

Aplikace fuzzy a pravděpodobnostních automatů

Martin Jašek

12. září 2016 — ??

Obsah

	1 Definice a značení	3
	2 Fuzzy automaty, gramatiky a jazyky	5
	2.1 Jazyk rozpoznávaný fuzzy automatem	6
	2.2 Fuzzy a bivalentní regulérní jazyky	6
	2.3 Fuzzy regulární výrazy	6
10	3 Rozpoznávání textových vzorů	6
	3.1 Formální zavedení problému	6
	3.2 Motivace k použití fuzzy automatů	7
	3.3 Automat rozpoznávající ω	7
	3.4 Podobnost symbolů	9
	3.5 Fuzzy symboly	11
	3.6 Editační operace	12
	3.7 Deformovaný automat	17
	3.8 Shrnutí	18
	4 Fuzzy tree automaty	19
20	4.1 Zavedení	19
	4.2 Stromy a pseudotermy	19
	4.3 Fuzzy tree automat a jazyk jím rozpoznávaný	21
	4.4 Použití fuzzy tree automatů	24
	4.5 Detekce úplných m -árních stromů	24
	4.6 Složené geometrické útvary	25
	5 Buněčné fuzzy automaty	27
	5.1 „Bivalentní“ buněčný automat	28
	5.2 Buněčné fuzzy automaty	30
	5.3 Obecně k aplikacím	33
30	5.4 Problém městského růstu (urban growth problem)	34
	5.5 Zpracování obrazu	35
	5.6 Hledání hran	39
	5.7 Ostraňování šumu	40
	5.8 Rozpoznávání jednoduchých vzorů	40

6	Konkrétní příklady	42
6.1	Rozpoznávání ručně psaného textu	42
6.2	Detekce překlepů	42

1 Definice a značení

40 Tato kapitola zatím poslouží jako „skladiště“ pro definice a zavedení značení pro ostatní kapitoly.

Abecedy, řetězce, jazyky

Abecedy budou značeny standardně, tedy velkými řeckými písmeny (typicky Σ). Řetězce pak malými písmeny (ω, α, \dots). Jazyky velkými kaligrafickými písmeny. Jazyk přijímaný automatem A bude značen $\mathcal{L}(A)$.

Fuzzy teorie

Fuzzy množiny a relace budou po vzoru [9] nejčastěji malými řeckými písmeny (obdobně jako jejich členské (angl. „membership“) funkce). Množinu všech fuzzy podmnožin množiny S budeme značit $\mathcal{F}(S)$.

Deterministický bivalentní automat

50 (zde bude doplněno: zdroj: Eilenberg S.: Automata, Languages and Machines, Vol. A, Academic Press, New York, 1974. Pokud ji někde seženu (odkazuje se na ni Bel v [1])
(zde bude doplněno: co citování definic? půlku jsem si vymyslel ...)

Definice 1.1. Konečný deterministický (bivalentní) automat je pětice $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je vstupní abeceda, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ je přechodová funkce, $q_0 \in Q$ je počáteční stav a $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Nedeterministický bivalentní automat

(zde bude doplněno: Značení převzato z FJAA, dohledat zdroj)

60 **Definice 1.2.** Konečný nedeterministický (bivalentní) automat je pětice $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je vstupní abeceda, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ je přechodová funkce, $I \subseteq Q$ je množina počátečních stavů a $F \subseteq Q$ je množina koncových stavů.

Základní definice nedeterministického fuzzy automatu

Značení je převzato z [9] a lehce upraveno.

Definice 1.3 (Nedeterministický fuzzy automat). *Nedeterministický fuzzy automat A je pětice $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, μ je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace $Q \times \Sigma \times Q \rightarrow [0, 1]$) a σ a η jsou po řadě fuzzy množiny nad Q počátečních, resp. koncových stavů.*

{def-ZaklDefNedFuzzAut}

70 **Definice 1.4** (Fuzzy stav). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak jako fuzzy stav označujeme fuzzy podmnožinu jeho stavů, tj. $V \in \mathcal{F}(Q)$.*

{def-FuzzStav}

Definice 1.5 (Aplikace fuzzy relace na fuzzy stav). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A a fuzzy symbol V . Pak aplikací binární fuzzy relace $R : Q \times Q \rightarrow [0, 1]$ na fuzzy stav V obdržíme fuzzy symbol $V \circ R$ splňující pro každé $p \in Q$: $(V \circ R)(p) = \max_{q \in Q} (V(q) \otimes R(q, p))$.*

Definice 1.6 (Přechodová funkce fuzzy stavů). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak přechodová funkce fuzzy stavů je fuzzy relace $\hat{\mu} : \mathcal{F}(F) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{F}(F)$ taková, že pro každý fuzzy stav $V \in \mathcal{F}(Q)$ a symbol $x \in \Sigma$ je $\hat{\mu}(V, x) = V \circ \mu[x]$.*

{def-PreFunFuzzStav}

Poznámka 1.1. Označení $\mu[x]$ je fuzzy relace, pro kterou platí: $\mu[x](p, q) = \mu(p, x, q)$ pro všechna $x \in \Sigma$ a $p, q \in Q$.

80

Definice 1.7 (Rozšířená přechodová funkce). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak rozšířená přechodová funkce (fuzzy stavů) je fuzzy relace $\mu^* : \mathcal{F}(F) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{F}(F)$ (zde bude doplněno: co je to F ? Nemá to být Q ?!) daná následujícím předpisem:*

{def-PreFunFuzzStav}

1. $\mu^*(V, \epsilon) = V$ pro všechna $V \in \mathcal{F}(Q)$
2. $\mu^*(V, \alpha x) = \hat{\mu}(\mu^*(V, \alpha), x)$ pro všechna $V \in \mathcal{F}(Q), \alpha \in \Sigma^*, x \in \Sigma$

{def-RetPriAut}

Definice 1.8 (Řetězec přijímaný automatem). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak řetězec $\alpha \in \Sigma^*$ je automatem A přijat ve stupni*

$$A(\alpha) = \max_{q \in Q} (\mu^*(\sigma, \alpha)(q) \otimes \eta(q))$$

(zde bude doplněno: ověřit, dohledat, ozdrojovat)

{def-JazRozpAut}

Definice 1.9 (Jazyk rozpoznávaný automatem). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak fuzzy množinu $\mathcal{L}(A)(\alpha) = A(\alpha)$ nad univerzem Σ^* nazýváme fuzzy jazyk rozpoznávaný automatem A .*

90

(zde bude doplněno: ověřit, dohledat, ozdrojovat)

Nedeterministický fuzzy automat s ϵ přechody

{def-NedFuzzAutEpsPre}

Definice 1.10 (Nedeterministický fuzzy automat s ϵ přechody). *(zde bude doplněno: dohledat přesně, zkontrolovat a ozdrojovat) Nedeterministický fuzzy automat A je pětice $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, μ je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q \rightarrow [0, 1]$) a σ a η jsou po řadě fuzzy množiny nad Q počátečních, resp. koncových stavů.*

(zde bude doplněno: Tady by asi bylo vhodné rozebrat ϵ -uzávěry)

Reprezentace fuzzy automatu

100 (zde bude doplněno: dohledat zdroje)

(zde bude doplněno: Značení fuzzy množiny $\sigma = \{x/0.5\}$ vs. $\sigma(x) = 0.5$)

Přechodový diagram: Notace s lomítky např. zde: [11].

Tabulka: stav \times symbol nebo stav \times stav [13]?

Konstrukce fuzzy automatu z konečného automatu

V praxi se často setkáme z problémem, kdy máme k dispozici konečný bivalentní automat avšak my potřebujeme pro naši práci fuzzy automat. Je tedy třeba zkonstruovat takový fuzzy automat, který rozpoznává odpovídající jazyk odpovídající jazyku rozpoznávaném naším bivalentním automatem.

Důležité je zmínit, že nelze zkonstruovat fuzzy automat, rozpoznávající stejný
 110 jazyk neboť fuzzy automat rozpoznává fuzzy jazyk, zatímco bivaletní automat
 klasický „bivaletní“ jazyk. Můžeme však sestavit automat takový, který přijímá
 řetězce ve stupni 0 nebo 1 podle toho, jestli je přijímal bivaletní automat.

Formálně řečeno, pro konečný (nedeterministický) bivaletní automat A
 budeme konstruovat nedeterministický fuzzy automat A' takový, že bude pro
 všechna $x \in \Sigma^*$ splněna následující rovnost:

$$\mathcal{L}(A')(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \omega \in \mathcal{L}(A) \\ 0 & \text{pokud } \omega \notin \mathcal{L}(A) \end{cases}$$

Poznámka 1.2. *Postup budeme provádět pro nedeterministické automaty. To
 jednak proto, že nedeterministické automaty jsou obecnější, než deterministické,
 a navíc, protože jsou v praxi využívány častěji. (zde bude doplněno: ozdrojovat,
 klidně někde, kde rozebírám determinizmus vs. nedeterminizmus)*

Nyní se podíváme na to, jak výsledný fuzzy automat bude vypadat. Abeceda
 i množina stavů automatu zůstanou zachovány, lišit se tedy bude pouze množina
 počátečních a koncových stavů a přechodová funkce. (zde bude doplněno: fuzzy
 120 subset I , F a δ ? nebo tak něco, z teorie fuzzy množin?)

Definice 1.11 (Fuzzy automat bivaletního automatu). *Mějme řetězec konečný
 nedeterministický automat $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Pak nedeterministický fuzzy
 automat přijímající korespondující jazyk je automat $A' = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ kde pro
 všechna $q_i, q_j \in Q$ a $x \in \Sigma$:*

{def-FuzzAutBivAut}

- $\sigma(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } q_i \in I \\ 0 & \text{pokud } q_i \notin I \end{cases}$
- $\eta(q_i) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } q_i \in F \\ 0 & \text{pokud } q_i \notin F \end{cases}$
- $\mu(q_i, x, q_j) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } q_j \in \delta(q_i, x) \\ 0 & \text{pokud } q_j \notin \delta(q_i, x) \end{cases}$

(zde bude doplněno: rozebrat, jestli tento automat skutečně dělá to, co má? Asi by
 to chtělo)

130 (zde bude doplněno: vymyslet nějaký fakt pěkný příklad)

2 Fuzzy automaty, gramatiky a jazyky

(zde bude doplněno: nějak to uvést. Budou pojmy jako regulérní jazyk a gramatika
 popsány v nějaké předchozí kapitole?)

(zde bude doplněno: pojem „Lattice language“)

(zde bude doplněno: značení: „Fuzzy množina ϕ “ vs. „ L -množina $\phi : X \rightarrow L$ “;
 „fuzzy podmnožina“ vs. „fuzzy množina nad“)

2.1 Jazyk rozpoznávaný fuzzy automatem

Věta 6.3 [17] (pro lattice monoid, není to někde jen pro $[0, 1]$?).

Dle definice 4 [11] je fuzzy regulární jazyk fuzzy podmnožina bivalentního.

140 Automat s bivalentní μ and η (a fuzzy σ) taky rozpoznává fuzzy regulární jazyk [7]. Neřešil něco takového i Bel? Jinak řečeno, support konečný automat [11].

2.2 Fuzzy a bivalentní regulární jazyky

Univerzum fuzzy jazyka je regulární jazyk, pozorování 6.1 [17].

Stejně tak, zaříznutý jazyk (α -řez jazyka) je také regulární, věta 2.2 [7].

Pumping lemma pro fuzzy regulární jazyky, lemma 4-7 pro různé typy automatů [11].

Uzávěrové vlastnosti fuzzy regulárních jazyků, např. [7].

2.3 Fuzzy regulární výrazy

150 LiPed-FuzzFinAutFuzzRegExMembValLattOrdMon, definice 5.1, 5.2 (+ opsat důkaz, že $[0, 1]$ je lattice monoid) [17].

Algoritmus převodu reg na aut, [16]. Ale zdá se mi to až moc složité.

3 Rozpoznávání textových vzorů

Rozpoznávání vzorů obecně je jednou z nejvýznamějších aplikací informatiky. V běžném životě se často setkáváme se situacemi, kdy je třeba v datech najít výskyt učitěho vzoru, popř. jeho další vlastnosti. Případně určit podobnost ke vzoru, nebo nejpodobnější vzor.

160 Typickým příkladem je např. detekce obličeje na fotografii, tedy rozpoznávání vzorů v obrazových datech. Vzory je však možné rozpoznávat v téměř jakýchkoliv datech, například textech, zvukových záznamech či výsedcích měření nebo pozorování.

Z pohledu teoretické informatiky je však základem vyhledávání vzorů v textových datech. Textová data, tedy řetězce, mají jednoduchou strukturu a lze s nimi snadno manipulovat. Na druhou stranu, jsou schopna reprezentovat nebo kódovat široké spektrum dat. Právě z tohoto důvodu je studium rozpoznávání textových vzorů klíčové pro zpracovávání jakýchkoliv dalších typů dat.

Poznámka 3.1. *Pokud nebude uvedeno jinak, pojem „rozpoznávání textových vzorů“ bude v této kapitole zkracován jen na „rozpoznávání vzorů“.*

3.1 Formální zavedení problému

170 Stejně tak, jak se mohou různit aplikace rozpoznávání vzorů, i samotný pojem „rozpoznávání vzorů“ bývá chápán různě. V nejzákladnější podobě se jedná o problém určení, zda-li pozorovaný řetězec odpovídá předem stanovenému vzoru. Vzorem bývá obvykle také řetězec, ale může jím být například regulární výraz. Také - může nás zajímat buď exaktní shoda pozorovaného řetězce se vzorem, nebo jen nějaká forma podobnosti.

V rozšířeném smyslu může být problém chápán jako klasifikace. Tedy, určení třídy, do které by měl pozorovaný řetězec spadat, typicky na základě podobnosti s vybranými reprezentanty jednotlivých tříd.

180 V této kapitole se však budeme zabývat pouze určováním podobnosti vzorového a pozorovaného řetězce. U každé instance problému budeme znát abecedu se kterou pracujeme a také vzor. Vzorem bude libovolný řetězec nad touto abecedou. Řešením tohoto problému pro nějaký, tzv. pozorovaný, vstupní řetězec bude úroveň podobnosti tohoto řetězce s vzorovým. Jako podobnost zde budeme uvažovat reálné číslo z intervalu $[0, 1]$, kde 0 znamená úplnou rozdílnost a 1 úplnou shodu.

Poznámka 3.2. *Vzorový řetězec budeme v této kapitole vždy značit ω , pozorovaný pak α .*

190 Nyní máme zadefinován problém samotný, nicméně je třeba zdůraznit, že v jeho definici se používá vágní pojem „podobnost řetězců“. Podobnost řetězců je totiž pojem, který souvisí s konkrétní instancí problému a nelze jej nějak přesně, ale současně dostatečně obecně popsat. Jediné, co o podobnosti řetězců můžeme říct, je, že čím vyšší toto číslo je, tím by si měly být řetězce podobnější.

Například, budeme-li porovnávat vstup zadaný z klávesnice počítače oproti nějakému vzoru, je možné, že uživatel udělá překlep. V takovém případě bude vzorovému řetězci určitě více podobný řetězec obsahující dva překlepy (záměna symbolu za některý sousedící na klávesnici) než jiný, který se sice bude lišit jen v jednom symbolu, ale to takovém, který je na opačné straně klávesnice.

200 Obdobně, pokud budeme pracovat s abecedou malých a velkých písmen (majuskule a minuskule). Uvažujme vzorový řetězec `hello`. Řetězec `HELLO` se s ním neshoduje v ani jednom symbolu, ale přesto jejich podobnost může být blízká jedné.

3.2 Motivace k použití fuzzy automatů

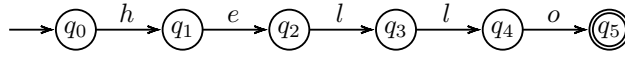
Klasická teorie automatů vznikla jako nástroj pro zpracování textových řetězců. Z tohoto důvodu je rozpoznávání textových vzorů jejím základním výsledkem. Automaty obecně jsou nástroje sloužící pro rozhodování, zda-li řetězec odpovídá vzoru automatem reprezentovaném. Použití pro rozpoznávání řetězcového vzoru tak bude jen speciálním případem jejich užití.

210 V předchozí podkapitole jsme si stanovili, že řešením našeho problému je číslo z intervalu $[0, 1]$. Z tohoto důvodu nebude možné využít klasické bivalentní automaty. Fuzzy automaty pracují se stupněm pravdivosti, který by mohl s hodnotou podobnosti řetězců korespondovat. Navíc, v praxi se často setkáme s texty, které jsou nepřesné a nedokonalé. Fuzzy přístup by nám tak mohl pomoci na tyto nepřesnosti adekvátně reagovat.

(zde bude doplněno: a co pravděpodobnostní?) (zde bude doplněno: Protože například: „pozorovaný řetězec se se vzorovým shoduje ve stupni x “ ale „je pravděpodobnost y , že uživatel zadal požadovaný řetězec“)

3.3 Automat rozpoznávající ω

Klíčovým pro rozpoznávání vzorů (chceme-li využívat fuzzy automaty) je bivalentní automat rozpoznávající vzorový řetězec. Tedy automat takový, který



Obrázek 1: Automat rozpoznávající **hello**

{diag-AutRozpHell}

220 přijímá jediný řetězec ω a všechny ostatní zamítá. Nyní si takovýto automat zkonstruujeme.

Uvažujme, že máme k dispozici vzorový řetězec ω nad abecedou Σ . Označme $\mathcal{L}(\omega)$ jako jednoprvkový jazyk obsahující pouze řetězec ω . Vzhledem k tomu, že jazyk $\mathcal{L}(\omega)$ je konečný, je také regulérní a existuje tak konečný deterministický automat, který jej rozpoznává.

230 Automat bude v každém kroku konzumovat symboly ze vstupního řetězce a porovnávat je se symboly vzorového řetězce na odpovídajících pozicích. Pokud dojde ke shodě na všech pozicích, automat dojde do koncového stavu a sledovaný řetězec přijme. Pokud se symboly shodovat nebudou, automat nebude mít definován žádný odpovídající přechod, kterým by pokračoval ve výpočtu, a řetězec tak zamítne.

Takovýto automat označme jako *automat rozpoznávající ω* .

Definice 3.1 (Automat rozpoznávající ω (deterministický)). *Mějme řetězec ω délky n nad abecedou Σ . Automat rozpoznávající ω je pak konečný automat $A(\omega) = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že jeho množina stavů Q se sestává z právě n stavů q_0, \dots, q_n , q_0 je počáteční stav, $F = \{q_n\}$ množina koncových stavů a δ je přechodová funkce definována pro všechna $0 \leq k < n$ následovně:*

$$\delta(q_k, a_k) = q_{k+1} \text{ kde } a_k \text{ je } k\text{-tý symbol řetězce } \omega$$

Tato definice automatu je vcelku intuitivní. K stejnému výsledku bychom došli, pokud bychom automat zkonstruovali konverzí gramatiky nebo regulérního výrazu.

Příklad 3.1. *Příklad automatu rozpoznávající řetězec $\omega = \text{hello}$ se nachází na obrázku 1.*

240 My však budeme potřebovat fuzzy automat rozpoznávající ω . To znamená, že musíme nejdříve automat z předchozí definice převést na nedeterministický a poté dle definice 1.11 k němu zkonstruovat odpovídající fuzzy automat.

{def-AutRozpOme}

Definice 3.2 (Automat rozpoznávající ω (nedeterministický)). *Mějme řetězec ω nad abecedou Σ z předchozí definice. Nedeterministický automat rozpoznávající ω je pak konečný automat $A'(\omega) = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ takový, že jeho množina stavů Q je stejná jako v předchozí definici, dále $I = \{q_0\}$ je množina počátečních a $F = \{q_n\}$ množina koncových stavů a δ je přechodová funkce definována pro všechna $0 \leq k < n$ následovně:*

$$\delta(q_k, a_k) = \begin{cases} \{q_{k+1}\} & \text{pokud je } a_k \text{ } k\text{-tý symbol řetězce } \omega \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

Následuje vytvoření fuzzy automatu.

{def-FuzzAutRozpOme}

Definice 3.3 (Fuzzy automat rozpoznávající ω). *Mějme řetězec ω nad abecedou Σ délky n . Fuzzy automat rozpoznávající ω je pak automat $A''(\omega)$ vytvořený z nedeterministického automatu rozpoznávající ω (definice 3.2) dle definice 1.11. Bude to tedy automat $A''(\omega) = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ kde*

- $\sigma(q_0) = 1$ a $\sigma(q_i) = 0$ pro všechna $i > 0$
- $\epsilon(q_n) = 1$ a $\epsilon(q_i) = 0$ pro všechna $i < n$
- $\mu(q_k, a_k, q_{k+1}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } a_k \text{ } k\text{-tý symbol řetězce } \omega \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Nyní máme k dispozici fuzzy automat, který ostře rozpoznává vzorový řetězec.
 250 V následujících podkapitolách následuje výčet několika technik, které tuto ostrost (pomocí dalších informací) odstraňují a nahrazují podobností.

3.4 Podobnost symbolů

Nezákladnější technika pro zanesení neostrého (stupňovitého) rozpoznávání je s využitím podobnostní relace symbolů. Tato technika byla přejata z [4]. Myšlenkou této techniky je, že symbol v pozorovaném řetězci může být snadno zaměněn za jiný, podobný, jemu odpovídající v řetězci vzorovém.

Pro realizaci této techniky je potřeba mít k dispozici fuzzy relaci $s : \Sigma \times \Sigma \rightarrow [0, 1]$. Tato relace popisuje podobnost dvojice symbolů. Tedy, je-li pro nějakou dvojici symbolů $x, y \in \Sigma$ $s(x, y) = 0$, pak se jedná o naprosto rozdílné symboly.
 260 Naopak, pokud bude $s(x, y) = 1$, pak se jedná o shodné symboly. Je zjevné, že by relace s měla být symetrickou a reflexivní. (zde bude doplněno: v článku to nepíše, ale měla by to být relace ekvivalence (Sym, Ref, Tra). Existuje něco, jako fuzzy relace ekvivalence?)

Příklad 3.2. Jako příklad podobnostní relace (nad abecedou písmen anglické abecedy) může posloužit například vzdálenost patřičných kláves na klávesnici. V takovém případě by určitě platilo kupříkladu $s(a, s) > s(a, d) > s(a, l)$. Protože klávesy A a S jsou si blíže (a tudíž symboly a a s jsou si „podobnější“) než například A a D či A a L .

Jiným příkladem může být například vizuální podobnost napsaných (malých psacích) písmen. V takovém případě by zřejmě platilo $s(a, o) > s(m, t)$, protože malá psací písmena a a o jsou si vizuálně podobnější než m a t , která vypadají úplně rozdílně.
 270

Máme-li k dispozici relaci s , je nutné ji zakomponovat do automatu. Jak autoři uvádějí, tato technika může pracovat s libovolným konečným automatem. Podíváme se proto nejdříve, jak využít relaci s obecně. Následně ji aplikujeme na automat rozpoznávající ω , čímž získáme nástroj pro podobnostní rozpoznávání textového vzoru.

{def-AutPracGS}

Definice 3.4 (Automat pracující s s). Uvažujme, že máme nedeterministický automat A a relaci podobnosti symbolů s . Pak k automatu A můžeme zkonstruovat fuzzy automat A' , který navíc pracuje s s . Takový automat bude zkonstruován dle definice 1.11 s tím rozdílem, že přechodová funkce μ bude definována pro všechna $q_i, q_j \in Q$ a $x \in \Sigma$ následovně:

$$\mu(q_i, x, q_j) = \bigvee_{y \in \Sigma} (s(x, y) \wedge \delta_y(q_i, q_j))$$

$$\text{kde } \delta_x(q_i, q_j) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } q_j \in \delta(q_i, x) \\ 0 & \text{pokud } q_j \notin \delta(q_i, x) \end{cases} \text{ pro všechna } q_i, q_j \in Q \text{ a } x \in \Sigma.$$

280 Definice je vcelku přímočará. Pro každý přechod ze stavu q_i do stavu q_j přes symbol x , procházíme přechody původního automatu. Obsahovala-li přechodová funkce původního automatu přechod ze stavu q_i přes symbol y do stavu q_j , pak je $s(x, y) \wedge \delta_y(q_i, q_j)$ rovno podobnosti x a y . V opačném případě je roven nule. Hodnota tohoto výrazu je díky spojení přes všechny symboly maximalizována.

Nyní aplikujeme tento způsob konstrukce fuzzy automatu na automat rozpoznávající ω .

290 **Definice 3.5** (Automat rozpoznávající ω pracující s s). *Mějme abecedu Σ , řetězec ω nad touto abecedou a fuzzy relaci s nad touto abecedou. Dle definice 3.2 můžeme zkonstruovat nedeterministický bivalentní automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω . Jako automat rozpoznávající ω pracující s s označme nedeterministický fuzzy automat $A'(\omega)$, který byl z automatu $A(\omega)$ vytvořen podle definice 3.4.*

(zde bude doplněno: neměl by se takovýto automat místo $A'(\omega)$ značit třeba $A_s(\omega)$?)

Následuje jednoduchý příklad takového automatu.

{ex-AutRozp0mePodSym}

Příklad 3.3. *Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Dále uvažujme relaci podobnosti symbolů s takovou, že*

- každý symbol je podobný sám sobě ve stupni 1
- každý symbol je podobný symbolu ve stupni 0,5 jedná-li se o symboly reprezentující sousedící písmena abecedy
- 300 • každý symbol je podobný symbolu ve stupni 0,3 jedná-li se o symboly reprezentující ob-jedno písmeno sousedící písmena abecedy
- všechny ostatní dvojice symbolů jsou si podobny ve stupni 0

Tuto relaci můžeme zapsat do matice (sloupce i řádky odpovídají po řadě symbolům a, b, c, d):

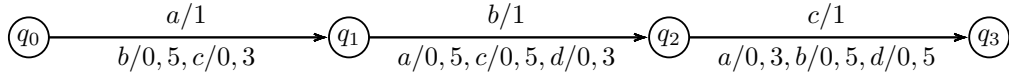
$$s = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,5 & 0,3 & 0,0 \\ 0,5 & 1,0 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 1,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,3 & 0,5 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Nyní mějme vzorový řetězec $\omega = abc$. Pak můžeme podle předchozí definice sestavit automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s s . Přechodový diagram takového automatu je na obrázku 2.

Tento automat evidentně rozpoznává řetězec **abc** ve stupni 1. Pokud v pozorovaném řetězci nahradíme symbol **a** za **b**, bude jej automat přijímat ve stupni 0,5. Pokud nahradíme **b** za **d**, bude jej automat přijímat ve stupni 0,3.

310 Pokud na začátek pozorovaného řetězce vložíme symbol **a** (tedy $\alpha = \mathbf{aabc}$), automat jej přijme ve stupni 0. Stejnětak, pokud odebereme symbol **c** z konce vzorového řetězce (tedy $\alpha = \mathbf{ab}$). Pokud vložíme symbol **a** na začátek a současně odebereme **c** z konce vzorového řetězce, obdržíme pozorovaný řetězec $\alpha = \mathbf{aab}$. Tento řetězec bude přijat ve stupni 0,5 (zde bude doplněno: $1 \otimes 0,5 \otimes 0,5$, záleží tedy na \otimes).

Z příkladu jasně vyplývá, že automat pracující s s je schopen akceptovat pouze náhradu symbolu jiným symbolem. Bude-li pozorovaný řetězec oproti vzorovému obsahovat vložený symbol nebo naopak z něj bude symbol odebrán, tento typ automatu selže. Na druhou stranu jeho princip i konstrukce jsou jednoduché a snadno se s nimi pracuje.



Obrázek 2: Automat rozpoznávající abc pracující s

{diag-AutRozpABCPracGS}

3.5 Fuzzy symboly

320 Fuzzy symbol je technika využívající podobnosti symbolů. Ve své podstatě se jedná o téže techniku jak v předchozí podkapitole, jen je na ni nahlíženo jinak. Oproti podobnosti symbolů je použití fuzzy symbolů komplikovanější, avšak umožňuje jednoduše tuto techniku kombinovat s jinými. Princip fuzzy symbolů byl přejat z [10].

Mějme abecedu Σ a relaci p podobnosti symbolů (stejně jako relace s v předchozí podkapitole). Fuzzy symbolem symbolu $x \in \Sigma$ označujeme fuzzy množinu symbolů takových, které jsou podle relace p symbolu x „podobné“.

Definice 3.6 (Fuzzy symbol). *Mějme abecedu Σ a fuzzy relaci $p \subseteq \Sigma \times \Sigma$. Pak pro každý symbol $y \in \Sigma$ definujeme fuzzy symbol \tilde{y} symbolu y jako fuzzy množinu nad Σ takovou, že pro všechna $x \in \Sigma$ platí*

$$\tilde{y}(x) = p(y, x)$$

Vzhledem k tomu, že fuzzy symbol máme definován pro všechny $y \in \Sigma$, můžeme množinu všech takových fuzzy symbolů nazvat abecedou fuzzy symbolů.

330 **Definice 3.7** (Abeceda fuzzy symbolů). *Mějme abecedu Σ a fuzzy symboly \tilde{y} pro všechna $y \in \Sigma$. Pak množinu všech těchto fuzzy symbolů nazvěme abeceda fuzzy symbolů abecedy Σ a označme $\tilde{\Sigma}$. Tedy $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{y} \mid y \in \Sigma\}$.*

Máme-li abecedu fuzzy symbolů $\tilde{\Sigma}$, můžeme pracovat s řetězcí $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Sigma}^*$ nad touto abecedou. Ještě si však doplníme, jak vytvořit k řetězcí $\alpha \in \Sigma^*$ jemu odpovídající řetězec fuzzy symbolů $\tilde{\alpha} \in \tilde{\Sigma}^*$.

(zde bude doplněno: sjednotit značení ω vs. α , když se používá jen jeden obecný řetězec)

Definice 3.8 (Řetězec fuzzy symbolů). *Mějme abecedu Σ a nějaký řetězec $a_1 \dots a_n = \alpha \in \Sigma^*$. Pak definujeme $\tilde{\alpha} = \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_n$ jako řetězec fuzzy symbolů řetězce α .*

340

V této fázi jsme schopni plnohodnotně pracovat s řetězcí fuzzy symbolů a konstruovat je z řetězců nad abecedou Σ . Nyní přejdeme k návrhu fuzzy automatu, který bude s fuzzy symboly pracovat. Stejně jako u podobnosti symbolů i fuzzy symboly mohou být aplikovány na libovolný typ automatu. Vytvoříme proto automat pracující s fuzzy symboly nejdříve obecně, pro libovolný automat A .

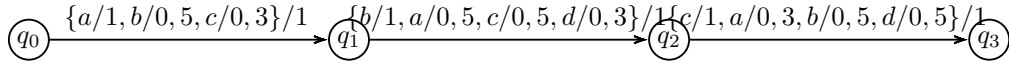
{def-AutPracFuzzSym}

Definice 3.9 (Automat pracující s fuzzy symboly). *Mějme nedeterministický fuzzy automat A . Pak fuzzy automat \tilde{A} pracující s fuzzy symboly vytvoříme tak, že v definici automatu A nahradíme Σ za $\tilde{\Sigma}$.*

350

(zde bude doplněno: může to tak být? a co související pojmy)

Formální zavedení automatu pracujícího s fuzzy symboly je intuitivní, jedná se jen o formalitu. Abychom však využili potenciál fuzzy symbolů, je třeba



Obrázek 3: Automat rozpoznávající abc pracující s s

{diag-AutRozpOmePraFuzSym

pozměnit výpočet automatu. Proces jeho výpočtu se změní ve fázi výpočtu přechodové funkce fuzzy stavů. Připomeňme, že ta je definována (definice 1.7) jako fuzzy relace $\hat{\mu}$ přiřazující každému fuzzy stavu V a fuzzy symbolu x fuzzy stav dle předpisu

$$\hat{\mu}(V, x) = V \circ \mu[x]$$

Zde je zjevně nutné nahradit $\mu[x]$ spojením přes všechny fuzzy symboly. Bude tedy vypadat následovně:

$$\hat{\mu}(V, x) = V \circ \bigvee_{y \in \Sigma} (\mu[x] \wedge \tilde{x}(y))$$

Tím, že je změna zakořeněna ve výpočtu automatu, nám umožňuje další práci se samotným automatem. Můžeme tedy bez problémů zkonstruovat automat rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.

Definice 3.10 (Automat rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly). *Mějme abecedu Σ , řetězec ω nad touto abecedou a abecedu fuzzy symbolů $\tilde{\Sigma}$. Dle definice 3.3 můžeme zkonstruovat fuzzy automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω . Následně pak podle definice 3.9 automat $\tilde{A}(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.*

Postup konstrukce takového automatu je opět vcelku intuitivní. Následuje demonstrace na příkladu.

360 **Příklad 3.4.** *Mějme abecedu Σ , vzorový řetězec a podobnostní relaci $p = s$ stejné jako v příkladu 3.3. Na obrázku 3 je zobrazen diagram automatu $\tilde{A}(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.*

Co se týče vlastností automatů (rozpoznávajících ω) pracujících s fuzzy symboly, jejich charakteristika je vesměs stejná jako u automatů pracujících s podobností symbolů. Pouze, jak již bylo zmíněno v úvodu, nezasahují do struktury automatu jako takového.

3.6 Editační operace

370 Další technikou pro podobnostní porovnávání pozorovaného a vzorového řetězce je s využitím editačních operací. Tato technika byla přejata z [9]. Základní idea této techniky spočívá v trojici jednoduchých editačních operací, jejíž složením jsme schopni popsat transformaci pozorovaného řetězce na vzorový. Množství transformace pak udává podobnost pozorovaného a vzorového řetězce.

Následuje formální definice editačních operací a pojmů s nimi souvisejících. Následně přejdeme ke konstrukci automatu, který s nimi bude schopen pracovat.

Definice 3.11 (Editační operace). *Mějme abecedu Σ , uvažujme množinu $E = (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \setminus \{(\epsilon, \epsilon)\}$. Pak každou dvojici $(x, y) = z \in E$ nazvěme editační operace. Speciálně pak, pro všechna $x, y \in \Sigma$, $(x, y) \in E$ znamená nahrazení symbolu x symbolem y , $(x, \epsilon) \in E$ znamená odebrání symbolu x a*

naopak $(\epsilon, y) \in E$ pak vložení symbolu y . Navíc jako editační operaci uvažujeme i všechny dvojice $(x, x) \in E$ (pro každé $x \in \Sigma$) symbolizující „žádnou editaci“.

Máme-li editační operaci $(x, y) = z \in E$, pak označme $x = z^\downarrow$ a $y = z^\uparrow$.

Editační operace jsou tedy tři a to náhrada symbolu, vložení symbolu a odebrání symbolu. Například řetězec **hallo** vznikl záměnou **e** za **a** v řetězci **hello**. Obdobně, řetězec **hellow** vznikl přidáním **w** na konec a řetězec **helo** odebráním (prvního nebo druhého) symbolu **l**.

My však obvykle očekáváme, že došlo k více, než jedné jednoduché editaci. Je proto vhodné zavést koncept mnohanásobné editace. Jednotlivé editace za sebe seřadíme do posloupnosti v pořadí, v jakém mají být postupně aplikovány, a takovouto posloupnost nazvěme vyrovnáním řetězce α na řetězec ω .

Uvažujeme nyní množinu E editačních operací jako abecedu. Pak každé vyrovnání ζ řetězce α na řetězec ω (posloupnost $z_1 z_2 \dots z_n$ symbolů $z_1, z_2, \dots, z_n \in E$), tak můžeme považovat za řetězec nad abecedou E .

(zde bude doplněno: fakt E považovat za abecedu a G za jazyk? není to zbytečná komplikace? je to tam nutné?)

Například všechny tři následující řetězce jsou vyrovnáním řetězce **ahoj** na řetězec **hello**:

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= (a, \epsilon)(h, h)(o, e)(j, l)(\epsilon, l)(\epsilon, o) \\ \zeta_2 &= (a, \epsilon)(h, \epsilon)(o, \epsilon)(j, \epsilon)(\epsilon, h)(\epsilon, e)(\epsilon, l)(\epsilon, l)(\epsilon, o) \\ \zeta_3 &= (a, h)(h, e)(o, l)(j, l)(\epsilon, o)\end{aligned}$$

Na tomto příkladu je vhodné si povšimnout, že obecně může existovat více než 1 vyrovnání mezi libovolnou dvojicí řetězců. Bude proto vhodné neuvažovat vyrovnání jednotlivá, ale množinu všech možných vyrovnání mezi dvojicí řetězců.

Podíváme-li se nyní jen na levé části editačních operací ve vyrovnání ζ_1 z předchozího příkladu, zjistíme, že jejich zřetězením získáme řetězec α :

$$(a, \epsilon)^\downarrow (h, h)^\downarrow (o, e)^\downarrow (j, l)^\downarrow (\epsilon, l)^\downarrow (\epsilon, o)^\downarrow = ahoj$$

Stejně tak, zřetězením pravých částí editačních operací v ζ_1 získáme řetězec ω :

$$(a, \epsilon)^\uparrow (h, h)^\uparrow (o, e)^\uparrow (j, l)^\uparrow (\epsilon, l)^\uparrow (\epsilon, o)^\uparrow = hello$$

Tato vlastnost nám udává, v jakém pořadí mají být editační operace aplikovány. Stejně tak nám odstraňuje nadbytečné editační operace (např. opakované přidávání a odebrání téže znaku, které by mohlo vést až k nekonečné posloupnosti editací). Proto nám tato vlastnost poslouží jako definiční pro formání zavedení vyrovnání řetězců.

Definice 3.12 (Vyrovnání řetězců [9]). *Jako množinu všech vyrovnání $G(\alpha, \omega)$ řetězce α na řetězec ω (kde $(\epsilon, \epsilon) \neq \alpha, \omega \in \Sigma^*$) označme takovou množinu $\{\zeta \in E^+ \mid \zeta \text{ splňuje vlastnosti 1., 2. i 3.}\}$*

1. $\zeta = z_1 z_2 \dots z_r$, $z_i \neq (\epsilon, \epsilon)$ pro všechna $i \in 1, \dots, r$,
2. $z_1^\downarrow z_2^\downarrow \dots z_r^\downarrow = \alpha$
3. $z_1^\uparrow z_2^\uparrow \dots z_r^\uparrow = \omega$

410 V tento okamžik máme formálně zavedena vyrovnání řetězců. Můžeme tedy přejít k práci s nimi. Ukážeme si způsob, jak pomocí vyrovnání řetězců spočítat podobnost dvojice řetězců. Na základě tohoto výpočtu pak sestavíme automat, který tento výpočet bude realizovat.

Pro určení podobnosti na základě vyrovnání řetězců budeme potřebovat znát míry pravdivosti editačních operací. Vstupem pro výpočet podobnosti řetězců tak bude navíc binární fuzzy relace R nad množinou všech editačních operací (E), udávající stupeň akceptovatelnosti každé z možných editačních operací. S touto znalostí můžeme nadefinovat relaci podobnosti řetězců, tzv. fuzzy míru dvojice řetězců α a ω .

420 (zde bude doplněno: Musí být R reflexivní a symetrická (def. automatu to vyžaduje, ale je to nutné?). A co T -tranzitivita?) (zde bude doplněno: Takové relaci se říká relace podobnosti (proximity relation))

Definice 3.13 (Fuzzy míra[9]). *Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$. Pak jako fuzzy míru mezi řetězci $\alpha, \omega \in \Sigma^*$ (značenou $S_{\Sigma, R, \otimes}$) označme fuzzy relaci danou následujícím předpisem:*

{def-FuzzMir}

$$S_{\Sigma, R, \otimes} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (\alpha, \omega) = (\epsilon, \epsilon) \\ \max_{\zeta \in G(\alpha, \omega)} (\bigotimes_{i=1}^{|\zeta|} R(\zeta_i)) & \text{pokud } (\alpha, \omega) \neq (\epsilon, \epsilon) \end{cases}$$

Definice fuzzy míry je vcelku intuitivní. Počítá se míra všech možných vyrovnání z nichž se vybírá ta největší. Míra vyrovnání se určuje jako t -norma ze všech $R(\zeta_i)$, tedy stupňů akceptovatelnosti jednotlivých editačních operací. Navíc, míra mezi dvojicí prázdných řetězců je dodefinována jako 1.

Označme $\mathcal{L}(\omega)$ jako fuzzy jazyk řetězců „podobných“ řetězci ω s podobností danou relací R . Takový jazyk pak můžeme nadefinovat pro všechna $\alpha \in \Sigma^*$ následujícím předpisem

$$\mathcal{L}(\omega)(\alpha) = S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha, \omega)$$

Nyní zkonstruujeme nedeterministický fuzzy automat s ϵ -přechody, který jazyk \mathcal{L} rozpoznává. (zde bude doplněno: rozpoznává vs. přijímá, pozor na to)

{def-AutRozpCaLL}

430 **Definice 3.14** (Automat rozpoznávající \mathcal{L} [9]). *Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ (stejná jako v definici 3.13). Pak pro vzorový řetězec $a_1 a_2 \dots a_n = \omega \in \Sigma^*$ označme $M_{\Sigma, R, \otimes}(\omega)$ automat rozpoznávající jazyk $\mathcal{L}(\omega)$ dle definice 1.10, takový, že*

1. množina stavů $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$
2. fuzzy přechodová funkce μ pro všechny $x \in \Sigma$:
 - (a) $\mu(q_i, q_i, x) = R(x, \epsilon)$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n$
 - (b) $\mu(q_i, q_{i+1}, x) = R(x, a_{i+1})$ pro všechny $q_i, q_{i+1} \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n-1$
 - (c) $\mu(q, q', x) = 0$ pro všechny $q, q' \in Q$ nesplňující předchozí dva body
 - (d) $\mu(q_i, q_i, \epsilon) = 1$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n$
 - (e) $\mu(q_i, q_{i+1}, \epsilon) = R(\epsilon, a_{i+1})$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n-1$

440

(f) $\mu(q, q', \epsilon) = 0$ pro všechny $q, q' \in Q$ nesplňující předchozí dva body

3. množina počátečních stavů $\sigma: \sigma(q_0) = 1$ a pro všechny ostatní $q_0 \neq q' \in Q$: $\sigma(q') = 0$

4. množina koncových stavů $\eta: \eta(q_n) = 1$ a pro všechny ostatní $q_n \neq q' \in Q$: $\eta(q') = 0$

Máme nadefinován fuzzy automat rozpoznávající jazyk $\mathcal{L}(\omega)$. Bylo by však vhodné dokázat, že jazyk $\mathcal{L}(\omega)$, který tento automat rozpoznává je skutečně jazykem řetězců podobných řetězci ω s podobností danou relací R . Vzhledem ke složitosti důkazu tohoto tvrzení se v této práci spokojíme pouze s ilustrací na příkladu.

Věta 3.1. Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ (stejná jako v definici 3.13) a vzorový řetězec $\omega \in \Sigma^*$. Pak pro automat $M_{\Sigma, R, \otimes}(\omega)$ sestavený dle předcházející definice a fuzzy míru $S_{\Sigma, R, \otimes}$ platí následující rovnost

$$\mathcal{L}(M_{\Sigma, R, \otimes}) = \mathcal{L}(\omega)$$

Důkaz. Kompletní důkaz je k nalezení v [9]. □

(zde bude doplněno: sazba symbolů v matematickém módu vs. verbatim řetězce v textovém)

Příklad 3.5. Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a vzorový řetězec $\omega = abc$. Zkonstruujeme automat, který bude akceptovat ve stupni 0.5 náhradu symbolu x symbolem s s ním v abecedě sousedícím. Navíc uvažujme vložení symbolu a ve stupni 0.2 a odebrání symbolu c ve stupni 0.1. Tedy, relace R bude vypadat následovně:

$$R = \{(a, a)/1, (b, b)/1, (c, c)/1, \\ (b, a)/0.5, (a, b)/0.5, (c, b)/0.5, (b, c)/0.5, \\ (a, \epsilon)/0.2, (\epsilon, c)/0.1\}$$

Dle definice 3.14 můžeme sestavit automat $M_{\Sigma, R, \otimes}$. Jako \otimes použijme produktovou t -normu. Získáme tak automat $M_{\Sigma, R, \otimes} = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ takový, že:

1. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

2. $\mu = \{$

(a) $(q_0, q_0, a)/0.2, (q_1, q_1, a)/0.2, (q_2, q_2, a)/0.2, (q_3, q_3, a)/0.2,$

(b) $(q_0, q_1, a)/1, (q_1, q_2, a)/0.5, \\ (q_0, q_1, b)/0.5, (q_1, q_2, b)/1, (q_2, q_3, b)/0.5, \\ (q_1, q_2, c)/0.5, (q_2, q_3, c)/1,$

(d) $(q_0, q_0, \epsilon)/1, (q_1, q_1, \epsilon)/1, (q_2, q_2, \epsilon)/1, (q_3, q_3, \epsilon)/1,$

(e) $(q_2, q_3, \epsilon)/0.1$

$\}$ (přechody dle bodů (b) a (d) v definici jsou s nulovým stupněm a ve výpisu jsou vynechány)

3. $\sigma = \{q_0/1, q_1/0, q_2/0, q_3/0\}$

$$4. \eta = \{q_0/0, q_1/0, q_2/0, q_3/1\}$$

(zde bude doplněno: $\sigma = \{x/y, \dots\}$ by se mělo přepsat na $\sigma(x) = y, \dots$, ne?)

470 Přechodový diagram tohoto automatu je k nalezení na obrázku 4. V přechodovém diagramu jsou červeně zvýrazněny pravidla pro rozpoznávání ω , ostatní pravidla (doplněna dle definice) jsou černá.

Nyní si na pár řetězcích zkuzme ukázat platnost věty 3.1. Dle definice 1.8 spočítáme stupeň, v jakém automat náš testovací rozpoznává řetězec α :

$$\begin{aligned} M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) &= \max_{q \in Q} (\mu^*(\sigma, \alpha)(q) \otimes \eta(q)) \\ &= \max\{\mu^*(\sigma, \alpha)(q_0) \otimes \eta(q_0), \mu^*(\sigma, \alpha)(q_1) \otimes \eta(q_1), \\ &\quad \mu^*(\sigma, \alpha)(q_2) \otimes \eta(q_2), \mu^*(\sigma, \alpha)(q_3) \otimes \eta(q_3)\} \\ &= \max\{\mu^*(\sigma, \alpha)(q_0) \otimes 0, \mu^*(\sigma, \alpha)(q_1) \otimes 0, \\ &\quad \mu^*(\sigma, \alpha)(q_2) \otimes 0, \mu^*(\sigma, \alpha)(q_3) \otimes 1\} \\ &= \mu^*(\sigma, \alpha)(q_3) \end{aligned}$$

- řetězec $\alpha = abc$: Určíme stupeň akceptance automatem:

$$M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma, abc)(q_3) = \hat{\mu}(\hat{\mu}(\hat{\mu}(\hat{\mu}(\sigma, \epsilon), a), b), c)(q_3) = \{q_3/1\}(q_3) = 1$$

A následně ověříme fuzzy míru. Množina všech vyrovnaní bude obsahovat například $\zeta_1 = (a, a), (b, b), (c, c)$ či $\zeta_2 = (a, \epsilon)(\epsilon, a)(b, \epsilon)(\epsilon, b)(c, \epsilon)(\epsilon, c)$. Snadno zjistíme, že $\bigotimes_{i=1}^{|\zeta|} R(\zeta_i)$ je maximální právě pro $\zeta = \zeta_1$ a nabývá stupně 1. A tedy $S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = 1$.

- řetězec $\alpha = ab$:

$$M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma, ab)(q_3) = \hat{\mu}(\hat{\mu}(\hat{\mu}(\sigma, \epsilon), a), b)(q_3) = \{q_2/1, q_3/0.1\}(q_3) = 0, 1$$

$$S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = R(a, a) \otimes R(b, b) \otimes R(\epsilon, c) = 1 \otimes 1 \otimes 0.1 = 0, 1$$

- řetězec $\alpha = bbb$:

$$M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma, bbb)(q_3) = \dots = \{q_3/0, 25\}(q_3) = 0, 25$$

$$S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = R(b, a) \otimes R(b, b) \otimes R(b, c) = 0, 5 \otimes 1 \otimes 0, 5 = 0, 25$$

- řetězec $\alpha = abaca$:

$$M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma, abaca)(q_3) = \dots = \{q_3/0, 04\}(q_3) = 0, 04$$

$$S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = R(a, a) \otimes R(b, b) \otimes R(a, \epsilon) \otimes R(c, c) \otimes R(a, \epsilon) = 1 \otimes 1 \otimes 0, 2 \otimes 1 \otimes 0, 2 = 0, 04$$

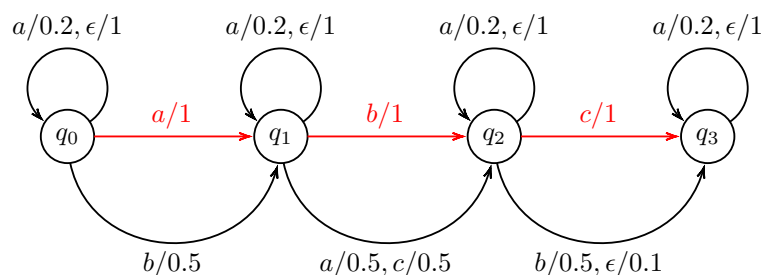
- řetězec $\alpha = cba$:

$$M_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma, cba)(q_3) = \dots = (\emptyset)(q_3) = 0$$

$$S_{\Sigma, R, \otimes}(\alpha) = R(c, a) \otimes R(b, b) \otimes R(a, c) = 0 \otimes 1 \otimes 0 = 0$$

...

Je tedy zjevné, že výpočet automatu $M_{\Sigma, R, \otimes}$ je v korespondenci s fuzzy mírou $S_{\Sigma, R, \otimes}$.



Obrázek 4: Přechodový diagram automatu z příkladu 3.5

{img-AutRozpCaLL}

Je vidět, že automat zkonstruován dle editačních operací je značně silný nástroj. Umožňuje nám velmi pohodlně popsat, jak moc mohou být konkrétní editační operace akceptovány. Editací operace vložení symbolu, náhrada symbolu a odebrání symbolu jsou pro popis modifikace vzorového řetězce přirozené.

Nevýhodou této techniky je, že jednotlivé editační operace jsou akceptovány bez ohledu na jejich výskyt v řetězci. Automat akceptuje nastanuvší editační operaci pokaždé, kde může nastat, ve stejném stupni. Často je však třeba v jiném stupni stejnou editační operaci přijímat např. na začátku a na konci řetězce pokaždé však v jiném stupni. Tento požadavek však automat zkonstruovaný pomocí editačních operací neumí zpracovat. Řešením může být například použití následující techniky.

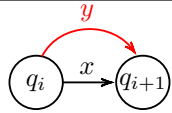
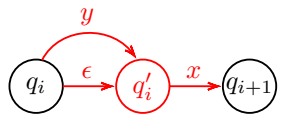
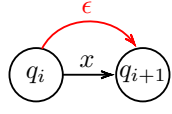
3.7 Deformovaný automat

Dalším ze způsobů, jak přijímat řetězec podobný vzorovému je s využitím deformovaného (fuzzy) automatu. Tato technika využívá tzv. deformovaného automatu, neboli automatu který byl stanoveným způsobem upraven, neboli deformován. Tato technika byla přejata z [5].

Jako deformace může být použita prakticky jakákoliv úprava automatu. Mějme fuzzy automat A . Provedením deformace x získáme deformovaný automat A' , který rozpoznává jiný jazyk, než automat A . Mezi nejzákladnější tři deformace patří náhrada symbolu, vložení symbolu před symbol a odebrání symbolu. Možných deformací existuje nekonečně mnoho. Mezi další deformace může patřit například (pro nějaké $x, y, z \in \Sigma$ a $i \geq 0$): „náhrada symbolu x na i -té pozici symbolu yz “, „odebrání všech výskytů symbolu x , které se nachází před symbolem y “ nebo „vložení sudého počtu symbolů y mezi symboly x a z “.

Provedeme-li deformaci fuzzy automatu rozpoznávající ω , můžeme se na trojici základních deformací podívat konkrétně. Ukázka toho, jak by vypadal deformovaný automat po provedení jedné ze základních deformací je vyobrazeno v tabulce 1.

Je vidět, že deformace mohou být účinným nástrojem pro rozpoznávání modifikovaných pozorovaných řetězců. Na druhou stranu, deformování automatu vyžaduje znalost fungování automatů. Často také může nastat situace, kdy výsledný zdeformovaný automat bude více, než deformovaný automat rozpoznávající ω , automatem reprezentující samostatný netriviální vzor.

Deformace	Význam deformace
<p>NÁHRADA symbolu na i-té pozici (symbolu x) symbolem y $\delta' = \delta \cup \{(q_i, y, q_{i+1})\}, Q' = Q$</p>	
<p>VLOŽENÍ symbolu y na i-tou pozici (před symbol x) $\delta' = \delta \setminus \{(q_i, x, q_{i+1})\} \cup \{(q_i, \epsilon, q'_i), (q_i, y, q'_i), (q'_i, x, q_{i+1})\}, Q' = Q \cup \{q'_i\}$</p>	
<p>ODEBRÁNÍ symbolu z i-té pozice (symbolu x) $\delta' = \delta \cup (q_i, \epsilon, q_{i+1}), Q' = Q$</p>	

Tabulka 1: Deformace deformovaného automatu
(zde bude doplněno: pozor, toto je pro konečné automaty, ne pro fuzzy automaty!)

{tbl-DefAutDef}

3.8 Shrnutí

V této kapitole byl zaveden pojem rozpoznávání textových vzorů. Bylo ukázáno, že pro klasickou teorii automatů je to triviální problém, který však kvůli nepřesnostem reálných dat vyžaduje nasazení fuzzy automatů. Bylo představeno několik technik, které pomocí fuzzy automatů umožňují přijímání řetězců podobných vzorovému.

Nejjednodušší z nich, využívající relaci podobnosti symbolů, je vhodná na prosté nahrazování podobných symbolů. Technika fuzzy symbolů funguje na stejném principu, jen se liší ve formálním zavedení. Technika s využitím editačních operací umožňuje specifikovat stupeň akceptance základních editačních operací (vlození symbolu, odebrání symbolu, náhrada symbolu). Poslední technika, deformovaný automat, umožňuje libovolnou transformaci automatu, vedoucí až k libovolnému vzoru.

4 Fuzzy tree automaty

4.1 Zavedení

Fuzzy tree automaty jsou speciální třídou automatů, které jsou navrženy pro rozpoznávání dat, které mají v sobě obsaženu určitou stromovou strukturu. Jak bude ukázáno, fuzzy tree automaty tak mohou rozpoznávat vybrané bezkontextové jazyky.

Fuzzy tree automaty vznikly fuzzyfikací „klasických“ tree automatů. O „klasických“ tree automatech je možné se dočíst více informací např. v [?], popř. [8] a [?]. Problematicke fuzzy tree automatů se věnuje například [?], [14], [15], [?] a [?]. V této kapitole bude vycházeno z [?].

Zatímco běžné konečné (fuzzy) automaty pracují s řetězci symbolů, (fuzzy) tree automaty pracují se speciálními strukturami symbolů, tzv. stromy. Pro snadnější práci s nimi bylo navrženo zakódování do řetězců, kterým se říká pseudotermy. Oba tyto pojmy, a jejich vzájemný vztah budou rozebrány v následující podkapitole. Dále bude nadefinován fuzzy jazyk stromů a automat, fuzzy tree automat, který fuzzy jazyk stromů rozpoznává. Na závěr bude předloženo několik konkrétních ukázek využití fuzzy tree automatů.

Následující dvě podkapitoly budou doprovázeny příklady. Pro vyšší názornost se budou příklady vždy týkat syntaxe jednoduchého algebraického kalkulu. Tento kalkul bude disponovat dvěma proměnnými, x a y . Dále pak unárním operátorem S (symbolizující funkci „sinus“) a binárním operátorem M (symbolizujícím binární „mínus“, resp. „odečtení druhého argumentu od prvního“). Na závěr bude syntaxe našeho kalkulu fuzzyfikována, takže bude v určitém stupni pravdivosti možné považovat za výraz například $S(x, y)$ nebo $M(M(x))$.

4.2 Stromy a pseudotermy

Definice 4.1 (Doména stromu). *Mějme abecedu Σ uspořádanou pomocí \leq . Pak konečnou množinu $U \subseteq \Sigma^*$ nazvěme doména konečného stromu, pokud splňuje následující podmínky:*

- jestliže $w \in U$ a $w = uv$ pak $u \in U$ pro všechna $u, v, w \in \Sigma^+$ (tj. množina je prefixově uzavřena)
- $wn \in U$ a $m \leq n$ implikuje $wm \in U$, pro všechna $w \in \Sigma^+$ a $m, n \in \Sigma$

Na doménu stromu můžeme nahlížet jako na množinu řetězců, které formují prefixový strom. Množinu U tak lze rozložit na množinu \bar{U} listových uzlů

$$\bar{U} = \{w \in U \mid wu \notin U \text{ pro všechna } u \in \Sigma^+\}$$

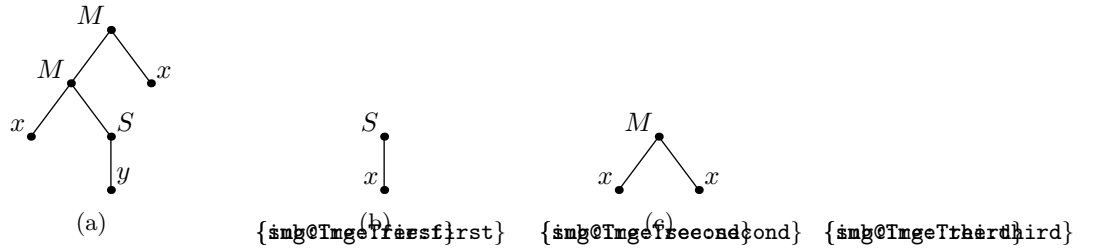
a množninu $U \setminus \bar{U}$ vnitřních uzlů.

Definice 4.2 (Částečně spořádaná abeceda). *Částečně spořádaná abeceda je dvojice (N, T) , kde N a T jsou dvě disjunktní konečné abecedy (tj. $N \cap T = \emptyset$).*

Definice 4.3 (Strom). *Strom t nad částečně spořádanou abecedou (N, T) je zobrazení z domény U stromu do $(N \cup T)$ (psáno $t : U \rightarrow (N, T)$) takové, že*

- $t(w) \in N$ pokud $w \in U \setminus \bar{U}$
- $t(w) \in T$ pokud $w \in \bar{U}$

{def:Tree}



Obrázek 5: Stromy k příkladu 4.1

{img:Tree}

Místo $t(w)$ budeme psát jen t .

(zde bude doplněno: Takto definovaný strom však teoreticky může být nekonečný. Co s tím?) Strom t je tedy předpis pro „přejmenování“ uzlů prefixového stromu daného doménou U . Strom dle definice 4.3 je v korespondenci s pojmem „strom“ (resp. „kořenový strom“) z teorie grafů. Z tohoto důvodu si pro jednoduchost můžeme odpustit definici souvisejících pojmů z teorie grafů pro strom z definice 4.3. Můžeme tak stromy graficky zobrazovat, hovořit o jejich potomcích, podstromech, vnitřních a listových uzlech bez nutnosti formálního nadefinování.

570

Příklad 4.1. Označme $T = \{x, y\}$ a $N = \{S, M\}$. Definujme doménu U_1 stromu pro abecedu $\Sigma = \mathbb{N}$ jako množinu řetězců $U_1 = \{\epsilon, 1, 11, 12, 121, 2\}$. Pak $\overline{U_1} = \{11, 121, 2\}$. Strom $t_1 : U_1 \rightarrow (T, N)$ nad (T, N) pak může vypadat například takto:

{ex:Trees}

$$\begin{array}{lll} t_1(\epsilon) = M & t_1(1) = M & t_1(12) = S \\ t_1(11) = x & t_1(121) = y & t_1(2) = x \end{array}$$

Grafické znázornění stromu t_1 je na obrázku 5a. Další ukázky stromů jsou na zbylých podobrázcích obrázku 5.

Stromy nám přirozeně reprezentují stromovou hierarchii. Pro nás bude ale občas vhodné mít lineární strukturu pro zápis téhož. Nadefinujeme si proto pseudotermy, protějšky termů predikátové logiky¹.

Definice 4.4 (Pseudoterm). Označme $D_{(N,T)}^p$ nejmenší podmnožinu $(N \cup T \cup \{(\cdot, \cdot)\})^*$ splňující následující podmínky²:

- $T \subset D_{(N,T)}^p$
- pokud $n > 0$, $A \in N$ a $t_1, \dots, t_n \in D_{(N,T)}^p$, pak $A(t_1 \dots t_n) \in D_{(N,T)}^p$

580 Prvky množiny $t^p \in D_{(N,T)}^p$ nazýváme pseudotermy.

Poznámka 4.1. Definice pseudotermu lze snadno přepsat do gramatiky. Vzhledem k tomu, že taková gramatika bude jistě bezkontextová, bude jazyk $D_{(N,T)}$ bezkontextový. Tento fakt bude mít důsledek na konstrukci fuzzy tree automatu.

¹Oproti termům predikátové logiky mají však jiný pohled na nulární funktory, které u pseudotermu neexistují

²Předpokládáme, že symboly závorek, $($ a $)$ nejsou součástí $N \cup T$

Příklad 4.2. Pro částečně spořádanou abecedu (N, T) s předchozího příkladu můžeme za termy označit například: $t_1^p = y$, $t_2^p = S(x)$, $t_3^p = M(xx)$, $t_4^p = M(M(xS(y))x)$.

Mezi stromy a pseudotermy platí vzájemně převoditelný vztah. To bude nyní dokázáno.

Věta 4.1. Pro každý strom $t \in D_{(N,T)}$ nad částečně spořádanou abecedou (N, T) existuje odpovídající pseudoterm $p(t)$.

Důkaz. Existenci pseudotermu dokážeme podle toho, zda-li je t strom tvořený listovým nebo vnitřním uzlem. Je-li kořenový uzel stromu t listový, tj. $t = a$, kde $a \in T$, pak $p(t) = a$. V opačném případě, tj. reprezentuje-li kořen stromu t vnitřní uzel $t = X$, kde $X \in N$, pak $p(t) = X(p(t_1) \dots p(t_n))$, kde t_1, \dots, t_n jsou podstromy stromu t . \square

Věta 4.2. Ke každému pseudotermu $p(t) \in D_{(N,T)}^p$ existuje odpovídající strom t .

Důkaz. Opět dokážeme strukturálně:

- je-li pseudoterm atomický, tj. $p(t) = a$, kde $a \in T$, pak doménou stromu t je množina $\{\epsilon\}$ a $t(\epsilon) = a$
- pokud je pseudoterm ve tvaru $p(t) = A(t_1^p \dots t_m^p)$, pak doménou stromu t je množina $\bigcup_{i \leq m} \{iw | w \in \text{domain}(t_i)\} \cup \{\epsilon\}$ a

$$t(w) = \begin{cases} A & \text{pokud } w = \epsilon \\ t_i(w') & \text{pokud je } w = iw' \text{ a } w \text{ je v doméně } t \end{cases}$$

\square

Příklad 4.3. Pseudoterm t_4^p z předchozího příkladu odpovídá stromu na obrázku 5a a pseudoterm t_3^p stromu 5c (a naopak).

Máme tedy prokázáno, že mezi pseudotermy a stromy platí vzájemná převoditelnost. Označíme si nyní množinu stromů jako jazyk a fuzzy množinu stromů jako fuzzy jazyk. Obdobným způsobem bychom mohli nadefinovat i jazyk pseudotermů, ale ten nebudeme potřebovat.

Definice 4.5 (Fuzzy jazyk stromů). Fuzzy množinu τ nad $D_{(N,T)}$ nazvěme fuzzy jazyk stromů.

4.3 Fuzzy tree automat a jazyk jím rozpoznávaný

Začneme definicí fuzzy tree automatu.

Definice 4.6 (Fuzzy tree automat). Fuzzy tree automat A je pětice (Q, T, N, μ, F) , kde:

- Q je konečná množina symbolů stavů
- T je konečná množina terminálních symbolů uzlů

μ_x	q_1	q_2
ϵ	1	0
μ_y	q_1	q_2
ϵ	1	0

μ_S	q_1	q_2
q_1	0	1
q_2	0	0,4
$q_1 q_1$	0	0,3

μ_M	q_1	q_2
q_1	0,1	0,8
q_2	0	0,5
$q_1 q_1$	0	0,6
$q_1 q_2$	0	1
$q_2 q_1$	0	0,7

Tabulka 2: Příklad přechodové funkce μ fuzzy tree automatu

{tab:MuOfFuzTreAut}

- N je konečná množina neterminálních symbolů uzlů taková, že $N \cap T = \emptyset$
- $\mu : (N \cup T) \rightarrow \{f | f : (\mathcal{Q} \cup \{\epsilon\}) \times \mathcal{Q} \rightarrow [0, 1]\}$ je fuzzy přechodová funkce, kde \mathcal{Q} je konečná podmnožina \mathcal{Q}^+ . Pro $X \in N$ je $\mu(X) = \mu_X$, kde μ_X je zobrazení z $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ do $[0, 1]$. Pro $a \in T$ je $\mu(a) = \mu_a$, kde μ_a je zobrazení z $\{\epsilon\} \times \mathcal{Q}$ do $[0, 1]$.
- $F \subseteq \mathcal{Q}$ je množina koncových stavů.

Podívejme se nyní podrobněji na fuzzy přechodovou funkci μ . Pro terminální symbol $a \in T$ nám μ_a definuje fuzzy stav, do kterého automat přejde při vstupu a . Pro neterminál $X \in N$ nám definuje přechodovou funkci $\mu_X(q_1 \dots q_k, q') = c$ s významem „pokud je na vstupu X a automat se nachází ve stavech q_1, \dots, q_k , pak automat přejde do stavu q' ve stupni c “.

Příklad 4.4. Uvažujme množiny N a T stejné, jako v předchozích příkladech. Stanovme $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2\}$. Fuzzy množinu F položme rovnu $\{q_2\}$ a zobrazení μ je zaznačeno v tabulce 2. Pak $A = (\mathcal{Q}, T, N, \mu, F)$ je fuzzy tree automatem.

Na přechodovou funkci se můžeme také podívat pohledem syntaktické analýzy zdola nahoru. Přechodové funkce μ_X ($X \in N$) realizují operaci „redukce“ a přechodové funkce μ_a ($a \in T$) operaci „přesun“. Můžeme tedy říci, že jazyk stromů (resp. jazyk jim odpovídajících pseudotermů) je fuzzy bezkontextový. Předtím je ale třeba ukázat, že fuzzy tree automaty skutečně přijímají fuzzy jazyky stromů.

Definice 4.7 (Fuzzy přechodová funkce stromů). Pro strom $t \in D_{(N,T)}$ definujme fuzzy přechodovou funkci stromů jako zobrazení $\mu_t : \mathcal{Q} \rightarrow [0, 1]$ následovně:

- Pokud stromu t odpovídá pseudoterm $p(t) = X(p(t_1) \dots p(t_k))$, pak

$$\mu_t(q) = \mu_{X(p(t_1) \dots p(t_k))}(q) = \bigvee_{\substack{w \in \mathcal{Q} \\ |w|=k}} \left(\mu_X(w, q) \wedge \bigwedge_{j=1}^k \mu_{t_j}(w_j) \right)$$

- pokud $t = a$, kde $a \in T$, pak $\mu_t = \mu_a$.

Fuzzy přechodová funkce stromů je obdobou fuzzy rozšířené přechodové funkce. Pokud je vstupní strom atomický ($t = a$) je přechod realizován pomocí fuzzy přechodové funkce μ_a . Pokud vstupní strom není atomický, je přechod realizován ve stupni, který je dán stupněm přechodu neterminálního symbolu a stupňů příslušných podstromů.

Stupeň, ve kterém je strom t automatem přijímán, pak lze určit vztahem

$$A(t) = \bigvee_{q \in F} \mu_t(q)$$

Definice 4.8 (Jazyk rozpoznávaný). *(zde bude doplněno: značení fuzzy jazyka)*
Fuzzy množinu $L(A)$ nad $D_{(N,T)}$ danou předpisem

$$L(A) = \left\{ (t, c) \mid c = \bigvee_{q \in F} \mu_t(q) \right\}$$

nazvěme fuzzy jazyk rozpoznávaný fuzzy tree automatem.

Příklad 4.5. Uvažujme automat A z předchozího příkladu. Pak pro strom t_1 (kde $t_{1,1}$ značí levý podstrom kořene a $t_{1,2}$ pravý podstrom) z obrázku 5c platí $\mu_{t_1}(q_2)$:

$$\begin{aligned} \mu_{t_1}(q_2) &= (\mu_M(q_1 q_1, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_1) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_1)) \\ &\quad \vee (\mu_M(q_1 q_2, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_1) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_2)) \\ &\quad \vee (\mu_M(q_2 q_1, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_2) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_1)) \\ &= (0, 6 \wedge 1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge 0) \vee (0, 7 \wedge 0 \wedge 1) = 0, 6 \end{aligned}$$

Pak tedy $A(t_1) = 0, 6$. Pro stromy t_2 a t_3 z obrázku 5a a 5a platí $A(t_2) = 0, 7$ a $A(t_3) = 1$.

Podobně jako u klasických automatů, i u tree automatů platí, že pro každý fuzzy jazyk stromů existuje automat, který tento jazyk rozpoznává.

Věta 4.3. Pro každý fuzzy jazyk stromů existuje fuzzy tree automat, který ho rozpoznává.

Důkaz. K dispozici v [?]. □

V praxi se však nejčastěji setkáme s automatem, který rozpoznává právě jeden strom. Snadnou modifikací takového automatu pak obdržíme automat, který nerozpoznává ostře jen jeden strom, ale v určitém nenulovém stupni také stromy jemu podobné.

Definice 4.9 (Automat rozpoznávající strom). Mějme strom $t \in D_{(N,T)}$ („vzor“) kde $sub(t)$ značí množinu všech jeho podstromů. Pak jako fuzzy tree automat rozpoznávající strom t označme fuzzy tree automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$, kde:

- $Q = \{q_{t'} \mid t' \in sub(t)\}$ (každému podstromu odpovídá jeden stav)
- $\mu_a(q_a) = 1$ pro všechna $a \in T$
- $\mu_X(w, q_{t'}) = 1$ pro všechny $t' \in sub(t)$, kde $w = q_1 \dots q_k$ a stromu t_i odpovídá pseudoterm $p(t') = X(t_1 \dots t_k)$
- $F = \{q_t\}$ (koncovým stavem je stav odpovídající celému stromu t)

Takovýto automat zřejmě rozpoznává jazyk $T = \{(t, 1)\}$.

V následujících podkapitolách budou fuzzy tree automaty demonstrovány na konkrétních příkladech.

4.4 Použití fuzy tree automatů

Fuzzy tree automaty je možné použít všude tam, kde je třeba rozpoznávat určitým způsobem stromově strukturovaná data. Konečnost množiny Q , pro kterou je definována přechodová funkce μ_X neterminálů $X \in N$ však přináší omezení na aritu každého uzlu, která tak vždy musí být konečným číslem.

Konečnost množiny Q však teoreticky nemusí být nutná. Teoreticky by šlo jako vzory funkce μ_X namísto konkrétních řetězců nad Q použít například regulární výraz popisující celou třídu takových řetězců (například $(q_0 \mid q_1)^+$). To by však zkomplikovalo implementaci takového automatu a proto toto rozšíření nebude uvažováno.

Důležité však je, že automat umožňuje rozpoznávat rekurzivní stromy. Rekurze je dosaženo (opakovaným) přechodem ze stavu do téže stavu (v nenulovém stupni).

4.5 Detekce úplných m -árních stromů

Základní technikou, jak lze využít fuzzy tree automaty je přímo práce se stromy. Ukážeme si, že s pomocí fuzzy tree automatů lze snadno rozpoznávat úplné m -ární stromy.

Definice 4.10 (Úplný strom). *Úplný m -ární strom je takový strom, jehož každý uzel má buďto právě m potomků (vnitřní uzly) a nebo 0 (listové uzly).*

Vlastnost „být úplným m -árním stromem“ lze poměrně jednoduše fuzzyfikovat. Pro každý vnitřní uzel v o n potomcích určíme míru jeho úplnosti. Jinými slovy stupeň pravdivosti výroku „uzel v má m potomků“. Tuto míru označme α_i a můžeme ji určit následujícím vztahem

$$\alpha_v = \frac{n}{m}$$

Pro strom t tvořený nelistovým uzlem v pak můžeme stupeň α_t pravdivosti výroku „ t je m -ární úplný strom“ stanovit jako minimum pravdivosti výroku „uzel n má m -potomků“ a pravdivosti „strom t' je m -ární úplný strom“ pro všechny jeho podstromy $t' \in t$.

Všechny atomické stromy tuto vlastnost splňují ve stupni 1. Můžeme tak napsat:

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } t \text{ tvořen listovým uzlem} \\ \alpha_v \wedge \bigwedge_{t' \in t} \alpha_{t'} & \text{pokud je } t \text{ tvořen nelistovým uzlem } v \end{cases}$$

Nyí je třeba vyjádřit tento problém v terminologii fuzzy tree automatů. Uvažujme, že strom t je tvořen vnitřními uzly I a listovými uzly o . Pak fuzzy jazyk m -árních úplných stromů bude fuzzy jazyk stromů nad $D_{(N,T)}$, kde $N = \{I\}$ a $T = \{o\}$. Zbývá tedy navrhnout fuzzy tree automat, který takový jazyk bude rozpoznávat.

Automat bude mít jeden stav $Q = \{q_1\}$ a přechodovou funkci $\mu_o(q_1) = 1$ a

$$\mu_I(w, q_1) = \frac{|w|}{m}$$

pro všechna $w \in \{q_1^i | 1 \leq i \leq m\}$. Množina koncových stavů F bude rovna $\{q_1\}$.

Dokážeme nyní, že automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$ rozpoznává fuzzy jazyk úplných m -árních stromů.

Věta 4.4. *Fuzzy tree automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$, kde Q , N , T , μ a F jsou popsány výše, rozpoznává fuzzy jazyk úplných m -árních stromů.*

700 *Důkaz.* Jazyk automatu A je roven $L(A) = \{(t, c) | c = \mu_t(q_1)\}$ (automat A má jen jeden koncový stav). Hodnota $\mu_t(q_1)$ závisí na tom, zda-li je t tvořen listovým uzlem nebo ne.

Je-li t tvořen listovým uzlem o , tj. $t = o$, pak $\mu_t = \mu_o = 1$.

Strom t je tvořen vnitřním uzlem v a $p(t) = I(p(t_1) \dots p(t_k))$. Existuje jedno jediné $w \in Q$ takové, že $|w| = k$: $w = q_1^k$. Pak $\mu_t = \mu_I(w, q_1) \wedge \bigwedge_{j=1}^k \mu_{t_j}(q_1)$. Protože $q \in Q$ a $Q = \{q_1\}$, pak $\mu_I(w, q) = \mu_I(w, q_1) = \frac{k}{m} = \alpha_v$. $\bigwedge_{j=1}^k \mu_{t_j}(q_1)$ je infimum přes všech k podstromů stromu t , takže $\bigwedge_{t' \in t} \mu_{t'}(q_1)$.

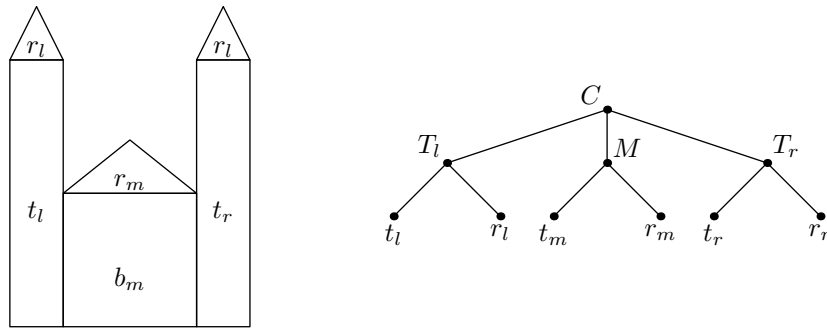
710 Předpokládejme, že platí $\mu_t(q_1) = \alpha_t$ pro všechny atomické stromy $t = a$, kde $a \in T$. Pak $\mu_t(q_1) = \alpha_v \wedge \bigwedge_{t' \in t} \mu_{t'}(q_1) = \alpha_v \wedge \bigwedge_{t' \in t} \alpha_{t'} = \alpha_t$ pro všechny stromy t tvořené vnitřními uzly. Pak tedy $\mu_t(q_1) = \alpha_t$ pro všechny $t \in D_{(N, T)}$. \square

Soubory automatu a ukázkových vstupních stromů jsou k nalezení v adresáři `fuzzy-tree-automata/test/data/m-ary-trees`.

4.6 Složené geometrické útvary

V [?] byl popsán způsob, jak pomocí fuzzy tree automatů rozpoznávat složené geometrické útvary. Složený geometrický útvar je chápán jako strom, jehož listové uzly reprezentují „primitivní geometrické objekty“ (čtverec, kruh, trojúhelník, aj.). Jeho vnitřní uzly pak popisují vzájemný vztah či vlastnost (např. vzájemnou polohu) jednotlivých podoblastí.

720 **Příklad 4.6.** Na obrázku 6 je vyobrazen složený geometrický útvar vyobrazující „budovu kostela“ a jemu odpovídající strom.



Obrázek 6: Příklad složeného geometrického tvaru a jeho stromu

{img:Geoms}

V příkladu, který autoři uvádějí, konstruují strom pro náčrt jednoduchého domu a následně kostela. Dům je tvořen čtvercem („budova“) a „nad ním“ se nachází rovnoramenný trojúhelník („střecha“). Kostel pak lze vyjádřit jako „dům, nad který se nachází kříž“.

Pro rozpoznávání takovýchto stromů fuzzy tree automatem je nutné tyto pojmy nejdříve formalizovat. Jakmile budeme mít pevně stanoveny jednotlivé pojmy, budeme moci provést jejich fuzzyfikaci a následně sestavit fuzzy tree automat, který stromy rozpoznává.

Uvažujme primitivní geometrický útvar g . Konkrétní podoba útvaru g bude dána jeho typem. Například mnohoúhelníky budeme reprezentovat jako posloupnosti jejich vrcholů, kružnice bude reprezentována jako střed a poloměr. Připomeňme si nejdříve matematické definice některých základních primitivních geometrických tvarů. (zde bude doplněno: je to nutné zdrojovat?)

Značení. Pro mnohoúhelník g označme α_X jako velikost úhlu při vrcholu $X \in g$.

Definice 4.11 (Obdélník). Mějme čtyřúhelník $g = ABCD$. Pak tento čtyřúhelník je obdélník, pokud platí

$$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D (= 90^\circ)$$

Definice 4.12 (Čtverec). Mějme obdélník $g = ABCD$. Pak tento obdélník je čtverec, pokud

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$$

Definice 4.13 (Rovnoramenný trojúhelník). Mějme trojúhelník $g = ABC$. Pak tento trojúhelník je rovnoramenný, pokud

$$\alpha_A = \alpha_B$$

Stranu AB nazýváme základna, strany AC a BC ramena.

Obdobným způsobem bychom ve výčtu mohli pokračovat. Pro užití fuzzy tree automatů však bude vhodné nehovořit o „útvary g je/není obdélník“, ale „útvary g je obdélníkem ve stupni c “.

Označme $\varepsilon : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$ jako fuzzy ekvivalenci reálných čísel danou předpisem:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{pokud } x \leq y \\ \frac{y}{x} & \text{pokud } x > y \end{cases}$$

s tím, že $\frac{0}{0} = 1$. Zřejmě platí $\varepsilon(x, x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$.

S využitím fuzzy ekvivalence ε tka můžeme předchozí tři definice „fuzzyfikovat“:

Definice 4.14 („Fuzzy“ obdélník). Mějme čtyřúhelník $g = ABCD$. Pak tento čtyřúhelník je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(g)$, kde

$$\gamma_r(g) = \varepsilon(\alpha_A, \alpha_B) \wedge \varepsilon(\alpha_B, \alpha_C) \wedge \varepsilon(\alpha_C, \alpha_D) \wedge \varepsilon(\alpha_D, \alpha_A)$$

Definice 4.15 („Fuzzy“ čtverec). Mějme geometrický útvar $g = ABCD$, který je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(g)$. Pak tento obdélník je čtvercem ve stupni $\gamma_s(g)$, kde

$$\gamma_s(g) = \gamma_r(g) \wedge \varepsilon(|AB|, |BC|) \wedge \varepsilon(|BC|, |CD|) \wedge \varepsilon(|CD|, |DA|) \wedge \varepsilon(|DA|, |AB|)$$

Definice 4.16 („Fuzzy“ rovnoramenný trojúhelník). *Mějme trojúhelník $g = ABC$. Pak tento trojúhelník je rovnoramenný ve stupni $\gamma_i(g)$, kde*

$$\gamma_i(g) = \varepsilon(\alpha_A, \alpha_B)$$

Máme tedy fuzzifikovány vlastnosti primitivních geometrických útvarů. Nyní je třeba navrhnout fuzzifikace jejich vzájemných vztahů. Pro vztah „být nad“ máme například:

Definice 4.17 (Vztah „být nad“³). *Mějme obdélník $r = ABCD$ a trojúhelník $q_t = EFG$. Pak „trojúhelník r je nad obdélníkem q_t (a horní hrana q_r splývá se základnou t)“ právě tehdy, když:*

$$top(r) = base(t)$$

kde $top(r) \in \{AB, BC, CD, DA\}$ je „horní strana“ obdélníku r a $base(t) \in \{EF, FG, GA\}$ je základna trojúhelníku t .

Mějme geometrický útvar $r' = ABCD$, který je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(r')$ a trojúhelník $q'_t = EFG$. Pak „trojúhelník r' je nad obdélníkem q'_t (a horní hrana q'_r splývá se základnou t')“ ve stupni $\gamma_T(r', t')$, kde

$$\gamma_T(r', t') = \gamma_r(r') \wedge \varepsilon(top(r'), base(t'))$$

a kde $\varepsilon(XY, ZW) = \varepsilon(X, Z) \wedge \varepsilon(Y, W)$ je fuzzy ekvivalence úseček a $\varepsilon(X, Y) = \bigwedge_i \varepsilon(X_i, Y_i)$ je fuzzy ekvivalence vrcholů.

Máme tedy formálně popsány a fuzzifikovány vlastnosti primitivních geometrických tvarů a (alespoň jednu) vlastnost popisující složený geometrický tvar. Položme $T = \{r, s, t, i\}$ jako terminály symbolizující obdélník, čtverec, (obecný) trojúhelník a rovnoramenný trojúhelník. Dále stanovme $N = \{T\}$. Pak pseudo-term $p(t_H) = T(i, s)$ nad (N, T) symbolizuje dům popsáný výše.

Označme $A_H = (Q, N, T, \mu, F)$ jako fuzzy tree automat rozpoznávající strom t_H . Označme $A'_H = (Q, N, T, \mu', F)$, kde μ' vznikla z μ nahrazením všech 1 (pro všechna $X \in (N \cup T)$) výrazem γ_X .

Příklad 4.7. *Uvažujme složený geometrický útvar C z obrázku 6. Pak automat A' bude nějak vypadat. (zde bude doplněno: domyslet to nějak!)*

Takto vytvořený automat dokáže rozpoznávat geometrické tvary „podobné“ (ve smyslu relací γ) vzorovému. Nevýhodou tohoto řešení je, že je pevně svázán s aritou (a pořadím potomků) uzlů vzorového stromu. Navíc, stupeň pravdivosti popisující vztah v uzlu U stromu je schopen kalkulovat pouze se svými potomky (a nikoliv například svými sousedy či předky). Obě tyto výhody se však smývají, pokud se bude pozorovaný strom od vzoru lišit jen málo.

I přes tyto nevýhody však lze fuzzy tree automaty použít na podobnostní rozpoznávání složených geometrických tvarů.

5 Buněčné fuzzy automaty

Buněčné (fuzzy) automaty jsou další z výpočetních modelů, které se svojí základní myšlenkou podobají (fuzzy) automatům. Oproti „klasickým“ (fuzzy) automatům mají však značně zajímavější možnosti uplatnění. Proto jim v této práci bude věnována samostatná kapitola.

³Zde si dovoluujeme značné zjednodušení. Vztah „být nad“ by měl být popsán například s využitím porovnávání y-ových souřadnic bodů.

5.1 „Bivalentní“ buněčný automat

Buněčné automaty a fuzzy buněčné automaty jsou výpočetní modely, které se koncepčně značně liší od klasických automatů. Dle [?] je jejich studium dokonce označováno za naprosto samostatné matematické paradigma. I přesto je v určitém smyslu možné je považovat za zobecnění „klasických“ deterministických automatů. Dá se totiž říci, že se jedná o n -dimenzionální mřížku tvořenou instancemi téže konečného automatu.

Přesné vymezení pojmu „buněčný automat“ se často různí. Některé definice uvažují nekonečnou mřížku (např. [?], [?], [?]) jiné zase konečnou (např. [?]).
780 Také se často kromě klasické čtvercové mřížky pracuje s mřížkou trojúhelníkovou nebo šestiúhelníkovou (např. [?]).

Vzhledem k tomu, že úkolem této práce není studovat obecné vlastnosti buněčných automatů ale jen jejich fuzifikace a následné použití v praxi, bude zde nadefinován pouze standardní dvoudimenzionální buněčný automat (pracující na čtvercové mřížce). Právě tento typ automatu totiž našel v praxi největší uplatnění. V této práci se také pro jednoduchost omezíme jen na automat se čtvercovou mřížkou velikosti m .

Dvoudimenzionální buněčný automat je tedy mřížka $m \times m$ tvořena buňkami
790 c_{ij} , $i, j \in [1, m]$. Každá buňka se nachází ve nějakém stavu q z množiny Q . Přechody mezi těmito stavy jsou realizovány přechodovými pravidly. Ty popisuje přechodová funkce μ . Formálně tedy

Definice 5.1 (Bivalentní buněčný automat). *Pro přirozené číslo m a konečnou množinu Q označme $A_m = (Q, \mu)$ jako dvoudimenzionální buněčný automat o rozměrech $m \times m$, kde Q je konečná množina stavů a μ přechodová funkce: $\mu : Q \times Q^k \rightarrow Q$ pro nějaké $1 \leq k \leq m^2$.*

Poznámka 5.1. *Buněčný automat se obvykle definuje jen předpisem pro přechodovou funkci, resp. výpisem přechodových pravidel. My se však budeme držet konceptu klasických automatů a budeme buněčný automat definovat jako strukturu.*

800 **Značení.** *Kde to bude možné, budeme indexy i, j vynechávat a namísto $c_{i,j}$ psát jen c . Fakt, že c je buňkou automatu A budeme značit $c \in A$. Fakt, že nějaká buňka c se nachází ve stavu q budeme značit $c = q$.*

Přechodová funkce μ přiřazuje buňce c stav q' na základě aktuálního stavu q a stavu dalších, tzv. okolních, k buněk. Označme $round(c_{ij})$ jako okolí buňky c_{ij} . Nejpoužívanějším okolím, které se používá, je Mooreovo okolí o poloměru 1, které je definováno jako sousedních 8 buněk buňky c_{ij} :

$$round(c_{i,j}) = (c_{i-1,j-1}, c_{i,j-1}, c_{i+1,j-1}, \\ c_{i-1,j}, c_{i+1,j}, \\ c_{i-1,j+1}, c_{i,j+1}, c_{i+1,j+1})$$

s tím, že nedefinované hodnoty ($i, j < 1$ nebo naopak $i, j > m$) za hranicemi mřížky se stanovují na nějakou pevně zvolenou hodnotu z Q .

Přechodová funkce μ pak vypadá následovně:

$$\mu(c, round(c)) = f(c, round(c))$$

kde f je funkce přiřazující buňce c s okolními buňkami $round(c)$ nový stav. V praxi se nejčastěji používá sada tzv. „If–Then“ pravidel.

Příklad 5.1. Typickým příkladem buněčného automatu je tzv. Hra života (Game of Life) (např. [?]). Jedná se o jednoduchý simulátor živého organismu.

Hra života uvažuje dvoustavovou množinu stavů, tj. $Q = \{0, 1\}$ a dvoudimenzionální mřížku ($n = 2$). Je-li hodnota buňky c rovna 1 hovoříme, že je buňka „živá“, je-li rovna 0 nazýváme buňku „mrtvou“. Přejchodová funkce μ je dána následujícími pravidly:

1. Je-li buňka c živá a je v jejím okolí méně, než 2 živé buňky, buňka umírá (ve smyslu „samoty“)
2. Je-li buňka c živá a je v jejím okolí více, než 3 živé buňky, buňka umírá (ve smyslu „vyčerpání zdrojů“)
3. Je-li buňka c mrtvá, a v jejím okolí jsou přesně 4 živé buňky, je buňka oživena
4. Ve všech ostatních případech zůstává buňka buďto mrtvá nebo živá

Označme

$$neighs_{i,j} = \left(\sum_{k,l \in \{-1,0,+1\}} c_{i+k,j+l} \right) - c_{i,j}$$

jako počet živých buněk sousedících s $c_{i,j}$.

Pak je přechodová funkce μ definována následovně:

$$\mu(c_{i,j}, round(c_{i,j})) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } c_{i,j} = 1 \text{ a } neighs_{i,j} < 2 \\ 0 & \text{pokud } c_{i,j} = 1 \text{ a } neighs_{i,j} > 3 \\ 1 & \text{pokud } c_{i,j} = 0 \text{ a } neighs_{i,j} = 4 \\ c_{i,j} & \text{jinak} \end{cases}$$

Soubor všech stavů všech buněk se nazývá – podobně, jako u konečných automatů – konfigurace buněčného automatu.

Definice 5.2 (Konfigurace buněčného automatu). Zobrazení $C : [1, m] \times [1, m] \rightarrow Q$ se nazývá konfigurace buněčného automatu.

Podobně jako u klasických automatů můžeme hovořit o počáteční konfiguraci. Ta – na rozdíl od klasických automatů – může být libovolná. Koncová konfigurace však pro buněčné automaty neexistuje. Výpočet buněčného automatu totiž nemá stanoven žádný konec. Můžeme však uvažovat konfiguraci dosažitelnou. Pro její zavedení je však třeba nadefinovat výpočet buněčného automatu.

Definice 5.3 (Krok výpočtu a výpočet buněčného automatu). Binární relaci \vdash na množině konfigurací buněčného automatu nazvěme krok výpočtu, pokud $C \vdash C'$ ($(C, C') \in \vdash$) a pro všechny $c_{i,j} \in A$ platí:

$$C'(i, j) = \mu(C(i, j), round(c_{i,j}))$$

Reflexivní a tranzitivní uzávěr \vdash^* relace \vdash nazvěme výpočtem buněčného automatu.

Definice 5.4 (Konfigurace dosažitelná). *Mějme konfiguraci C buněčného automatu. Pak o konfiguraci C' říkáme, že je dosažitelná z konfigurace C , pokud existuje výpočet z C k C' , tj.*

$$C \vdash^* C'$$

V opačném případě říkáme, že konfigurace je nedosažitelná.

Vzhledem k tomu, že přechodová funkce buněčného automatu je deterministická, je zřejmě deterministický i její výpočet, tj. pro každou konfiguraci C existuje právě jedna konfigurace C' , pro kterou platí $C \vdash C'$. Relace \vdash tak generuje posloupnost konfigurací. Očíslujeme-li si tuto posloupnost, pak počáteční konfigurace výpočtu bude $C^{(0)}$ a posloupnost pak bude vypadat následovně:

$$C^{(0)} \vdash C^{(1)} \vdash C^{(2)} \vdash \dots$$

Nazýváme i -tý prvek této posloupnosti jako konfigurace i -té generace a samotné hodnoty i jako generace (hovoříme tak o nulté, první, druhé, ... generaci).

Konfigurace buněčného automatu se často zobrazuje graficky. Zakresluje se jako bitmapa, kde jednotlivé pixely reprezentují stavy buněk na odpovídajících souřadnicích. Každému stavu je přiřazena barva, kterou je tento stav znázorněn. Pro zobrazení výpočtu se občas používá třírozměrné zobrazení (tj. voxelový
840 obrázek), kde třetí rozměr odpovídá generaci.

Příklad 5.2. *Ukázka výpočtu automatu A_{100} realizující Hru života je na obrázku 7. Černá barva symbolizuje mrtvou buňku, bílá pak živou.*

5.2 Buněčné fuzzy automaty

Buněčný fuzzy automat není na rozdíl od klasického fuzzy automatu prostým zobecněním bivalentního buněčného automatu. Hlavním důvodem je bezesporu fakt, že přechodová funkce bivalentního buněčného automatu je deterministická a úplná. Tedy, že každá buňka vždy přejde ze stavu q do nějakého stavu q' . Buňka se tedy musí nacházet vždy v právě jednom stavu. Nemůže nastat situace, že by buňka přešla „do více stavů současně“⁴ (přechodová funkce by nebyla deterministická) nebo nepřešla do žádného (přechodová funkce by nebyla úplná).
850

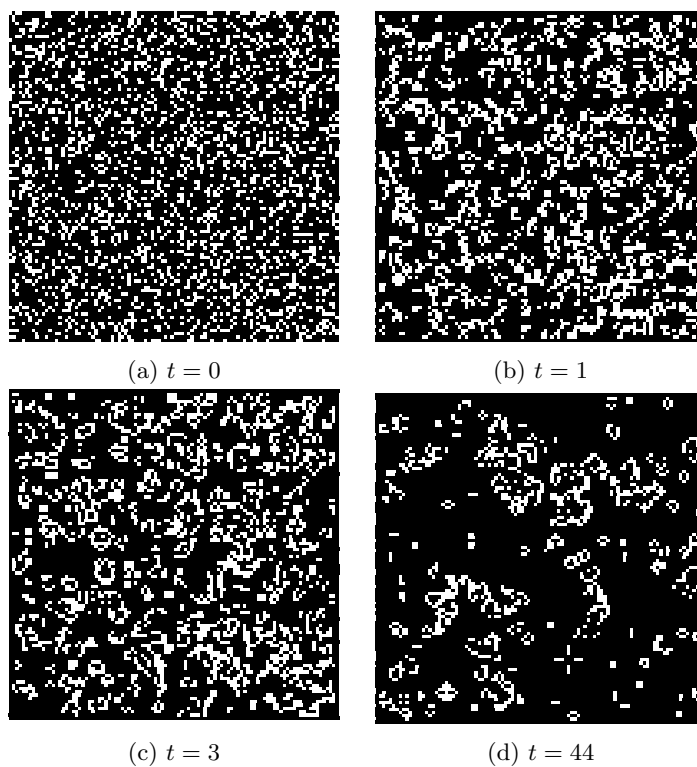
Vzhledem k tomu, že stejné chování budeme vyžadovat i u buněčného fuzzy automatu, „odstupňování“ přechodové funkce (zavední fuzzy přechodové funkce) by nemělo smysl⁵.

Triviální způsob, jak zavést buněčný fuzzy automat je jako bivalentní buněčný automat, jehož množina stavů je rovna intervalu $[0, 1]$. Takovýto automat budeme označovat jako $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat.

Definice 5.5 ($[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat). *Jako $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat velikosti m budeme označovat bivalentní buněčný automat $A = (Q, \mu)$, kde $Q = [0, 1]$.*

⁴Jak bude ukázáno, tento předpoklad lze obejít

⁵Teoreticky by bylo možné nahradit stav buňky fuzzy stavem buňky. Takováto úprava by však výrazně zvýšila výpočetní složitost výpočtu automatu a například také znesnadnila grafické znázornění jeho konfigurací a proto zde nebude uvažován.



Obrázek 7: Několik generací výpočtu buněčného automatu „Hra života“ s náhodnou počáteční konfigurací

{img:GameOfLife}

Jedná se tedy jen o speciální případ klasického bivalentního buněčného automatu. Každá buňka c takového automatu pak vždy splňuje následující tvrzení:

- „buňka c se nachází ve stavu 1“ ve stupni q
- „buňka c se nachází ve stavu 0“ ve stupni $1 - q$

860 Díky tomu je obejit předpoklad, že automat se smí nacházet pouze v jednom stavu současně.

Druhý způsob, jak definovat buněčný fuzzy automat, může pracovat s libovolnou množinou stavů. Fuzzy přístup se zde závádí dodatečně pomocí fuzzy množin (resp. výroků se stupni pravdivosti). Množině stavů je přiřazena jedna nebo více fuzzy množin. Každá tato fuzzy množina určitým způsobem charakterizuje stavy v ní obsažené. Přechodová funkce pak nepracuje přímo se stavy, ale pouze z těmito fuzzy množinami. Stav, do kterého má automat přejít je pak určen z fuzzy množiny (množin) popisující tento stav.

870 Takovýto buněčný fuzzy automat budeme nazývat buněčný automat s fuzzy logikou. Přechodová funkce μ tohoto automatu je určena množinou „If – Then“ pravidel. Zatímco u konečného buněčného automatu byla transformace množiny pravidel na přechodovou funkci triviální (viz příklad 5.1), při použití fuzzy logiky je situace složitější. Bude proto ještě před samotným nadefinováním automatu uveden postup pro konstrukci jeho přechodové funkce.

Mějme libovolnou množinu Q stavů, systém $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}(Q)$ fuzzy množin nad touto množinou a zobrazení $\gamma : \mathcal{D} \rightarrow Q$ (defuzzifikační funkce). Dále uvažujme množinu G fuzzy přechodových pravidel, tj. pravidel ve tvaru „If – Then“. Uvažujme pravidlo $g \in G$. Pravidlo g je v následujícím tvaru:

$$\text{Jestliže } f(c_1, \dots, c_x) \text{ pak } c' = \gamma(\varsigma_y)$$

kde $c_1, \dots, c_x \in Q$, $\varsigma_y \in D$ a f je nějaké zobrazení $f : Q^x \rightarrow [0, 1]$.

Označme předpoklad pravidla g jako formuli $pre(g) = g_x = f(c_1, \dots, c_x)$. Budeme-li konkrétní hodnoty $e = (c_1, \dots, c_x)$ považovat za pravdivostní ohodnocení, pak můžeme určit pravdivostní hodnotu (stupeň pravdivosti) $E_e(g_x)$ podmínky pravidla g při ohodnocení e .

Pro vektor e hodnot pak bude vybráno (a použito) pravidlo $g_i \in G$, které maximalizuje své ohodnocení, tj. pro které je $E_e(g_{i_x})$ největší.⁶ Ohodnocení $E_e(g)$ pravidla g je pak rovno hodnotě $\gamma(\varsigma_y)$. Ohodnocení $E_e(G)$ množiny přechodových pravidel, tj. určení nového stavu na základě vektoru e stavů se tedy určí tímto předpisem

$$E_e(G) = \text{con}(g_i) \text{ kde } g_i \in G \text{ je takové, že } E_e(g_i) = \max_{g \in G} E_e(g)$$

880 (zde bude doplněno: ohodnocení pravidla vrací stav, ne stupeň pravdivosti. Chce to jiný termín, např. *evaluace*.) Tímto máme stanoveny, jak se aplikují fuzzy přechodová pravidla, a můžeme tedy přistoupit k definici buněčného automatu s fuzzy logikou.

Definice 5.6 (Buněčný automat s fuzzy logikou). *Označme strukturu $A = (Q, G, \mathcal{D})$, kde Q je množina stavů, G množina „If – Then“ pravidel a \mathcal{D} je*

⁶Je vhodné navrhnout pravidla tak, aby takové bylo vždy jen jedno. V opačném případě bude jedno vybráno.

fuzzy množina nad Q . Dále pak (Q, μ) formuje bivalentní buněčný automat s přechodovou funkcí μ :

$$\mu(c, \text{round}(c)) = E_e(G), \text{ kde } e = (c, \text{round}(c))$$

Značení. V zápise pravidel se často pro vyšší názornost namísto zápisu $\varsigma_X(c)$ (kde $\varsigma_X \in \mathcal{D}$) používá zápis $c = X$.

Příklad 5.3. Příkladem buněčného automatu s fuzzy logikou může být například následující automat. Množina stavů bude obsahovat přirozená čísla z intervalu $[0, 150)$. Stanovíme čtveřici fuzzy množin $\varsigma_L, \varsigma_M, a \varsigma_H$ ve významu „hodnota q je nízká“, „hodnota q je střední“ a „hodnota q je vysoká“. (Přesnou definici těchto fuzzy množin vynecháme, není pro tento příklad důležitá.) Pravidla automatu pak mohou vypadat následovně:

- Pokud $q_{i-1,j-1}^{(t)} = L$, pak $q_{i,j}^{(t+1)} = H$
- Pokud $q_{i-1,j-1}^{(t)} = L$ nebo $q_{i-1,j-1}^{(t)} = M$, pak $q_{i,j}^{(t+1)} = M$
- Pokud $q_{i,j-1}^{(t)} = L$ a $q_{i,j+1}^{(t)} = L$, pak $q_{i,j}^{(t+1)} = L$

Provedme-li srovnání obou definic buněčných fuzzy automatů, zjistíme, že jsme vlastně obdrželi dva značně rozdílné výpočetní modely. To se projevuje i na jejich uplatnění. $[0, 1]$ -Buněčný automat je vhodný více tam, kde pro popis přechodové funkce nevyžadujeme „If – Then“ pravidla ale jen funkční předpis. Oproti tomu buněčný automat s fuzzy logikou najde uplatnění spíše tam, kde máma data popsána logicky. Často se však oba přístupy kombinují (typicky se používá buněčný automat s fuzzy logikou spolu s nepodmíněnými pravidly).

5.3 Obecně k aplikacím

Buněčné automaty (obecně) nacházejí široké uplatnění v rozličných oblastech. Dle [?] se s nimi lze setkat v matematice, informatice, fyzice, biologii, společenských vědách, např. filozofii a umění. Používají se například pro simulace fyzikálních dějů (např. difuze, tok tekutin), krystalizace, biologickým, urbanistickým, environmentalistickým a geografickým simulacím či ke generování fraktálů.

Co se buněčných fuzzy automatů týče, jejich aplikace nejsou tak rozšířené. Jedním z důvodů, proč tomu tak je, je velká podobnost bivalentních buněčných automatů a buněčných fuzzy automatů. Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole, $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat je jen speciálním případem klasického bivalentního. Obdobně, reprezentovat přechodovou funkci „If – Then“ pravidly lze i bez použití fuzzy množin. Přechodová fuzzy pravidla jsou tak jen jiné pojmenování pro speciální třídu pravidel.

Například [?] používá čísla z intervalu $[0, 1]$ jako vstupní informaci. [?] používá automat podobný buněčnému automatu s fuzzy logikou, který navíc pracuje se stavy na intervalu $[0, 1]$. Obdobně, [3] používá buněčné automaty v kombinaci s určitou formou fuzzy logiky (avšak automat napovídají za buněčný fuzzy automat). V [?] je použit automat pracující na intervalu $[0, 255]$, který by šel snadnou modifikací konvertován na $[0, 1]$ -buněčný fuzzy automat. Automat v [?] vykazuje určitou náhodnost a bylo by tak možné považovat jej za pravděpodobnostní.

Další varianty buněčných automatů a jejich uplanění jsou vyjmenovány v [?]. Ve všech případech se uvažují vždy dvoudimenzionální buněčné automaty.

Aplikace fuzzy automatů se dají rozdělit do dvou kategorií. Do první z nich spadají urbanistické simulace. Pomocí buněčných fuzzy automatů tak byly řešeny simulace hustoty dopravy [?], růstu mořských řas u pobřeží [?] či plánování elektrické rozvodné sítě [?]. Zdaleka nejběžnější však bylo nasazení buněčných fuzzy automatů na řešení problému městského růstu. Z tohoto důvodu bude tomuto problému věnována samostatná podkapitola.

930 Další oblastí, kde našly buněčné fuzzy automaty uplatnění je zpracování obrazu. Používají se například na zaostřování obrazů [?][?], hledání hran [?][?], vyhledávání vzorů [?][?] či odstranění šumu [?][?][?]. V následujících podkapitolách budou některé takové techniky rozebrány podrobněji.

Co se pravděpodobnostních buněčných automatů týče, ty nacházejí uplatnění všude tam, kde je třeba dodat náhodnost a nepravidelnost. Například pro problém simulace městského růstu [?] [?]. Dále pak například pro náhodné generátory, generátory šumu, simulace pohybu částic, difuze částic či nukleace (vznik krystalů) [?].

940 Před studiem samotných aplikací je nutné dodat, že aplikace zde popsané jsou pouze teoretickým popisem sestaveným na základě použitých zdrojů. Každá z těchto aplikací vyžaduje kalibraci parametrů (např. počet generací, návrh fuzzy množin) a přizpůsobení na míru konkrétní instance problému. Většina zdrojů proto automaticky kombinuje několik technik dohromady. Například [?] [?] využívají buněčné fuzzy automaty v kombinaci s neuronovými sítěmi, v [?] s genetickými algoritmy a [?] [?] s pomocí učícího se automatu. *(zde bude doplněno: dohledat, vysvětlit a ocitovat, co to je učící se automat)* Většinou je také nutná hluboká znalost dané problematiky, nejlépe přítomnost experta.

5.4 Problém městského růstu (urban growt problem)

950 Problém městského růstu je problém z oblasti urbanistiky. Řešením tohoto problému je co nejpřesnější predikce rozvoje městské zástavby na základě historických záznamů a současné situace. Ve zjednodušené podobě se nemusí jednat jen o růst městské zástavby, ale například nárůst vytíženosti silnic, kácení lesů nebo vytíženost ložisk. Stejně tak se nutně nemusí jednat o růst, ale obecný vývoj v čase. V této kapitole však budeme pro jednoduchost uvažovat standardní problém, tedy městský růst.

Buněčné fuzzy automaty byly již mnohokrát použity pro řešení tohoto problému. Pomocí těchto automatů byl například modelován rozvoj zástavby v městě Riyadh v Saudské Arábii [?], [?], regionu Helensvale v Austrálii [?], ostrova Sv. Lucie v Karibském moři [?], oblasti North Vancouver v Kanadě [?], oblasti Mesogia v Řecku [?], [?], oblasti Sanfranciského zálivu v Kalifornii [?] nebo části Tianhe města Guangzhou v jihovýchodní Číně [?]. Další literatura věnující se uplatnění (fuzzy) buněčných automatů při řešení problému městského růstu je k dispozici např. zde: [2], [?] a [?].

Pojďme se nyní podívat, jak se buněčné fuzzy automaty pro řešení tohoto problému používají. Základní idea pro nasazení fuzzy automatů je následující: Stav zástavby reprezentujeme jako konfiguraci fuzzy buněčného automatu. Pak růst zástavby bude odpovídat přechodům mezi těmito konfiguracemi.

970 V první fázi je nutné si sledovanou oblast („město“) rozdělit na dílčí parcely. Každé takové parcele pak bude odpovídat jedna buňka buněčného fuzzy automatu. U každé parcely je třeba zjistit rozličné ukazatele, např.:

- je-li parcela zastavěna (popř. jak moc)
- typ zástavby na parcele (např. rodinné domy, obytné domy, komerční prostory, prostory pro rekreaci, dopravní stavby, průmyslová zóna)
- jak moc žije na parcele obyvatel
- jak moc vysoké budovy stojí na parcele
- jak velké produkuje parcela znečištění ovzduší/hluku

Nejčastěji se jako ukazatel používá informace o zastavěnosti parcely. Ta se totiž dá poměrně snadno stanovit s pomocí satelitních snímků sledované oblasti.

Dále je třeba získat ukazatele, které mají vliv na růst zástavby. Mezi takovéto ukazatele patří například:

- vzdálenost parcely od centra města (popř. škol, nákupních center, ...)
- dopravní obslužnost parcely (vzdálenost od hlavní silnice nebo zastávek hromadné dopravy)
- atraktivita lokality (výhled na město, okolní zástavba, ...)
- stavební podmínky (podloží, záplavová zóna, terén, ...)

Za povšimnutí stojí, že některé ukazatele jsou neměnné v čase (např. vzdálenost od centra města nebo podloží).

Následně je možné sestavit přechodová pravidla. Ta mohou být například:

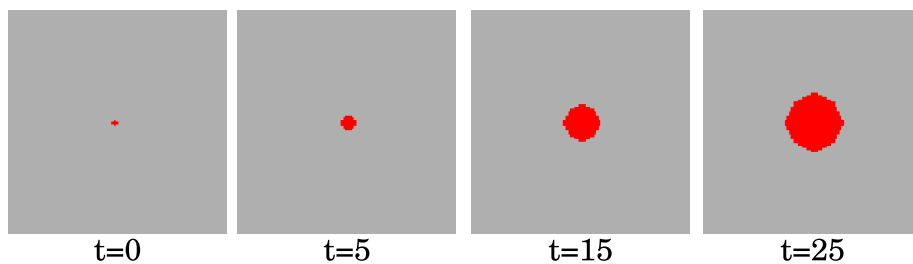
- Je-li vzdálenost parcely od centra města malá, pak růst zástavby bude velký
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi malá, pak růst zástavby bude malý a množství hluku bude velké
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi velká, pak růst zástavby bude malý
- Není-li lokalita atraktivní, pak růst zástavby bude malý

Další ukázky pravidel jsou např. v [?], [12] a[?]. Ukázku toho, jak se chová automat při různých počátečních konfiguracích lze spatřit na obrázku 8.

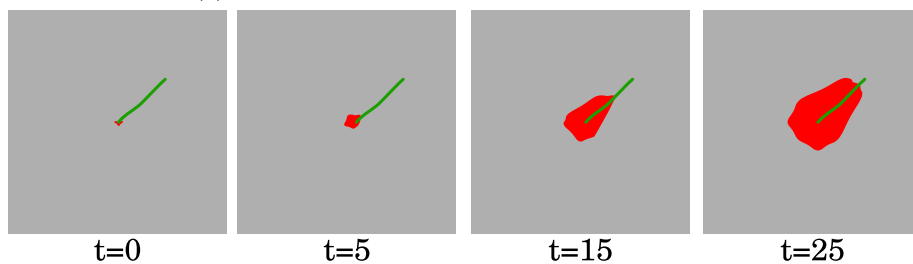
Na obrázku 9 je k vidění konkrétní ukázka městského růstu. Na obrázku jsou pro porovnání zobrazeny jak vypočtené stavy zástavby, tak i skutečné (upravené satelitní snímky). Na snímcích je patrné, že simulace rozvoje mezi lety 1987 a 1997 dosáhla poměrně přesných výsledků. Stejně tak, v simulaci růstu mezi lety 1997 a 2005 naznačuje jen malý rozvoj. Při simulaci od roku 1987 do roku 2005 už jsou patrné větší odlišnosti (simulace nevyprodukovala tak výrazný růst, jaký doopravdy nastal).

5.5 Zpracování obrazu

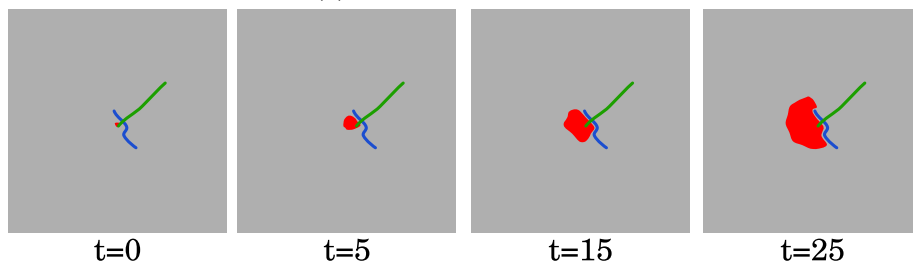
Zpracování obrazu je v dnešní době velmi populární informatická disciplína. Jak bude ukázáno, nasazení buněčných fuzzy automatů zde nachází značné uplatnění.



(a) Růst města bez dalších dodatečných podmínek



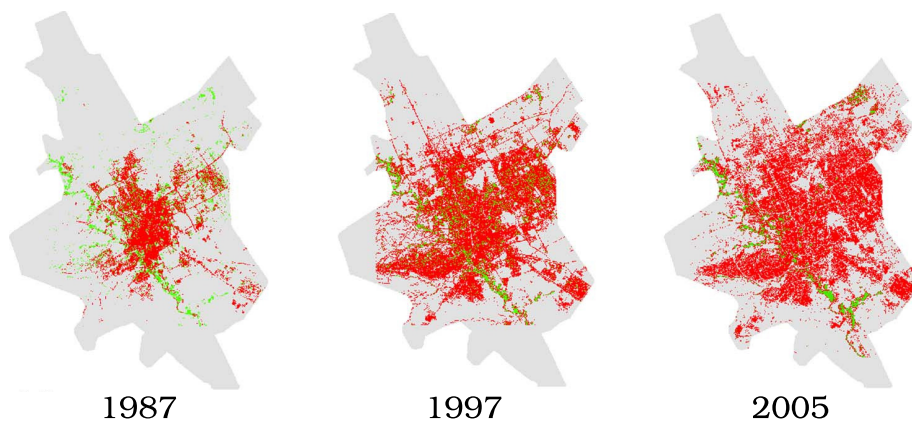
(b) Růst města podél silnice



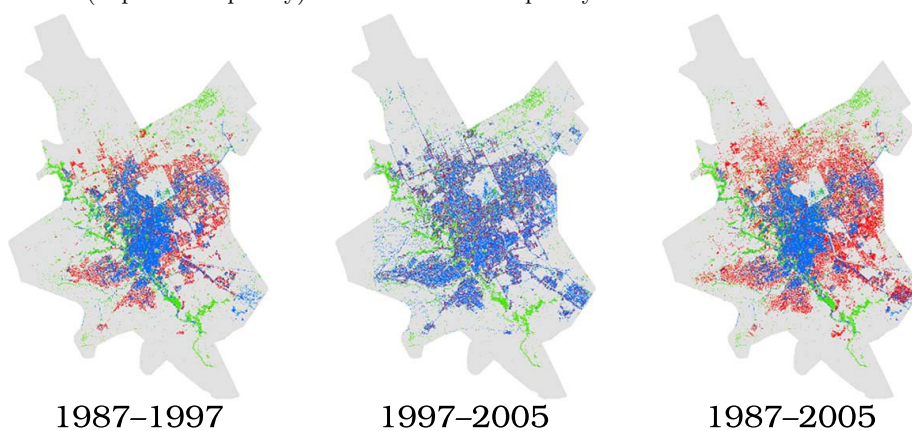
(c) Růst města bržděn řekou

Obrázek 8: (převzato z [?], upraveno) Ukázky chování automatu při různých počátečních konfiguracích. Šedě jsou znázorněny prázdné parcely, červeně zástavba, zeleně hlavní silnice a modře řeky.

{img-VarTransRuls}



(a) Skutečný stav zástavby v uvedeném roce. Červená značí zástavbu, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.



(b) Simulovaný stav zástavby. Modrá značí zástavbu na počátku sledovaného období, červená značí (novou) zástavbu na konci sledovaného období, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.

Obrázek 9: (převzato z [?]) Ukázky simulace městského růstu

{img-UrbGroProSample}



Obrázek 10: Ukázky jednoduchých filtrů. Vlevo původní obrázek, uprostřed obrázek po 5 generacích jednoduchého rozostřovacího filtru a v pravo obrázek po 8 generacích filtru pro zvýraznění tvarů ($\epsilon = 1, 1$).

{img:Filters}

Uvažujme obraz jako mřížku $m \times m$ pixelů s odstíny šedi jako hodnotami od 0 do 1. Hodnota 0 značí černou, hodnota 1 bílou. Jinými slovy, barva (resp. stupeň šedi) pixelu odpovídá stupni pravdivosti tvrzení „pixel má bílou barvu“. Tato skutečnost nám umožňuje pracovat s obrazem pomocí fuzzy logiky.

Každý obraz tak můžeme považovat za konfiguraci buněčného fuzzy automatu s množinou stavů $Q = [0, 1]$. Návrhem vhodné přechodové funkce tak můžeme vytvořit automat, který provádí určitou operaci pro úpravu obrazu. Typickou operací je tzv. obrazový filtr, který obrazu $m \times m$ přiřazuje obraz $m \times m$.

Speciálním případem takového automatu je automat realizující konvoluční metodu [?]. Konvoluce je v základu obrazový filtr, který přiřazuje (novou) hodnotu pixelu na základě váženého součtu (stávající) hodnoty pixelu a hodnot pixelů sousedních. Váhy bývají reprezentovány tzv. konvoluční maticí. Například matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je konvoluční maticí jednoduchého rozostření. Aplikuje se následujícím způsobem:

$$c'_{i,j} = \frac{1}{S} \sum_{k,l \in \{-1,0,+1\}} B_{k+1,l+1} c_{i+k,j+l}$$

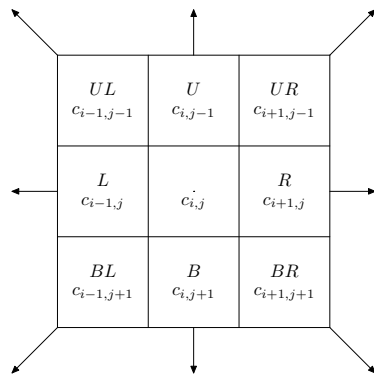
kde S je součet hodnot v matici B , tj. 16.

Další ukázkou grafického filtru pracujícího s využitím buněčného fuzzy automatu je například filtr pro zvýraznění tvarů. Je daný následujícím předpisem

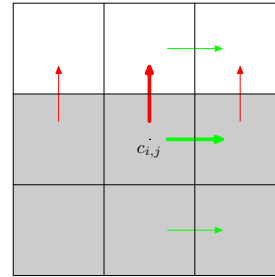
$$c'_{i,j} = \max(0, \min(1, \begin{cases} \epsilon(c_{i,j} + 1) - 1 & \text{pokud } c_{i,j} > \text{neighs}_{i,j} \\ \epsilon c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} < \text{neighs}_{i,j} \\ c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} = \text{neighs}_{i,j} \end{cases}))$$

kde $\epsilon > 1$ je parametr udávající agresivitu zvýrazňování a $\text{neighs}_{i,j}$ je součet hodnot okolních buněk (viz příklad 5.1).

Ukázky aplikací obou filtrů jsou k nalezení na obrázku 10. V následujících podkapitolách budou prezentovány některé další (pokročilejší) techniky zpracování obrazu využívající buněčné fuzzy automaty.



(a) 8 směrů



(b) Ukázka hrany procházející buňkou. Ve směru U (červené šipky) prochází hrana, ve směru R (zelené šipky) neprochází.

$\{\text{sm@Dim@Dimensions@Edges}\}$

5.6 Hledání hran

Hledání hran je jednou ze základních technik zpracování obrazu. Hledání hran je často klíčové pro rozpoznávání vzorů v obrazech. V dnešní době existuje značné množství technik pro rozpoznávání hran [?]. V [?] je popsán poměrně elegantní způsob, jak hledání hran vyřešit pomocí buněčných fuzzy automatů.

Označme osmici směrů dle obrázku 11a. Množinu těchto směrů nazvěme dim . Dále označme c_X (kde $X \in dim$) jako sousední buňku buňky c ve směru X .

Autoři vycházejí z následující úvahy: Prochází-li buňkou c hrana ve směru $X \in dim$, pak má buňka c_X výrazně jinou barvu, než buňka c (viz obrázek 11b). Prochází-li buňkou c hrana v alespoň jednom směru $X \in dim$, pak můžeme říci, že buňka obsahuje hrana.

Nadefinujeme fuzzy relaci „buňky c a c' mají zcela rozdílnou barvu“ předpisem:

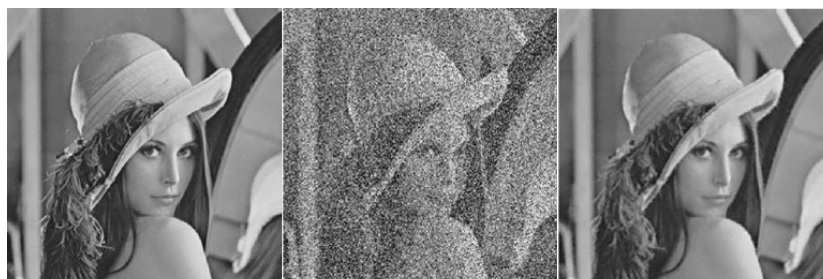
$$\Delta(c, c') = 1 - |c - c'|$$

Označme Δ' jako doplněk k Δ , tedy „buňky c a c' mají zcela shodnou barvu“. Pak můžeme stanovit fuzzy množiny ϵ_X (pro všechny $X \in dim$) ve smyslu „buňkou c prochází hrana ve směru X “. Pro $X = U$ by pravidla vypadala následovně:

- Pokud $\Delta'(c_L, c_{UL})$, $\Delta'(c, c_U)$ a $\Delta'(c_R, c_{UR})$ pak $\epsilon_U(c) = 0$
- Pokud $\Delta(c_L, c_{UL})$, $\Delta(c, c_U)$ a $\Delta(c_R, c_{UR})$ pak $\epsilon_U(c) = 1$

Obdobným způsobem by se dodefinovaly zbývající fuzzy množiny ϵ_X . Následně lze nadefinovat fuzzy množinu ϵ ve smyslu „buňkou c prochází hrana“ pomocí pravidel:

- Pokud $c = \epsilon_U$ pak $\epsilon = 1$
- ...
- Pokud $c = \epsilon_{UR}$ pak $\epsilon = 1$



(a) Vstupní obraz (b) Zashumněný obraz (c) Obraz s odstraněným šumem

Obrázek 12: (převzato z [?]) Ukázka odstraňování šumu

{img:Noises}

- Jinak $\epsilon = 0$

Pomocí těchto pravidel tak lze sestavit buněčný fuzzy automat s fuzzy logikou, který rozpoznává hrany.

Dle [?] může být hodnota stupně „buňkou c prochází hrana“ použita jako parametr α tzv. Gas Diffusion Modelu, jednu z technik zaostřování obrazu.

5.7 Ostraňování šumu

Odstraňování šumu je další častý problém, který je třeba při zpracování obrazů řešit. Pro studium technik odstraňování šumu se používá zashumnění tzv. impulzním šumem popř. šumem „sůl a pepř“. Zashumnění impulzním šumem nahradí stanovený počet pixelů náhodnými barvami. Šumění „sůl a pepř“ pak narazuje pixely buď bílou (1) nebo černou (0) barvou.

V [?] je prezentována jednoduchá avšak efektivní technika, která kombinuje klasický bivalentní buněčný automat s buněčným fuzzy automatem.

V první fázi je klasickým buněčným automatem šum detekován. Buňka obsahuje šum, pokud rozdíl její barvy od průměrné barvy jejích sousedů překračuje stanovenou mez. Tato mez může být stanovena statisticky, například na základě směrodatné odchylky barev pixelů celého obrazu. V druhé fázi je aplikován buněčný fuzzy automat, který buňky obsahující šum nahradí hodnotami spočtenými z jejich okolí.

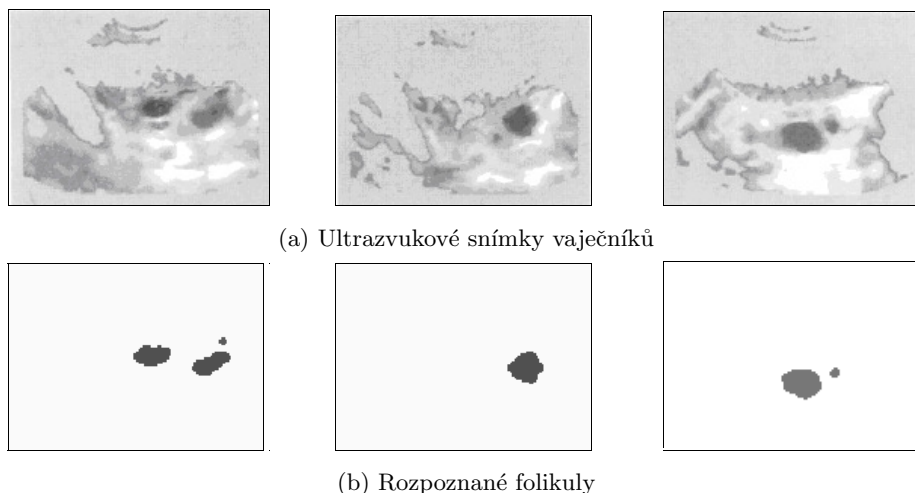
Jak autoři poukazují, tato technika je na odstraňování šumu velmi efektivní. Ukázky výsledků jsou na obrázku 12.

Velmi podobný způsob odstranění šumu je popsán v [?]. Zde však operace detekce šumu a jeho odstranění provádějí v jednom kroku.

5.8 Rozpoznávání jednoduchých vzorů

Rozpoznávání vzorů je další z častých způsobů práce s obrazy. Obecně je problém definován (obdobně, jako rozpoznávání textových vzorů v kapitole (zde bude doplněno: ref na kapitolu)) jako problém určení, zda-li obraz obsahuje předem stanovený vzor či ne. Obvykle nás také zajímá, kde přesně se vzor v obraze vyskytuje.

Rozpoznávání vzorů v obrazech je však značně komplikované i pro buněčné fuzzy automaty. V [?] je popsán způsob, který popisuje rozpoznávání vzorů v



Obrázek 13: (převzato z [?], upraveno) Ukázky rozpoznávání folikul

obrazu velikosti $1 \times m$ pomocí (jednodimenzionálního) buněčného automatu. Pomocí fuzzy množin reprezentující různé stupně šedi jsou sestavena pravidla, která popisují jak vzorový obraz, tak obrazy jemu podobné. Množina přechodových pravidel tak vyjmenovává téměř všechny možné kombinace hodnot fuzzy množin pro všechny buňky v okolí. Velikost přechodové funkce je tak exponenciální vzhledem k velikosti okolí buňky. Vzhledem k tomu, že okolí buňky je vlastně předpisem pro vzor, je tato technika nepoužitelná pro vzory větší než jednotky pixelů.

Zcela jiný přístup používají v [?]. Vzor nepovažují jako konkrétní kombinaci odstínů barev, ale jako část obrazu splňující určité vlastnosti.

Autoři metodu doporučují na vyhledávání vzorů v lékařských snímcích (např. ultrazvuk, Röntgen). Techniku demonstrují na ultrazvukových snímcích vaječníků. Poukazují na to, že folikula⁷ je na snímku tvořena jednodlitou svrnou stejné barvy, obklopena ostatní tkání (barevné přechody). Ukázka několika snímků je k dispozici na obrázku 13a. Obecně tak lze hovořit o „popředí“ (folikula) vystupující z „pozadí“.

K nalezení popředí používají dvojici buněčných fuzzy automatů. První automat určuje hodnotu „buňka je kandidát na buňku folikuly“. Druhý automat pak buňky, které nebyly označeny jako kandidáti, ostraňuje (nastavuje na 0).

Přechodová funkce prvního automatu je poměrně složitá, pracuje s 5 stupni šedi a třemi stupni kandidatury, takže zde nebude rozebírána. Druhý automat pak funguje elementárně. Buňky, jež nejsou označeny jako dostatečné kandidáty na folikuly, jsou odstraněny, ostatní ponechány.

Na obrázku 13 jsou k nahlédnutí ukázky rozpoznávaných folikul pomocí této techniky.

⁷Folikula je dutinka ve vaječníku, v níž probíhá zrání vajíčka. (zde bude doplněno: citovat: <http://lekarske.slovniky.cz/pojem/folikul>)

6 Konkrétní příklady

6.1 Rozpoznávání ručně psaného textu

...

6.2 Detekce překlepů

[6] až na konci, Fuzzy Aho-Corasick algorithm (popř. dohledat jiný zdroj).

Reference

- 1110 [1] Radim Bělohlávek. *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*. Kluwer, New York, 2002.
- [2] Roger White Conrad Power, Alvin Simms. Hierarchical fuzzy pattern matching for the regional comparison of land use maps. *International Journal of Geographical Information Science*, 2010.
- [3] Prof. Sagar A. More Dhiraj Kumar Patel. Edge detection technique by fuzzy logic and cellular learning automata using fuzzy image processing. *International Conference on Computer Communication and Informatics*, 2013.
- 1120 [4] H. A. Girijamma Dr. V. Ramaswamy. Conversion of finite automata to fuzzy automata for string comparison. *International Journal of Computer Applications*, 2012.
- [5] J. J. Astrain; J. R. Garitagoitia; J. R. Gonzalez De Mendivil; J. Villadan-gos; F. Farina. Approximate string matching using deformed fuzzy automata: A learning experience. *Springer Science & Business Media*, 2004.
- [6] Abdulwahed Almarimi Gabriela Andrejková and Asmaa Mahmoud. Approximate pattern matching using fuzzy logic. *CEUR Workshop Proceedings*, 2003.
- 1130 [7] S.S. Yau G.F. DePalma. Fractionally fuzzy grammars with application to pattern recognition. *US–Japan Seminar on Fuzzy Sets and their Applications*, 1974. článek jako e-book: <http://bit.ly/2cumxjz>, výcuc v MorMal-FuzzAutAndLangs 10.7.
- [8] Kou-Yuan Huang. *Syntactic Pattern Recognition for Seismic Oil Exploration*. World Scientific, 2002.
- [9] J.R. Garitagoitia J. Astrain, J.R. González de Mendivil. Fuzzy automata with ϵ -moves compute fuzzy measures between strings. *Fuzzy Sets and Systems 157*, 2005.
- [10] José R. Garitagoitia Carlos F. Alastrueya Javier Echanobe, José R. Gonzáles Mendivil.
- 1140 [11] José R. Garitagoitia José R. González de Mendivil. Fuzzy languages with infinite range accepted by fuzzy automata: Pumping lemma and determination procedure. *Fuzzy sets and Systems*, 2014.
- [12] Thomas Hatzichristos Lefteris A. Mantelas and Poulicos Prastacos. A fuzzy cellular automata modeling approach – accessing urban growth dynamics in linguistic terms. *Computational Science and Its Applications*, 2010.
- [13] S. C. Kremer M. Doostfateme. New directions in fuzzy automata. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2004.
- [14] M. M. ZAHEDI S. MOGHARI and R. AMERI. New direction in fuzzy tree automata. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2011.

- [15] Mukta N. Joshi S. R. Chaudhari. A note on fuzzy tree automata. *International Journal of Computer Applications*, 2012.
- 1150 [16] Miroslav Stamenkovic, Aleksandar; Ciric. Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012.
- [17] Witold Pedrycz Yongming Li. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005.