzy jazyk. Řetězce, které se určitým způsobem „podobají“ řetězcům toho jazyka, však tento jazyk obvykle

760

obsahuje v nulovém stupni. Vzniká zde tedy snaha přizpůsobit automat tak, aby i takovéto řetězce v určitém nenulovém stupni přijímal.

Základním nástrojem, jak toho dosáhnout je pomocí podobnosti symbolů. Některé symboly mohou totiž vykazovat určitou formu podobnosti a tudíž možné zaměnitelnosti. Například znaky ASCII tabulky, které se liší v jednom bitu. Podobnost symbolů však nemusí být klasická „bivalentní“ relace (tj. „podobné – nepodobné“), ale je výhodné použít fuzzy relaci. V takovém případě by podobnost znaků ASCII tabulky mohla být formulována následovně: „znaky x a y jsou si podobné ve stupni $1 - \delta/8$, pokud se liší o δ bitů“.

Formálně se tedy jedná o fuzzy relaci $\simeq : \Sigma \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$. Tato relace zjevně musí splňovat symetrii ($\simeq(x, x) = 1$) a reflexivitu ($\simeq(x, y) = \simeq(y, x)$) (pro všechny $x, y \in \Sigma$). Fuzzy relace podobnosti symbolů pak může být součástí automatu. V takovém případě dojde ke modifikaci výpočtu automatu takovým způsobem, že ve značení 1 a definici 3.8 bude nahrazen výraz $\mu(q, x, q')$ následujícím výrazem

$$\bigoplus_{y \in \Sigma} \mu(q, y, q') \otimes \simeq(x, y)$$

Tento zápis říká, že při vstupu x automat má zkontrolovat všechny ostatní symboly y , které by mohly být se symbolem x podobné a v takovém případě realizovat přechod přes symbol y . Takto modifikovaný automat tak umožňuje namísto symbolu x „rozpoznat“ jiný symbol. Můžeme tak říci, že automat umožňuje ve vstupu náhradu symbolu.

Další informace a příklady k této technice jsou k nalezení v [101]. V [36] je pak tato technika prezentována v mírně pozměněné formě. Symboly nahrazují tzv. fuzzy symboly, což jsou fuzzy množiny symbolů danému symbolu podobné.

6.4 Editační operace, deformovaný automat

{sec:DefAut}

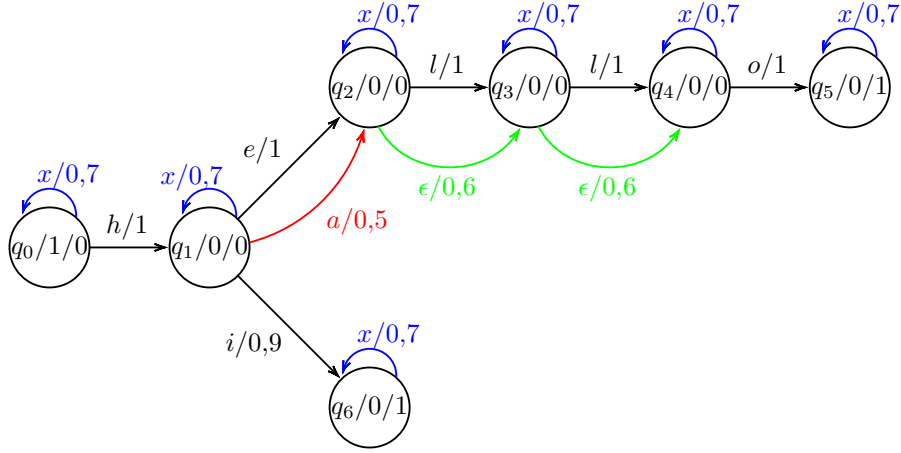
Další technikou pro modifikaci chování automatu je využití editačních operací. Základní myšlenka této techniky spočívá v trojici jednoduchých editačních operací, jejíž složením jsme schopni popsat požadovanou transformaci vstupu na automatem reprezentovaný vzor. „Množství“ transformace pak udává podobnost (resp. odlišnost) pozorovaného a vzorového řetězce.

Editační operace nám určují elementární (na úrovni symbolů) transformace z řetězce na jiný řetězec. Jak bylo zmíněno, tyto elementární transformace jsou tři, a to:

1. vložení symbolu
2. odstranění symbolu
3. nahrazení symbolu jiným symbolem

Aplikováním posloupnosti těchto operací na vstupní řetězec tak můžeme obdržet řetězec, který odpovídá vzoru a je tak automatem přijímán. Posloupnost editačních operací budeme nazývat vyrovnání řetězců.

Pracujeme nyní s abecedou Σ . Editační operace budeme zapisovat jako uspořádané dvojice $(a, b) \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})^2 \setminus (\epsilon, \epsilon)$. Vložení symbolu x značíme (ϵ, x) , odstranění symbolu x pak (x, ϵ) a náhradu symbolu x symbolem y pak (x, y) .



Obrázek 6: Ukázka deformovaného automatu. Černé přechody jsou přechody původního automatu, červený přechod realizuje náhradu symbolu e za a , zelené přechody odebrání symbolu l a modré přechody vložení symbolu x .

{img:DefAut}

Pak aplikací každé z těchto posloupností editačních operací na řetězec *ahoj* obdržíme řetězec *hello*:

$$\begin{aligned}
 &(a, \epsilon), (o, e), (j, l), (\epsilon, l), (\epsilon, o) \\
 &(a, \epsilon), (h, \epsilon), (o, \epsilon), (j, \epsilon), (\epsilon, h), (\epsilon, e), (\epsilon, l), (\epsilon, l), (\epsilon, o) \\
 &(a, h), (h, e), (o, l), (j, l), (\epsilon, o)
 \end{aligned}$$

Označme E jako množinu všech editačních operací, tj. $E = (\Sigma \cup \{\epsilon\})^2 \setminus (\epsilon, \epsilon)$. Budeme-li chtít pro každou editační operaci stanovit stupeň, v jakém má být automatem akceptována, použijeme fuzzy množinu $R : E \rightarrow [0, 1]$. Následovat bude popis tzv. „deformace“ automatu, tedy procedury, která pro fuzzy množinu editačních operací R a fuzzy automat \mathbf{A} zkonstruuje fuzzy automat \mathbf{A}' , který editační operace reflektuje.

800

{def-AutRozpCall}

Definice 6.2 (Deformovaný automat). *Mějme fuzzy množinu $R : E \rightarrow [0, 1]$ a nedeterministický fuzzy automat $\mathbf{A} = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$. Pak jako deformovaný automat označme nedeterministický fuzzy automat $\mathbf{A}' = (Q, \Sigma, \mu', \sigma, \eta)$ s ϵ -přechody, kde Q , Σ , σ a η zůstávají stejné a fuzzy přechodová funkce μ' je dána:*

$$\begin{aligned}
 \mu' = & \{(q, x, q', d) \mid (q, x, q', d) \in \mu\} && (\text{původní přechody}) \\
 & \cup \{(q, y, q, R(\epsilon, y)) \mid q \in Q, y \in \Sigma\} && (\text{vložení symbolu}) \\
 & \cup \{(q, \epsilon, q', R(x, \epsilon)) \mid (q, x, q', d) \in \mu\} && (\text{odstranění symbolu}) \\
 & \cup \{(q, y, q', R(x, y)) \mid (q, x, q', d) \in \mu\} && (\text{nahrazení symbolu})
 \end{aligned}$$

Význam jednotlivých složek přechodové funkce (deformací) je názorně zobrazen v tabulce 4. Příklad deformovaného automatu je na obrázku 6.

Je vidět, že pomocí editačních operací jsme schopni popsat libovolnou transformaci na úrovni symbolů. Je zjevné, že deformovaný automat nedokáže ošetřit

810

Editační operace	Deformace (nový přechod v automatu)
Vložení symbolu y	
Odebrání symbolu x	
Narazení symbolu x symbolem y	

Tabulka 4: Deformace automatu. Černě jsou znázorněny přechody původního automatu, červeně pak nově přidané.

{tbl:DefAutDef}

pokročilejší transformace, jako je vložení právě jednoho symbolu, vložení symbolu na určité pozici či nahrazení podřetězce jiným podřetězcem. Takovéto deformace automatu je zpravidla potřeba provést ručně. Další informace ohledně editačních operací a deformovaných automatů lze nalést např. v [9].

6.5 Učící se fuzzy automaty

Učící se automat je koncept popisující propojení fuzzy automatů a strojového učení. Strojové učení je moderní přístup pro řešení obtížných úkolů. Mezi takové úkoly se často řadí návrh modelu, který co nejpřesněji pracuje s (jinak velmi komplikovaně popsatelnými) reálnými daty. Takovým modelem může být i fuzzy automat. Velmi často se můžeme setkat s tím, že navržený automat nedostatečně přesně rozpoznává požadovaný jazyk. V mnoha případech může strojové učení pomoci automat přizpůsobit.

Důležitým předpokladem pro strojové učení je velké množství vstupních, tzv. trénovacích, dat. Strojové učení totiž data obvykle zpracovává na značně nízké úrovni, takže toto nízké množství informační hodnoty je třeba kompenzovat velkým množstvím vstupů.

V této kapitole bude prezentován koncept učícího se fuzzy automatu. Jedná se o všeobecný koncept techniky, jak přizpůsobit chování automatu reálným datům. Praxe ukazuje, že učící automaty tento problém dokáží velmi efektivně řešit. Setkat se s nimi můžeme např. v [44, 131, 46, 124, 94, 72, 114, 10, 138]. Vzhledem k tomu, že konkrétní techniky učení bývají poměrně komplikované, pokojíme se pouze s obecným popisem principu.

Učení fuzzy automatů je obvykle založeno na tzv. shlukování. Mějme fuzzy automat \mathbf{A} rozpoznávající jazyk $\mathcal{L}(\mathbf{A})$. Tento jazyk obvykle tvoří shluky. Shluk je podmnožina jazyka $\mathcal{L}(\mathbf{A})$, jejíž řetězce jsou si navzájem podobnější, než s řetězci ostatních shluků. Nyní si vezměme libovolný řetězec w , který do jazyka

$\mathcal{L}(\mathbf{A})$ nepatří. Pak můžeme najít řetězec w' z jazyka $\mathcal{L}(\mathbf{A})$, který je řetězcem w určitým způsobem nejpodobnější, tj. patřil by do jeho shluku. Pak můžeme automat (resp. části automatu, kterémají vliv na rozpoznávání řetězce w') upravit tak, aby tento shluk obsahoval i řetězec w . Postupně tak můžeme automat \mathbf{A} obohatit, aby dokázal rozpoznávat další řetězce.

6.6 Fuzzy automaty a neuronové sítě

Propojení fuzzy automatů s neuronovými sítěmi může přinést značně lepší výsledky, než učící se automaty. Budou tedy ve stručnosti uvedeny, spolu s popisem jejich vzájemného vztahu.

Umělé neuronové sítě (dále jen „neuronové sítě“) jsou jednou z nejzákladnějších a nejpoužívanějších technik strojového učení. Neuronové sítě jsou inspirovány zpracováním informací pomocí nervových buněk. Neuronová síť je tvořena sítí tzv. neuronů, které jsou propojeny zpravidla v rozsáhlou síť. Tato síť obsahuje spoustu parametrů a vah, které jsou nastaveny tak, aby síť řešila patřičný problém. Při výpočtu se síť šíří tzv. vzruchy (typicky reálná čísla), které jsou neurony přepočítávány. Více o neuronových sítích je dispozici např. v [39].

Způsoby, jak sestavit neuronovou síť existují dva (v praxi se však obvykle tyto přístupy kombinují). A to pomocí trénovacích dat nebo pomocí znalostní báze. Konstrukce pomocí trénovacích dat je podobná, jako v předchozí kapitole. Tedy, že vstupní data se postupně nechávají vyhodnocovat neuronovou sítí a ta je posléze datům přizpůsobována. Konstrukce pomocí znalostní báze je pak založena na kódování znalostní báze ve formě IF–THEN pravidel do vah neuronové sítě.

Bylo zjištěno, že fuzzy automat může být konvertován na neuronovou síť. Této problematice se věnují např. v [29, 93, 18, 46, 92, 125, 96].

V jednodušších případech se jedná pouze o neuronovou síť, která realizuje jen přechodovou funkci automatu¹⁰. Tedy neuronovou síť, jejíž vstupem je fuzzy stav, ve kterém se automat nachází, a symbol na vstupu, a výstupem fuzzy stav, do kterého automat přejde.

Možnosti, jak takovou neuronovou síť sestavit, jsou stejné, jako při návrhu obecné neuronové sítě. Lze tedy využít jak konstrukci pomocí trénovacích dat, tak pomocí znalostní báze. Použití trénovacích dat spočívá ve vygenerování dostatečného množství kombinací fuzzy stavů a vstupních symbolů. Pomocí automatu jsou určeny „výstupní“ fuzzy stavy, které jsou spolu předány neuronové síti k učení. Při použití znalostní báze jsou přechodová pravidla přepsána do fuzzy IF–THEN pravidel, jak bylo uvedeno v kapitole 4.6.

Stejně tak existují způsoby, jak konvertovat neuronovou síť zpět na fuzzy automat. Postup je popsán např. v [16, 17]. Je tedy možné převést fuzzy automat na neuronovou síť, provést její přeučení trénovacími daty a poté ji převést zpět na automat.

¹⁰Existují však i způsoby, jak pomocí neuronové sítě reprezentovat celý automat.*

7 Rozpoznávání, klasifikace a korekce textových dat

{sec:Rec}

Automaty jsou nástroje, který v základu slouží k rozpoznávání řetězců. Fuzzy a pravděpodobnostní automaty pak rozpoznávání v určitém smyslu zobecňují z dvoustavového „odpovídá vzoru – neodpovídá vzoru“ na stupeň shody, resp. pravděpodobnost shody.

Můžeme tak určovat podobnost řetězce se vzorem. Tato myšlenka však může být dále rozvinuta. Máme-li vzorů více, můžeme určit, kterému z nich je vstup nejpodobnější. V takovém případě hovoříme o klasifikaci. Případně se můžeme pokusit odchylku od nejpodobnějšího vzoru odstranit. V takovém případě hovoříme o korekci.

V této kapitole budou prezentovány některé reálné aplikace fuzzy a pravděpodobnostních pro rozpoznávání, klasifikaci a korekci a to textových dat. Využití fuzzy automatu pro rozpoznávání (a případně klasifikace a korekci) netextových dat se věnuje následující kapitola. Speciálně pak, rozpoznávání obrazových dat je popsáno v kapitole 10.4.

7.1 Výpočet podobnosti řetězců

Uvažujme, že máme dva (různé) řetězce, w a w' (nad společnou abecedou Σ). Jak moc jsou si „podobné“? Jinými slovy, je třeba navrhnout zobrazení $f : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow [0, 1]$, které jim přiřadí stupeň „podobnosti“.

Existuje několik technik, jak podobnost řetězců určit. Například Hammingova vzdálenost, která je definována jako počet rozdílných symbolů na odpovídajících pozicích (např. $H(abcd, bacc) = 3$). Hammingova vzdálenost však nedokáže (mimo jiné) reflektovat řetězce různých délek.

Pro určení podobnosti řetězců lze poměrně elegantně použít fuzzy automaty. Sestavíme-li automat \mathbf{A}_w rozpoznávající řetězec w (viz kapitola 6.2) a poté automat příčným způsobem upravíme (např. pomocí deformací dle kapitoly 6.4), obdržíme automat, který rozpoznává kromě řetězce w také řetězce jemu podobné. Jinými slovy, automat realizuje relaci podobnosti řetězců w a w' . Podobnostní relace pak bude vypadat následovně:

$$f(w, w') = \mathbf{A}_w(w')$$

Používání fuzzy automatů pro výpočet podobnosti řetězců bývá v praxi poměrně časté. Setkat se s ním můžeme např. v [8, 45, 11, 101, 113].

7.2 Klasifikace a korekce textových řetězců

Jak již bylo uvedeno, fuzzy a pravděpodobnostní automaty lze využít pro klasifikaci a následnou korekci (obecných) textových řetězců. V [30, 79, 54, 105, 104] řeší tento problém pomocí pravděpodobnostních automatů.

V [104] automat učí texty v přirozeném jazyce a poté s jeho pomocí opravují pozměněný text Bible. Techniku používají také pro segmentaci DNA (která je podrobněji popsána v kapitole 11.1).

Pozměněný automat¹¹ používají v [79, 54]. Automat tak dokáže počítat (pravděpodobný) počet výskytů vzoru ve vstupním řetězci.

¹¹Zde se jedná o tzv. aritmetický pravděpodobnostní automat. Automat při přechodech provádí elementární algebraické operace, v tomto případě případně sčítání.

Toho pak využívají pro rozpoznávání proteinů. Sledovaný vzorek proteinu nejdříve chemicky rozštěpí na jednotlivé peptidy. Ty jsou hmotnostním spektrometrem analyzovány a naměřené hodnoty jsou kódovány do symbolů. Z naměřených symbolů jsou posléze sestaveny řetězce, které jsou vyhodnocovány automatem.

V [85, 12] se pomocí pravděpodobnostních automatů snaží překládat slova fonetické abecedy na „běžnou“ (angličtinu). Dá se totiž předpokládat, že vyřčené slovo nemuselo být řečeno zcela zprávně a navíc mohlo být upraveno určitým akcentem. Učením sestavené automaty pro jednotlivá slova pak určí nejpravděpodobněji vyřčené slovo.

7.3 Detekce překlepů

{subs:DetTyp}

Pomocí fuzzy automatů lze poměrně snadno detekovat a případně se pokoušet opravit překlepy. Využívá se při tom fakt, že překlep obvykle znamená vložení či náhradu symbolem, který je na klávesnici počítače v okolí očekávaného symbolu. Například řetězec *hrlllo* zcela určitě vznikl překlepnutím při psaní *hello*, než kupříkladu *ahoj*. Je tak možné napsané slovo opravit. Tuto techniku popisují v [8, 116].

7.4 Fuzzy lexikální analyzátor

Lexikální analyzátor je základní součást všech překladačů (nejen) programovacích jazyků. Jeho úkolem je v sekvenci vstupních znaků rozpoznat jednotlivé elementy jazyka, tokeny. Tokenem může být například „číslo 42“, „identifikátor *foo*“, „operátor +“ či „symbol konce příkazu ;“.

Pro rozpoznávání (resp. klasifikaci) jednotlivých tokenů se používají „klasické“ automaty. Jejich nevýhodou je, že nijak nereflektují malé, často bezvýznamné chyby ve vstupu. Například vstup *iif* by mohl být token „klíčové slovo *if*“, i když by se podle pravidel jazyka mělo jednat o „identifikátor *if*“. Obdobně, středník by mohl být nahrazen čárkou nebo uzavírací kulatá závorka složenou.

Dle [80] může tyto problém vyřešit fuzzy lexikální analyzátor. Fuzzy lexikální analyzátor používá fuzzy automaty namísto „klasických“ automatů. Takto navržený lexikální analyzátor by mohl přesněji určovat příčiny syntaktických chyb.

7.5 Pravděpodobnostní rozpoznávání přirozeného textu

Pravděpodobnostní automaty lze uplatnit při zpracování přirozeného jazyka. Jako abeceda je zde chápána množina všech slov daného přirozeného jazyka.

Věty obvykle mívají složitější strukturu, než jakou dokáže pokrýt „klasický“ (pravděpodobnostní) automat, je proto nutné použít buď pravděpodobnostní tree automaty [64] nebo zásobníkové pravděpodobnostní automaty [128].

7.6 Dvouúrovňové vyhledávání v dlouhém textu

V [7] používají dvouúrovňové vyhledávání vzorů v dlouhém textu. Nejdřív sestaví malý, jednoduchý (avšak nepřesný) automat pro přibližné vyhledání vzoru. Tento malý (a tudíž rychlý automat) je aplikován na každý větší blok textu, např. na každou stránku. Stránky, které tímto testem prošly v nenulovém stupni

(tj. je pravděpodobné, že obsahují vzor), jsou pak prohledány přesným automatem.

7.7 Parsování referencí

V [67] pomocí pravděpodobnostního automatu parsují reference z textu a rozpoznávají v nich strukturu, kterou pak následně exportují do BibTeXu. Reference v mají totiž pevnou strukturu. Např. dle normy ČSN ISO 690:2017[40] má reference vypadat následovně:

960 Tvůrce. *Název publikace*. Vedlejší názvy. Vydání. Další tvůrce. Místo: nakladatel, rok. Počet stran. Edice, číslo edice. ISBN.

Automat nejdříve rozpoznává části oddělené tečkou a posléze jim doplňuje pravděpodobný význam. Některá pole totiž mohou být vynechána, nebo naopak mohou obsahovat tečku. Automat by tak měl určit nejpravděpodobnější variantu.

8 Další oblasti pro rozpoznávání

V předchozí kapitole bylo prezentováno pár příkladů, kdy lze pomocí fuzzy a pravděpodobnostních automatů rozpoznávat, klasifikovat a případně opravovat textová data. V této kapitole bude na tyto problémy navázáno a budou rozšířeny

970 na rozpoznávání a případně následnou klasifikaci a korekci netextových dat.

Základní myšlenka těchto technik vždy spočívá ve způsobu, jak vstupní data zakódovat do symbolů a řetězců. Data, která transformujeme do řetězců, pak můžeme předat patřičnému fuzzy nebo pravděpodobnostnímu automatu a pracovat s nimi jako v předchozí kapitole. Některé ukázky takových uplatnění zde budou prezentovány.

8.1 Rozpoznávání signálů

{subs:RozpSign}

Rozpoznávání signálů je jedna ze základních možností, jak využít rozpoznávání netextových dat. Věnují se tomu např. v [88, 102, 13, 63].

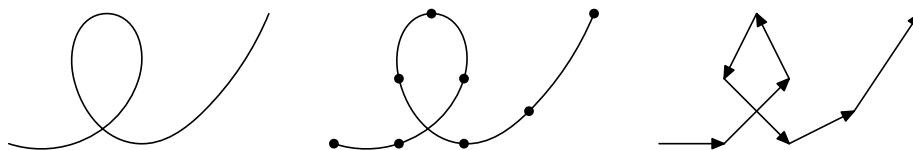
980 Signál, jakožto spojitý průběh jedné proměnné (času) nejprve kvantujeme v čase. Obdržíme tak posloupnost po sobě jdoucích vzorků (typicky číselných hodnot). Každý takový vzorek můžeme snadno zakódovat do odpovídajícího symbolu. Takovými symboly může být například $s_{0 \leq x < 10}$, $s_{10 \leq x < 20}$ a $s_{30 \leq x < 30}$ ¹². Zakódujeme-li tímto způsobem nakvantovanou posloupnost vzorků, obdržíme řetězec.

*

V [102] tuto techniku testují na detekci závady na elektromotoru. Vstupem je úhel natočení rotoru, jehož sinus by měl kopírovat sinusoidu. Při poruše se však průběh zdeformuje, což automat rozpozná. Stejně tak používají tuto techniku pro rozpoznávání vzorů v datech z elektrokardiogramu (EKG). Problematicke

990 analýzy signálu EKG je věnována kapitola 11.5. V [13] je rozpoznávání signálů demonstrováno na rozpoznávání gest rukou. To je podrobněji rozebráno v kapitole 8.4.

¹² Alternativně lze použít liguistickou proměnnou se šitky například „hodnota x je nízká“, „hodnota x je střední“ a „hodnota x je vysoká“



Obrázek 7: Ukázka postupu při rozpoznávání ručně psaného textu. Vlevo vstupní křivka, uprostřed rozdělena na segmenty, vpravo pak jednotlivým segmentům přiřazeny směry. Zapsána do řetězce by křivka mohla vypadat např.:

$S_{doprava}S_{doprava,nahoru}S_{doleva,nahoru}S_{doleva,dolu}S_{doprava,dolu}S_{doprava}S_{doprava,nahoru}$ {img:HandWritEx}

V [63] monitorují teplotu taženého profilu v ocelárně. Specifická kombinace změn teploty taženého profilu může způsobit jeho zlomení. Monitorováním teploty, jejím přepočtem na řetězec a následnou analýzou pomocí fuzzy automatu tak lze předvídat hrozící zlom.

Velmi podobnou techniku používají v [76]. Autoři zde podobným způsobem modelují vzory ve vývoji cen na burze.

8.2 Rozpoznávání dvourozměrného signálu

1000 V [61] je popisován způsob, jak rozpoznávat dvojrozměrný signál (mřížku signálů), např. data z termokamery.

Používá se k tomu model podobný pravděpodobnostním buněčným automataům.

Autoři tuto techniku demonstrují na problému detekce poruch u materiálu. Měřený kus testovaného materiálu je zatěžován stále větším tlakem a postupně proměřován ultrazvukovými signály. Při namáhání materiálu dochází k jeho systematickému poškození. Změna chování materiálu je detekována ultrazvukovými senzory a předána automatu, který v nich rozpozná vznikající poruchu.

8.3 Rozpoznávání ručně psaného textu

1010 Problém rozpoznávání ručně psaného textu je v současné době velmi populární. V závislosti na konkrétní situaci může být jeho vstupem buď přímo bitmapa (např. sken), nebo již vektorizovaný obrázek obsahující informace o křivce, kterou hrot pera (či stylus nebo prst) při psaní udělal.

Uvažujme tedy, že máme k dispozici již křivku, a to křivku, kterou tvoří jedno písmeno. V první fázi křivku podle určitého kritéria rozdělíme na podkřivky, segmenty. Kritériem pro rozklad křivky na segmenty může být například výrazná změna směru. Každému segmentu je posléze přiřazen symbol (např. na základě jeho směru). Celé křivce je tak přiřazen řetězec, který může být následně rozpoznán automatem. Tento proces je znázorněn na obrázku 7.

1020 Této technice se věnují např. v [10, 131]. V obou případech poukazují, že pro řádově přesnější výsledky rozpoznávání je vhodné systém vylepšit strojovým učením.

8.4 Rozpoznávání gest

Problém rozpoznávání gest je ve své podstatě rozšíření rozpoznávání ručně psaného textu. Gestem je zde myšlen pohyb ruce nebo rukou vytvářející určitý tvar

{subs:RecHandWrit}

{subs:GestRec}

(např. trojúhelník).

Při rozpoznávání gest je však značně komplikovanější konverze vstupních dat na posloupnost symbolů. Vstupem může být např. videosekvence [119], nebo např. data z akcelerometrů umístěných na ruce [13].

1030 8.5 Práce se zvukem

Vzhledem k tomu, že zvuk je ve své podstatě analogový signál, může s ním být pracováno jako se signálem. To znamená, že může být rozpoznáván tak, jak bylo popsáno v kapitole 8.1. Věnují se tomu v [43, 91]. V [43] využívají tuto techniku pro konverzi zvukového záznamu do formátu MIDI.

8.6 Fuzzy programy

V [24] popisují fuzzy programy. Fuzzy program je fuzzy regulární výraz. Fuzzy program si lze představit jako deklarativní program, tj. program, který popisuje (fuzzy) jazyk přípustných řešení. Fuzzy automat tak může sloužit jako interpret takovýchto programů.

1040 8.7 Metoda lisování dat

{subs:DataPresTech}

Autor práce prezentuje novou, jednoduchou techniku pro tzv. klasifikaci dat. Klasifikace dat je problém, který spočívá v určení hodnoty výstupního atributu testovacích dat na základě trénovacích dat. Tato technika bude označována jako lisování dat.

Vstupem této techniky je (konečná) trénovací množina a parametr δ . Trénovací množinou je tabulka binárních hodnot. Každý záznam v tabulce má několik vstupních atributů a jeden výstupní. Parametr δ je číslo z intervalu $[0, 1]$.

1050 Myšlenka metody lisování dat je založena na zakódování vstupních dat do řetězců a jejich následném zpracování fuzzy automatem. V první fázi jsou z trénovací množiny vybrány pouze záznamy, jejichž výstupní atribut je roven 1. Každý záznam trénovací množiny je zapsán jako řetězec nad abecedou $\Sigma = \{0, 1\}$. Celá trénovací množina tak může být konvertována na jazyk nad abecedou Σ . Vzhledem k tomu, že trénovací množina je konečná, bude i tento jazyk konečný. Může tak být sestaven konečný bivalentní automat a následně fuzzy automat, který tento jazyk rozpoznává.

1060 Takový automat však obvykle obsahuje velké množství stavů. Je proto třeba provést jeho determinizaci a minimalizaci¹³. Zde je vhodné použít fuzzy minimalizaci s parametrem δ . Fuzzy minimalizace v takovém případě „vyhladí“ ostrost mezi řetězci, které automat přijímal, a řetězci, které zamítal. Lze říci, že automat se „naučí“ rozpoznávat také řetězce, které jsou podobné trénovacím, avšak nebyly součástí trénovací množiny.

Je-li proveden výpočet automatu s řetězcem, který byl sestaven ze záznamu z testovacích dat (stejným způsobem jako u trénovací množiny), automat určí stupeň v jakém je pravdivé tvrzení „záznam má hodnotu výstupního atributu rovnu 1“.

¹³Minimalizace fuzzy automatu je proces konstrukce automatu rozpoznávající stejný jazyk, avšak s menším počtem stavů. Fuzzy minimalizace pak minimalizovanému automatu umožňuje rozpoznávat jazyk „podobný“ (míra povolené podobnosti je dána parametrem δ).

V kapitole 12.7 je popsána implementace této metody a některé experimentální výsledky.

Poznámka 8.1. *Podobnou techniku, založenou na pravděpodobnostních automatech, používají v [51].*

1070 8.8 Detekce úplných m -árních stromů

{subs:DetComTrees}

Fuzzy tree automaty mohou být použity pro poměrně elegantní určení úplnosti stromu. Úplný m -ární strom je takový strom, jehož každý uzel má buďto právě m potomků (vnitřní uzly) a nebo 0 (listové uzly).

Zaveďme lingvistickou proměnnou γ „vnitřní uzel v o n potomcích je vnitřní uzel úplného m -árního stromu“ a její štítek γ_A („ano“). Pak významovovou funkci $\gamma_A(v)$ tohoto štítku může nadefinovat následovně:

$$\gamma_A(v) = \frac{n}{m}$$

Pro listové uzly můžeme $\gamma_A(v)$ nadefinovat vždy jako 1. Vzhledem k tomu, že nyní známe hodnotu lingvistické proměnné γ pro všechny uzly v stromu, můžeme určit, jak moc je úplný m -ární celý strom. K tomu použijeme fuzzy tree automat.

Uvažujme, že S-term t je tvořen vnitřními uzly I a listovými uzly o (např. $I(ooI(oo)o)$). Automat bude mít jeden stav q_1 , který bude koncovým stavem. Přechodová funkce bude mít následující pravidla:

1. Při vstupu $t = o$ přejdi do stavu q_1 ve stupni 1
2. Při vstupu $t = I(t_1)$ přejdi ze stavu q_1 do stavu q_1 ve stupni $1/m$
3. Při vstupu $t = I(t_1 t_2)$ přejdi ze stavů $q_1 q_1$ do stavu q_1 ve stupni $2/m$
- ...
- $(m + 1)$. Při vstupu $t = I(t_1 \dots t_m)$ přejdi ze stavu $q_1 \dots q_1$ do stavu q_1 ve stupni $m/m = 1$

Takto navržený automat zřejmě rozpoznává m -ární úplné stromy.

9 Modelování a simulace

Modelování a simulace je odvětví jehož účelem je získat přehled o chování určitého systému. Jakmile toto chování známe, můžeme například simulovat různé jevy, které by mohly hypoteticky nastat.

Fuzzy a pravděpodobnostní automaty v určitých situacích mohou posloužit jako počítačové modely. Jedinou podmínkou obvykle je, aby pozorovaný systém bylo možné popsat pomocí diskrétních stavů, mezi kterými se překlápí.

Pro modelování a simulace se obvykle používají událostmi řízené automaty.

9.1 Markovův řetězec

Markovův řetězec je pravděpodobnostní model, se kterým se lze setkat v mnoha oblastech. Jedná se o diskretní systém stavový systém, který náhodně přechází mezi svými stavy. Jedná se tak vlastně o pravděpodobnostní stavový stroj. Více informací o vzájemném vztahu Markovových řetězců a pravděpodobnostních automatů je k nalezení v [35, 51].

9.2 Automobilismus

Automobily jsou v dnešní době zařízení vybavené značným množstvím palubní elektroniky. Je výhodné, aby elektronika měla přehled o tom, co se s autem děje, případně, co se v nejbližších sekundách bude dít.

V [57, 121] jsou prezentovány způsoby, jak jednoduše modelovat manévry řidiče. Mezi takové manévry patří např. předjíždění, zatáčení doleva v křižovatce nebo pouštění chodce na přechodu. Model využívá sadu lingvistických proměnných jako např. „aktuální rychlost“, „zrychlení“, „natočení volantu“ nebo „směrová světla“. Následně mohou být stanoveny vzory jednotlivých manévrů. Například při odbočování vlevo se jedná o následující posloupnost událostí:

1. řidič zapnul levý blinkr
2. řidič otočil volantem lehce doleva (může být vynecháno)
3. řidič srovnal volant (může být vynecháno)
4. řidič zpomalil
5. řidič výrazně otočil volantem doleva
6. řidič vypnul levý blinkr

Takto navrženému vzoru může být sestaven automat, který jej rozpoznává, případně klasifikuje.

Podobný způsob je popsán v [57]. V tomto případě však jako vstupní data slouží měření z trojice akcelerometrů (pro všechny tři osy, x , y a z). Lingvistické proměnné popisují, zda-li je zrychlení ve směru příčné osy kladné, neutrální či záporné. Manévry, které tento systém dokáže rozpoznávat jsou např. „dlouhá táhlá zatáčka vlevo“ nebo „přejezd přes horizont“.

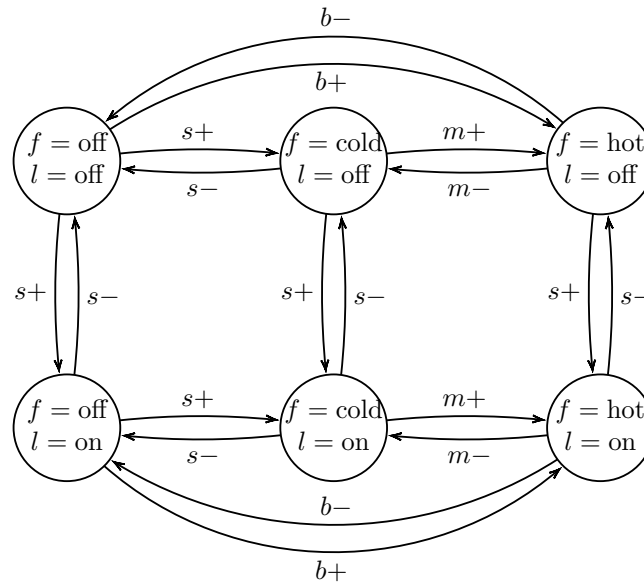
9.3 Monitorování elektrických a počítačových sítí

{subs:MonElComNet}

V [34] používají fuzzy automaty pro sledování vytížení elektrické rozvodné sítě. Technika předpokládá znalost spotřebičů v síti a nástroj pro monitorování odběru el. proudu (elektroměr) na jejím vstupu. Výstupem je pak rozpis, kdy byl jaký spotřebič (pravděpodobně) zapnut.

Technika využívá faktu, že každý spotřebič se může nacházet v různých stavech. Například vysoušeč vlasů se může nacházet v jednom z těchto tří stavů: „vypnut“, „fouká studený vzduch“ a „fouká teplý vzduch“. Předpokládejme, že v každou časovou jednotku dojde vždy pouze k jedné změně stavu jednoho spotřebiče. Každému stavu je asociována konkrétní hodnota odběru energie.

Označme změny odběru elektrické energie lingvistickou proměnnou „spotřeba el. proudu ...“ a se štitky např. „výrazně klesla“, „je konstantní“ a „lehce



Obrázek 8: Automat pro monitorování elektrické sítě tvořené vysoušečem vlasů a světlem. Obsahuje-li stav systému $f = \text{off}$, znamená to, že je vysoušeč vlasů vypnut, pokud obsahuje $f = \text{cold}$ pak vysoušeč vlasů fouká studený vzduch a pokud $f = \text{hot}$ pak fouká teplý vzduch. Obdobně, $l = \text{off}$ značí vypnuté světlo a $l = \text{on}$ zapnuté. Přechody jsou poté označeny štítky $b-$ („velký pokles spotřeby“), $m-$ („střední pokles spotřeby“), $s-$ („malý pokles spotřeby“), $s+$ („malý nárůst spotřeby“), $m+$ („střední nárůst spotřeby“), $b+$ („velký nárůst spotřeby“).

{img:PowConsAut}

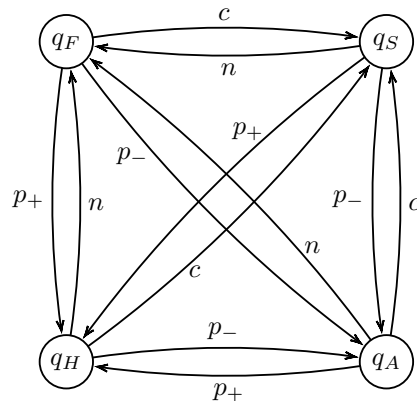
stoupala“ (čím více štítků použijeme, tím přesnější model bude). Nastane-li v síti událost x (např. značný pokles spotřeby), automat bude schopen určit, který ze spotřebičů změnil svůj stav. Tím způsobem tak můžeme neinvazivně sledovat, které spotřebiče, kdy a jak zatěžují síť. Ukázka automatu, který tuto techniku realizuje, je na obrázku 8.

V [90] modelují pomocí pravděpodobnostního automatu počítačovou síť. Model je tvořen automaty pro každý z uzlů sítě a dále pro každý kanál. Zasilání zpráv mezi uzly vede ke změnám stavů jednotlivých automatů. Výsledkem je návrh optimální směrovací tabulky pro celou síť.

9.4 Teorie her, počítačové hry

V [6] je použit fuzzy automat pro modelování nálady hráče ve hře šachy. Automat je tvořen čtveřicí stavů reprezentující jednotlivé „elementární“ nálady, konkrétně „zamýšlený“ (označme q_F), „překvapený“ (q_S), „radostný“ (q_H) a „rozzuřený“ (q_A). Přechodová abeceda je tvořena následujícími nastanuvšími tahy:

- tah, který hráče dostal do výhody (označme p_+)
- tah, který dostal hráče do nevýhody (p_-)
- tah, po kterém se hráč octl v šachu (c)



Obrázek 9: Automat pro modelování nálad hráče ve hře šachy. Stavy a události jsou popsány v textu. Převzato z [6], upraveno.

{img:ChessEmosFA}



Obrázek 10: Ukázka výrazů ve tváři hráče při ztrátě pěšce (vlevo) a při sebrání dámy (vpravo). Převzato z [6].

{img:ChessEmosScreens}

- tah, kdy se nestalo nic z předchozích (n)

Přechodová pravidla pak mohou obsahovat například: \bar{d} nebo „pokud se nestane nic zajímavého, přechází hráč do zamýšleného stavu“. Kompletní automat je k vidění na obrázku 9.

Na základě aktuálního fuzzy stavu (kombinace různých stupňů elementárních nálad) automatu je upravována mimika hráče a jeho obličej je zobrazován v počítačové hře. Ukázka některých herních situací je na obr. 10. Pro lepší uživatelský dojem autoři navíc implementovali plynulé přechody mezi stavy.

Podobná technika je popsána v [78]. Zde ovšem neslouží k popisu emocí hráče, ale predikci možného dalšího vývoje hry.

V [44] jsou učící automaty použity jako agenti v hře s nulovým součtem, která nemá jasné ekvilibrium, tj. vyvážený stav. Automaty se postupným hraním tahů učí a vylepšují svoji strategii tak, aby bylo dosaženo ekvilibria.

9.5 Interakce s člověkem

V [126] je prezentován prototyp systému pro modelování lidských emocí. Systém je založen na faktu, že velký vliv na emoce člověka má počasí. V jejich

modelu pak konkrétně teplota vzduchu a množství světla. Oba tyto ukazatele popisují pomocí dvojice lingvistických proměnných, každá se třemi štitky. Navržený fuzzy automat je tvořen devíti stavy (odpovídající kombinacím hodnot těchto lingvistických proměnných).

Přechody mezi jednotlivými stavy prostředí poté modelují fuzzy automatem na základě změn počasí. Na základě aktuálního stavu automatu pak pomocí tzv. Plutchikova kola emocí určíjí emoční stav pozorované osoby.

1180 V [89] pomocí pravděpodobnostních automatů analyzují tvrzení. U tvrzení sledují jeho tzv. polaritu, tedy zda je tvrzení míněno pozitivně, negativně nebo neutrálně). Každému slovu tvrzení je na základě slovníku přiřazena hodnota lingvistické proměnné „polarita slova“. Automat pak obsahuje stavy popisující aktuální polaritu tvrzení. Při zpracování pozitivního slova se automat přesouvá do stavu „více“ pozitivního, při negativním naopak a při neutrálním setrvává.

V [111] používají pravděpodobnostní automat pro řízení robotického pracovníka banky. Robot se ptá uživatele v závislosti na tom, v jakém stavu se nachází (a na základě odpovědi svůj stav mění). Příkladem stavu automatu může být „Uživatel si chce vybrat peníze“. Dotazy mohou být například „Přejete si vybrat v Korunách?“, „Přejete si vybrat v Eurech?“ nebo „Přejete si vrátit se k předchozí volbě?“.

1190 9.6 Sledování pohybu a aktivit osoby

V [122] je prezentován postup, jak pomocí sledování různých parametrů (pohyb získaný akcelerometrem a elektrická vodivost kůže) určit pravděpodobnou činnost (nicnedělání, chůze, práce, odpočinek) osoby. Ty jsou popsány lingvistickými proměnnými, které tvoří události automatu. Stavy automatu odpovídají aktivitám (např. odpočinek, pomalá chůze, běh). Pravidla jsou stanovena empiricky – např. je pravděpodobnější, že člověk ze stavu nicnedělání přejde do stavu práce než do stavu běh.

1200 Stejnou techniku využívají v [3]. Zde však detekují činnosti: chůze, práce u sebe, hovor s kolegy, dávání si kávy, míting, a to pomocí polohy zařízení (chytrý telefon) (určené triangulací Wifi sítě) osoby a polohy těla. Poloha těla pak může být buď, že osoba stojí, sedí nebo jde. Tyto hodnoty jsou sledovány akcelerometrem, pohybovým čidlem, a gyroskopem.

Podobnou techniku popisují v [123]. Zde však namísto fuzzy automatů používají pravděpodobnostní automat. Uvádějí však další aplikace pro tuto techniku, například identifikace pravděpodobného lupiče v bance.

9.7 Průmyslové řídicí systémy, fuzzy kontroléry

Vztah fuzzy automatů a řídicích systémů jsou popsány např. v [53, 49, 131, 48].

1210 Systémy k modelování bývají často tak složité, že je obvykle nemožné popsat je zcela kompletně. Mohlo by tak například z důvodu chyby nebo neočekávaného vnějšího podnětu dojít k tomu, že model se octne v nekonzistentním stavu, ze kterého nebude schopen se zotavit. Použití fuzzy automatů umožňuje do modelů určitou formu zotavení zanést.

*

V [124] používají učící se fuzzy událostmi řízené automaty, pro řízení výkonu při obloukovém svařování. Vstup automatu je realizován pomocí lingvistické proměnné „naposledy bylo provedeno“ se štitky „zvýšení výkonu“ a „snížení vý-

konu“. Automat je sestaven tak, aby správně rozpoznával vhodné posloupnosti zvýšení a snížení výkonu za účelem zvýšení kvality sváru.

1220 V téže publikaci demonstrují obdobným způsobem uplatnění pro řízení robota pohybujícího se v neznámém prostředí. Systém sleduje změny rychlosti pohybu robota a na jejich základě řídí přidávání a ubírání výkonu tak, aby se robot v libovolném terénu pohyboval konstantní rychlostí.

V [131, 47] je fuzzy automat použit jako model pro návrh (obecných) řídicích systémů. Řídicí systém je stavový stroj, který je překlápěn mezi diskrétními stavy pomocí událostí. Řídicí tak systém může být reprezentován automatem.

9.8 Problém městského růstu

{subs:UrbGrow}

1230 Problém městského růstu je problém z oblasti urbanistiky. Řešením tohoto problému je co nejpřesnější predikce rozvoje městské zástavby na základě historických záznamů a současné situace. Ve zobecněné podobě se nemusí jednat jen o růst městské zástavby, ale například nárůst vytíženosti silnic, kácení lesů nebo vytěženost ložisk. Stejně tak se nutně nemusí jednat o růst, ale obecný vývoj v čase. V této kapitole však budeme pro jednoduchost uvažovat standardní problém, tedy městský růst.

* Tento problém bývá často řešen pomocí buněčných fuzzy automatů. Věnují se jim např. v [1, 2, 129, 132, 68, 75, 77, 136]. Další informace věnující se uplatnění (fuzzy) buněčných automatů při řešení problému městského růstu jsou k dispozici např. v [97, 33, 130, 71]. V [87] podobnou technikou simulují šíření lesního požáru.

1240 Problém bývá řešen obvykle tak, že sledovaná oblast (město) je rozdělena na parcely. Každá parcela je popsána obvykle několika ukazateli, např. jak moc je zastavěna či jak moc hluku parcela produkuje. Tyto ukazatele tvoří stav buňky buněčného automatu. Konfigurace automatu pak tedy popisuje celé město v určitý časový okamžik.

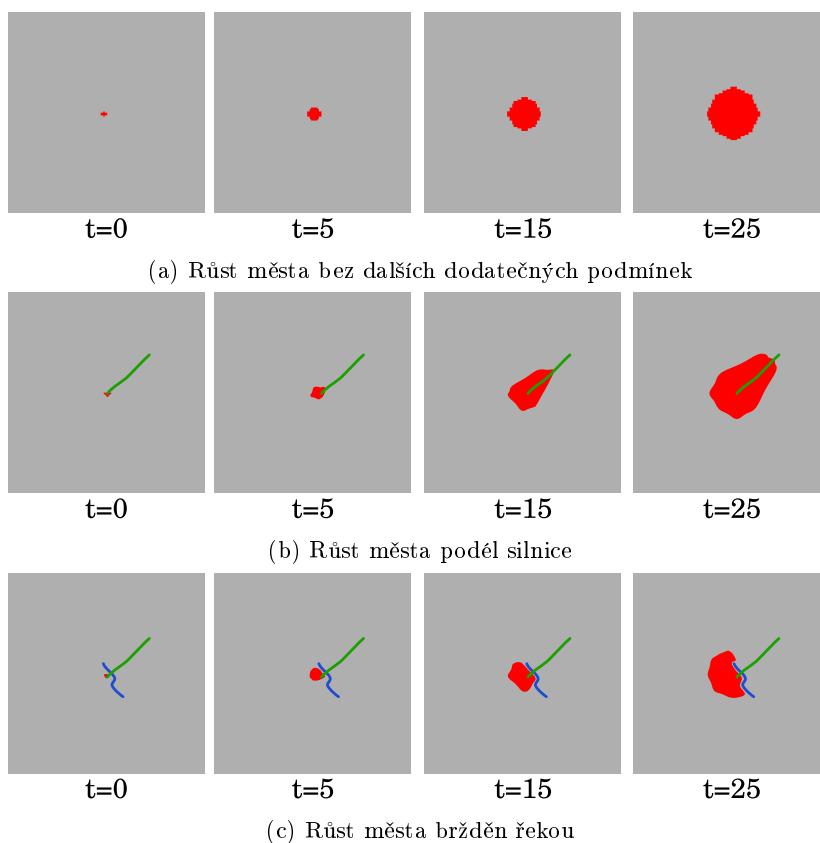
Přechodová pravidla pak mohou vypadat například:

- Je-li vzdálenost parcely od centra města malá, pak růst zástavby bude velký
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi malá, pak růst zástavby bude malý a množství hluku bude velké
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi velká, pak růst zástavby bude malý
- 1250 • Není-li lokalita atraktivní, pak růst zástavby bude malý

Ukázka vlivu různých pravidel na růst města je vyobrazena na obrázku 11. Na obrázku 12 je k vidění konkrétní ukázka městského růstu.

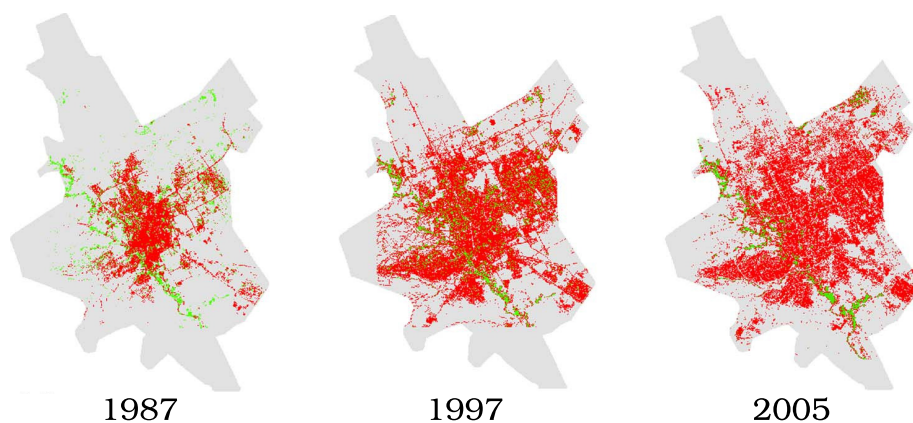
9.9 Další uplatnění

V [81] prezentují nástroj založený na pravděpodobnostních automatech, jehož úkolem je určovat nejpravděpodobnější aktivitu počítačového programu. Autoři mají k dispozici softwarový nástroj pro výpis nízkourovňového chování počítačového programu (např. systémová volání, změny na programovém zásobníku). Sledováním těchto informací při známém chování programu mohou stanovit vzory chování programu. Pravděpodobnostní automaty sestavené na základě

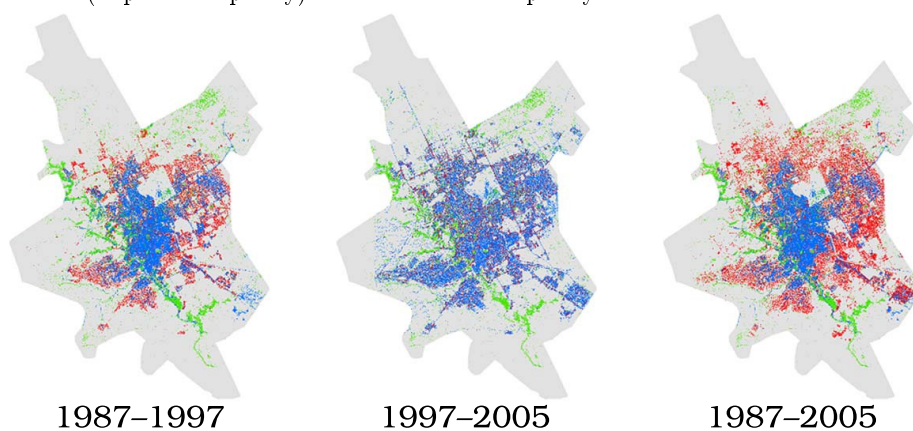


Obrázek 11: Ukázky chování automatu při různých počátečních konfiguracích. Šedě jsou znázorněny prázdné parcely, červeně zástavba, zeleně hlavní silnice a modře řeky. Převzato z [71], upraveno.

{img:VarTransRuls}



(a) Skutečný stav zástavby v uvedeném roce. Červená značí zástavbu, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.



(b) Simulovaný stav zástavby. Modrá značí zástavbu na počátku sledovaného období, červená značí (novou) zástavbu na konci sledovaného období, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.

Obrázek 12: Ukázky simulace městského růstu. Převzato z [2].

{img:UrbGroProSample}

1260 těchto vzorů tak mohou modelovat chování programu. Automat tak například může předpovídat, že pokud program otevřel soubor, pak následující akcí bude s nejvyšší pravděpodobností alokace paměti na haldě.

V [96] navrhuji používat učení fuzzy automatů pro konstrukci logických klopných obvodů. Tj. obvodů, které se na základě vstupů překlápí mezi různými diskrétními stavy. Autoři doporučují navrhovat elektronické takové obvody tak, že se dle očekávaného chování obvodu sestaví fuzzy automat (pomocí učení). Ten se poté „zaokrouhlí“, tj. převede na dvojstavový a převede na elektronický obvod.

10 Zpracování obrazu

1270 Zpracování obrazu je velmi populární informatická disciplína. V této kapitole budou prezentovány některé problémy z této oblasti, které lze řešit pomocí fuzzy automatů. Vzhledem k tomu, že obraz bývá obvykle reprezentován bitmapou, bývá obraz obvykle zpracováván pomocí buněčných fuzzy automatů.

{cha:ImgProc}

10.1 Konvoluce

{subs:Convolve}

Uvažujme obraz jako mřížku $m \times m$ pixelů s odstíny šedi jako hodnotami od 0 do 1. Hodnota 0 značí černou, hodnota 1 bílou. Jinými slovy, o pixelu můžeme hovořit jako o logistické proměnné „pixel má bílou barvu“.

1280 Každý obraz tak můžeme považovat za konfiguraci buněčného fuzzy automatu. Návrhem vhodné přechodové funkce tak můžeme vytvořit automat, který provádí určitou operaci pro úpravu obrazu. Typickou operací je tzv. obrazový filtr, což je zobrazení které obrazu přiřazuje jiný obraz stejných rozměrů.

Speciálním případem filtru konvoluce [106]. Konvoluce je v základu obrazový filtr, který přiřazuje (novou) hodnotu pixelu na základě váženého součtu (stávající) hodnoty pixelu a hodnot pixelů sousedních. Váhy bývají reprezentovány tzv. konvoluční maticí. Například matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

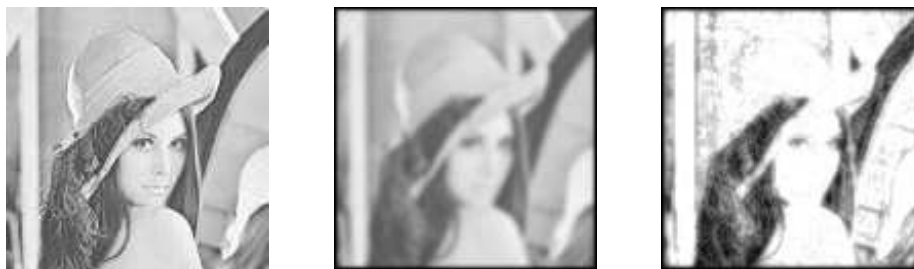
je konvoluční maticí jednoduchého rozostření. Konvoluční matice se aplikuje následujícím způsobem:

$$c'_{i,j} = \frac{1}{S} \sum_{k,l \in \{-1,0,+1\}} B_{k+1,l+1} c_{i+k,j+l}$$

kde $c_{i,j}$ je pixel původního obrazu, $c'_{i,j}$ je pixel nového a S je součet hodnot v matici B .

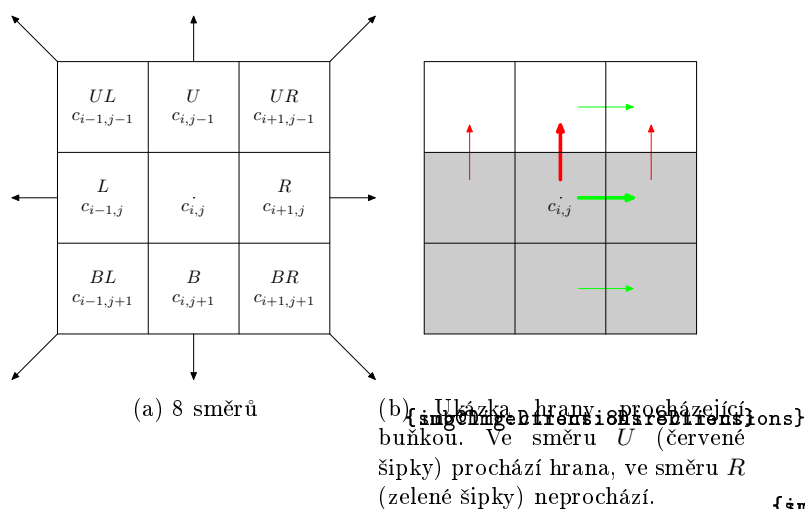
Další ukázkou grafického filtru pracujícího s využitím buněčného fuzzy automatu je například filtr pro zvýraznění tvarů. Je daný následujícím předpisem

$$c'_{i,j} = \max(0, \min(1, \begin{cases} \epsilon(c_{i,j} + 1) - 1 & \text{pokud } c_{i,j} > \text{neighs}_{i,j} \\ \epsilon c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} < \text{neighs}_{i,j} \\ c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} = \text{neighs}_{i,j} \end{cases}))$$



Obrázek 13: Ukázky jednoduchých filtrů. Vlevo původní obrázek, uprostřed obrázek po 5 generacích jednoduchého rozostřovacího filtru a vpravo obrázek po 8 generacích filtru pro zvýraznění tvarů ($\epsilon = 1,1$).

{img:Filters}



{img@ImageDimensions:EdgeEdges}

kde $\epsilon > 1$ je parametr udávající agresivitu zvýrazňování a $neighs_{i,j}$ je součet hodnot okolních buňek.

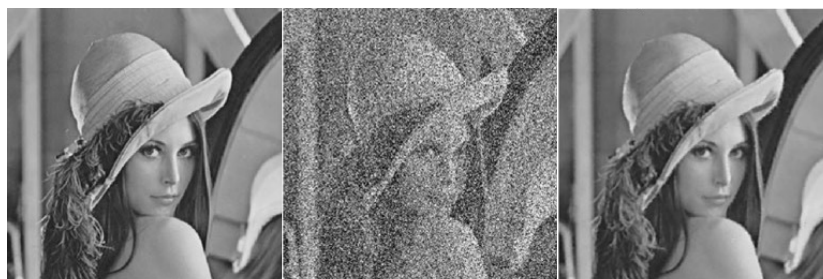
Ukázky aplikací obou filtrů jsou k nalezení na obrázku 13. V následujících podkapitolách budou prezentovány některé další (pokročilejší) techniky zpracování obrazu využívající buněčné fuzzy automaty.

10.2 Hledání hran

1290 Hledání hran je jednou ze základních technik zpracování obrazu. Hledání hran je často klíčové pro rozpoznávání vzorů v obrazech. V dnešní době existuje značné množství technik pro rozpoznávání hran [73]. V [72] je popsán poměrně elegantní způsob, jak hledání hran vyřešit pomocí buněčných fuzzy automatů. V [94] pak tuto techniku vylepšují pomocí strojového učení.

Označme osmici směrů dle obrázku 14a jako U , UR , R , BR , B , BL , L a UL . Množinu těchto směrů označme dim . Dále označme c_X (kde $X \in dim$) jako sousední buňku buňky c ve směru X .

1300 Rozpoznávání hran vychází z následující úvahy: Má-li buňka c_X výrazně jinou barvu, než buňka c , pak buňkou c prochází hrana ve směru X (červené šipky v obrázku 14b). Má-li buňka c_X velmi podobnou barvu než buňka c , pak buňkou



(a) Vstupní obraz (b) Zašumněný obraz (c) Obraz s odstraněným šumem

Obrázek 15: (převzato z [107]) Ukázka odstraňování šumu

{img:Noises}

c neprochází hrana ve směru X (zelené šipky v obrázku 14b).

Pomocí těchto pravidel tak lze sestavit buněčný fuzzy automat, který rozpoznává hrany.

Dle [72] může být hodnota lingvistické proměnné „buňkou c prochází hrana“ dále použita pro zaostřování obrazu.

10.3 Ostraňování šumu

{subs:NoisRem}

Odstraňování šumu je další častý problém, který je třeba při zpracování obrazů řešit. Pro studium technik odstraňování šumu se používá typicky zašumnění tzv. impulzním šumem popř. šumem „sůl a pepř“. Zašumnění impulzním šumem nahradí stanovený počet pixelů náhodnými barvami. Šumění „sůl a pepř“ pak narazuje pixely buď bílou (1) nebo černou (0) barvou.

V [107] je prezentována jednoduchá avšak efektivní technika, která kombinuje klasický bivalentní buněčný automat s buněčným fuzzy automatem.

V první fázi je klasickým buněčným automatem šum detekován. Buňka obsahuje šum, pokud rozdíl její barvy od průměrné barvy jejích sousedů překračuje stanovenou mez. Tato mez může být stanovena statisticky, například na základě směrodatné odchylky barev pixelů celého obrazu. V druhé fázi je aplikován buněčný fuzzy automat, který buňky obsahující šum nahradí hodnotami spočtenými z jejich okolí. Ukázky výsledků jsou na obrázku 15.

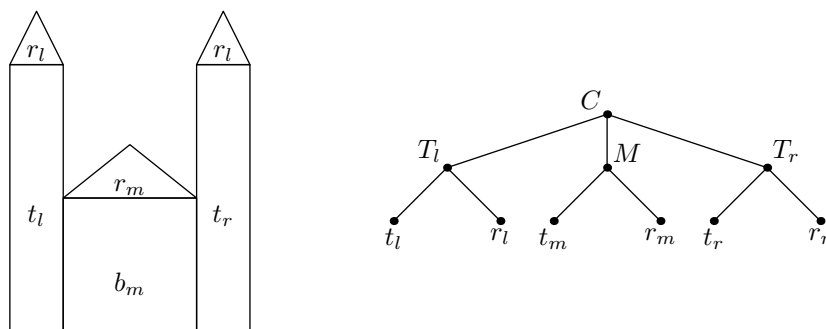
Velmi podobný způsob odstranění šumu je popsán v [108]. Zde však operace detekce šumu a jeho odstranění provádějí v jednom kroku.

10.4 Rozpoznávání jednoduchých vzorů

{subs:SimpImgRec}

Rozpoznávání vzorů je další z častých způsobů práce s obrazy. Obecně je problém definován (obdobně, jako rozpoznávání textových vzorů v kapitole 7) jako problém určení, zda-li obraz obsahuje předem stanovený vzor či ne. Obvykle nás také zajímá, kde přesně se vzor v obraze vyskytuje.

V [74] je popsán způsob, který popisuje rozpoznávání vzorů v obrazu velikosti $1 \times m$ pomocí (jednodimenzionálního) buněčného automatu. Automat pracuje s lingvistickou proměnnou „pixel má šedou barvu“, která má několik štítků (reprezentující různé stupně šedi). Přechodová pravidla jsou navržena tak, aby rozpoznávaný (a případně jemu podobný) vzor zvýrazňovala. Přechodová



Obrázek 16: Příklad složeného geometrického tvaru a stromová reprezenace jemu odpovídajícímu S-termu

{img:Geoms}

pravidla však obvykle bývají tvořena všemi kombinacemi odstínů pro všechny sousední buňky, čímž značně roste její mohutnost. Tato technika je proto prakticky nepoužitelná.

Zcela jiný přístup používají v [127]. Vzor nepovažují za konkrétní kombinaci odstínů barev, ale jako část obrazu splňující určité vlastnosti. Konkrétně, skvrny jednotlé barvy, které jsou obklopeny různorodě zabarvenou plochou. Podrobnější popis (včetně ukázky výstupů) je uveden v kapitole 11.4.

10.5 Složené geometrické útvary

{subs:CompGeoms}

1340 V [69] byl popsán způsob, jak pomocí fuzzy tree automatů rozpoznávat složené geometrické útvary. Složený geometrický útvar je chápán jako S-term, jehož listové S-termíny reprezentují „primitivní geometrické objekty“ (čtverec, kruh, trojúhelník, aj.). Jeho vnitřní S-termíny pak popisují vzájemný vztah či vlastnost (např. vzájemnou polohu) jednotlivých podobjektů. Na obrázku 16 je vyobrazena ukázka složeného geometrického útvaru vyobrazující „budovu kostela“ a stromová reprezentace jemu odpovídajícího S-termu.

1350 Mějme primitivní geometrický tvar x . Pak tento tvar je čtvercem, pokud je tvořen čtveřicí bodů a všechny jeho vnitřní úhly jsou pravé. Vlastnost „být pravý úhel“ můžeme snadno vyjádřit ve stupních pravdivosti. Tedy, že úhel $\pi/2$ je pravým ve stupni 1 a například úhel π v nulovém stupni. Díky tomu můžeme i vlastnost „být čtvercem“ uvažovat se stupni pravdivosti.

Obdobným způsobem můžeme popsat různé další primitivní geometrické tvary. Stejně tak můžeme stanovit stupně pravdivosti pro vlastnosti např. „geometrický tvar x má neprázdný průnik s geometrickým tvarem y “ či „geometrické tvary x a y jsou přímkami a jsou navzájem rovnoběžné“.

Na základě těchto popisů může být navržen automat, který S-termíny reprezentující geometrické tvary rozpoznává a to včetně geometrických tvarů „podobných“ vzoru.

10.6 Detekce požárů

1360 V [52, 65] používají fuzzy automaty pro rozpoznávání vzorů ve videosekvenci, konkrétně pro detekci požárů.

V první fázi se snímek rozdělí na několik regionů. Je-li region tvořen teplejšími a světlými barvami, je označen jako tzv. kandidát. Pro každého kandidáta je pak sestaven fuzzy automat o čtyřech stavech q_{VL}, q_L, q_H, q_{VH} . Pokud se automat regionu nachází ve stavu q_{VL} , znamená to, že „region je velmi málo pravděpodobně tvořen plamenem“. Obdobně pro q_L („málo pravděpodobně“), q_H („hodně pravděpodobně“) a q_{VH} („velmi pravděpodobně“). Abecedou událostí jsou pak kombinace dalších atributů (svit, pohyb v určitém směru, vlnění) spočtených z předchozích snímků. Přechodové pravidlo pak může být např. „pokud je region ve stavu q_H a došlo k velkému posunu směrem nahoru a malému snížení svitu, pak přejdi do stavu q_{VH} “. Přesně byla přechodová funkce navržena statistickým pozorováním známých videosekvencí s požáry.

11 Biologie a medicína

Biologie a medicína jsou odvětví, které zpravidla disponují velkým množstvím dat, které je třeba zpracovat. Typicky, v datech získaných nějakým sledováním či měřením najít určité vzory. Fuzzy popř. pravděpodobnostní automaty mohou být v této oblasti nápomocny.

Vzhledem k tomu, že většina biologických a medicínských uplatnění vyžaduje znalost dané problematiky, budou tyto uplatnění rozebrána jen zevrubně.

11.1 Rozpoznávání řetězců DNA

{subs:DNA}

Řetězec DNA je organická makromolekula deoxyribonukleové kyseliny. Je tvořena sekvencí tzv. nukleotidů. Každý nukleotid obsahuje jednu ze čtyř nukleových bází, adeninu, guaninu, cytosinu a nebo thyminu. Nukleové báze se často značí po řadě A, G, C a T a celá DNA tak může být zapsána jako řetězec těchto symbolů.

Řetězce DNA často kódují základní informace o živých organizmech a je proto snaha pochopit její strukturu. Popis využití fuzzy a pravděpodobnostních automatů na rozpoznávání řetězců DNA je uveden v [116, 104, 139, 54].

11.2 Biologické simulace

V [26] je prezentován model založený na buněčných fuzzy automatech modelující růst mořských řas. Funguje na velmi podobném principu jako problém městského růstu (viz kapitola 9.8).

V [83] používají pravděpodobnostní automaty na simulaci živého organismu. Princip je podobný, jak u buněčných automatů, jen model není založen na pevné mřížce, ale buňky vznikají a mizí. Každá buňka se nachází v některém stavu z množiny stavů (jako je např. „buňka se zrodila“, „buňka je připravena k dělení“, „buňka je rodičovskou buňkou jiné buňky“). Přechodová pravidla mohou vypadat například následovně: je-li buňka „připravena k dělení“, pak v dalším kroku provede dělení, tj. vytvoří novou buňku ve stavu „buňka se zrodila“ a buňka samotná přechází do stavu „buňka je rodičovskou buňkou jiné buňky“. Díky využití pravděpodobnostních automatů se takovéto modely mohou značně více přiblížit reálným buněčným sítím.

V [19] používají systém podobný pravděpodobnostnímu buněčnému automatu pro modelování šíření infekčních nemocí. Každá buňka je buďto prázdná

nebo se v ní nachází osoba. Osoba může být ve stavu „nenakažena“ nebo „nakažena“. Nachází-li se v okolí „nenakažené“ osoby alespoň jedna „nakažená“ osoba, pak s určitou pravděpodobností přejde při dalším časovém kroku do stavu „nakažena“, jinak zůstává ve stavu „nenakažena“.

1410 Autoři navíc do modelu zanášejí pohyb jedinců, tj. že s určitou pravděpodobností se může osoba přesunout na některou sousední buňku je-li neobsazena. Změnou parametrů systému (jednotlivých pravděpodobností) tak lze nasimulovat vymícení choroby nebo naopak vznik epidemie.

11.3 Analýza zdravotního stavu pacienta

V [60, 50, 23, 118] je popisován způsob, jak pomocí fuzzy automatů sledovat zdravotní stav pacienta.

Technika pracuje s událostmi řízeným fuzzy automatem. Stavy automatu v tomto případě reprezentují choroby (popř. stádia jedné choroby), přechodová funkce pak přechody mezi nimi. Přechodová pravidla pak popisují přechody při různých událostech či akcích (např. medikace).

1420 Tato technika tak může sloužit k porovnávání simulovaného a skutečného stavu (např. po medikaci, zákroku) pacienta a případně včas reagovat na odchylku. Výhodou této techniky je, že značně zjednodušuje sledování více diagnóz současně.

V [50] tuto techniku používají pro sledování systolického krevního tlaku a množství krevního cukru. V [60] používají podobnou techniku pro sledování těla při sportu (konkrétně tělní teplotu, dehydrataci a srdeční tep).

1430 V [23] se fuzzy automaty používají pro diagnózu srdečních chorob. Po spuštění automat na základě pohlaví a věkové skupiny přejde do odpovídajícího podautomatu. Ten si poté sám žádá měření různých parametrů (aktuální tepová frekvence, aktuální variabilita srdeční frekvence) v závislosti na tom, kdy je který pro proces diagnózy aktuálně potřebný. V případě stanovení rizika je riziko ohlášeno a automat se vrací do počátečního stavu a proces se spouští znovu (aby diagnózu ověřil).

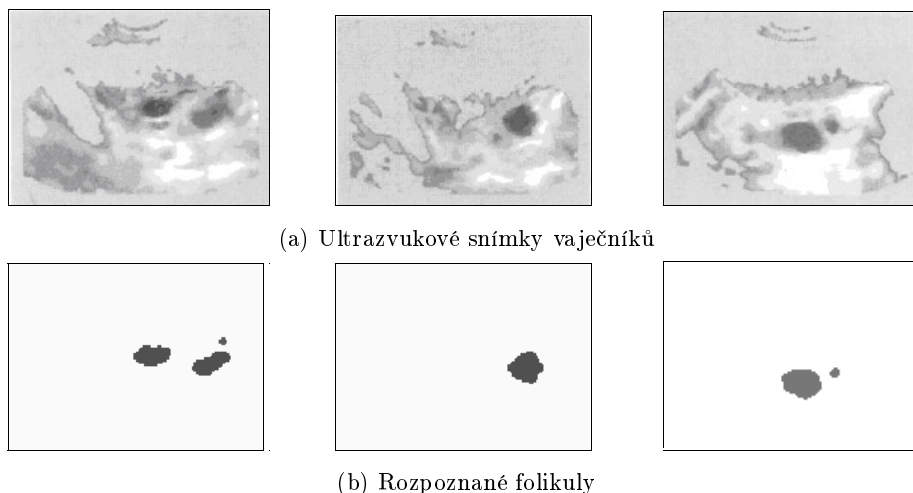
11.4 Analýza lékařských snímků

{subs:MedImgs}

V [38] využívají učící se fuzzy automat pro rozpoznávání zhoubných (maligních) nádorových buněk. Vstupem této techniky je mikroskopický snímek z buněk z prsní tkáně, výstupem pak nalezené maligní buňky. Využívají faktu, že nezahoubné buňky mají na snímcích obvykle symetričtější tvary a obsahují méně „skvrn“.

1440 Proces rozpoznávání probíhá následujícím způsobem:

- Snímek je převeden do odstínů šedi.
- Jednotlivé buňky na snímku jsou izolovány do samostatných obrazů. Následně jsou zpracovávány všechny obrazy postupně.
- Na obraze jsou rozpoznány plochy stejné nebo podobné barvy.
- Z ploch je na základě relace „plocha X obsahuje plochu Y “ zkonstruován strom ploch.
- Strom je následně zakódován do řetězce a rozpoznán fuzzy automatem.



Obrázek 17: Ukázky rozpoznávání folikul. Převzato z [127], upraveno.

1450 Strom je do řetězce kódován tak, že strom je projit průchodem do šířky a každému uzlu je přiřazen symbol odpovídající počtu jeho potomků. Automat, který tyto řetězce rozpoznává, byl sestaven učením z veřejné databáze snímků.

V [127] popisují, jak pomocí buněčných fuzzy automatů rozpoznávat folikuly¹⁴ v ultrazvukových snímcích vaječníků. Poukazují na to, že folikula je na snímku tvořena jednolitou skvrnou stejné barvy, obklopena ostatní tkání (různorodě zabarvená plocha).

Automat v první fázi vyhledává kandidáty na folikuly. Ty posléze automat zvýrazňuje. Na obrázku 17 jsou k nahlédnutí ukázky rozpoznávaných folikul pomocí této techniky.

1460 V [95] popisují způsob, jak pomocí fuzzy automatů sledovat vývoj kostí ruky dítěte. Z Röntgenového snímku ruky pomocí detekce hran obdrží obrysy kostí. Ty pak pomocí techniky podobné rozpoznávání složených geometrických tvarů (kapitola 10.5) používají k určování stádia vývinu patřičné kosti.

11.5 Další aplikace

V [96], popř. i [103] analyzují signál z elektrokardiogramu (EKG). Využívají při tom techniky uvedené v kapitole 8.1. *

V [5] (popř. i [4]) používají fuzzy automaty pro modelování fungování protézy dolní končetiny. Pomocí akcelerometrů sledují pohyb patřičné náhrady a pomocí známých vzorů spouští automat, který určuje, v jaké fázi pohybu protéza je.

12 Implementace vybraných problémů

1470 V rámci této práce byly vybrané aplikace naimplementovány. Tato kapitola popisuje základní informace o způsobu, jak byly tyto aplikace naimplementovány.

Studium této kapitoly předpokládá alespoň základní znalost objektového programování, nejlépe pak znalost programovacího jazyka Java.

¹⁴Folikula je dutinka ve vaječníku, v níž probíhá zrání vajíčka. [115]

12.1 Základní informace

Aplikace byly implementovány v programovacím jazyce Java na platformě Java Standart Edition. Projekt byl strukturován tak, aby bylo možné jej automaticky sestavit pomocí nástroje Apache Maven. Pro jeho sestavení a spuštění nejsou potřebné žádné dodatečné nástroje či knihovny.

Samotný projekt je rozdělen na moduly (podprojekty) odpovídající použitému typu automatu, tj. **fuzzy-automata** (nedeterministický fuzzy automat), **event-driven-fuzzy-automata** (událostmi řízený fuzzy automat), **fuzzy-tree-automata** (fuzzy tree automat) a **cellular-fuzzy-automata** (buněčný fuzzy automat). Pravděpodobnostní automaty nebyly implementovány.

Každý z těchto modulů obsahuje vždy základní, abstraktní, třídu implementující definici patřičného automatu (tj. datovou strukturu). Dále pak obsahuje třídu, která je jejím potomkem a rozšiřuje ji o implementaci vybraných algoritmů (např. výpočet, determinizace a podob.).

Každý modul může být používán jako softwarová knihovna. Pro snazší použití každý modul obsahuje obvykle několik spustitelných tříd (tj. tříd s metodou **main**), které zaobalují vybranou funkcionalitu modulu do spustitelného programu. Každý modul zpravidla obsahuje také adresář **test-data** obsahující testovací data.

Implementované aplikace jsou umístěny v modulech podle typu automatu, se kterým pracují. Každá aplikace je implementována (obvykle) samostatnou třídou a obsahuje patřičné spustitelné třídy a testovací data.

Projekt dále obsahuje modul **core**, který implementuje základní funkcionalitu společnou pro všechny moduly. Tedy implementaci abeced, symbolů, řetězců, fuzzy množin a relací a podob. Implementuje také tzv. **TIMFILE**, což je speciální formát souboru navržený pro vstup a výstup dat z aplikace.

Veškeré podrobnější informace jsou k nalezení v javadoc dokumentaci v samotném kódu popř. v README souborech jednotlivých modulů. Nyní budou ve stručnosti popsány jednotlivé aplikace, které byly implementovány.

12.2 Korekce překlepů

Detekce a korekce překlepů byla implementována na základě popisu v kapitole 7.3. Realizuje ji třída **TyposCorrecter** a spustí se pomocí **TyposCorrecterApp**. Proces korekce je konfigurován slovníkem (seznam korektních slov), popisem klávesnice a stupni, v jakých má být akceptován stisk právě jedné extra klávesy, stisk více extra kláves, stisk jiné klávesy či vynechání klávesy.

Instance této třídy bere na svém vstupu textový řetězec tvořený jedním nebo více slovy oddělených mezerou. Výstupem je posloupnost slov dle následujícího klíče:

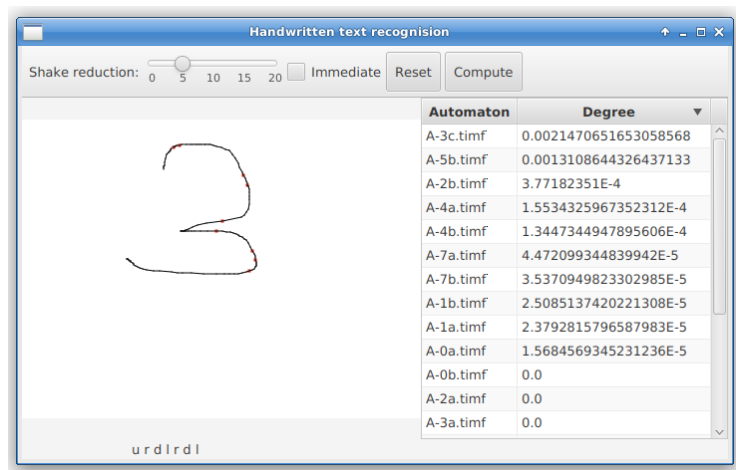
1. výstupem je slovo x , jestliže je vstupní slovo x ve slovníku
2. výstupem je slovo y , jestliže je vstupní slovo x nejpodobnější slovu y , které je ve slovníku
3. výstupem je slovo x , pokud žádné slovo ze slovníku mu není podobné

Podobnost řetězců je počítána pomocí deformovaných automatů rozpoznávající slova ze slovníku. Ukázka korekce překlepů (při výchozím nastavení) je

vstup	februacy	jaruanry	devmber	october	asdbril
výstup	february	january	december	october	april
vstup	maj	jana	poctober	asauguszt	mnobvmvmer
výstup	march	may	october	august	november

Tabulka 5: Ukázka korekce překlepů při slovníku anglických názvů měsíců

{tab:TyposOut}



Obrázek 18: Ukázka aplikace pro rozpoznávání ručně psaného textu

{img:HandWritScreen}

uvedena v tabulce 5. Jak je v tabulce vidět, program má problém s krátkými slovy, avšak u dlouhých slov dokáže obnovit i velmi „poškozené“ slovo.

12.3 Rozpoznávání ručně psaného textu

1520 Rozpoznávání ručně psaného textu bylo naimplementováno dle kapitoly 8.3. Tato aplikace je naimplementována jako interaktivní grafická aplikace spouštěná třídou `HandwrittenTextGuiApp`.

V prostřední části okna aplikace se nachází plátno, kde je možno pomocí tahu myši psát. Na plátně se červeně zvýrazní body, ve kterých se lámou segmenty. Ve stavovém řádku se zobrazuje řetězec, který napsanému tvaru odpovídá. V levé části okna se nachází tabulka s automaty a stupni pravdivosti, jak moc je jimi napsaný tvar přijímán. Nástrojová lišta pak obsahuje prvky pro konfiguraci a ovládání programu. Parametr *Shake reduction* udává minimální délku segmentu, zaškrtačkové tlačítko *Immediate* zapíná automatické spuštění výpočtu
1530 při uvolnění tlačítka myši.

Seznam automatů se zadává při spuštění programu. Pro vygenerování automatu rozpoznávající vzor a jeho následnou deformaci lze použít spustitelné třídy `AutomatonOfWordApp` a `DeformAutomatonApp`. Pro testování bylo v adresáři s testovacími daty vytvořeno 10 vzorů odpovídající číslicím 0 až 9 (každá ve více variantách).

Ukázka okna aplikace je na obrázku 18.

12.4 Detekce úplných m -árních stromů

Detekce úplných m -árních stromů je naimplementována pomocí fuzzy tree automatů a to dle kapitoly 8.8. V adresáři s testovacími daty se nachází vzorové stromy pro úplný ternární a kvadrární strom. Testování se spouští třídou `TreeOnFTaRunner`.

12.5 Simulace spotřeby elektrického produktu

Simulace spotřeby elektrického proudu byla naimplementována dle kapitoly 9.3. Výpočet realizuje třída `PowerConsumptionComputer`. Jejím vstupem jsou informace o spotřebičích v síti, jejich možných stavech a spotřebách. Dále pak seznam naměřených spotřeb elektrického proudu a dodatečné parametry.

Pomocí třídy `PowerConsumptionsToFEDA` jsou tato data transformována na fuzzy událostmi řízený automat a sekvenci fuzzy událostí. Automat je posléze spuštěn s těmito událostmi a výsledný stav je opět převeden na informace o spotřebičích a jejich stavech.

12.6 Zpracování obrazu

Naimplementovány byly také vybrané techniky pro zpracování obrazu. Realizovány byly pomocí buněčných fuzzy automatů. Pro import a export (převod mezi bitmapou a souborem konfigurace buněčného automatu) je slouží spustitelná třída `ImageConfigConverter`.

Byly implementovány některé grafické filtry uvedené v kapitole 10.1. Třída `ConvolutionalCFA` implementuje automat realizující obecnou konvoluci. Třída `SimpleBlurFilterAutomaton` pak pomocí konvoluce implementuje jednoduché rozostření. Třída `MyBEFilterAutomaton` implementuje BE filtr.

Třída `NoiseReductionAutomaton` implementuje metodu pro odstranění šumu z obrazu popsanou v kapitole 10.3. Pro přidání šumu do obrázku je možné použít spustitelnou třídu `ConfigNoiserTool`.

12.7 Metoda lisování dat

`{subs:DataPresImpl}`

Metoda lisování dat byla popsána v kapitole 8.7. Metoda byla naimplementována tak, aby bylo možné ji použít nejen na binární data. Implementace je vybavena jednoduchým binárním škálováním, tedy nahrazením hodnoty každého atributu 0 resp. 1 pokud překračuje stanovenou prahovou hodnotu. Pokud prahové hodnoty nejsou uvedeny, jsou spočítány jako medián hodnot daného atributu.

Samotnou metodu implementuje třída `DataPressurePerformer`. Data pro tuto třídu, tj. prahové hodnoty, trénovací a testovací množina a parametr δ jsou preprezentovány instancemi třídy `DataPressureDataset`. Program se spouští třídou `DataPressureApp`. Pro minimalizaci byl použit algoritmus minimalizace bivalentních automatů z [66] upravený tak, aby pracoval s fuzzy koncovými stavy a fuzzy přechodovou funkcí.

Metoda byla otestována na datasetu Iris [41]. Dataset je tvořen 150 záznamy spadající do tří tříd (setosa, versicolor a virginica). Každý záznam je tvořen čtyřmi vstupními reálněčíselnými atributy.

Bylo provedeno několik experimentů. Ukázalo se, že nejlepších výsledků se podařilo dosáhnout při $\delta = 0$, produktové t-normě a rozpoznávání třídy (tj.

1580 určování zda-li záznam patří či nepatří do třídy) setosa. Při testování byly dva náhodné záznamy z každé třídy odebrány z trénovací množiny a vloženy do testovací. Při této konfiguraci model fungoval korektně (tj. všechny testovací záznamy z třídy setosa označil vyšším stupněm pravdivosti, než záznamy z jiných tříd) přibližně ve 3/4 takovýchto pokusů.

Metoda byla také otestována na datasetu flag data [98] ve snaze určit, zda-li stát (záznam v tabulce) se nachází či nenachází v Evropě na základě barev (červená, zelená, modrá, zlatá, bílá, černá, oranžová), které obsahuje jeho vlajka. Zde však metoda nepřinesla žádné výsledky, tj. tuto třídu nedokázala rozpoznávat při žádné konfiguraci.

1590 Je vhodné upozornit, že metoda lisování dat je přímo závislá jednak na kódování vstupních dat do symbolů a řetězců, ale také na použitém algoritmu minimalizace fuzzy automatu. Oba tyto kroky byly v tomto případě implementovány velmi jednoduchým způsobem. Pokud by bylo kódování hodnot na symboly řešeno vícestupňovým škálováním, automat by tak snáze mohl reflektovat¹⁵ podobnost blízkých hodnot. Stejně tak, návrh účinnějšího minimalizačního algoritmu by mohl přispět pro přesnější rozpoznávání tříd.

13 Závěr

Úkolem této práce bylo ukázat, že fuzzy a pravděpodobnostní automaty mohou najít uplatnění v praxi. V rámci této práce bylo nastudováno více než 200 kusů literatury (článků a knih), ve kterých bylo vyhledáno značné množství praktických aplikací těchto modelů.

Tato práce tedy prokázala, že fuzzy a pravděpodobnostní automaty nacházejí uplatnění pro řešení různých problémů. V mnoha případech fuzzy či pravděpodobnostní automaty značně zjednodušují či zpřehledňují řešení patřičného problému.

Na druhou stranu, použití těchto modelů je spjato s některými dalšími problémy. V drtivé většině případů je nutné provést vhodné předzpracování dat, které výrazně ovlivňuje podobu použitého automatu. Stejnětak, samotný automat obvykle nedokáže dostatečně pružně pracovat s reálnými vstupy a je třeba upravit např. deformováním nebo strojovým učením.

1610 Dalším faktorem, který výrazně komplikuje nasazení fuzzy automatů v praxi, je časová složitost jejich výpočtu. Již při prováděných experimentech na relativně malých datech se ukázalo, že 1 výpočet na běžném počítači mnohdy překročí jednu sekundu. Pro použití v praxi je tak obvykle nutné provést značné optimalizace. To často vede ke vzniku kompletně nového modelu, jehož je fuzzy automat pouze základní myšlenkou.

Zatímco při delších vstupních řetězcích automat trpí dlouhým časem výpočtu, při krátkých pak naopak automat obvykle bojuje s korektností výsledků. Stává se, že automat chybně krátký řetězec rozpozná, protože automat „nestihne“ přejít do stavu, který by jej zamíтал.

1620 Přes to všechno je patrný rostoucí zájem o uplatnění fuzzy a pravděpodobnostních automatů. Jen za poslední tři roky, kdy tato práce vznikala, byla vydáno několik dalších publikací ([88, 76, 60, 50, 23]) věnující se aplikaci fuzzy automatů. Dle autorova názoru však využití fuzzy a pravděpodobnostních automatů bude v budoucnu utlačováno stále vyšší popularitou umělé inteligence.

¹⁵Toho by šlo dosáhnout například deformací „náhrada symbolu“

Ta většinu z představených problémů dokáže řešit mnohdy i jednodušěji, ovšem na úkor elegance řešení.

1630 Další z poznatků, který dle autorova názoru práce přinesla, je, že značné množství autorů si nedostatečně uvědomuje rozdíl, mezi fuzzy a pravděpodobnostním přístupem. V práci bylo opakovaně naráženo na problémy, které bylo vhodné řešit spíše pomocí fuzzy automatů namísto pravděpodobnostních (a naopak). Stejnětak, některá literatura popisující aplikace fuzzy automatů na problematiku nahlížela z pohledu gramatik, přestože to není zcela přesné.

Reference

- [1] Khalid Al-Ahmadi, Alison Heppenstall, Linda See, and Jim Hogg. Modeling urban growth dynamics using cellular automata and gis. 2008. Dostupné online na <https://pdfs.semanticscholar.org/6e2a/c1dbea43cd06b4f7bab26f3f04ce6816908b.pdf>.
- 1640 [2] Khalid Al-Ahmadi, Linda See, Alison Heppenstall, and James Hogg. Calibration of a fuzzy cellular automata model of urban dynamics in saudi arabia. *Ecological complexity*, 2008.
- [3] A. Alvarez-Alvarez, J. M. Alonso, G. Trivino, N. Hernández, F. Herranz, A. Llamazares, and M. Oca na. Human activity recognition applying computational intelligence techniques for fusing information related to wifi positioning and body posture. *IEEE international Conference of fuzzy systems*, 2010.
- [4] Alberto Alvarez-Alvarez and Gracian Trivino. Comprehensible model of a quasi-periodic signal. *Ninth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, 2009.
- 1650 [5] Alberto Alvarez-Alvarez, Gracian Trivino, and Oscar Cordon. Human gait modeling using a genetic fuzzy finite state machine. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2013.
- [6] Leandro G. M. Alvim and Adriano Joaquim de Oliveira Cruz. A fuzzy state machine applied to an emotion model for electronic game characters. *EEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2008.
- [7] Kenneth M. Hunter and. Non-literal textual search using fuzzy finite-state linear nondeterministic automata, 2000.
- [8] Gabriela Andrejková, Abdulwahed Almarimi, and Asmaa Mahmoud. Approximate pattern matching using fuzzy logic. *CEUR Workshop Proceedings Vol. 1003*, 2013.
- 1660 [9] J. J. Astrain, José R. González de Mendivil, and José R. Garitagoitia. Fuzzy automata with ϵ -moves compute fuzzy measures between strings. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006.
- [10] J. J. Astrain, J. R. Garitagoitia, J. R. Gonzalez De Mendivil, J. Villadangos, and F. Fari na. Approximate string matching using deformed fuzzy automata: A learning experience. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2004.
- 1670 [11] J. J. Astrain, J. R. Garitagoitia, J. Villadangos, F. Fari na, and J. R. Gonzalez De Mendivil. An imperfect string matching experience using deformed fuzzy automata. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 2004.
- [12] Lalit R. Bahr and Frederick Jelinek. Decoding for channels with insertions, deletions, and substitutions with applications to speech recognition. *IEEE transactions on information theory*, 1975.
- [13] Gonzalo Bailador and Gracián Trivi no. Pattern recognition using temporal fuzzy automata. *Fuzzy Sets and Systems*, 2010.

- 1680
- [14] M. Batty and Y. Xie. From cells to cities. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 1994.
- [15] James C. Bezdek, James Keller, Raghu Krisnapuram, and Nikhil R. Pal. *Fuzzy models and algorithms for pattern recognition and image processing*. Springer, 1999.
- [16] A. Blanco, M. Delgado, and M. C. Pegalajar. A method to induce fuzzy automata using neural networks. *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, 2001.
- [17] A. Blanco, M. Delgado, and M.C. Pegalajar. Fuzzy gramatical inference using neural network. *Mathware & Soft computing*, 1998.
- [18] A. Blanco, M. Delgado, and M.C. Pegalajar. Fuzzy automaton induction using neural network. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2001.
- 1690
- [19] Nino Boccaratt and Kyeong Cheongt. Critical behaviour of a probabilistic automata network sis model for the spread of an infectious disease in a population of moving individuals. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993.
- [20] Irina Bucurescu and Anca Pascu. Fuzzy pushdown automata. *International Journal of Computer Mathematics*, 1981.
- [21] Radim Bělohlávek. Determinism and fuzzy automata. *Information Sciences*, 2002.
- [22] Radim Bělohlávek. *Fuzzy relational systems*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- 1700
- [23] Azahara Camacho, Mercedes G. Merayo, and Manuel Nú nez. Using fuzzy automata to diagnose and predict heart problems. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*, 2017.
- [24] Shi-Kuo Chang. On the execution of fuzzy programs using finite-state machines. *IEEE transactions on computers*, 1972.
- [25] S. R. Chaudhari and Mukta N. Joshi. A note on fuzzy tree automata. *International Journal of Computer Applications*, 2012.
- [26] Qiuwen Chen and Arthur E. Mynett. Modelling algal blooms in the dutch coastal waters by integrated numerical and fuzzy cellular automata approaches. *Ecological modeling*, 2006.
- 1710
- [27] Wei Cheng and Zhi-Wen Mo. Minimization algorithm of fuzzy finite automata. *Fuzzy sets and systems*, 2004.
- [28] Hubert Comon, Max Dauchet, Rémi Gilleron, and Christof Löding. *Tree Automata Techniques and Applications*. 2008. Dostupné online na <http://www.grappa.univ-lille3.fr/tata>.
- [29] Manuj Darbari, Hasan Ahmed, and Vivek Kr. Singh. Application of fuzzy automata theory and knowledge based neural networks for development of basic learning model. *Computer Technology and Application*, 2011.

- 1720 [30] Colin de la Higuera and Jose Oncina. Computing the most probable string with a probabilistic finite state machine. *Proceedings of the 11th International Conference on Finite State Methods and Natural Language Processing*, 2013.
- [31] José R. González de Mendivil and José R. Garitagoitia. Fuzzy languages with infinite range accepted by fuzzy automata: Pumping lemma and determinization procedure. *Fuzzy sets and systems*, 2014.
- [32] Mansoor Doostfateme and Stefan C. Kremer. New directions in fuzzy automata. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2005.
- [33] Suzana Dragicevic. Coupling fuzzy sets theory and gis-based cellular automata for land-use change modeling. *IEEE Annuinformational Meeting of the fuzzy*, 2004.
- 1730 [34] Pietro Ducange, Francesco Marcelloni, and Dario Marinari. An algorithm based on finite state machines with fuzzy transitions for non-intrusive load disaggregation. *Sustainable Internet and ICT for Sustainability (SustainIT)*, 2012.
- [35] P. Dupont, F. Denis, and Y. Esposito. Links between probabilistic automata and hidden markov models: probability distributions, learning models and induction algorithms. *Pattern Recognition*, 2005.
- [36] Javier Echanobe, José R. González de Mendivil, José R. Garitagoitia, and Carlos F. Alastruey. Deformed systems for contextual postprocessing. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996.
- 1740 [37] Zoltán Ésik and Guangwu Liu. Fuzzy tree automata. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007.
- [38] J. Estevez, S. Alayón, L. Moreno, J. Sisut, and R. Asuilar. Cytological image analysis with a genetic fuzzy finite state machine. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 2005.
- [39] Emile Fiesler and Russell Beale. *Handbook of Neural Computation*. Institute of physics publishing, Oxford university press, 1997.
- [40] Z. Firstová. Nová citační norma Čsn iso 690:2011. Dostupné online na <https://sites.google.com/site/novaiso690/>.
- [41] R.A. Fisher. Iris data set. Dostupné online na <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Iris>.
- 1750 [42] David M. Forrester. Fuzzy cellular automata in conjunctive normal form. Master's thesis, Université d'Ottawa, 2011.
- [43] Jonathan P. Forsyth and Juan P. Bello. Generating musical accompaniment using finite state transducers. *Proceedings of the 16th Int. Conference on Digital Audio Effects*, 2013.
- [44] K. S. Fu and T. J. Li. Formulation of learning automata and automata games. *Information Sciences*, 1969.

- [45] J. R. Garitagoitia, J. R. Gonzalez De Mendivil, J. Echanobe, J. J. Astrain, and F. Fari na. Deformed fuzzy automata for correcting imperfect strings of fuzzy symbols. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 2003.
- 1760 [46] C. Lee Giles, Christian W. Omlin, and Karvel K. Thornber. Equivalence in knowledge representation: Automata, recurrent neural networks, and dynamical fuzzy systems. *Proceedings of the IEEE*, 1999.
- [47] Janos L. Grantner and George Fodor. Fuzzy automaton for intelligent hybrid control systems. *IEEE International Conference on fuzzy systems*, 2002.
- [48] Janos L. Grantner, George Fodor, and Dimiter Driankov. Hybrid fuzzy-boolean automata for ontological controllers. *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, 1998.
- 1770 [49] Janos L. Grantner, George Fodor, Dimiter Driankov, and Marek J. Patyra. Application of the fuzzy state fuzzy output finite state machine to the problem of recovery from violations of ontological assumptions. *Intelligent Engineering Systems Through Artificial Neural Networks*, 1996.
- [50] Himadrishekhar Gupta and Swapan Raha. Clinical monitoring using fuzzy system. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2014.
- [51] Gary D. Hachtel, Enrico Macii, Abelardo Pardo, and Fabio Somenzi. Probabilistic analysis of large finite state machines. *Proceedings of the 31st annual Design Automation Conference*, 1994.
- 1780 [52] Sun Jae Ham, Byoung Chul Ko, and Jae Yeal Nam. Fire-flame detection based on fuzzy finite automation. *International Conference on Pattern Recognition*, 2010.
- [53] Liang He, Witold Kinsner, and Nariman Sepehri. Decision-making in fuzzy environments using ontological control with fuzzy automata. *Proceedings of 9th IEEE International Conference on Cognitive Informatics*, 2010.
- [54] Inke Herms. *Probabilistic Arithmetic Automata*. PhD thesis, Faculty of Technology, Bielefeld University, Germany, 2009.
- [55] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley, 1979.
- [56] Kou-Yuan Huang. *Syntactic Pattern Recognition for Seismic Oil Exploration*. World Scientific Publishing, 2002.
- 1790 [57] Till Hülnhagen, Ingo Dengler, Andreas Tamke, Thao Dang, and Gabi Breuel. Maneuver recognition using probabilistic finite-state machines and fuzzy logic. *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, 2010.
- [58] Jelena Ignjatović, Miroslav Ćirić, and Stojan Bogdanović. Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices. *Information Sciences*, 2018.
- [59] Jan Jantzen. *Foundations of Fuzzy Control: A Practical Approach*. John Wiley & Sons, Ltd., 2013.

- 1800 [60] Nan Jia, Xiaohui Chen, Liang Yu, Ruomei Wang, Kaixing Yang, and Xiaonan Luo. An exercise health simulation method based on integrated human thermophysiological model. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2017.
- [61] Xin Jin, Shalabh Gupta, Kushal Mukherjee, and Asok Ray. Wavelet-based feature extraction using probabilistic finite state automata for pattern classification. *Pattern Recognition*, 2010.
- [62] James L. Johnson. *Probability and Statistics for Computer Science*. John Wiley & Sons, Inc., 2003.
- [63] Roland Kempf and Jürgen Adamy. Sequential pattern recognition employing recurrent fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004.
- 1810 [64] Kevin Knight and Jonathan Graehl. An overview of probabilistic tree transducers for natural language processing. *Proceedings of the Sixth International Conference on Intelligent Text Processing and Computational Linguistics*, 2005.
- [65] Byoung Chul Ko, Sun Jae Ham, and Jae Yeal Nam. Modeling and formalization of fuzzy finite automata for detection of irregular fire flames. *IEEE transactions on circuits and systems for video technology*, 2011.
- [66] Dexter C. Kozen. *Automata and Computability*. Springer, 1999.
- 1820 [67] Martin Krämer, Hagen Kaprykowsky, Daniel Keysers, and Thomas Breuel. Bibliographic meta-data extraction using probabilistic finite state transducers. *Ninth International Conference on Document Analysis and Recognition*, 2007.
- [68] Terence Lai, Suzana Dragičević, and Margaret Schmidt. Integration of multicriteria evaluation and cellular automata methods for landslide simulation modelling. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 2013.
- [69] Edward T. Lee. Fuzzy tree automata and syntactic pattern recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1982.
- [70] Zhihui Li. Ping Li and Yongming Li. The relationships among several types of fuzzy automata. *Information Sciences*, 2006.
- 1830 [71] Yan Liu and Stuart R. Phinn. Developing a cellular automaton model of urban growth incorporating fuzzy set approaches. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2003.
- [72] F. MahdaviFard and M. R. Meybodi. A hybrid method based on gas diffusion model and fuzzy cellular automata for image sharpening. *International Conference on Electrical Engineering*, 2007.
- [73] Raman Maini and Dr. Himanshu Aggarwal. Study and comparison of various image edge detection techniques. *International Journal of Image Processing*, 2009.

- [74] Pradipta Maji and Parimal Pal Chaudhuri. Fuzzy cellular automata for modeling pattern classifier. *IEICE - Transactions on Information and Systems*, 2005.
- 1840 [75] Eleftherios A. Mandelas, Thomas Hatzichristos, and Poulicos Prastacos. A fuzzy cellular automata based shell for modeling urban growth – a pilot application in mesogia area. *AGILE International Conference on Geographic Information Science*, 2007.
- [76] Kraimon Maneesilp and Chutima Prasartkaew. Price pattern detection using finite state machines with fuzzy transitions. *International Conference on e-Business Engineering*, 2014.
- [77] Lefteris A. Mantelas, Poulicos Prastacos, and Thomas Hatzichristos. Modeling urban growth using fuzzy cellular automata. *AGILE International Conference on Geographic Information Science*, 2008.
- 1850 [78] Hua Mao, Yingke Chen, Manfred Jaeger, Thomas Dyhre Nielsen, Kim Guldstrand Larsen, and Brian Nielsen. Learning probabilistic automata for model checking. *International Conference on Quantitative Evaluation of Systems*, 2011.
- [79] Tobias Marschall, Inke Herms, Hans-Michael Kaltenbach, and Sven Rahmann. Probabilistic arithmetic automata and their applications. *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 2012.
- [80] Alexandru Mateescu, Arto Salomaa, Kai Salomaa, and Sheng Yu. Lexical analysis with a simple finite-fuzzy-automaton model. *Journal of Universal Computer Science*, 1995.
- 1860 [81] Geoff Mazeroff, Victor De Cerqueira, Jens Gregor, and Michael G. Thomason. Probabilistic trees and automata for application behavior modeling. *ACM Southeast Regional Conference Proceedings*, 2003.
- [82] Michael, G. Thomason, and Peter N. Marinos. Deterministic acceptors of regular fuzzy languages. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1974.
- [83] M. Milgram and H. Atlan. Probabilistic automata as a model for epigenesis of cellular networks. *Journal of theoretical biology*, 1983.
- 1870 [84] S. Moghari, M. M. Zadehi, and R. Ameri. New direction in fuzzy tree automata. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2011.
- [85] Mehryar Mohri, Fernando Pereira, and Michael Riley. Weighted finite-state transducers in speech recognition. *Computer Speech and Language*, 2002.
- [86] John N. Mordeson and Davender S. Malik. *Fuzzy Automata and Languages*. Chapman and Hall/CRC, 2002.
- [87] M. Mraz, N. Zimic, I. Lapanja, and I. Bajec. Fuzzy cellular automata: From theory to applications. *Tools with Artificial Intelligence*, 2000.

- 1880 [88] Kushal Mukherjee and Asok Ray. State splitting & merging in probabilistic finite state automata for signal analysis and representation. *Signal processing*, 2014.
- [89] Yenier Castañeda, Armando Collazo, Elvis Crego, Jorge L. Garcia, Yoan Gutiérrez, David Tomás, Andrés Montoyo, and Rafael Muñoz. Umcc_dlsi_prob: A probabilistic automata for aspect based sentiment analysis. *Proceedings of the 8th International Workshop on Semantic Evaluation*, 2014.
- [90] Carol A. Niznik. Modelling of computer communication networks via probabilistic automata. *Kybernetes*, 1980.
- 1890 [91] Tomasz Oliwa and Markus Wagner. Composing music with neural networks and probabilistic finite-state machines. *Workshops on Applications of Evolutionary Computation*, 2008.
- [92] Christian W. Omlin, Karvel K. Thornber, and C. Lee Giles. Representation of fuzzy finite state automata in continuous recurrent neural networks. *IEEE International Conference on Neural networks*, 1996.
- [93] Christian W. Omlin, Karvel K. Thornber, and C. Lee Giles. Fuzzy finite-state automata can be deterministically encoded into recurrent neural networks. *IEEE transactions on fuzzy systems*, 1998.
- 1900 [94] Dhiraj Kumar Patel and Sagar A. More. Edge detection technique by fuzzy logic and cellular learning automata using fuzzy image processing. *International Conference on Computer Communication and Informatics*, 2013.
- [95] Amita Pathak and Sankar K. Pal. Fuzzy grammars in syntactic recognition of skeletal maturity from x-rays. *IEEE transactions systems, man and cybernetics*, 1986.
- [96] Witold Pedrycz and Adam Gacek. Learning of fuzzy automata. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*, 2001.
- [97] Conrad Power, Alvin Simms, and Roger White. Hierarchical fuzzy pattern matching for the regional comparison of land use maps. *International Journal of Geographical Information Science*, 2010.
- 1910 [98] Collins Publishers. Flags data set. Dostupné online na <https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Flags>.
- [99] Daowen Qiu. Characterizations of fuzzy finite automata. *Fuzzy sets and systems*, 2004.
- [100] Michael O. Rabin. Probabilistic automata. *Information and Control*, 1963.
- [101] V. Ramaswamy and H. A. Girijamma. Conversion of finite automata to fuzzy automata for string comparison. *International Journal of Computer Applications*, 2012.
- [102] Gerasimos G. Rigatos. Fault detection and isolation based on fuzzy automata. *Information Sciences*, 2009.

- 1920 [103] Gerasimos G. Rigatos and Spyros G. Tzafestas. Fuzzy automata for fault diagnosis: A syntactic analysis approach. *Methods and Applications of Artificial Intelligence.*, 2004.
- [104] Dana Ron. *Automata Learning and its Applications*. PhD thesis, Hebrew University, 1995.
- [105] Dana Ron, Yoram Singer, and Naftali Tishby. The power of amnesia: Learning probabilistic automata with variable memory length. *Machine Learning*, 1996.
- [106] John C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, 2011.
- 1930 [107] Sana Sadeghi, Alireza Rezvanian, and Ebrahim Kamrani. An efficient method for impulse noise reduction from images using fuzzy cellular automata. *International Journal of Electronics and Communications*, 2012.
- [108] Ugur Sahin, Selman Uğuz, and Ferat Sahin. Salt and pepper noise filtering with fuzzy-cellular automata. *Computers & Electrical Engineering*, 2013.
- [109] Eugene E. Santos. Maxmin automata. *Information and Control*, 1968.
- [110] Eugene E. Santos. Realizations of fuzzy languages by probabilistic, max-product, and maximin automata. *Information Sciences*, 1975.
- [111] K. Scheffler and S. Young. Probabilistic simulation of human-machine dialogues. *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000. ICASSP '00. Proceedings. 2000 IEEE International Conference on*, 2000.
- 1940 [112] Pamy Sebastian and T. P. Johnson. Inverse fuzzy automata and inverse fuzzy languages. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 2013.
- [113] C. B. Setzer and N. A. Warst. *Fuzzy automata and pattern matching*. NASA Langley research center, 1986.
- [114] Saman Sinaie, Afshin Ghanizadeh, Siti Mariyam Shamsuddin, and Emadaldin Mozafari Majd. A hybrid edge detection method based on fuzzy set theory and cellular learning automata. *International Conference on Computational Science and Its Applications*, 2009.
- [115] slovniky.cz. folikul. Dostupné online na <http://lekarske.slovniky.cz/pojem/folikul>.
- 1950 [116] Václav Snášel, Aleš Kepřt, Ajith Abraham, and Aboul E. Hassanien. Approximate string matching by fuzzy automata. *Man-Machine Interactions*, 2009.
- [117] Aleksandar Stamenković and Miroslav Ćirić. Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions. *Fuzzy sets and systems*, 2012.
- [118] Friedrich Steimann and Klaus-Peter Adlassnig. Clinical monitoring with fuzzy automata. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993.
- [119] M. G. Thomason. Finite fuzzy automata, regular fuzzy languages, and pattern recognition. *Pattern Recognition*, 1973.

- [120] Tommaso Toffoli and Norman Mangolus. *Cellular automata machines*. MIT Press, 1985.
- 1960 [121] Gracian Trivino and Albert van der Heide. An experiment on the description of sequences of fuzzy perceptions. *Eighth International Conference on Hybrid Intelligent Systems*, 2008.
- [122] Gracian Trivino and Albert van der Heide. Linguistic summarization of the human activity using skin conductivity and accelerometers. *Proceedings of Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, 2008.
- [123] Pavan Turaga, Rama Chellappa, V. S. Subrahmanian, and Octavian Udrea. Machine recognition of human activities: A survey. *IEEE transactions on circuits and systems for video technology*, 2008.
- 1970 [124] S.G. Tzafestas and G.G. Rigatos. Stability analysis of an adaptive fuzzy control system using petri nets and learning automata. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2000.
- [125] Fatih A. Unal and Emdad Khan. A fuzzy finite state machine implementation based on a neural fuzzy system. *Proceedings of 1994 IEEE 3rd International Fuzzy Systems Conference*, 1994.
- [126] Albert van der Heide and Gracian Trivino. Simulating emotional personality in human computer interfaces. *IEEE international Conference of fuzzy systems*, 2010.
- 1980 [127] Hong Wang, Junna Jiang, Lihui Zhou, and Liping Du. Image processing based on fuzzy cellular automata model. *Fourth International Conference on Innovative Computing, Information and Control*, 2009.
- [128] Mengqiu Wang and Christopher D. Manning. Probabilistic finite state machines for regression-based mt evaluation. *Proceedings of the 2012 Joint Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing and Computational Natural Language Learning*, 2012.
- [129] D. P. Ward, A. T. Murray, and S. R. Phinn. A stochastically constrained cellular model of urban growth. *Computers, Environment and Urban Systems*, 2000.
- 1990 [130] Jacek Wasilewski and Mirosław Parol. Prediction of spatial distribution of electric energy consumers with the use of fuzzy cellular automata. *Przegląd elektrotechniczny*, 2009.
- [131] William G. Wee and K. S. Fu. A formulation of fuzzy automata and its application as a model of learning systems. *IEEE transactions on systems science and cybernetics*, 1969.
- [132] R. White and G. Engelen. Cellular automata as the basis of integrated dynamic regional modelling. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 1997.
- [133] Stephen Wolfram. *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*. Wolfram Media, 1994.

- 2000 [134] Stephen Wolfram. *A new kind of science*. Wolfram Media, 2002.
- [135] F. Wu. An experiment on the generic polycentricity of urban growth in a cellular automatic city. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 1998.
- [136] F. Wu. Calibration of stochastic cellular automata: the application to rural-urban land conversions. *International Journal of Geographical Information Science*, 2002.
- [137] Lotfi A. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences*, 1975.
- 2010 [138] Mo Zhiwen, Wan Min, and Shu Lan. An evolution strategy for the induction of fuzzy finite-state automata. *IEEE International Conference on Granular Computing*, 2005.
- [139] Daniel Zlatnik, Beatrice Steiner, and Gerhard Schweitzer. Finite-state control of a trans-femoral (tf) prosthesis. *IEEE transactions on control systems technology*, 2002.