Aplikace fuzzy a pravděpodobnostních automatů

Martin Jašek

12. září 2016 — ??

Obsah

1 Úvodní pojmy

V této kapitole budou popsány základní koncepty a pojmy, bez kterých nebude možno se studiu fuzzy automatů věnovat. Bude zde tedy představen koncept fuzzy množin a základní pojmy z teorie automatů.

1.1 Fuzzy teorie

(zde bude doplněno: Zde se důkladně rozepsat o motivaci a konceptech.) (zde bude doplněno: ZDE dát všechny ty příklady na „je teplo“, „je mladý“ a podob. !)

Fuzzy množiny a relace budou po vzoru [12] nejčastěji malými řeckými písmeny (obdobně jako jejich členské (angl. „membership“) funkce). Množinu všech fuzzy podmnožin množiny S budeme značit $\mathcal{F}(S)$.

1.2 Abecedy, řetězce, jazyky

Definice a značení následujících pojmů jsou převzaty z [**?**].

Abeceda

Základním pojmem při studiu automatů je abeceda. Abeceda je neprázdná a konečná množina symbolů a značí se Σ, případně jiným velkým písmenem řecké abecedy. Abecedou může být například „všechna malá písmena latinky“, nebo např. číslice 0 – 9.

Řetezec

Posloupnost $u = a_1 a_2 \dots a_n$ kde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \Sigma$ se nazývá řetězec u nad abecedou Σ. Číslo n je pak délka řetězce u, která se jinak značí $|u|$. Řetězec, který má nulovou délku, značíme ε.

Řetězec $u \circ v = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$ (častěji však uv) se nazývá zřetězení (konkatenace) řetězců $u = a_1 \dots a_n$ a $v = b_1 \dots b_m$. Přirozeně platí $|uv| = n + m$. Jako n-tá mocnina u^n řetězce u se označuje řetezec:

$$u^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{pokud } n = 0 \\ uu^{n-1} & \text{jinak} \end{cases}$$

Symbolem Σ^* se značí množina všech řetězců nad abecedou Σ (včetně ε). Symbol Σ^+ pak značí všechny řetězce nad abecedou Σ vyjma ε.

1.3 Jazyky

Pojmem (formální) jazyk se označuje určitá vybraná množina L řetězců nad abecedou Σ, tj. $L \subseteq \Sigma^*$.

Bivalentní jazyk

Nad jazyky L, L_1 a L_2 nad abecedami Σ, Σ_1 a Σ_2 se zavádí:

$$L_1 L_2 = \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\} \quad \text{zřetězení (produkt)}$$

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{pokud } n = 0 \\ LL^{n-1} & \text{jinak} \end{cases} \quad n\text{-tá mocnina}$$

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \quad \text{Kleeneho uzávěr}$$

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i \quad \text{pozitivní uzávěr}$$

Je-li jazyk konečná množina, tj, obsahuje konečně mnoho řetězců, nazýváme jej konečný. V opačném případě říkáme, že je jazyk nekonečný.

Fuzzy jazyk

(zde bude doplněno: Doplnit) *(zde bude doplněno: Fuzzy jazyk by měl přijít až po zavedení fuzzy teorie. Je to ok?)*

1.4 Ostatní důležité pojmy

Nedeterministickýfuzzy automat s ϵ přechody

{def-NedFuzzAutEpsPre}

Definice 1.1 (Nedeterministický fuzzy automat s ϵ přechody)**.** *(zde bude doplněno: dohledat přesně, zkontrolovat a ozdrojovat)* *Nedeterministický fuzzy automat A je pětice $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, μ je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times Q \to [0, 1]$) a σ a η jsou po řadě fuzzy množiny nad Q počátačních, resp. koncových stavů.*

(zde bude doplněno: Tady by asi bylo vhodné rozebrat ϵ-uzávěry)

Reprezentace fuzzy automatu

(zde bude doplněno: dohledat zdroje)

(zde bude doplněno: Značení fuzzy množiny $\sigma = \{x/0.5\}$ vs. $\sigma(x) = 0.5$)

Přechodový diagram: Notace s lomítky např. zde: [13].

Tabulka: stav × symbol nebo stav × stav [14]?

Konstrukce fuzzy automatu z konečného automatu

V praxi se často setkáme z problémem, kdy máme k dispozici konečný bivalentní automat avšak my potřebujeme pro naši práci fuzzy automat. Je tedy třeba zkonstruovat takový fuzzy automat, který rozpoznává odpovídající jazyk odpovídající jazyku rozpoznávaném naším bivalentním automatem.

Důležité je zmínit, že nelze zkonstruovat fuzzy automat, rozpoznávající stejný jazyk neboť fuzzy automat rozpoznává fuzzy jazyk, zatímco bivaletní automat klasický „bivalentní“ jazyk. Můžeme však sestavit automat takový, který přijímá řetězce ve stupni 0 nebo 1 podle toho, jestli je přijímal bivaletní automat.

Formálně řečeno, pro konečný (nedeterministický) bivalentní automat A budeme konstruovat nedeterministický fuzzy automat A' takový, že bude pro všechna $x \in \Sigma^*$ splněna následující rovnost:

$$\mathcal{L}(A')(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \omega \in \mathcal{L}(A) \\ 0 & \text{pokud } \omega \notin \mathcal{L}(A) \end{cases}$$

Poznámka 1.1. *Postup budeme provádět pro nedeterministické automaty. To jednak proto, že nedeterministické automaty jsou obecnější, než deterministické, a navíc, protože jsou v praxi využívány častěji. (zde bude doplněno: ozdrojovat, klidně někde, kde rozebírám determinizmus vs. nedeterminizmus)*

Nyní se podíváme na to, jak výsledný fuzzy automat bude vypadat. Abeceda i množina stavů automatu zůstanou zachovány, lišit se tedy bude pouze množina počátečních a koncových stavů a přechodová funkce. *(zde bude doplněno: fuzzy subset I, F a δ? nebo tak něco, z teorie fuzzy množin?)*

{def-FuzzAutBivAut}

Definice 1.2 (Fuzzy automat bivalentního automatu)**.** *Mějme řetězec konečný nedeterministický automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$. Pak nedetermintistický fuzzy automat přijímající korespondující jazyk je automat $A' = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ kde pro všechna $q_i, q_j \in Q$ a $x \in \Sigma$:*

- $\sigma(q_i) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } q_i \in I \\ 0 & \textit{pokud } q_i \notin I \end{cases}$
- $\eta(q_i) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } q_i \in F \\ 0 & \textit{pokud } q_i \notin F \end{cases}$
- $\mu(q_i, x, q_j) = \begin{cases} 1 & \textit{pokud } q_j \in \delta(q_i, x) \\ 0 & \textit{pokud } q_j \notin \delta(q_i, x) \end{cases}$

(zde bude doplněno: rozebrat, jestli tento automat skutečně dělá to, co má? Asi by to chtělo)

(zde bude doplněno: vymyslet nějaký fakt pěkný příklad)

1.4.1 If-Then pravidla

V mnoha aplikacích se setkáme se situací, kdy budeme potřebovat popsat určitou funkčnost či chování systému „lidským“ způsobem. Velmi častým způsobem, jak toho dosáhnout je s pomocí tzv. If-Then pravidel. Popis If-Then pravidel byl převzat z [**?**].

If-Then pravidlo je výrok je tvaru:

$$\text{Jestliže } x_1, \ldots, x_n, \text{ pak } y$$

kde $x_1, \ldots x_n, y$ jsou podvýroky. Za předpokladu, že jazyk (a později i struktura pro tento jazyk) jsou nám známy z kontextu, můžeme tento výrok zapsat jako formuli[1]:

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \Rightarrow y$$

[1] Formule If-Then pravidel jsou vlastně Hornovské klauzule. Práce s If-Then pravidly se tak podobá logickému programování.

Příklad 1.1. *Následující výroky jsou If-Then pravidla:*

- *Jestliže je spínač sepnut, pak žárovka svítí*
- *Jestliže je věk*$(p) < 15$*, pak p je dítě*
- *Je-li* $x \in \mathbb{N}$*,* $x > 2$*,* $\nexists y < x : y|x$*, pak x je prvočíslo*

Určení pravdivosti pravidla, tedy jestli je y pravdivý nebo nepravdivý, se pak provede standardně, tj. určení pravdivosti formule pravidla ve struktuře. Pokud máme If-Then pravidel více, stačí, aby bylo pravdivé jen jedno z nich.

S fuzzy If-Then pravidly se obvykle pracuje mírně složitěji. Pravidla, tj. výroky se typicky uvádejí v mírně pozměněném tvaru, a to:

$$\text{Jestliže } x_1 \text{ je } X_1, \ldots, x_n \text{ je } X_n, \text{ pak } y \text{ je } Y$$

případně

$$\text{Jestliže } x_1 = X_1, \ldots, x_n = X_n, \text{ pak } y = Y$$

Symboly $x_1, \ldots, x_n, y$ označují termy a symboly $X_1, \ldots, X_n, Y$ fuzzy množiny nad množinami těchto termů. Značení $x = X$ je ekvivalent zápisu $X(x)$, tj. „x je v množině X ve stupni $X(x)$“. Zapsáno jako formule tedy:

$$X_1(x_1) \wedge \cdots \wedge X_n(x_n) \Rightarrow Y(y)$$

U fuzzy If-Then pravidel nemá smysl uvažovat jejich pravdivost jako takovou. Jejím výsledkem je totiž fuzzy množina.

Příklad 1.2. *Uvažujme systém, u kterého známe tlak a teplotu a popisujeme úroveň otevření ventilu. Označme* p_L*,* p_N*,* p_H *jako fuzzy množiny „tlak je nízký“, „tlak je normální“, „tlak je vysoký“ a dále* t_N*,* t_H *jako „teplota je v normě“ a „teplota je zvýšená“. Dále zaveďme fuzzy množiny* v_C *a* v_O *jako „ventil je uzavřen“ a „ventil je otevřen“.*

Pak pravidla

Pokud je tlak nízký a teplota zvýšená, pak ventil je uzavřen
Pokud je tlak vysoký a teplota v normě, pak ventil je otevřen

budou zapsána jako formule

$$p_L(p) \wedge t_H(t) \Rightarrow v_C(v)$$
$$p_H(p) \wedge t_N(t) \Rightarrow v_O(v)$$

Poznámka 1.2. *Pokud máme fuzzy If-Then pravidel více, pak je spojujeme disjunkcí.*

1.5 Další pojmy z úvodu do teorie automatů

1.5.1 Gramatiky

Gramatiky (přesněji „formální gramatiky“) jsou nástroje pro popis jazyků. Gramatika určuje, jakým způsobem lze jazyk vygenerovat. Následující pojmy jsou převzaty z [**?**].

Gramatika

Definice 1.3 (Formální gramatika)**.** *Jako formální gramatiku označujeme čtveřici* (N, T, P, S)*, kde*

1. N *je abeceda tzv. neterminálních symbolů*
2. T *je abeceda tzv. terminálních symbolů* ($T \cap N = \emptyset$)
3. P *je množina přechodových pravidel, kde každé pravidlo je ve tvaru* $x \to y$*,* $x, y \in (N \cup T)^*$ *a* x *obsahuje alespoň jeden neterminál*
4. S *je počáteční neterminál* ($S \in N$)

Mějme gramatiku $G = (N, T, P, S)$ takovou, že $X \in N$, $y \in T$ a $X \to y \in P$. Pak pro libovolné $u, v \in (N \cup T)^*$ o řetězci uyv říkáme, že vznikl přímým odvozením z řetězce uXv (píšeme $uXv \Rightarrow uyv$). Posloupnost $w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n$ řetězců $w_1, \ldots, w_n \in (N \cup T)^*$ zapisujeme $w_1 \Rightarrow^* w_n$ a nazýváme derivace.

Jako jazyk generovaný gramatikou G značíme následující množinu:

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow^* w\}$$

Příklad 1.3. *Mějme gramatiku* $G = (N, T, P, S)$*, kde* $N = \{M\}$*,* $T = \{a, b\}$*,* $P = \{\ S \to aM,\ M \to Sb,\ M \to b\ \}$*. Pak platí* $S \Rightarrow aM \Rightarrow aSb \Rightarrow aaMb \Rightarrow aabb$ *a* $L(G) = \{a^n b^n | n \geq 1\}$*.*

Regulérní gramatika

Regulérní gramatika je speciálním případem gramatiky. Tento typ gramatiky má zásadní vliv pro studium automatů.

Definice 1.4 (Regulérní gramatika)**.** *Gramatika* $G = (N, T, P, S)$ *se nazývá regulérní, pokud každé z jejich pravidel je ve tvaru* $X \Rightarrow aY$ *nebo* $X \Rightarrow a$*, kde* $X, Y \in N$ *a* $a \in T$ *a dále platí, že* S *se nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla.*

Jazyk generovaný regulérní gramatikou se nazývá regulérní jazyk.

Příklad 1.4. *Regulérní gramatikou je například gramatika* $G = (N, T, P, S)$*, kde* $N = \{R\}$*,* $T = \{a, b\}$*,* $P = \{\ S \to aR,\ R \to aR,\ R \to bR,\ R \to a\ \}$*.*

Regulérní gramatiky (a jim opdovídající jazyky) mají spoustu zajímavých vlastností. Uvedeme zde pouze jednu důležitou vlastnost.

{the:FinRegLang}

Věta 1.1. *Každý konečný jazyk* L *je regulérním jazykem.*

Důkaz. Má-li být jazyk L regulérním pak pro něj musí existovat gramatika G, která jej generuje. Podrobnější důkaz lze najít v literatuře. □

2 Definice fuzzy automatu

V této kapitole bude podrobně popsán a formálně nadefinován „fuzzy automat“ a proces jeho výpočtu. Pro snažší ilustraci bude nejdříve popsán automat bivalentní a následně upraven do podoby fuzzy automatu. Popis bivalentního

automatu je převzat z [**?**], popis fuzzy automatu z [13] (pokud není uvedeno jinak).

Hned na úvod je třeba zdůraznit terminologii. Jak bývá u automatů zvykem, pojem „automat“ označuje souhrnně různé varianty automatů, typicky nedeterministický i deterministický, bez dalšího rozlišování. Vzhledem k tomu, že základním (a nejpoužívanějším) fuzzy automatem je automat nedeterministický, bude proto druhá polovina této kapitoly věnována právě nedeterministickému fuzzy automatu. Zbývající známé varianty fuzzy automatů budou poté shrnuty v následujcí kapitole.

(zde bude doplněno: někde tady zdůraznit konečné automaty?)

2.1 Koncept automatu

Automat se řadí mezi tzv. výpočetní modely. Výpočetní model je označení pro matematický formalizmus, který popisuje určitý výpočet, algoritmus. Spolu s automaty (ve všech jejich variantách a modifikacích) se k výpočetním modelům řadí například také Turingovy stroje [**?**].

Automaty také často bývají nazývany jako stavové stroje. Na automat lze totiž nahlížet jako na určité zařízení. Toto zařízení je charakterizováno svým vnitřním stavem a v závislosti na vstupu se tento stav diskrétně mění, tj. můžeme tvrdit, že automat přecháházízí od jednoho stavu k jinému.

Důležité je také dělení automatů na deterministické a nedeterministické. Obecná definice říká, že u deterministického automatu je jednoznačně dáno, do kterého stavu v každý moment výpočtu automat přejde. Naopak u nedeterminstického tento předpoklad neplatí, tj. výpočet automatu se může octnout v situaci, kdy má možnost přejít do dvou a více stavů „současně“.

Tuto situaci budeme u nedeterministických automatů reprezentovat tak, že automat se nebude nacházet vždy v jednom stavu, ale jeho aktuální stav bude popsán celou množinou stavů, ve kterých se nachází.

Automat tedy musí zcela určitě obsahovat stavy, ve kterých se při svém výpočtu může nacházet. Spolu s nimi je každý automat dán vstupy, se kterými dokáže pracovat. Vstupy pro automat budou řetězce nad nějakou danou abecedou. O popis přechodů mezi stavy se bude starat přechodová funkce.

Dále, u každého automatu musí být stanoven počáteční stav. Vzhledem k tomu, že se budeme bavit o automatu nedeterministickém, budeme uvažovat množinu počátečních stavů.

Automaty původně vznikly jako nástroje pro rozpoznávání určité třídy jazyků[2]. To znamená, že automat musí pro libovoný řetězec, zda-li do uvedeného jazyka patří nebo ne. U automatů je toto řešeno pomocí tzv. koncových stavů. Pokud výpočet automatu zkončí v koncovém stavu, pak je řetězec automatem zpracovávaný přijat, v opačném případě zamítnut.

Nyní máme známu obecnou představu, jak by měl automat vypadat. Následuje tedy definice nedeterministického bivalentního automatu, spolu se stručným popisem jeho činnosti. Následně je pak odvozena definice nedeterministického fuzzy automatu a jeho výpočtu.

(zde bude doplněno: potenční množina – bivalentní značím 2^M, fuzzy $\mathcal{F}(M)$, nechtělo by to sjednotit a používat taky $P(M)$, resp. $\mathcal{P}(M)$?)

[2]Konkrétně, jedná se o tzv. regulérní jazyky, které budou popsány v kapitole *(zde bude doplněno: doplnit odkaz)*

2.2 Nedeterminstický bivalentní automat

Nedeterministický bivalentní automat je definován následovně:

{def-NedBivAut}

Definice 2.1 (Nedeterministický bivalentní automat)**.** *Nedeterministický bivalentní automat A je pětice (Q, Σ, μ, I, F), kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, $\mu : Q \times \Sigma \to 2^Q$ je přechodová funkce a $I \subseteq Q$ a $F \subseteq Q$ je množina počátačních a koncových stavů.*

(zde bude doplněno: reprezentace? příklad?)

Výpočet automatu, tedy zpracování vstupního řetězce, je definován jako posloupnost konfigurací. Konfigurace je přesný popis aktuálního stavu výpočtu (tzn. nezpracovaná část vstupního řetězce a množina stavů, ve kterých se automat nachází). Na počátku se výpočet nachází v tzv. počáteční konfiguraci, tj. nezpracovanou částí celého řetězce je celý vstupní řetězec a množinou stavů, ve kterých se automat nachází je celá množina I.

Automat čte ze vstupu postupně symboly. Pokud se automat nachází ve stavu q a právě přečteným symbolem je symbol a, pak automat přechází do stavu q' (a symbol a je ze vstupu odebrán) pokud $q' \in \mu(q, a)$. Vyprázdní-li takto automat celý vstup (na vstupu je prázdný řetězec), ocitá se v tzv. koncové konfiguraci. Pokud alespoň jeden ze stavů, ve kterém se automat nachází, je koncový, nazývá se tato konfigurace přijímací, v opačném případě zamítací.

Pokud výpočet automatu pro řetězec w zkončí přijímací konfigurací, říkáme, že automat řetězec přijímá. Pokud zkončí zamítací konfigurací, pak říkáme, že je řetězec zamítán. Jazyk rozpoznávaný automatem je pak množina takových řetězců $w \in \Sigma^*$, které automat přijímá.

Ekvivalentním způsobem, jak určit, zda-li je řetězec automatem přijímán či zamítán je pomocí rozšířené přechodové funkce $\mu^* : 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q$. Rozšířenou přechodovou funkci μ^* tak lze číst „nachází-li se automat v množině stavů Q' a na vstupu je řetězec w, pak automat přejde do množiny stavů $\mu^*(Q'', w)$“. *(zde bude doplněno: uvést její předpis?)*

Následuje popis, jak pojmy týkající se nedeterministického bivalentního automatu „zobecnit“ na odpovídající pojmy z oblasti fuzzy automatů.

2.3 Nedeterministický fuzzy automat

Stejně tak, jak fuzzy množiny jsou zobecněním klasických „bivalentních“ množin, dá se předpokládat, že i fuzzy automaty budou v určitém smyslu zobecněním klasických bivalentních automatů. A nebude tomu jinak ani u nedeterministického automatu.

Vzhledem k tomu, že automat je definován jako struktura, je zprvu třeba stanovit, které její části má smysl zobecňovat na fuzzy množiny (relace, funkce). Abeceda symbolů i množina stavů zcela určitě můsí zůstat zachovány jako konečné bivalentní množiny. U přechodové funkce naopak očekáváme ostupňovanost (očekáváme možnost říkat „automat přejde do stavu q ve stupni d“). Co se počátečních a koncových stavů týče, někde se lze setkat s reprezentací bivalentní množinou (např. v. [8], [**?**]), jinde zase s fuzzy množinami ([18], [7], [**?**] [13])[3]. Vzhledem k tomu, že druhý jmenovaný, tj. automat s fuzzy množinou

[3] Jak bude ukázáno, mezi oběma druhy automatů existuje ekvivalence. Automaty s bivalentními počátečními a koncovými stavy se však jednoduššeji reprezentují.

vstupních i výstupních stavů, je zřejmě obecnější, bude nadále uvažován pouze tento.

{def-ZaklDefNedFuzzAut}

Definice 2.2 (Nedeterministický fuzzy automat)**.** *Nedeterministický fuzzy automat A je pětice $(Q, \Sigma, \mu, \sigma, \eta)$, kde Q je konečná množina stavů, Σ je abeceda, μ je fuzzy přechodová funkce (fuzzy relace $Q \times \Sigma \times Q \to [0,1]$) a σ a η jsou po řadě fuzzy množiny nad Q počátačních, resp. koncových stavů.*

2.4 Reprezentace nedeterministického fuzzy automatu

Nedeterministické fuzzy automaty se typicky reprezentují třemi způsoby. Prvním z nich je přechodová tabulka (např. [14]).

Jedná se o tabulku, která v řádcích obsahuje aktuální stavy a ve sloupcích následující stavy (tím je dána množina stavů). Poté buňka na řádku q a ve sloupci q' obsahuje $\mu(q, q') \in \Sigma \to [0,1]$, tj. výčet symbolů a stupňů pravdivosti těchto přechodů. Dále tabulka obsahuje dva dodatečné sloupce pro určení stupně počátečního a koncového stavu každého stavu.

Tabulka však často může být rozsáhlá, proto se reprezentace tabulkou často nahrazuje maticovým způsobem (např. [**?**], [18]). Uvažujme označení stavů $Q = \{q_0, \dots q_n\}$. Dále, přechodovou funkci μ rozložme na soubor funkcí μ_x pro všechny $x \in \Sigma$ takové, že $\mu_x(q, q') = \mu(q, x, q')$. Pro každý symbol $x \in \Sigma$ vytvoříme matici tak, že na i-tém řádku a j-tém sloupci obsahuje hodnotu $\mu(q_i, x, q_j)$. Dále je přiložen vektor počátečních (koncových) stavů takový, že i-tá složka vektoru je rovna hodnotě $\sigma(q_i)$ $(eta(q_i)$.

Posledním používaným způsobem je grafická reprezentace (např. [14], [13], [18]). Jedná se o orientovaný ohodnocený graf, kde:

- stavy automatu tvoří uzly grafu
- každý uzel stavu q je označen $q/\eta(q)$
- hrana od uzlu q k uzlu q' je ohodnocena seznamem takových x/d, pro které platí $\mu(q, x, q') = d$
- každý uzel q je označen šipkou vedoucí k tomuto uzlu ohodnocenou hodnotou $\sigma(q)$

Pokud je některý ze stupňů roven 0, tak se v grafu zpravidla vynechává.

Příklad 2.1. *(zde bude doplněno: vymyslet příklad)*

2.5 Výpočet nedeterministického fuzzy automatu

Výpočet nedeterminsitického fuzzy automatu vychází z výpočtu nedeterministického bivalentního automatu. U bivalentního automatu jsme uvažovali, že automat se může nacházet ve více stavech současně, tj. součástí konfigurace výpočtu je množina stavů, ve kterých se automat nachází. Nedeterministický fuzzy automat se této koncepce drží, jen ji obohacuje o odstupňovanost. Tedy, že množina stavů, ve kterých se automat může nacházet je fuzzy množinou. Tutu množinu budeme nazývat fuzzy stav.

{def-FuzzStav}

Definice 2.3 (Fuzzy stav)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A. Pak jako fuzzy stav označujeme každou fuzzy podmnožinu jeho stavů, tj. $\widehat{Q} \in \mathcal{F}(Q)$.*

Poznámka 2.1. *Fuzzy množiny počátečních a koncových stavů jsou ve své podstatě také fuzzy stavy.*

Obdobně jako u bivalentního automatu, nezpracovaná část řetězce na vstupu spolu s (fuzzy) množinou stavů, ve kterých se automat nachází, označujeme jako konfigurace automatu. Posloupnost konfigurací nazýváme výpočtem. Formální definice výpočtu je však mírně složitější a pro jeho zavedení bude potřeba pár dalších pojmů, které budou nyní uvedeny.

Definice 2.4 (Konfigurace nedeterministického fuzzy automatu)**.** *Mějme nedeterminsitický fuzzy automat A. Pak každý prvek $(w, \widehat{Q})$ relace $\Sigma^* \times \mathcal{F}(Q)$ nazýváme konfigurace automatu A.*

Definice 2.5 (Aplikace fuzzy relace na fuzzy stav (tzv. t-kompozice))**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A a fuzzy stav $\widehat{Q}$. Pak aplikací binární fuzzy relace $R : Q \times Q \to [0,1]$ na fuzzy stav $\widehat{Q}$ obdržíme fuzzy symbol $\widehat{Q} \circ R$ splňující pro každé $p \in Q$: $(\widehat{Q} \circ R)(p) = \max_{q \in Q}(\widehat{Q}(q) \otimes R(q,p))$.*

(zde bude doplněno: přesunout do některé z úvodních kapitol?) (zde bude doplněno: t-kompozice má pár dalších zajímavých (a potřebných) vlastností (např. asociativitu))

Značení. *Označme $\mu[x](p,q) = \mu(p,x,q)$.*

{def-PreFunFuzzStav}

Definice 2.6 (Přechodová funkce fuzzy stavů)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A. Pak přechodová funkce fuzzy stavů je fuzzy relace $\widehat{\mu} : \mathcal{F}(F) \times \Sigma \to \mathcal{F}(F)$ taková, že pro každý fuzzy stav $\widehat{Q} \in \mathcal{F}(Q)$ a symbol $x \in \Sigma$ je $\widehat{\mu}(\widehat{Q}, x) = \widehat{Q} \circ \mu[x]$.*

Definice 2.7 (Výpočet nedeterministického fuzzy automatu)**.** *Mějme nedeterminsitický fuzzy automat A. Každou posloupnost konfigurací $(w_0, \widehat{Q}_0), \ldots, (w_m, \widehat{Q}_m)$ splňující pro každé $0 \leq i < m$*

1. *$w_i = a w_{i+1}$ kde $a \in \Sigma$*
2. *$\widehat{Q}_{i+1} = \widehat{Q}_i \circ \widehat{\mu}(\widehat{Q}_i, a)$*

nazýváme výpočet automatu A z fuzzy stavu $\widehat{Q}_0$ při vstupu w_0.

Vidíme, že výpočet je definován rekurentně. Zápis můžeme přetransformovat do podoby rozšířené přechodové funkce [**?**].

{def-RozPreFunFuzzStav}

Definice 2.8 (Rozšířená přechodová funkce)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A. Pak rozšířená přechodová funkce je fuzzy relace $\mu^* : Q \times \Sigma^* \times Q \to [0,1]$ daná následujícím předpisem:*

1. *$\mu^*(q, \epsilon, q) = 1$ pro všechna $q \in Q$*
2. *$\mu^*(q, ua, q') = \bigvee_{p \in Q} \mu^*(q, u, p) \otimes \mu(p, a, q')$ pro všechna $q, q' \in Q, u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$*

Rozšířená přechodová funkce fuzzy stavů zřejmě plní funkci výpočtu automatu. Výraz $\mu^*(q, w, q')$ odpovídá stupni, v jakém automat přejde při zpracování řetězce w ze stavu q do stavu q'.

Stupeň $A(w)$, v jakém je řetězec w automatem A přijat je dán jako nejvyšší stupeň pro všechny dvojice stavů p, q:

1. stupňem „stav q je počáteční ve stupni $\sigma(q)$“
2. stupňem „automat při vstupu w přejde ze stavu q do stavu q' ve stupni $\mu^*(q, w, q')$“
3. stupňem „stav q' je koncový ve stupni $\eta(q')$“

Můžeme tedy zapsat:

{def-RetPriAut}

Definice 2.9 (Řetězec přijímaný automatem)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A. Pak řětězec $w \in \Sigma^*$ je automatem A přijat ve stupni*

$$A(w) = \max_{q,q' \in Q} (\sigma(q) \otimes \mu^*(q, w, q')(q) \otimes \eta(q')) \qquad (1)$$ {eq-RetPriAut}

Poznámka 2.2. *V literatuře (např. [?] [?] [?]) se obvykle lze setkat s „techničtějším“ zápisem ať už jen rozšířené přechodové funkce, tak $A(w)$. Pro řetězec $w = a_0 \dots a_n$ rozvojem rekurence μ^* a použitím asociativity $\circ$ můžeme napsat:*

$$\begin{aligned}
\mu^*(q, a_0 \dots a_n, q') &= \bigvee_{p_n \in Q} \left(\cdots \bigvee_{p_0 \in Q} (1 \otimes \mu(p_0, a_0, p_1)) \cdots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \right) \\
&= \bigvee_{p_n \in Q} \cdots \bigvee_{p_0 \in Q} \mu(p_0, a_0, p_1) \cdots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \\
&= \bigvee_{(p_n, \dots, p_0) \in Q^n} \mu(p_0, a_0, p_1) \cdots \otimes \mu(p_n, a_n, q')
\end{aligned}$$

Poté může být (1) zapsána jako:

$$A(a_0 \dots a_n) = \bigvee_{(p_n, \dots, p_0, q') \in Q^{n+1}} (\sigma(p_0) \otimes \mu(p_0, a_0, p_1) \cdots \otimes \mu(p_n, a_n, q') \otimes \eta(q'))$$

Tento zápis intuitivněji popsuje výpočet automatu. Tento zápis totiž můžeme číst jako: „Řetězec je přijímán ve stupni $A(a_0 \dots a_n)$ jestliže ze stavu p_0, který je počáteční ve stupni $\sigma(p_0)$ přejde přečtením a_0 do p_1 ve stupni $\mu(p_0, a_0, p_1)$, …, ze stavu p_n přečtením a_n do stavu q' ve stupni $\mu(p_n, a_n, q')$, a stav q' je koncový ve stavu $\eta(q')$.“

Z tohoto zápisu je také patrné, že výpočet $A(a_0 \dots a_n)$ dle definice vyžaduje $|Q|^{n+1}$ výpočtů, každý o délce $1 + n + 1$ elementárních kroků. Výpočet má tedy exponenciální složitost vzhledem k délce vstupního řetězce.

Podobně, jak u bivalentních automatů, jazyk rozpoznávaný automatem je množina všech řetězců, které jsou tímto automatem rozpoznávané. U fuzzy automatu se však bude pochopitelně jednat o fuzzy jazyk.

{def-JazRozpAut}

Definice 2.10 (Jazyk rozpoznávaný automatem)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat A. Pak fuzzy množinu $L(A)(w) = A(w)$ nad univerzem Σ^* nazýváme fuzzy jazyk rozpoznávaný automatem A.*

(zde bude doplněno: Jazyk rozpoznávaný automatem značit $\mathcal{L}$ nebo jen L? A automat $\mathcal{A}$, $\mathbf{A}$, $\mathbb{A}$ nebo jen A?)

3 Další varianty fuzzy automatů

3.1 Zobecněný automat

Např. [14], v [**?**].

3.2 Fuzzy automat s výstupem

Např. zde: [1]. Zde [**?**][**?**][**?**][**?**] je bez koncových *(zde bude doplněno: i „a počátečních“?)* stavů.

Naopak, zde [**?**] je uveden automat „bez výstupu“ (nemá žádný výstup – ani formou koncových stavů ani formou výstpní funkce/abecedy).

3.3 Nedeterminstický fuzzy automat s ϵ-přehcody

Je docela praktický a současně docela intuitivní. Např. zde: [**?**]. V [**?**] ho definují jako automat shodný s A jen místo Σ má $\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

3.4 Deterministický fuzzy automat

V [**?**] je definován jako determinstický automat, jen koncové stavy jsou fuzzy. V [**?**] je to deterministický automat, ale s fuzzy počátečními stavy, koncovými stavy i přechodovu funkcí.

Trošku jinak (pomocí jednotkových kardinalit) je uveden v [13].

3.5 Zásobníkový fuzzy automat

Někde jsem o něm četl. Je to s ním krapet složitější, co se bezkontextového jazyka týče.

Tady je pěkně popsán [**?**].

4 Fuzzy automaty, jazyky, gramatiky a regulérní výrazy

(zde bude doplněno: nějak to uvést. Budou pojmy jako regulérní jazyk a gramatika popsány v nějaké předchozí kapitole?)

(zde bude doplněno: pojem „Lattice language“)

(zde bude doplněno: značení: „Fuzzy množina ϕ“ vs. „L-množina $\phi : X \to L$“; „fuzzy podmnožina“ vs. „fuzzy množina nad“)

4.1 Jazyk rozpoznávaný fuzzy automatem

Věta 6.3 [19] (pro lattice monoid, není to někde jen pro $[0, 1]$?).

Dle definice 4 [13] je fuzzy regulární jazyk fuzzy podmnožina bivalentního.

Automat s bivalentní μ and η (a fuzzy σ) taky rozpoznává fuzzy regulérní jazyk [9]. Neřešil něco takového i Bel? Jinak řečeno, support konečný automat [13].

4.2 Fuzzy a bivalentní regulérní jazyky

Univerzum fuzzy jazyka je regulérní jazyk, pozorování 6.1 [19].

Stejně tak, zaříznutý jazyk (a-řez jazyka) je také regulérní, věta 2.2 [9].

Pumping lemma pro fuzzy regulérní jazyky, lemma 4-7 pro různé typy automatů [13].

Uzávěrové vlastnosti fuzzy regulérních jazyků, např. [9].

4.3 Fuzzy regulární výrazy

LiPed-FuzzFinAutFuzzRegExMembValLattOrdMon, definice 5.1, 5.2 (+ opsat důkaz, že $[0, 1]$ je lattice monoid) [19].

Algoritmus převodu reg na aut, [18]. Ale zdá se mi to až moc složité.

5 Rozpoznávání textových vzorů

Rozpoznávání vzorů obecně je jednou z nejvýznamějších aplikací informatiky. V běžném životě se často setkáváme se situacemi, kdy je třeba v datech najít výskyt učitého vzoru, popř. jeho další vlastnosti. Případně určit podobnost ke vzoru, nebo nejpodobnější vzor.

Typickým příkladem je např. detekce obličeje na fotografii, tedy rozpoznávání vzorů v obrazových datech. Vzory je však možné rozpoznávat v téměř jakýchkoliv datech, například textech, zvukových záznamech či výsedcích měření nebo pozorování.

Z pohledu teoretické informatiky je však základem vyhledávání vzorů v textových datech. Textová data, tedy řetězce, mají jednoduchou strukturu a lze s nimi snadno manipulovat. Na druhou stranu, jsou schopna reprezentovat nebo kódovat široké spektrum dat. Právě z tohoto důvodu je studium rozpoznávání textových vzorů klíčové pro zpracovávání jakýchkoliv dalších typů dat.

Poznámka 5.1. *Pokud nebude uvedeno jinak, pojem „rozpoznávání textových vzorů“ bude v této kapitole zkracován jen na „rozpoznávání vzorů“.*

5.1 Formální zavedení problému

Stejně tak, jak se mohou různit aplikace rozpoznávání vzorů, i samotný pojem „rozpoznávání vzorů“ bývá chápan různě. V nejzákladnější podobě se jedná o problém určení, zda-li pozorovaný řetězec odpovídá předem stanovenému vzoru. Vzorem bývá obvykle také řetězec, ale může jím být například regulérní výraz. Také - může nás zajímat buď exaktní shoda pozorovaného řetězce se vzorem, nebo jen nějaká forma podobnosti.

V rozšířeném smyslu může být problém chápán jako klasifikace. Tedy, určení třídy, do které by měl pozorovaný řetězec spadat, typicky na základě podobnosti s vybrannými reprezentanty jednotlivých tříd.

V této kapitole se však budeme zabývat pouze určováním podobnosti vzorového a pozorovaného řetězce. U každé instance problému budeme znát abecedu se kterou pracujeme a také vzor. Vzorem bude libovolný řetězec nad touto abecedou. Řešením tohoto problému pro nějaký, tzv. pozorovaný, vstupní řetězec bude úroveň podobnosti tohoto řetězce s vzorovým. Jako podobnost zde budeme uvažovat reálné číslo z intervalu $[0, 1]$, kde 0 znamená úplnou rozdílnost a 1 úplnou shodu.

Poznámka 5.2. *Vzorový řetězec budeme v této kapitole vždy značit ω, pozorovaný pak α.*

Nyní máme zadefinován problém samotný, nicméně je třeba zdůraznit, že v jeho definici se používá vágní pojem „podobnost řetězců“. Podobnost řetězců je totiž pojem, který souvisí s konkrétní instancí problému a nelze jej nějak přesně, ale současně dostatečně obecně popsat. Jedinné, co o podobnosti řetězců můžeme říct, je, že čím vyšší toto číslo je, tím by si měly být řetězce podobnější.

Například, budeme-li porovnávat vstup zadaný z klávesnice počítače oproti nějakému vzoru, je možné, že uživatel udělá překlep. V takovém případě bude vzorovému řetězci určitě více podobný řetězec obsahující dva překlepy (záměna symbolu za některý sousedící na klávesnici) než jiný, který se sice bude lišit jen v jednom symbolu, ale to takovém, který je na opačné straně klávesnice.

Obdobně, pokud budeme pracovat s abecedou malých a velkých písmen (majuskule a minuskule). Uvažujme vzorový řetězec `hello`. Řetězec `HELLO` se s ním neshoduje v ani jednom symbolu, ale přesto jejich podobnost může být blízká jedné.

5.2 Motivace k použití fuzzy automatů

Klasická teorie automatů vznikla jako nástroj pro zpracování textových řetězců. Z tohoto důvodu je rozpoznávání textových vzorů jejím základním výsledkem. Automaty obecně jsou nástroje sloužící pro rozhodování, zda-li řetězec odpovídá vzoru automatem reprezentovaném. Použití pro rozpoznávání řetězcového vzoru tak bude jen speciálním případem jejich užití.

V předchozí podkapitole jsme si stanovili, že řešením našeho problému je číslo z intervalu $[0, 1]$. Z tohoto důvodu nebude možné využít klasické bivalentní automaty. Fuzzy automaty pracují se stupněm pravdivosti, který by mohl s hodnotou podobnosti řetězců korespondovat. Navíc, v praxi se často setkáme s texty, které jsou nepřesné a nedokonalé. Fuzzy přístup by nám tak mohl pomoci na tyto nepřesnosti adekvátně reagovat.

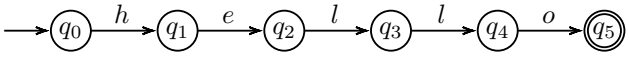
(zde bude doplněno: a co pravděpodobnostní?) (zde bude doplněno: Protože například: „pozorovaný řetězec se se vzorovým shoduje ve stupni x“ ale „je pravděpodobnost y, že uživatel zadal požadovaný řetězec“)

5.3 Automat rozpoznávající ω

Klíčovým pro rozpoznávání vzorů (chceme-li využívat fuzzy automaty) je bivalentní automat rozpoznávající vzorový řetězec. Tedy automat takový, který přijímá jedinný řetězec ω a všechny ostatní zamítá. Nyní si takovýto automat zkonstruujeme.

Uvažujme, že máme k dispozici vzorový řetězec ω nad abecedou Σ. Označme $\mathcal{L}(\omega)$ jako jednoprvkový jazyk obsahující pouze řetězec ω. Vzhledem k tomu, že jazyk $\mathcal{L}(\omega)$ je konečný, je také regulérní a existuje tak konečný deterministický automat, který jej rozpoznává.

Automat bude v každém kroku konzumovat symboly ze vstupního řetězce a porovnávat je se symboly vzorového řetězce na odpovídajících pozicích. Pokud dojde ke shodě na všech pozicích, automat dojde do koncového stavu a sledovaný řetězec přijme. Pokud se symboly shodovat nebudou, automat nebude



Obrázek 1: Automat rozpoznávající `hello` {diag-AutRozpHell}

mít definován žádný odpovídající přechod, kterým by pokračoval ve výpočtu, a řetězec tak zamítne.

Takovýto automat označme jako *automat rozpoznávající* ω.

Definice 5.1 (Automat rozpoznávající ω (deterministický))**.** *Mějme řetězec ω délky n nad abecedou Σ. Automat rozpoznávající ω je pak konečný automat $A(\omega) = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že jeho množina stavů Q se sestává z právě n stavů $q_0, \ldots, q_n$, q_0 je počáteční stav, $F = \{q_n\}$ množina koncových stavů a δ je přechodová funkce definována pro všechna $0 \leq k < n$ následovně:*

$$\delta(q_k, a_k) = q_{k+1} \text{ kde } a_k \text{ je } k\text{-tý symbol řetězce } \omega$$

Tato definice automatu je vcelku intuitivní. K stejnému výsledku bychom došli, pokud bychom automat zkonstruovali konverzí gramatiky nebo regulérního výrazu.

Příklad 5.1. *Příklad automatu rozpoznávající řetězec $\omega =$ `hello` se nachází na obrázku 1.*

My však budeme potřebovat fuzzy automat rozpoznávající ω. To znamená, že musíme nejdříve automat z předchozí definice převést na nedeterministický a poté dle definice 1.2 k němu zkonstruovat odpovídající fuzzy automat.

{def-AutRozpOme}

Definice 5.2 (Automat rozpoznávající ω (nedeterministický))**.** *Mějme řetězec ω nad abecedou Σ z předchozí definice. Nedeterministický automat rozpoznávající ω je pak konečný automat $A'(\omega) = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ takový, že jeho množina stavů Q je stejná jako v předchozí definici, dále $I = \{q_0\}$ je množina počátečních a $F = \{q_n\}$ množina koncových stavů a δ je přechodová funkce definována pro všechna $0 \leq k < n$ následovně:*

$$\delta(q_k, a_k) = \begin{cases} \{q_{k+1}\} & \text{pokud je } a_k \text{ } k\text{-tý symbol řetězce } \omega \\ \emptyset & \text{jinak} \end{cases}$$

Následuje vytvoření fuzzy automatu.

{def-FuzzAutRozpOme}

Definice 5.3 (Fuzzy automat rozpoznávající ω)**.** *Mějme řetězec ω nad abecedou Σ délky n. Fuzzy automat rozpoznávající ω je pak automat $A''(\omega)$ vytvořený z nedeterministického automatu rozpoznávající ω (definice 5.2) dle definice 1.2. Bude to tedy automat $A''(\omega) = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ kde*

- $\sigma(q_0) = 1$ *a* $\sigma(q_i) = 0$ *pro všechna* $i > 0$
- $\epsilon(q_n) = 1$ *a* $\epsilon(q_i) = 0$ *pro všechna* $i < n$
- $\mu(q_k, a_k, q_{k+1}) = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } a_k \text{ } k\text{-tý symbol řetězce } \omega \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Nyní máme k dispozici fuzzy automat, který ostře rozpoznává vzorový řetězec. V následujících podkapitolách následuje výčet několika technik, které tuto ostrost (pomocí dalších informací) odstraňují a nahrazují podobností.

5.4 Podobnost symbolů

Nejzákladnější technika pro zanesení neostrého (stupňovitého) rozpoznávání je s využitím podobnostní relace symbolů. Tato technika byla přejata z [6]. Myšlenkou této techniky je, že symbol v pozorovaném řetězci může být snadno zaměněn za jiný, podobný, jemu odpovídající v řětězci vzorovém.

Pro realizaci této techniky je potřeba mít k dispozici fuzzy relaci $s : \Sigma \times \Sigma \to [0, 1]$. Tato relace popisuje podobnost dvojice symbolů. Tedy, je-li pro nějakou dvojici symbolů $x, y \in \Sigma$ $s(x, y) = 0$, pak se jedná o naprosto rozdílné symboly. Naopak, pokud bude $s(x, y) = 1$, pak se jedná o shodné symboly. Je zjevné, že by relace s měla být symetrickou a reflexivní. *(zde bude doplněno: v článku to nepíší, ale měla by to být relace ekvivalence (Sym, Ref, Tra). Existuje něco, jako fuzzy relace ekvivalence?)*

Příklad 5.2. *Jako příklad podobnostní relace (nad abecedou písmen anglické abecedy) může posloužit například vzdálenost patřičných kláves na klávesnici. V takovém případě by určitě platilo kupříkladu $s(a, s) > s(a, d) > s(a, l)$. Protože klávesy* `A` *a* `S` *jsou si blíž (a tudíž symboly a a s jsou si „podobnější“) než například* `A` *a* `D` *či* `A` *a* `L`*.*

Jiným příkladem může být například vizuální podobnost napsaných (malých psacích) písmen. V takovém případě by zřejmě platilo $s(a, o) > s(m, t)$, protože malá psací písmena `a` *a* `o` *jsou si vizuálně podobnější než* `m` *a* `t`*, která vypadají úplně rozdílně.*

Máme-li k dispozici relaci s, je nutné ji zakomponovat do automatu. Jak autoři uvádějí, tato technika může pracovat s libovolným konečným automatem. Podíváme se proto nejdříve, jak využít relaci s obecně. Následně ji aplikujeme na automat rozpoznávající ω, čímž získáme nástroj pro podobnostní rozpoznávání textového vzoru.

{def-AutPracGS}

Definice 5.4 (Automat pracující s s)**.** *Uvažujme, že máme nedeterminstický automat A a relaci podobnosti symbolů s. Pak k automatu A můžeme zkonstruovat fuzzy automat A', který navíc pracuje s s. Takový automat bude zkonstruován dle definice 1.2 s tím rozdílem, že přechodová funkce μ bude definována pro všechna $q_i, q_j \in Q$ a $x \in \Sigma$ následovně:*

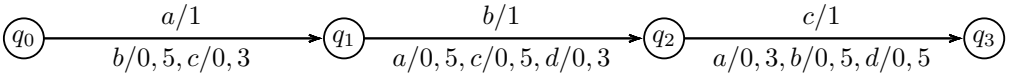
$$\mu(q_i, x, q_j) = \bigvee_{y \in \Sigma} (s(x, y) \wedge \delta_y(q_i, q_j))$$

$$\text{kde } \delta_x(q_i, q_j) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } q_j \in \delta(q_i, x) \\ 0 & \text{pokud } q_j \notin \delta(q_i, x) \end{cases} \text{ pro všechna } q_i, q_j \in Q \text{ a } x \in \Sigma.$$

Definice je vcelku přímočará. Pro každý přechod ze stavu q_i do stavu q_j přes symbol x, procházíme přechody původního automatu. Obsahovala-li přechodová funkce původního automatu přechod ze stavu q_i přes symbol y do stavu q_j, pak je $s(x, y) \wedge \delta_y(q_i, q_j)$ rovno podobnosti x a y. V opačném případě je roven nule. Hodnota tohoto výrazu je díky spojení přes všechny symboly maximalizována.

Nyní aplikujeme tento způsob konstrukce fuzzy automatu na automat rozpoznávající ω.

Definice 5.5 (Automat rozpoznávající ω pracující s s)**.** *Mějme abecedu Σ, řetězec ω nad touto abecedou a fuzzy relaci s nad touto abecedou. Dle definice 5.2*



Obrázek 2: Automat rozpoznávající `abc` pracující s s {diag-AutRozpABCPracGS}

můžeme zkonstruovat nedeterministický bivalentní automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω. Jako automat rozpoznávající ω pracující s s označme nedeterministický fuzzy automat $A'(\omega)$, který byl z automatu $A(\omega)$ vytvořen podle definice 5.4.

(zde bude doplněno: neměl by se takovýto automat místo $A'(\omega)$ značit třeba $A_s(\omega)$?)

Následuje jednoduchý příklad takového automatu. {ex-AutRozpOmePodSym}

Příklad 5.3. *Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Dále uvažujme relaci podobnosti symbolů s takovou, že*

- *každý symbol je podobný sám sobě ve stupni* 1
- *každý symbol je podobný symbolu ve stupni* $0,5$ *jedná-li se o symboly reprezentující sousedící písmena abecedy*
- *každý symbol je podobný symbolu ve stupni* $0,3$ *jedná-li se o symboly reprezentující ob-jedno písmeno sousedící písmena abecedy*
- *všechny ostatní dvojice symbolů jsou si podobny ve stupni* 0

Tuto relaci můžeme zapsat do matice (sloupce i řádky odpovídají po řadě symbolům a, b, c, d):

$$s = \begin{pmatrix} 1,0 & 0,5 & 0,3 & 0,0 \\ 0,5 & 1,0 & 0,5 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 1,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,3 & 0,5 & 1,0 \end{pmatrix}$$

Nyní mějme vzorový řetězec $\omega = abc$. Pak můžeme podle předchozí definice sestavit automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s s. Přechodový diagram takového automatu je na obrázku 2.

Tento automat evidentně rozpoznává řetězec `abc` ve stupni 1. *Pokud v pozorovaném řetězci nahradíme symbol `a` za `b`, bude jej automat přijímat ve stupni* $0,5$. *Pokud nahradíme `b` za `d`, bude jej automat přijímat ve stupni* $0,3$.

Pokud na začátek pozorovaného řetězce vložíme symbol `a` (tedy $\alpha =$ `aabc`), automat jej přijme ve stupni 0. *Stejnětak, pokud odebereme symbol `c` z konce vzorového řetězce (tedy $\alpha =$ `ab`). Pokud vložíme symbol `a` na začátek a současně odebereme `c` z konce vzorového řetězce, obdržíme pozorovaný řetězec $\alpha =$ `aab`. Tento řetězec bude přijat ve stupni* $0,5$ *(zde bude doplněno:* $1 \otimes 0,5 \otimes 0,5$*, záleží tedy na $\otimes$) .*

Z příkladu jasně vyplývá, že automat pracující s s je schopen akceptovat pouze náhradu symbolu jiným symbolem. Bude-li pozorovaný řetězec oproti vzorovému obsahovat vložený symbol nebo naopak z něj bude symbol odebrán, tento typ automatu selže. Na druhou stranu jeho princip i konstrukce jsou jednoduché a snadno se s nimi pracuje.

5.5 Fuzzy symboly

Fuzzy symbol je technika využívající podobnosti symbolů. Ve své podstatě se jedná o téže techniku jak v předchozí podkapitole, jen je na ni nahlíženo jinak. Oproti podobnosti symbolů je použití fuzzy symbolů komplikovanější, avšak umožňuje jednoduše tuto techniku kombinovat s jinými. Princip fuzzy symbolů byl přejat z [2].

Mějme abecedu Σ a relaci p podobnosti symbolů (stejně jako relace s v předchozí podkapitole). Fuzzy symbolem symbolu $x \in \Sigma$ označujeme fuzzy množinu symbolů takových, které jsou podle relace p symbolu x „podobné“.

Definice 5.6 (Fuzzy symbol)**.** *Mějme abecedu Σ a fuzzy relaci $p \subseteq \Sigma \times \Sigma$. Pak pro každý symbol $y \in \Sigma$ definujeme fuzzy symbol $\widetilde{y}$ symbolu y jako fuzzy množinu nad Σ takovou, že pro všechna $x \in \Sigma$ platí*

$$\widetilde{y}(x) = p(y, x)$$

Vzhledem k tomu, že fuzzy symbol máme definován pro všechny $y \in \Sigma$, můžeme množinu všech takových fuzzy symbolů nazvat abecedou fuzzy symbolů.

Definice 5.7 (Abeceda fuzzy symbolů)**.** *Mějme abecedu Σ a fuzzy symboly $\widetilde{y}$ pro všechna $y \in \Sigma$. Pak množinu všech těchto fuzzy symbolů nazvěme abeceda fuzzy symbolů abecedy Σ a označme $\widetilde{\Sigma}$. Tedy $\widetilde{\Sigma} = \{\widetilde{y} \mid y \in \Sigma\}$.*

Máme-li abecedu fuzzy symbolů $\widetilde{\Sigma}$, můžeme pracovat s řetězci $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Sigma}^*$ nad touto abecedou. Ještě si však doplníme, jak vytvořit k řetězci $\alpha \in \Sigma^*$ jemu odpovídající řetězec fuzzy symbolů $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Sigma}^*$.

(zde bude doplněno: sjednotit značení ω vs. α, když se používá jen jeden obecný řetězec)

Definice 5.8 (Řetězec fuzzy symbolů)**.** *Mějme abecedu Σ a nějaký řetězec $a_1 \dots a_n = \alpha \in \Sigma^*$. Pak definujme $\widetilde{\alpha} = \widetilde{a_1} \dots \widetilde{a_n}$ jako řetězec fuzzy symbolů řetězce α.*

V této fázi jsme schopni plnohodnotně pracovat s řetězci fuzzy symbolů a konstruovat je z řetězců nad abecedou Σ. Nyní přejdeme k návrhu fuzzy automatu, který bude s fuzzy symboly pracovat. Stejně jako u podobnosti symbolů i fuzzy symboly mohou být aplikovány na libovolný typ automatu. Vytvoříme proto automat pracující s fuzzy symboly nejdříve obecně, pro libovolný automat A.

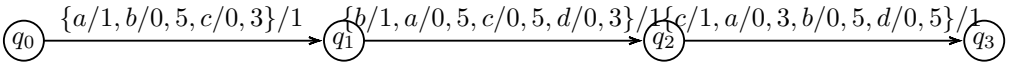
{def-AutPracFuzzSym}

Definice 5.9 (Automat pracující s fuzzy symboly)**.** *Mějme nedeterministický fuzzy automat automat A. Pak fuzzy automat $\widetilde{A}$ pracující s fuzzy symboly vytvoříme tak, že v definici automatu A nahradíme Σ za $\widetilde{\Sigma}$.*

(zde bude doplněno: může to tak být? a co související pojmy)

Formální zavedení automatu pracujícího s fuzzy symboly je intutivní, jedná se jen o formalitu. Abychom však využili potenciál fuzzy symbolů, je třeba pozměnit výpočet automatu. Proces jeho výpočtu se změní ve fázi výpočtu přechodové funkce fuzzy stavů. Připomeňme, že ta je definována (definice 2.6) jako fuzzy relace $\widehat{\mu}$ přiřazující každému fuzzy stavu V a fuzzy symbolu x fuzzy stav dle předpisu

$$\widehat{\mu}(V, x) = V \circ \mu[x]$$



Obrázek 3: Automat rozpoznávající `abc` pracující s s {diag-AutRozpOmePraFuzSym

Zde je zjevně nutné nahradit $\mu[x]$ spojením přes všechny fuzzy symboly. Bude tedy vypadat následovně:

$$\widehat{\mu}(V, x) = V \circ \bigvee_{y \in \Sigma} (\mu[x] \wedge \widetilde{x}(y))$$

Tím, že je změna zakořeněna ve výpočtu automatu, nám umožňuje další práci se samotným automatem. Můžeme tedy bez problémů zkonstruovat automat rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.

Definice 5.10 (Automat rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly)**.** *Mějme abecedu Σ, řetězec ω nad touto abecedou a abecedu fuzzy symbolů $\widetilde{\Sigma}$. Dle definice 5.3 můžeme zkonstruovat fuzzy automat $A(\omega)$ rozpoznávající ω. Následně pak podle definice 5.9 automat $\widetilde{A}(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.*

Postup konstrukce takovéhoto automatu je opět vcelku intuitivní. Následuje demonstrace na příkladu.

Příklad 5.4. *Mějme abecedu Σ, vzorový řetězec a podobnostní relaci $p = s$ stejné jako v příkladu 5.3. Na obrázku 3 je zobrazen diagram automatu $\widetilde{A}(\omega)$ rozpoznávající ω pracující s fuzzy symboly.*

Co se týče vlastností automatů (rozpoznávajících ω) pracujících s fuzzy symboly, jejich charakteristika je vesměs stejná jako u automatů pracujících s podobností symbolů. Pouze, jak již bylo zmíněno v úvodu, nezasahují do struktury automatu jako takového.

5.6 Editační operace

Další technikou pro podobnostní porovnávání pozorovaného a vzorového řetězce je s využitím editačních operací. Tato technika byla přejata z [12]. Základní idea této techniky spočívá v trojici jednoduchých editačních operací, jejíž složením jsme schopni popsat transformaci pozorovaného řetězce na vzorový. Množství transformace pak udává podobnost pozorovaného a vzorového řetězce.

Následuje formální definice editačních operací a pojmů s nimi souvisejících. Následně přejdeme ke konstrukci automatu, který s nimi bude schopen pracovat.

Definice 5.11 (Editační operace)**.** *Mějme abecedu Σ, uvažujme množinu $E = (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \setminus \{(\epsilon, \epsilon)\}$. Pak každou dvojici $(x, y) = z \in E$ nazvěme editační operace. Speciálně pak, pro všechna $x, y \in \Sigma$, $(x, y) \in E$ znamená nahrazení symbolu x symbolem y, $(x, \epsilon) \in E$ znamená odebrání symbolu x a naopak $(\epsilon, y) \in E$ pak vložení symbolu y. Navíc jako editační operaci uvažujme i všechny dvojice $(x, x) \in E$ (pro každé $x \in \Sigma$) symbolizující „žádnou editaci“.*

Máme-li editační operaci $(x, y) = z \in E$, pak označme $x = z^{\downarrow}$ a $y = z^{\uparrow}$.

Editační operace jsou tedy tři a to náhrada symbolu, vložení symbolu a odebrání symbolu. Například řetězec `hallo` vznikl záměnou `e` za `a` v řetězci

`hello`. Obdobně, řetězec `hellow` vznikl přidáním `w` na konec a řetězec `helo` odebráním (prvního nebo druhého) symbolu `l`.

My však obvykle očekáváme, že došlo k více, než jedné jednoduché editaci. Je proto vhodné zavést koncept mnohanásobné editace. Jednotlivé editace za sebe seřadíme do posloupnosti v pořadí, v jakém mají být postupně aplikovány, a takovouto posloupnost nazvěme vyrovnáním řetězce α na řetězec ω.

Uvažujme nyní množinu E editačních operací jako abecedu. Pak každé vyrovnání ζ řetězce α na řetězec ω (posloupnost $z_1 z_2 \dots z_n$ symbolů $z_1, z_2, \dots z_n \in E$), tak můžeme považovat za řetězec nad abecedou E.

(zde bude doplněno: fakt E považovat za abecedu a G za jazyk? není to zbytečná komplikace? je to tam nutné?)

Například všechny tři následující řetězce jsou vyrovnáním řetězce `ahoj` na řetězec `hello`:

$$\begin{aligned}\zeta_1 =&(a,\epsilon)(h,h)(o,e)(j,l)(\epsilon,l)(\epsilon,o)\\ \zeta_2 =&(a,\epsilon)(h,\epsilon)(o,\epsilon)(j,\epsilon)(\epsilon,h)(\epsilon,e)(\epsilon,l)(\epsilon,l)(\epsilon,o)\\ \zeta_3 =&(a,h)(h,e)(o,l)(j,l)(\epsilon,o)\end{aligned}$$

Na tomto příkladu je vhodné si povšimnout, že obecně může existovat více než 1 vyrovnaní mezi libovolnou dvojicí řetězců. Bude proto vhodné neuvažovat vyrovnání jednotlivá, ale množinu všech možných vyrovnání mezi dvojicí řetězců.

Podíváme-li se nyní jen na levé části editačních operací ve vyrovnání ζ_1 z předchozího příkladu, zjistíme, že jejich zřetězením získáme řetězec α:

$$(a,\epsilon)^{\downarrow}(h,h)^{\downarrow}(o,e)^{\downarrow}(j,l)^{\downarrow}(\epsilon,l)^{\downarrow}(\epsilon,o)^{\downarrow} = ahoj$$

Stejně tak, zřetězením pravých částí editačních operací v ζ_1 získáme řetězec ω:

$$(a,\epsilon)^{\uparrow}(h,h)^{\uparrow}(o,e)^{\uparrow}(j,l)^{\uparrow}(\epsilon,l)^{\uparrow}(\epsilon,o)^{\uparrow} = hello$$

Tato vlastnost nám udává, v jakém pořadí mají být editační operace aplikovány. Stejně tak nám odstaňuje nadbytečné editační operace (např. opakované přidávání a odebírání téže znaku, které by mohlo vést až k nekonečné posloupnosti editací). Proto nám tato vlastnost poslouží jako definiční pro formání zavedení vyrovnání řetězců.

Definice 5.12 (Vyrovnání řetězců [12])**.** *Jako množinu všech vyrovnání $G(\alpha,\omega)$ řetězce α na řetězec ω (kde $(\epsilon,\epsilon) \neq \alpha,\omega \in \Sigma^*$) označme takovou množinu $\{\zeta \in E^+ \mid \zeta$ splňuje vlastnosti 1., 2. i 3.$\}$*

1. $\zeta = z_1 z_2 \dots z_r$, $z_i \neq (\epsilon,\epsilon)$ *pro všechna* $i \in 1,\dots,r$,
2. ${z_1}^{\downarrow} {z_2}^{\downarrow} \dots {z_r}^{\downarrow} = \alpha$
3. ${z_1}^{\uparrow} {z_2}^{\uparrow} \dots {z_r}^{\uparrow} = \omega$

V tento okamžik máme formálně zavedena vyrovnání řetězců. Můžeme tedy přejít k práci s nimi. Ukážeme si způsob, jak pomocí vyrovnání řetězců spočítat podobnost dvojice řetězců. Na základě tohoto výpočtu pak sestavíme automat, který tento výpočet bude realizovat.

Pro určení podobnosti na základě vyrovnání řetězců budeme potřebovat znát míry pravdivosti editačních operací. Vstupem pro výpočet podobnosti řetězců

tak bude navíc binární fuzzy relace R nad množinou všech editačních operací (E), udávající stupeň akceptovatelnosti každé z možných editačních operací. S touto znalostí můžeme nadefinovat relaci podobnosti řetězců, tzv. fuzzy míru dvojice řetězců α a ω.

(zde bude doplněno: Musí být R reflexivní a symetrická (def. automatu to vyžaduje, ale je to nutné?). A co T-tranzitivita?) (zde bude doplněno: Takové relaci se říká relace podobnosti (proximity relation))

{def-FuzzMir}

Definice 5.13 (Fuzzy míra[12])**.** *Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$. Pak jako fuzzy míru mezi řetězci $\alpha, \omega \in \Sigma^*$ (značenou $S_{\Sigma,R,\otimes}$) označme fuzzy relaci danou následujícím předpisem:*

$$S_{\Sigma,R,\otimes} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (\alpha,\omega) = (\epsilon,\epsilon) \\ \max\limits_{\zeta \in G(\alpha,\omega)} (\bigotimes_{i=1}^{|\zeta|} R(\zeta_i)) & \text{pokud } (\alpha,\omega) \neq (\epsilon,\epsilon) \end{cases}$$

Definice fuzzy míry je vcelku intuitivní. Počítá se míra všech možných vyrovnání z nichž se vybírá ta největší. Míra vyrovnání se určuje jako t-norma ze všech $R(\zeta_i)$, tedy stupňů akceptovatelnosti jednotlivých editačních operací. Navíc, míra mezi dvojicí prázdných řetězců je dodefinována jako 1.

Označme $\mathcal{L}(\omega)$ jako fuzzy jazyk řetězců „podobných“ řetězci ω s podobností danou relací R. Takový jazyk pak můžeme nadefinovat pro všechna $\alpha \in \Sigma^*$ následujícím předpisem

$$\mathcal{L}(\omega)(\alpha) = S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha,\omega)$$

Nyní zkonstruujeme nedeterministický fuzzy automat s ϵ-přechody, který jazyk $\mathcal{L}$ rozpoznává. *(zde bude doplněno: rozpoznává vs. přijímá, pozor na to)*

{def-AutRozpCalL}

Definice 5.14 (Automat rozpoznávající $\mathcal{L}$ [12])**.** *Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ (stejná jako v definici 5.13). Pak pro vzorový řetězec $a_1 a_2 \dots a_n = \omega \in \Sigma^*$ označme $M_{\Sigma,R,\otimes}(\omega)$ automat rozpoznávající jazyk $\mathcal{L}(\omega)$ dle definice 1.1, takový, že*

1. *množina stavů $Q = \{q_0, q_1, \dots q_n\}$*
2. *fuzzy přechodová funkce μ pro všechny $x \in \Sigma$:*
   (a) *$\mu(q_i, q_i, x) = R(x, \epsilon)$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n$*
   (b) *$\mu(q_i, q_{i+1}, x) = R(x, a_{i+1})$ pro všechny $q_i, q_{i+1} \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n-1$*
   (c) *$\mu(q, q', x) = 0$ pro všechny $q, q' \in Q$ nesplňující předchozí dva body*
   (d) *$\mu(q_i, q_i, \epsilon) = 1$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n$*
   (e) *$\mu(q_i, q_{i+1}, \epsilon) = R(\epsilon, a_{i+1})$ pro všechny $q_i \in Q$ taková, že $i = 0, \dots, n-1$*
   (f) *$\mu(q, q', \epsilon) = 0$ pro všechny $q, q' \in Q$ nesplňující předchozí dva body*
3. *množina počátečních stavů σ: $\sigma(q_0) = 1$ a pro všechny ostatní $q_0 \neq q' \in Q$: $\sigma(q') = 0$*
4. *množina koncových stavů η: $\eta(q_n) = 1$ a pro všechny ostatní $q_n \neq q' \in Q$: $\eta(q') = 0$*

Máme nadefinován fuzzy automat rozpoznávající jazyk $\mathcal{L}(\omega)$. Bylo by však vhodné dokázat, že jazyk $\mathcal{L}(\omega)$, který tento automat rozpoznává je skutečně jazykem řetězců podobných řetězci ω s podobností danou relací R. Vzhledem ke složitosti důkazu tohoto tvrzení se v této práci spokojíme pouze s ilustrací na příkladu.

{the-JazAutJeJazEditOper}

Věta 5.1. *Mějme binární fuzzy relaci R nad $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ (stejná jako v definici 5.13) a vzorový řetězec $\omega \in \Sigma^*$. Pak pro automat $M_{\Sigma,R,\otimes}(\omega)$ sestavený dle předcházející definice a fuzzy míru $S_{\Sigma,R,\otimes}$ platí následující rovnost*

$$\mathcal{L}(M_{\Sigma,R,\otimes}) = \mathcal{L}(\omega)$$

Důkaz. Kompletní důkaz je k nalezení v [12]. □

(zde bude doplněno: sazba symbolů v matematickém módu vs. verbatim řetězce v textovém)

{ex-AutRozpCalL}

Příklad 5.5. *Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$ a vzorový řetězec $\omega = abc$. Zkonstruujeme automat, který bude akceptovat ve stupni 0.5 náhradu symbolu x symbolem s ním v abecedě sousedícím. Navíc uvažujme vložení symbolu a ve stupni 0.2 a odebrání symbolu c ve stupni 0.1. Tedy, relace R bude vypadat následovně:*

$$\begin{aligned} R = \{&(a,a)/1, (b,b)/1, (c,c)/1,\\ &(b,a)/0.5, (a,b)/0.5, (c,b)/0.5, (b,c)/0.5,\\ &(a,\epsilon)/0.2, (\epsilon,c)/0.1\} \end{aligned}$$

Dle definice 5.14 můžeme sestavit automat $M_{\Sigma,R,\otimes}$. Jako $\otimes$ použijme produktovou t-normu. Získáme tak automat $M_{\Sigma,R,\otimes} = (Q, \Sigma, \mu, \sigma, \epsilon)$ takový, že:

1. $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
2. $\mu = \{$
   (a) $(q_0, q_0, a)/0.2, (q_1, q_1, a)/0.2, (q_2, q_2, a)/0.2, (q_3, q_3, a)/0.2),$
   (b) $(q_0, q_1, a)/1, (q_1, q_2, a)/0.5,$
   $(q_0, q_1, b)/0.5, (q_1, q_2, b)/1, (q_2, q_3, b)/0.5,$
   $(q_1, q_2, c)/0.5, (q_2, q_3, c)/1,$
   (d) $(q_0, q_0, \epsilon)/1, (q_1, q_1, \epsilon)/1, (q_2, q_2, \epsilon)/1, (q_3, q_3, \epsilon)/1),$
   (e) $(q_2, q_3, \epsilon)/0.1$

   $\}$ *(přechody dle bodů (b) a (d) v definici jsou s nulovým stupněm a ve výpisu jsou vynechány)*
3. $\sigma = \{q_0/1, q_1/0, q_2/0, q_3/0\}$
4. $\eta = \{q_0/0, q_1/0, q_2/0, q_3/1\}$
   (zde bude doplněno: $\sigma = \{x/y, ...\}$ by se mělo přepsat na $\sigma(x) = y, ...$, ne?)

Přechodový diagram tohoto automatu je k nalezení na obrázku 4. V přechodovém diagramu jsou červeně zvárazněny pravidla pro rozpoznávání ω, ostatní pravidla (doplněna dle definice) jsou černá.

Nyní si na pár řetězcích zkuzme ukázat platnost věty 5.1. Dle definice 2.9 spočítáme stupeň, v jakém automat náš testovací rozpoznává řetězec α:

$$\begin{aligned}
M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) =& \max_{q\in Q}(\mu^*(\sigma,\alpha)(q)\otimes\eta(q))) \\
=& \max\{\mu^*(\sigma,\alpha)(q_0)\otimes\eta(q_0)), \mu^*(\sigma,\alpha)(q_1)\otimes\eta(q_1)), \\
& \mu^*(\sigma,\alpha)(q_2)\otimes\eta(q_2)), \mu^*(\sigma,\alpha)(q_3)\otimes\eta(q_3))\} \\
=& \max\{\mu^*(\sigma,\alpha)(q_0)\otimes 0), \mu^*(\sigma,\alpha)(q_1)\otimes 0), \\
& \mu^*(\sigma,\alpha)(q_2)\otimes 0), \mu^*(\sigma,\alpha)(q_3)\otimes 1)\} \\
=& \mu^*(\sigma,\alpha)(q_3)
\end{aligned}$$

- *řětězec $\alpha = abc$: Určíme stupeň akceptance automatem:*

  $M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma,abc)(q_3) = \widehat{\mu}(\widehat{\mu}(\widehat{\mu}(\widehat{\mu}(\sigma,\epsilon),a),b),c)(q_3) = \{q_3/1\}(q_3) = 1$

  A následně ověříme fuzzy míru. Množina všech vyrovnání bude obsahovat například $\zeta_1 = (a,a),(b,b),(c,c)$ či $\zeta_2 = (a,\epsilon)(\epsilon,a)(b,\epsilon)(\epsilon,b)(c,\epsilon)(\epsilon,c)$. Snadno zjistíme, že $\bigotimes_{i=1}^{|\zeta|} R(\zeta_i)$ je maximální právě pro $\zeta = \zeta_1$ a nabývá stupně 1. A tedy $S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = 1$.

- *řětězec $\alpha = ab$:*

  $M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma,ab)(q_3) = \widehat{\mu}(\widehat{\mu}(\widehat{\mu}(\sigma,\epsilon),a),b)(q_3) = \{q_2/1, q_3/0.1\}(q_3) = 0,1$

  $$S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = R(a,a)\otimes R(b,b)\otimes R(\epsilon,c) = 1\otimes 1\otimes 0.1 = 0,1$$

- *řětězec $\alpha = bbb$:*

  $$M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma,bbb)(q_3) = ... = \{q_3/0,25\}(q_3) = 0,25$$

  $$S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = R(b,a)\otimes R(b,b)\otimes R(b,c) = 0,5\otimes 1\otimes 0,5 = 0,25$$

- *řětězec $\alpha = abaca$:*

  $$M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma,abaca)(q_3) = ... = \{q_3/0,04\}(q_3) = 0,04$$

  $S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = R(a,a)\otimes R(b,b)\otimes R(a,\epsilon)\otimes R(c,c)\otimes R(a,\epsilon) = 1\otimes 1\otimes 0,2\otimes 1\otimes 0,2 = 0,04$

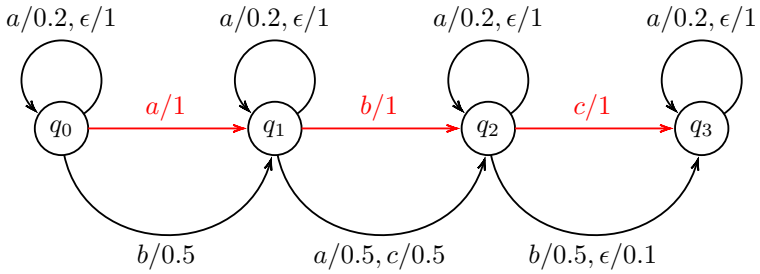
- *řětězec $\alpha = cba$:*

  $$M_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = \mu^*(\sigma,cba)(q_3) = ... = (\emptyset)(q_3) = 0$$

  $$S_{\Sigma,R,\otimes}(\alpha) = R(c,a)\otimes R(b,b)\otimes R(a,c) = 0\otimes 1\otimes 0 = 0$$

760 ...

Je tedy zjevné, že výpočet automatu $M_{\Sigma,R,\otimes}$ je v korespondenci s fuzzy mírou $S_{\Sigma,R,\otimes}$.



Obrázek 4: Přechodový diagram automatu z příkladu 5.5 {img-AutRozpCalL}

Je vidět, že automat zkonstruován dle editačních operací je značně silný nástroj. Umožňuje nám velmi pohodlně popsat, jak moc mohou být konkrétní editační operace akceptovány. Editační operace vložení symbolu, náhrada symbolu a odebrání symbolu jsou pro popis modifikace vzorového řetězce přirozené.

Nevýhodou této techniky je, že jednotlivé editační operace jsou akceptovány bez ohledu na jejich výskyt v řetězci. Automat akceptuje nastanuvší editační operaci pokaždé, kde může nastat, ve stejném stupni. Často je však třeba v jiném stupni stejnou editační operaci přijímat např. na začátku a na konci řetězce pokaždé však v jiném stupni. Tento požadavek však automat zkonstruovaný pomocí editačních operací neumí zpracovat. Řešením může být například použití následující techniky.

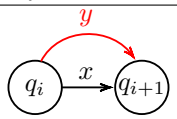
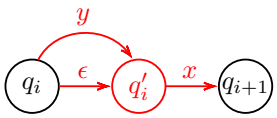
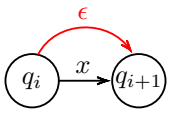
5.7 Deformovaný automat

Dalším ze způsobů, jak přijímat řetězec podobný vzorovému je s využitím deformovaného (fuzzy) automatu. Tato technika využívá tzv. deformovaného automatu, neboli automatu který byl stanoveným způsobem upraven, neboli deformován. Tato technika byla přejata z [7].

Jako deformace může být použita prakticky jakákoliv úprava automatu. Mějme fuzzy automat A. Provedením deformace x získáme deformovaný automat A', který rozpoznává jiný jazyk, než automat A. Mezi nejzákladnější tři deformace patří náhrada symbolu, vložení symbolu před symbol a odebrání symbolu. Možných deformací existuje nekonečně mnoho. Mezi další deformace může patřit například (pro nějaké $x, y, z \in \Sigma$ a $i \geq 0$): „náhrada symbolu x na i-té pozici symboly yz“, „odebrání všech výskytů symbolu x, které se nachází před symbolem y“ nebo „vložení sudého počtu symbolů y mezi symboly x a z“.

Provedeme-li deformaci fuzzy automatu rozpoznávající ω, můžeme se na trojici základních deformací podívat konkrétně. Ukázka toho, jak by vypadal deformovaný automat po provedení jedné ze základních deformací je vyobrazeno v tabulce 1.

Je vidět, že deformace mohou být účinným nástrojem pro rozpoznávání modifikovaných pozorovaných řetězců. Na druhou stranu, deformování automatu vyžaduje znalost fungování automatů. Často také může nastat situace, kdy výsledný zdeformovaný automat bude více, než deformovaný automat rozpoznávající ω, automatem reprezentující samostatný netriviální vzor.

Deformace	Význam deformace
NÁHRADA symbolu na i-té pozici (symbolu x) symbolem y $\delta' = \delta \cup \{(q_i, y, q_{i+1})\}$, $Q' = Q$	
VLOŽENÍ symbolu y na i-tou pozici (před symbol x) $\delta' = \delta \setminus \{(q_i, x, q_{i+1})\} \cup \{(q_i, \epsilon, q'_i), (q_i, y, q'_i), (q'_i, x, q_{i+1})\}$, $Q' = Q \cup \{q'_i\}$	
ODEBRÁNÍ symbolu z i-té pozice (symbolu x) $\delta' = \delta \cup (q_i, \epsilon, q_{i+1})$, $Q' = Q$	

Tabulka 1: Deformace deformovaného automatu {tbl-DefAutDef}

(zde bude doplněno: pozor, toto je pro konečné automaty, ne pro fuzzy automaty!)

5.8 Shrnutí

V této kapitole byl zaveden pojem rozpoznávání textových vzorů. Bylo ukázáno, že pro klasickou teorii automatů je to triviální problém, který však kvůli nepřesnostem reálných dat vyžaduje nasazení fuzzy automatů. Bylo představeno několik technik, které pomocí fuzzy automatů umožňují přijímání řetězců podobných vzorovému.

Nejjednodušší z nich, využívající relaci podobnosti symbolů, je vhodná na prosté nahrazování podobných symbolů. Technika fuzzy symbolů funguje na stejném principu, jen se liší ve formálním zavedení. Technika s využitím editačních operací umožňuje specifikovat stupeň akceptance základních editačních operací (vložení symbolu, odebrání symbolu, náhrada symbolu). Poslední technika, deformovaný automat, umožňuje libovolnou transformaci automatu, vedoucí až k libovolnému vzoru.

6 Fuzzy tree automaty

6.1 Zavedení

Fuzzy tree automaty jsou speciální třídou automatů, které jsou navrženy pro rozpoznávání dat, které mají v sobě obsaženu určitou stromovou strukturu. Jak bude ukázáno, fuzzy tree automaty tak mohou rozpoznávat vybrané bezkontextové jazyky.

Fuzzy tree automaty vznikly fuzzyfikací „klasických“ tree automatů. O „klasických“ tree automatech je možné se dočíst více informací např. v [**?**], popř. [11] a [**?**]. Problematice fuzzy tree automatů se věnuje například [**?**], [16], [17], [**?**] a [**?**]. V této kapitole bude vycházeno z [**?**].

Zatímco běžné konečné (fuzzy) automaty pracují s řetězci symbolů, (fuzzy) tree automaty pracují se speciálními strukturami symbolů, tzv. stromy. Pro snadnější práci s nimi bylo navrženo zakódování do řetězců, kterým se říká pseudotermy. Oba tyto pojmy, a jejich vzájemný vztah budou rozebrány v následující podkapitole. Dále bude nadefinován fuzzy jazyk stromů a automat, fuzzy tree automat, který fuzzy jazyk stromů rozpoznává. Na závěr bude předloženo několik konkrétních ukázek využití fuzzy tree automatů.

Následující dvě podkapitoly budou doprovázeny příklady. Pro vyšší názornost se budou příklady vždy týkat syntaxe jednoduchého algebraického kalkulu. Tento kalkul bude disponovat dvěma proměnnými, x a y. Dále pak unárním operátorem S (symbolizující funkci „sinus“) a binárním operátorem M (symbolizujícím binární „mínus“, resp. „odečtení druhého argumentu od prvního“). Na závěr bude syntaxe našeho kalkulu fuzzyfikována, takže bude v určitém stupni pravdivosti možné považovat za výraz například $S(x, y)$ nebo $M(M(x))$.

6.2 Stromy a pseudotermy

Definice 6.1 (Doména stromu)**.** *Mějme abecedu Σ uspořádanou pomocí $\leq$. Pak konečnou množinu $U \subseteq \Sigma^*$ nazvěme doména konečného stromu, pokud splňuje následující podmínky:*

- *jestliže $w \in U$ a $w = uv$ pak $u \in U$ pro všechna $u, v, w \in \Sigma^+$ (tj. množina je prefixově uzavřena)*
- *$wn \in U$ a $m \leq n$ implikuje $wm \in U$, pro všechna $w \in \Sigma^+$ a $m, n \in \Sigma$*

Na doménu stromu můžeme nahlížet jako na množinu řetězců, které formují prefixový strom. Množinu U tak lze rozložit na množinu $\overline{U}$ listových uzlů

$$\overline{U} = \{w \in U | wu \notin U \text{ pro všechna } u \in \Sigma^+\}$$

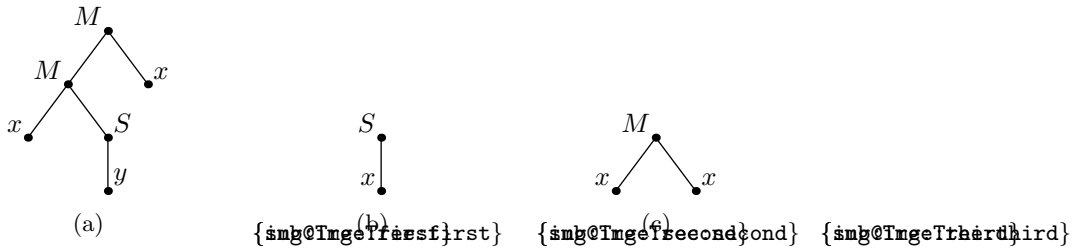
a množninu $U \setminus \overline{U}$ vnitřních uzlů.

Definice 6.2 (Částečně spořádaná abeceda)**.** *Částečně spořádaná abeceda je dvojice (N, T), kde N a T jsou dvě disjunktní konečné abecedy (tj. $N \cap T = \emptyset$).*

{def:Tree}

Definice 6.3 (Strom)**.** *Strom t nad částečně spořádnou abecedou (N, T) je zobrazení z domény U stromu do $(N \cup T)$ (psáno $t : U \to (N, T)$) takové, že*

- *$t(w) \in N$ pokud $w \in U \setminus \overline{U}$*
- *$t(w) \in T$ pokud $w \in \overline{U}$*



Obrázek 5: Stromy k příkladu 6.1

Místo $t(w)$ budeme psát jen t.

(zde bude doplněno: Takto definovaný strom však teoreticky může být nekonečný. Co s tím?) Strom t je tedy předpis pro „přejmenování“ uzlů prefixového stromu daného doménou U. Strom dle definice 6.3 je v korespondenci s pojmem „strom“ (resp. „kořenový strom“) z teorie grafů. Z tohoto důvodu si pro jednoduchost můžeme odpustit definici souvisejících pojmů z teorie grafů pro strom z definice 6.3. Můžeme tak stromy graficky zobrazovat, hovořit o jejich potomcích, podstromech, vnitřních a listových uzlech bez nutnosti formálního nadefinování.

Příklad 6.1. *Označme $T = \{x, y\}$ a $N = \{S, M\}$. Definujme doménu U_1 stromu pro abecedu $\Sigma = \mathbb{N}$ jako množinu řetězců $U_1 = \{\epsilon, 1, 11, 12, 121, 2\}$. Pak $\overline{U_1} = \{11, 121, 2\}$. Strom $t_1 : U_1 \to (T, N)$ nad (T, N) pak může vypadat například takto:*

$$\begin{array}{lll} t_1(\epsilon) = M & t_1(1) = M & t_1(12) = S \\ t_1(11) = x & t_1(121) = y & t_1(2) = x \end{array}$$

Grafické znázornění stromu t_1 je na obrázku 5a. Další ukázky stromů jsou na zbylých podobrázcích obrázku 5.

Stromy nám přirozeně reprezentují stromovou hierarchii. Pro nás bude ale občas vhodné mít lineární strukturu pro zápis téhož. Nadefinujeme si proto pseudotermy, protějšky termů predikátové logiky[4].

Definice 6.4 (Pseudoterm)**.** *Označme $D^p_{(N,T)}$ nejmenší podmnožinu $(N \cup T \cup \{(,)\})^*$ splňující následující podmínky[5]:*

- $T \subset D^p_{(N,T)}$
- *pokud $n > 0$, $A \in N$ a $t_1, \ldots, t_n \in D^p_{(N,T)}$, pak $A(t_1 \ldots t_n) \in D^p_{(N,T)}$*

Prvky množiny $t^p \in D^p_{(N,T)}$ nazývejme pseudotermy.

Poznámka 6.1. *Definice pseudotermu lze snadno přepsat do gramatiky. Vzhledem k tomu, že taková gramatika bude jistě bezkontextová, bude jazyk $D_{(N,T)}$ bezkontextový. Tento fakt bude mít důsledek na konstrukci fuzzy tree automatu.*

[4]Oproti termům predikátové logiky mají však jiný pohled na nulární funktory, které u pseudotermu neexistují

[5]Předpokládáme, že symboly závorek, (a) nejsou součástí $N \cup T$

{ex:PseTerms}

Příklad 6.2. *Pro částečně spořádanou abecedu (N, T) s předchozího příkladu můžeme za termy označit například: $t_1^p = y$, $t_2^p = S(x)$, $t_3^p = M(xx)$, $t_4^p = M(M(xS(y))x)$.*

Mezi stromy a pseudotermy platí vzájemně převoditelný vztah. To bude nyní dokázáno.

Věta 6.1. *Pro každý strom $t \in D_{(N,T)}$ nad částečně spořádanou abecedou (N, T) existuje odpovídající pseudoterm $p(t)$.*

Důkaz. Existenci pseudotermu dokážeme podle toho, zda-li je t strom tvořený listovým nebo vnitřním uzlem. Je-li kořenový uzel stromu t listový, tj. $t = a$, kde $a \in T$, pak $p(t) = a$. V opačném případě, tj. reprezentuje-li kořen stromu t vnitřní uzel $t = X$, kde $X \in N$, pak $p(t) = X(p(t_1) \dots p(t_n))$, kde $t_1, \dots, t_n$ jsou podstromy stromu t. □

Věta 6.2. *Ke každému pseudotermu $p(t) \in D^p_{(N,T)}$ existuje odpovídající strom t.*

Důkaz. Opět dokážeme strukturálně:

- je-li pseudoterm atomický, tj. $p(t) = a$, kde $a \in T$, pak doménou stromu t je množina $\{\epsilon\}$ a $t(\epsilon) = a$
- pokud je pseudoterm ve tvaru $p(t) = A(t_1^p \dots t_m^p)$, pak doménou stromu t je množina $\bigcup_{i \leq m} \{iw | w \in domain(t_i)\} \cup \{\epsilon\}$ a

$$t(w) = \begin{cases} A & \text{pokud } w = \epsilon \\ t_i(w') & \text{pokud je } w = iw' \text{ a } w \text{ je v doméně } t \end{cases}$$

□

Příklad 6.3. *Pseudoterm t_4^p z předchozího příkladu odpovídá stromu na obrázku 5a a pseudoterm t_3^p stromu 5c (a naopak).*

Máme tedy prokázano, že mezi pseudotermy a stromy platí vzájemná převoditelnost. Označíme si nyní množinu stromů jako jazyk a fuzzy množinu stromů jako fuzzy jazyk. Obdobným způsobem bychom mohli nadefinovat i jazyk pseudotermů, ale ten nebudeme potřebovat.

Definice 6.5 (Fuzzy jazyk stromů)**.** *Fuzzy množinu τ nad $D_{(N,T)}$ nazvěme fuzzy jazyk stromů.*

6.3 Fuzzy tree automat a jazyk jím rozpoznávaný

Začněme definicí fuzzy tree automatu.

Definice 6.6 (Fuzzy tree automat)**.** *Fuzzy tree automat A je pětice (Q, T, N, μ, F), kde:*

- *Q je konečná množina symbolů stavů*
- *T je konečná množina terminálních symbolů uzlů*

μ_x	q_1	q_2
ϵ	1	0

μ_y	q_1	q_2
ϵ	1	0

μ_S	q_1	q_2
q_1	0	1
q_2	0	0.4
q_1q_1	0	0,3

μ_M	q_1	q_2
q_1	0,1	0,8
q_2	0	0,5
q_1q_1	0	0,6
q_1q_2	0	1
q_2q_1	0	0,7

Tabulka 2: Příklad přechodové funkce μ fuzzy tree automatu {tab:MuOfFuzTreAut}

- N *je konečná množina neterminálích symbolů uzlů taková, že* $N \cap T = \emptyset$
- $\mu : (N \cup T) \to \{f | f : (\mathcal{Q} \cup \{\epsilon\}) \times Q \to [0,1]\}$ *je fuzzy přechodová funkce, kde* $\mathcal{Q}$ *je konečná podmnožina* Q^+. *Pro* $X \in N$ *je* $\mu(X) = \mu_X$, *kde* μ_X *je zobrazení z* $\mathcal{Q} \times Q$ *do* $[0,1]$. *Pro* $a \in T$ *je* $\mu(a) = \mu_a$, *kde* μ_a *je zobrazení z* $\{\epsilon\} \times Q$ *do* $[0,1]$.
- $F \subseteq Q$ *je množina koncových stavů.*

Podívejme se nyní podrobněji na fuzzy přechodovou funkci μ. Pro terminální symbol $a \in T$ nám μ_a definuje fuzzy stav, do kterého automat přejde při vstupu a. Pro neterminál $X \in N$ nám definuje přechodovou funkci $\mu_X(q_1 \dots q_k, q') = c$ s významem „pokud je na vstupu X a automat se nachází ve stavech $q_1, \dots, q_k$, pak automat přejde do stavu q' ve stupni c“.

Příklad 6.4. *Uvažujme množiny* N *a* T *stejné, jako v předchozích příkladech. Stanovme* $Q = \{q_1, q_2\}$. *Fuzy množinu* F *položme rovnu* $\{q_2\}$ *a zobrazení* μ *je zaznačeno v tabulce 2. Pak* $A = (Q, T, N, \mu, F)$ *je fuzzy tree automatem.*

Na přechodovou funkci se můžeme také podívat pohledem syntaktické analýzy zdola nahoru. Přechodové funkce μ_X ($X \in N$) realizují operaci „redukce“ a přechodové funkce μ_a ($a \in T$) operaci „přesun“. Můžeme tedy říci, že jazyk stromů (resp. jazyk jim odpovídajících pseudotermů) je fuzzy bezkontextový. Předtím je ale třeba ukázat, že fuzzy tree automaty skutečně přijímají fuzzy jazyky stromů.

Definice 6.7 (Fuzzy přechodová funkce stromů)**.** *Pro strom* $t \in D_{(N,T)}$ *definujme fuzzy přechodovou funkci stromů jako zobrazení* $\mu_t : Q \to [0,1]$ *následovně:*

- *Pokud stromu* t *odpovídá pseudoterm* $p(t) = X(p(t_1) \dots p(t_k))$, *pak*

$$\mu_t(q) = \mu_{X(t_1 \dots t_k)}(q) = \bigvee_{\substack{w \in \mathcal{Q} \\ |w| = k}} \left(\mu_X(w, q) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \mu_{t_j}(w_j) \right)$$

- *pokud* $t = a$, *kde* $a \in T$, *pak* $\mu_t = \mu_a$.

Fuzzy přechodová funkce stromů je obdobou fuzzy rozšířené přechodové funkce. Pokud je vstupní strom atomický ($t = a$) je přechod realizován pomocí fuzzy přechodové funkce μ_a. Pokud vstupní strom není atomický, je přechod realizován ve stupni, který je dán stupněm přechodu neterminálního symbolu a stupňů příslušných podstromů.

Stupeň, ve kterém je strom t automatem přijímán, pak lze určit vztahem

$$A(t) = \bigvee\nolimits_{q \in F} \mu_t(q)$$

Definice 6.8 (Jazyk rozpoznávaný)**.** *(zde bude doplněno: značení fuzzy jazyka) Fuzzy množinu $L(A)$ nad $D_{(N,T)}$ danou předpisem*

$$L(A) = \left\{(t, c) | c = \bigvee_{q \in F} \mu_t(q)\right\}$$

nazvěme fuzzy jazyk rozpoznávaný fuzzy tree automatem.

Příklad 6.5. *Uvažujme automat A z předchozího příkladu. Pak pro strom t_1 (kde $t_{1,1}$ značí levý podstrom kořene a $t_{1,2}$ pravý podstrom) z obrázku 5c platí $\mu_{t_1}(q_2)$:*

$$\begin{aligned}\mu_{t_1}(q_2) = &\big(\mu_M(q_1q_1, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_1) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_1)\big)\\ &\vee \big(\mu_M(q_1q_2, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_1) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_2)\big)\\ &\vee \big(\mu_M(q_2q_1, q_2) \wedge \mu_{t_{1,1}}(q_2) \wedge \mu_{t_{1,2}}(q_1)\big)\\ &= (0,6 \wedge 1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1 \wedge 0) \vee (0,7 \wedge 0 \wedge 1) = 0,6\end{aligned}$$

Pak tedy $A(t_1) = 0,6$. Pro stromy t_2 a t_3 z obrázku 5a a 5a platí $A(t_2) = 0.7$ a $A(t_3) = 1$.

Podobně jako u klasických automatů, i u tree automatů platí, že pro každý fuzzy jazyk stromů existuje automat, který tento jazyk rozpoznává.

Věta 6.3. *Pro jaždý fuzzy jazyk stromů existuje fuzzy tree automat, který ho rozpoznává.*

Důkaz. K dispozici v [**?**]. □

V praxi se však nejčastěji setkáme s automatem, který rozpoznává právě jeden strom. Snadnou modifikací takového automatu pak obdržíme automat, který nerozpoznává ostře jen jeden strom, ale v určitém nenulovém stupni také stromy jemu podobné.

Definice 6.9 (Automat rozpoznávající strom)**.** *Mějme strom $t \in D_{(N,T)}$ („vzor“) kde $sub(t)$ značí množinu všech jeho podstromů. Pak jako fuzzy tree automat rozpoznávající strom t označme fuzzy tree automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$, kde:*

- $Q = \{q_{t'} | t' \in sub(t)\}$ *(každému podstromu odpovídá jeden stav)*
- $\mu_a(q_a) = 1$ *pro všechna $a \in T$*
- $\mu_X(w, q_{t'}) = 1$ *pro všechny $t' \in sub(t)$, kde $w = q_1 \dots q_k$ a stromu t_i odpovídá pseudoterm $p(t') = X(t_1 \dots t_k)$*
- $F = \{q_t\}$ *(koncovým stavem je stav odpovídající celému stromu t)*

Takovýto automat zřejmě rozpoznává jazyk $T = \{(t, 1)\}$.

V následujících podkapitolách budou fuzzy tree automaty demonstrovány na konkrétních příkladech.

6.4 Použití fuzy tree automatů

Fuzzy tree automaty je možné použít všude tam, kde je třeba rozpoznávat určitým způsobem stromově strukturovaná data. Konečnost množiny $\mathcal{Q}$, pro kterou je definována přechodová funkce μ_X neterminálů $X \in N$ však přináší omezení na aritu každého uzlu, která tak vždy musí být konečným číslem.

Konečnost množiny $\mathcal{Q}$ však teoreticky nemusí být nutná. Teoreticky by šlo jako vzory funkce μ_X namísto konkrétních řetězců nad Q použít například regulérní výraz popisující celou třídu takových řetězců (například `(q0 | q1)+`). To by však zkomplikovalo implementaci takového automatu a proto toto rozšíření nebude uvažováno.

Důležité však je, že automat umožňuje rozpoznávat rekurzivní stromy. Rekurze je dosaženo (opakovaným) přechodem ze stavu do téže stavu (v nenulovém stupni).

6.5 Detekce úplných m-árních stromů

Základní technikou, jak lze využít fuzzy tree automaty je přímo práce se stromy. Ukážeme si, že s pomocí fuzzy tree automatů lze snadno rozpoznávat úplné m-ární stromy.

Definice 6.10 (Úplný strom)**.** *Úplný m-ární strom je takový strom, jehož každý uzel má buďto právě m potomků (vnitřní uzly) a nebo* 0 *(listové uzly).*

Vlastnost „být úplným m-árním stromem“ lze poměrně jednoduše fuzzyfikovat. Pro každý vnitřní uzel v o n potomcích určeme míru jeho úplnosti. Jinými slovy stupeň pravdivosti výroku „uzel v má m potomků“. Tuto míru označme α_i a můžeme ji určit následujícím vztahem

$$\alpha_v = \frac{n}{m}$$

Pro strom t tvořený nelistovým uzlem v pak můžeme stupeň α_t pravdivosti výroku „t je m-ární úplný strom“ stanovit jako minimum pravdivosti výroku „uzel n má m-potomků“ a pravivosti „strom t' je m-ární úplný strom“ pro všechny jeho podstromy $t' \in t$.

Všechny atomické stromy tuto vlastnost splňují ve stupni 1. Můžeme tak napsat:

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 & \text{pokud je } t \text{ tvořen listovým uzlem} \\ \alpha_v \wedge \bigwedge\limits_{t' \in t} \alpha_{t'} & \text{pokud je } t \text{ tvořen nelistovým uzlem } v \end{cases}$$

Nyí je třeba vyjádřit tento problém v terminologii fuzzy tree automatů. Uvažujme, že strom t je tvořen vnitřními uzly I a listovými uzly o. Pak fuzzy jazyk m-árních úplných stromů bude fuzzy jazyk stromů nad $D_{(N,T)}$, kde $N = \{I\}$ a $T = \{o\}$. Zbývá tedy navrhnout fuzzy tree automat, který takový jazyk bude rozpoznávat.

Automat bude mít jeden stav $Q = \{q_1\}$ a přechodovou funkci $\mu_o(q_1) = 1$ a

$$\mu_I(w, q_1) = \frac{|w|}{m}$$

pro všechna $w \in \{{q_1}^i | 1 \leq i \leq m\}$. Množina koncových stavů F bude rovna $\{q_1\}$.

Dokážeme nyní, že automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$ rozpoznává fuzzy jazyk úplných m-árních stromů.

Věta 6.4. *Fuzzy tree automat $A = (Q, N, T, \mu, F)$, kde Q, N, T, μ a F jsou popsány výše, rozpoznává fuzzy jazyk úplných m-árních stromů.*

Důkaz. Jazyk automatu A je roven $L(A) = \{(t, c) | c = \mu_t(q_1)\}$ (automat A má jen jeden koncový stav). Hodnota $\mu_t(q_1)$ záleží na tom, zda-li je t tvořen listovým uzlem nebo ne.

Je-li t tvořen listovým uzlem o, tj. $t = o$, pak $\mu_t = \mu_o = 1$.

Strom t je tvořen vnitřním uzlem v a $p(t) = I(p(t_1) \dots p(t_k))$. Existuje jedno jediné $w \in \mathcal{Q}$ takové, že $|w| = k$: $w = {q_1}^k$. Pak $\mu_t = \mu_I(w, q_1) \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \mu_{t_j}(q_1)$. Protože $q \in Q$ a $Q = \{q_1\}$, pak $\mu_I(w, q) = \mu_I(w, q_1) = \frac{k}{m} = \alpha_v$. $\bigwedge_{j=1}^{k} \mu_{t_j}(q_1)$ je infimum přes všech k podstromů stromu t, takže $\bigwedge_{t' \in t} \mu_{t'}(q_1)$.

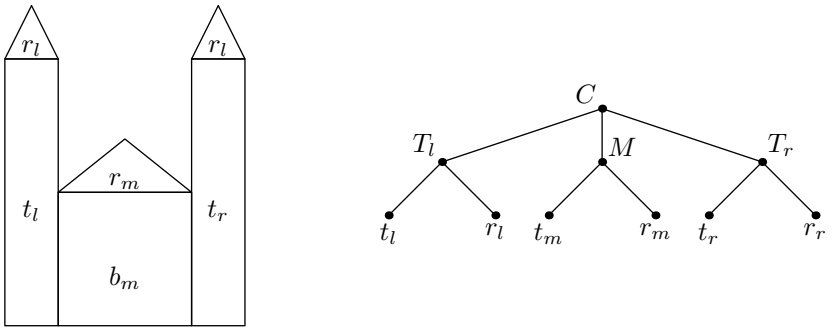
Předpokládejme, že platí $\mu_t(q_1) = \alpha_t$ pro všechny atomické stromy $t = a$, kde $a \in T$. Pak $\mu_t(q_1) = \alpha_v \wedge \bigwedge_{t' \in t} \mu_{t'}(q_1) = \alpha_v \wedge \bigwedge_{t' \in t} \alpha_{t'} = \alpha_t$ pro všechny stromy t tvořené vnitřními uzly. Pak tedy $\mu_t(q_1) = \alpha_t$ pro všechny $t \in D_{(N,T)}$. □

Soubory automatu a ukázkových vstupních stromů jsou k nalezení v adresáři `fuzzy-tree-automata/test/data/m-ary-trees`.

6.6 Složené geometrické útvary

V [**?**] byl popsán způsob, jak pomocí fuzzy tree automatů rozpoznávat složené geometrické útvary. Složený geometrický útvar je chápán jako strom, jehož listové uzly reprezentují „primitivní geometrické objekty“ (čtverec, kruh, trojúhelník, aj.). Jeho vnitřní uzly pak popisují vzájemný vztah či vlastnost (např. vzájemnou polohu) jednotlivých podobjektů.

Příklad 6.6. *Na obrázku 6 je vyobrazen složený geometrický útvar vyobrazující „budovu kostela“ a jemu odpovídající strom.*



Obrázek 6: Příklad složeného geometrického tvaru a jeho stromu {img:Geoms}

V příkladu, který autoři uvádějí, konstruují strom pro náčrt jednoduchého domu a následně kostela. Dům je tvořen čtvercem („budova“) a „nad ním“ se nachází rovnoramenný trojúhelník („střecha“). Kostel pak lze vyjádřit jako „dům, nad kterým se nachází kříž“.

Pro rozpozánávání takovýchto stromů fuzzy tree automatem je nutné tyto pojmy nejdříve formalizovat. Jakmile budeme mít pevně stanoveny jednotlivé pojmy, budeme moci provést jejich fuzzyfikaci a následně sestavit fuzzy tree automat, který stromy rozpoznává.

Uvažujme primitivní geometrický útvar g. Konkrétní podoba útvaru g bude dána jeho typem. Například mnohoúhelníky budeme reprezentovat jako posloupnosti jejich vrcholů, kružncie bude reprezentována jako střed a poloměr. Připomeňme si nejdříve matematické definice některých základních primitivních geometrických tvarů. *(zde bude doplněno: je to nutné zdrojovat?)*

Značení. *Pro mnohoúhelník g označme α_X jako velikost úhlu při vrcholu $X \in g$.*

Definice 6.11 (Obdélník)**.** *Mějme čtyřúhelník $g = ABCD$. Pak tento čtyřúhelník je obdélník, pokud platí*

$$\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D (= 90^\circ)$$

Definice 6.12 (Čtverec)**.** *Mějme obdélník $g = ABCD$. Pak tento obdélník je čtverec, pokud*

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|$$

Definice 6.13 (Rovnoramenný trojúhelník)**.** *Mějme trojúhelník $g = ABC$. Pak tento trojůhelník je rovnoramenný, pokud*

$$\alpha_A = \alpha_B$$

Stranu AB nazývejme základna, strany AC a BC ramena.

Obdobným způsobem bychom ve výčtu mohli pokračovat. Pro užití fuzzy tree automatů však bude vhodné nehovořit o „útvar g je/není obdélník“, ale „útvar g je obdélníkem ve stupni c“.

Označme $\varepsilon : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to [0, 1]$ jako fuzzy ekvivalenci reálných čísel danou předpisem:

$$\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{pokud } x \leq y \\ \dfrac{y}{x} & \text{pokud } x > y \end{cases}$$

s tím, že $\frac{0}{0} = 1$. Zřejmě platí $\epsilon(x, x) = 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$.

S využitím fuzzy ekvivalence ε tka můžeme předchozí tři definice „fuzzyfikovat“:

Definice 6.14 („Fuzzy“ obdélník)**.** *Mějme čtyřúhelník $g = ABCD$. Pak tento čtyřúhelník je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(g)$, kde*

$$\gamma_r(g) = \varepsilon(\alpha_A, \alpha_B) \wedge \varepsilon(\alpha_B, \alpha_C) \wedge \varepsilon(\alpha_C, \alpha_D) \wedge \varepsilon(\alpha_D, \alpha_A)$$

Definice 6.15 („Fuzzy“ čtverec)**.** *Mějme geometrický útvar $g = ABCD$, který je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(g)$. Pak tento obdélník je čtvercem ve stupni $\gamma_s(g)$, kde*

$$\gamma_s(g) = \gamma_r(g) \wedge \varepsilon(|AB|, |BC|) \wedge \varepsilon(|BC|, |CD|) \wedge \varepsilon(|CD|, |DA|) \wedge \varepsilon(|DA|, |AB|)$$

Definice 6.16 („Fuzzy“ rovnoramenný trojúhelník)**.** *Mějme trojúhelník $g = ABC$. Pak tento trojůhelník je rovnoramenný ve stupni $\gamma_i(g)$, kde*

$$\gamma_i(g) = \varepsilon(\alpha_A, \alpha_B)$$

Máme tedy fuzzifikovány vlastnosti primitivních geometrických útvarů. Nyní je třeba navrhnout fuzzyfikace jejich vzájemných vztahů. Pro vztah „být nad“ máme například:

Definice 6.17 (Vztah „být nad“[6])**.** *Mějme obdélník $r = ABCD$ a trojúhelník $q_t = EFG$. Pak „trojúhleník r je nad obdélníkem q_t (a horní hrana q_r splývá se základnou t)“ právě tehdy, když:*

$$top(r) = base(t)$$

kde $top(r) \in \{AB, BC, CD, DA\}$ je „horní strana“ obdélníku r a $base(t) \in \{EF, FG, GA\}$ je základna trojúhelníku t.

Mějme geometrický útvar $r' = ABCD$, který je obdélníkem ve stupni $\gamma_r(r')$ a trojúhelník $q'_t = EFG$. Pak „trojúhleník r' je nad obdélníkem q'_t (a horní hrana q'_r splývá se základnou t')“ ve stupni $\gamma_T(r', t')$, kde

$$\gamma_T(r', t') = \gamma_r(r') \wedge \varepsilon(top(r'), base(t'))$$

a kde $\varepsilon(XY, ZW) = \varepsilon(X, Z) \wedge \varepsilon(Y, W)$ je fuzzy ekvivalence úseček a $\varepsilon(X, Y) = \bigwedge_i \varepsilon(X_i, Y_i)$ je fuzzy ekvivalence vrcholů.

Máme tedy formálně popsány a fuzzifikovány vlastnosti primitivních gemetrických tvarů a (alespoň jednu) vlastnost popisující složený geometrický tvar. Položme $T = \{r, s, t, i\}$ jako terminály symbolizující obdélník, čtverec, (obecný) trojúhelník a rovnoramenný trojúhelník. Dále stanovme $N = \{T\}$. Pak pseudoterm $p(t_H) = T(i, s)$ nad (N, T) symbolizuje dům popsaný výše.

Označme $A_H = (Q, N, T, \mu, F)$ jako fuzzy tree automat rozpoznávající strom t_H. Označme $A'_H = (Q, N, T, \mu', F)$, kde μ' vznikla z μ nahrazením všech 1 (pro všechna $X \in (N \cup T)$) výrazem γ_X.

Příklad 6.7. *Uvažujme složený geometrický útvar C z obrázku 6. Pak automat A' bude nějak vypadat. (zde bude doplněno: domyslet to nějak!) .*

Takto vytvořený automat dokáže rozpoznávat geometrické tvary „podobné“ (ve smyslu relací γ) vzorovému. Nevýhodou tohoto řešení je, že je pevně svázán s aritou (a pořadím potomků) uzlú vzorového stromu. Navíc, stupeň pravdivosti popisující vztah v uzlu U stromu je schopen kalkulovat pouze se svými potomky (a nikoliv například svými sousedy či předky). Obě tyto výhody se však smývají, pokud se bude pozorovaný strom od vzoru lišit jen málo.

I přes tyto nevýhody však lze fuzzy tree automaty použít na podobnostní rozpoznávání složených geometrických tvarů.

7 Buněčné fuzzy automaty

Buněčné (fuzzy) automaty jsou další z výpočetních modelů, které se svojí základní myšlenkou podobají (fuzzy) automatům. Oproti „klasickým“ (fuzzy) automatům mají však značně zajímavější možnosti uplatnění. Proto jim v této práci bude věnována samostatná kapitola.

[6] Zde si dovolujeme značné zjednodušení. Vztah „být nad“ by měl být popsán například s využitím porovnávání y-ových souřadnic bodů.

7.1 „Bivalentní“ buněčný automat

Buněčné automaty a fuzzy buněčné automaty jsou výpočetní modely, které se koncepčně značně liší od klasických automatů. Dle [**?**] je jejich studium dokonce označováno za naprosto samostatné matematické paradigma. I přesto je v určitém smyslu je možné je považovat za zobecnění „klasických“ deterministických automatů. Dá se totiž říci, že se jedná o n-dimenzionální mřížku tvořenou instancemi téže konečného automatu.

Přesné vymezení pojmu „buněčný automat“ se často různí. Některé definice uvažují nekonečnou mřížku (např. [**?**], [**?**], [**?**]) jiné zase konečnou (např. [**?**]). Také se často kromě klasické čtvercové mřížky pracuje s s mřížkou trojúhelníkovou nebo šestiúhelníkovou (např. [**?**]).

Vzhledem k tomu, že úkolem této práce není studovat obecné vlastnosti buněčných automatů ale jen jejich fuzifikace a následné použití v praxi, bude zde nadefinovanán pouze standardní dvoudimenzionální buněčný automat (pracující na čtvercové mřížce). Právě tento typ automatu totiž našel v praxi největší uplatnění. V této práci se také pro jednoduchost omezíme jen na automat se čtvercovou mřížkou velikosti m.

Dvoudimenzionální buněčný automat je tedy mřížka $m \times m$ tvořena buňkami c_{ij}, $i, j \in [1, m]$. Každá buňka se nachází ve nějakém stavu q z množiny Q. Přechody mezi těmito stavy jsou realizovány přechodovými pravidly. Ty popsiuje přechodová funkce μ. Formálně tedy

Definice 7.1 (Bivalentní buněčný automat)**.** *Pro přirozené číslo m a konečnou množinu Q označme $A_m = (Q, \mu)$ jako dvoudimenzionální buněčný automat o rozměrech $m \times m$, kde Q je konečná množina stavů a μ přechodová funkce: $\mu : Q \times Q^k \to Q$ pro nějaké $1 \leq k \leq m^2$.*

Poznámka 7.1. *Buněčný automat se obvykle definuje jen předpisem pro přechodovou funkci, resp. výpisem přechodových pravidel. My se však budeme držet konceptu klasických automatů a budeme buněčný automat definovat jako strukturu.*

Značení. *Kde to bude možné, budeme indexy i, j vynechávat a namísto $c_{i,j}$ psát jen c. Fakt, že c je buňkou automatu A budeme značit $c \in A$. Fakt, že nějaká buňka c se nachází ve stavu q budeme značit $c = q$.*

Přechodová funkce μ přiřazuje buňce c stav q' na základě aktuálního stavu q a stavu dalších, tzv. okolních, k buněk. Označme $round(c_{ij})$ jako okolí buňky c_{ij}. Nejpoužívanějším okolím, které se používá, je Mooreovo okolí o poloměru 1, které je definováno jako sousedních 8 buněk buňky c_{ij}:

$$\begin{aligned} round(c_{i,j}) = (&c_{i-1,j-1},\ c_{i,j-1},\ c_{i+1,j-1},\\ &c_{i-1,j},\qquad\quad c_{i+1,j},\\ &c_{i-1,j+1},\ c_{i,j+1},\ c_{i+1,j+1}) \end{aligned}$$

s tím, že nedefinované hodnoty ($i, j < 1$ nebo naopak $i, j > m$) za hranicemi mřížky se stanovují na nějakou pevně zvolenou hodnotu z Q.

Přechodová funkce μ pak vypadá následovně:

$$\mu(c, round(c)) = f(c, round(c))$$

kde f je funkce přiřazující buňce c s okolními buňkami $round(c)$ nový stav. V praxi se nejčastěji používá sada tzv. If-Then pravidel.

{ex:GameOfLife}

Příklad 7.1. *Typickým příkladem buněčného automatu je tzv. Hra života (Game of Life) (např. [?]). Jedná se o jednoduchý simulátor živého organizmu.*

Hra života uvažuje dvoustavovou možinu stavů, tj. $Q = \{0, 1\}$ *a dvoudimenzionální mřížku (*$n = 2$*). Je-li hodnota buňky* c *rovna* 1 *hovoříme, že je buňka „živá“, je-li rovna* 0 *nazýváme buňku „mrtvou“. Přechodová funkce* μ *je dána následujícími pravidly:*

1. *Je-li buňka* c *živá a je v jejím okolí méně, než* 2 *živé buňky, buňka umírá (ve smyslu „samoty“)*
2. *Je-li buňka* c *živá a je v jejím okolí více, než* 3 *živé bunky, buňka umírá (ve smyslu „vyčerpání zdrojů“)*
3. *Je-li buňka* c *mrtvá, a v jejím okolí jsou přesně* 4 *živé bunky, je buňka oživena*
4. *Ve všech ostatních případech zůstává buňka buďto mrtvá nebo živá*

Označme

$$neighs_{i,j} = \left(\sum_{k,l \in \{-1,0,+1\}} c_{i+k,j+l} \right) - c_{i,j}$$

jako počet živých buněk sousedících s $c_{i,j}$.

Pak můžeme přechodovou funkci μ *zapsat následovně:*

$$\mu(c_{i,j}, round(c_{i,j})) = \begin{cases} 0 & pokud\ c_{i,j} = 1\ a\ neighs_{i,j} < 2 \\ 0 & pokud\ c_{i,j} = 1\ a\ neighs_{i,j} > 3 \\ 1 & pokud\ c_{i,j} = 0\ a\ neighs_{i,j} = 4 \\ c_{i,j} & jinak \end{cases}$$

Soubor všech stavů všech buněk se nazývá – podobně, jako u konečných automatů – konfigurace buněčného automatu.

Definice 7.2 (Konfigurace buněčného automatu)**.** *Zobrazení* $C : [1, m] \times [1, m] \to Q$ *se nazývá konfigurace buněčného automatu.*

Podobně jako u klasických automatů můžeme hovořit o počáteční konfiguraci. Ta – na rozdíl od klasických automatů – může být libovolná. Koncová konfigurace však pro buněčné automaty neexistuje. Výpočet buněčného automatu totiž nemá stanoven žádný konec. Můžeme však uvažovat konfiguraci dosažitelnou. Pro její zavední je však třeba nadefinovat výpočet buněčného automatu.

Definice 7.3 (Krok výpočtu a výpočet buněčného automatu)**.** *Binární relaci* $\vdash$ *na množině konfigurací buněčného automatu nazvěme krok výpočtu, pokud* $C \vdash C'$ *(*$(C, C') \in \vdash$*) a pro všechny* $c_{i,j} \in A$ *platí:*

$$C'(i, j) = \mu(C(i, j), round(c_{i,j}))$$

Reflexivní a tranzitivní uzávěr $\vdash^*$ *relace* $\vdash$ *nazvěme výpočtem buněčného automatu.*

Definice 7.4 (Konfigurace dosažitelná)**.** *Mějme konfiguraci C buněčného automatu. Pak o konfiguraci C' říkáme, že je dosažitelná z konfigurace C, pokud existuje výpočet z C k C', tj.*

$$C \vdash^* C'$$

V opačném případě říkáme, že konfigurace je nedosažitelná.

Vzhledem k tomu, že přechodová funkce buněčného automatu je deterministická, je zřejmě determinstický i její výpočet, tj. pro každou konfiguraci C existuje právě jedna konfigurace C', pro kterou platí $C \vdash C'$. Relace $\vdash$ tak generuje posloupnost konfigurací. Očíslujeme-li si tuto posloupnost, pak počáteční konfigurace výpočtu bude $C^{(0)}$ a posloupnost pak bude vypadat následovně:

$$C^{(0)} \vdash C^{(1)} \vdash C^{(2)} \vdash \dots$$

Nazývejme i-tý prvek této posloupnosti jako konfigurace i-té generace a samotné hodnoty i jako generace (hovoříme tak o nulté, první, druhé, ... generaci).

Konfigurace buněčného automatu se často zobrazuje graficky. Zakresluje se jako bitmapa, kde jednotlivé pixely reprezentují stavy buněk na odpovídajících souřadnicích. Každému stavu je přiřazena barva, kterou je tento stav znázorněn. Pro zobrazení výpočtu se občas používá třírozměrné zobrazení (tj. voxelový obrázek), kde třetí rozměr odpovídá generaci.

Příklad 7.2. *Ukázka výpočtu automatu $A_1 00$ realizující Hru života je na obrázku 7. Černá barva symbolizuje mrtvou buňku, bílá pak živou.*

7.2 Buněčné fuzzy automaty

Buněčný fuzzy automat není na rozdíl od klasického fuzzy automatu prostým zobecněním bivalentního buněčného automatu. Hlavním důvodem je bezesporu fakt, že přechodová funkce bivalentního buněčného automatu je deterministická a úplná. Tedy, že každá buňka vždy přejde ze stavu q do nějakého stavu q'. Buňka se tedy musí nacházet vždy v právě jednom stavu. Nemůže nastat situace, že by buňka přešla „do více stavů současně“[7] (přechodová funkce by nebyla deterministická) nebo nepřešla do žádného (přechodová funkce by nebyla úplná).

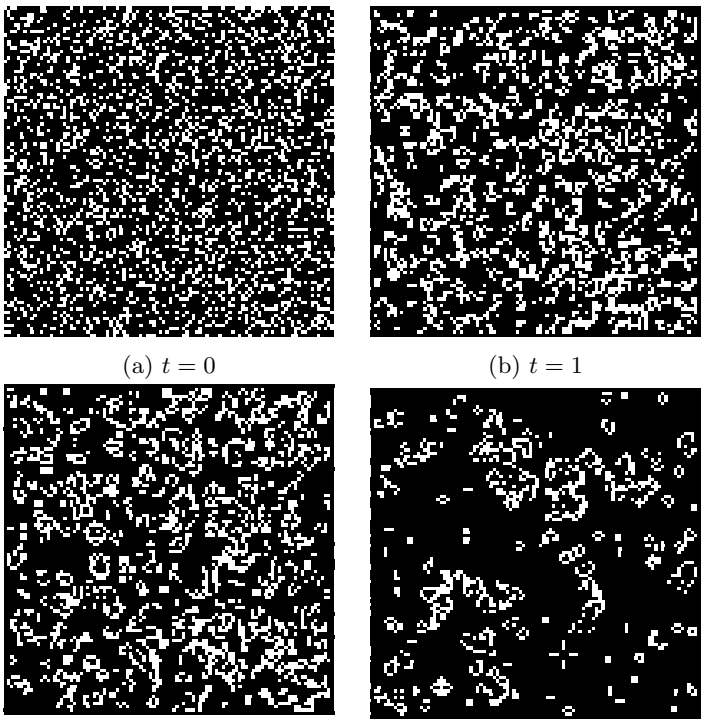
Vzhledem k tomu, že stejné chování budeme vyžadovat i u buněčného fuzzy automatu, „odstupňování“ přechodové funkce (zavední fuzzy přechodové funkce) by nemělo smysl[8].

Triviální způsob, jak zavést buněčný fuzzy automat je jako bivalentní buněčný automat, jehož množina stavů je rovna intervalu $[0, 1]$. Takovýto automat budeme označovat jako $[0, 1]$-buněčný fuzzy automat.

Definice 7.5 ($[0, 1]$-buněčný fuzzy automat)**.** *Jako $[0, 1]$-buněčný fuzzy automat velikosti m budeme označovat bivalentní buněčný automat $A = (Q, \mu)$, kde $Q = [0, 1]$.*

[7] Jak bude ukázáno, tento předpoklad lze obejít

[8] Teoreticky by bylo možné nahradit stav buňky fuzzy stavem buňky. Takováto úprava by však výrazně zvýšila výpočetní složitost výpočtu automatu a například také znesnadnila grafické znázornění jeho konfigurací a proto zde nebude uvažován.



(a) $t = 0$ (b) $t = 1$

(c) $t = 3$ (d) $t = 44$

Obrázek 7: Několik generací výpočtu buněčného automatu „Hra života“ s náhodnou počáteční konfigurací

{img:GameOfLife}

Jedná se tedy jen o speciální případ klasického bivalentního buněčného automatu. Každá buňka c takového automatu pak vždy splňuje následující tvrzení:

„buňka c se nachází ve stavu 1“ ve stupni q
„buňka c se nachází ve stavu 0“ ve stupni $1 - q$

Díky tomu je obejit předpoklad, že automat se smí nacházet pouze v jednom stavu současně.

Druhý způsob, jak definovat buněčný fuzzy automat, může pracovat s libovolnou množinou stavů. Využívá fuzzy If-Then pravidel, bude mu proto říkáno „buněčný automat s fuzzy logikou“.

Příklad 7.3. *Příkladem buněčného automatu s fuzzy logikou může být například následující automat. Množina stavů bude obsahovat přirozená čísla z intervalu* $[0, 150)$. *Stanovíme čtveřici fuzzy množin* ς_L, ς_M, *a* ς_H *ve významu „hodnota q je nízká“, „hodnota q je střední“ a „hodnota q je vysoká“. Pravidla automatu pak mohou vypadat následovně:*

- *Pokud* $q^{(t)}_{i-1,j-1} = L$, *pak* $q^{(t+1)}_{i,j} = H$
- *Pokud* $q^{(t)}_{i-1,j-1} = L$ *nebo* $q^{(t)}_{i-1,j-1} = M$, *pak* $q^{(t+1)}_{i,j} = M$
- *Pokud* $q^{(t)}_{i,j-1} = L$ *a* $q^{(t)}_{i,j+1} = L$, *pak* $q^{(t+1)}_{i,j} = L$

7.3 Obecně k aplikacím

Buněčné automaty (obecně) nacházejí široké uplatnění v rozličných oblastech. Dle [**?**] se s nimi lze setkat v matematice, informatice, fyzice, biologii, společenských vědách, např. filozofii a umění. Používají se například pro simulace fyzikálních dějů (např. difuze, tok tekutin), krystalizace, biologickým, urbanistickým, environmentalistickým a geografickým simulacím či například ke generování fraktálů.

Co se buněčných fuzzy automatů týče, jejich aplikace nejsou tak rozšířené. Jedním z důvodů, proč tomu tak je, je velká podobnost bivalentních buněčných automatů a buněčných fuzzy automatů. Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole, $[0, 1]$-buněčný fuzzy automat je jen speciálním případem klasického byvalentního. Obdobně, práce s fuzzy If-Then pravidly je vlastně jen speciální případ klasických If-Then pravidel.

Například [**?**] používá čísla z intervalu $[0, 1]$ jako vstupní informaci. [**?**] používá automat podobný buněčnému automatu s fuzzy logikou, který navíc pracuje se stavy na intervalu $[0, 1]$. Obdobně, [5] používá buněčné automaty v kombinaci s určitou formou fuzzy logiky (avšak automat napovažují za buněčný fuzzy automat). V [**?**] je použit automat pracující na intervalu $[0, 255]$, který by šel snadnou modifikací konvertován na $[0, 1]$-buněčný fuzzy automat. Automat v [**?**] vykazuje určitou náhodnost a bylo by tak možné považovat jej za pravděpodobnostní.

Další varianty buněčných automatů a jejich uplanění jsou vyjmenovány v [**?**]. Ve všech případech se uvažují vždy dvoudimenzionální bunečné automaty.

Aplikace fuzzy automatů se dají rozdělit do dvou kategorií. Do první z nich spadají urbanistické simulace. Pomocí buněčných fuzzy automatů tak byly řešeny simulace hustoty dopravy [**?**], růstu mořských řas u pobřeží [**?**] či plánování elektrické rozvodné sítě [**?**]. Zdaleka nezčastější však bylo nasazení buněčných

fuzzy automatů na řešení problému městského růstu. Z tohoto důvodu bude tomuto problému věnována samostatná podkapitola.

Další oblastí, kde nalezly buněčné fuzzy automaty uplatnění je zpracování obrazu. Používají se například na zaostřování obrazů [?][?], hledání hran [?][?], vyhledávání vzorů [?][?] či odstranění šumu [?][?][?]. V následujcíích podkapitolách budou některé takové techniky rozebrány podrobněji.

Co se pravděpodobnostních buněčných automatů týče, ty nacházejí uplatnění všude tam, kde je třeba dodat náhodnost a nepravidelnost. Například pro problém simulace městského růstu[?] [?]. Dále pak například pro náhodné generátory, generátory šumu, simulace pohybu částic, difuze částic či nukleace (vznik krystalů) [?].

Před studiem samotných aplikací je nutné dodat, že aplikace zde popsané jsou pouze teoretickým popisem sestaveným na základě použitých zdrojů. Každá z těchto aplikací vyžaduje kalibraci parametrů (např. počet generací, návrh fuzzy množin) a přizpůsobení na míru konkrétní instance problému. Většina zdrojů proto automaticky kombinuje několik technik dohromady. Například [?] [?] využívají buněčné fuzzy automaty v kombinaci s neuronovými sítěmi, v [?] s genetickýni algoritmy a [?] [?] s pomocí učícího se automatu. *(zde bude doplněno: dohledat, vysvětlit a ocitovat, co to je učící se automat)* Většinou je také nutná hluboká znalost dané problematiky, nejlépe přítomnost experta.

7.4 Problém městského růstu (urban growt problem)

Problém městského růstu je problém z oblasti urbanistiky. Řešením tohoto problému je co nejpřesnější predikce rozvoje městské zástavby na základě historických záznamů a současné situace. Ve zobecněné podobě se nemusí jednat jen o růst městské zástavby, ale například nárust vytíženosti silnic, kácení lesů nebo vytěženost ložisk. Stejně tak se nutně nemusí jednat o růst, ale obecný vývoj v čase. V této kapitole však budeme pro jednoduchost uvažovat standardní problém, tedy městský růst.

Buněčné fuzzy automaty byly již mnohokrát použity pro řešení tohoto problému. Pomocí těchto automatů byl například modelován rozvoj zástavby v městě Riyadh v Saudské Arábii [?], [?], regionu Helensvale v Austrálii [?], ostrova Sv. Lucie v Krabiském moři [?], oblasti North Vancover v Kanadě [?], oblasti Mesogia v Řecku [?], [?], oblasti Sanfranciského zálivu v Kalifornii [?] nebo části Tianhe města Guangzhou v jihovýchodní Číně [?]. Další literatura věnující se uplatnění (fuzzy) buněčných automatů při řešení problém městského růstu je k dispozici např. zde: [4], [?] a [?].

Pojďme se nyní podívat, jak se buněčné fuzzy automaty pro řešení tohoto problému používají. Základní idea pro nasazení fuzzy automatů je následující: Stav zástavby reprezentujme jako konfiguraci fuzzy buněčného automatu. Pak růst zástavby bude odpovídat přechodům mezi těmito konfiguracemi.

V první fázi je nutné si sledovanou oblast („město“) rozdělit na dílčí parcely. Každé takové parcele pak bude odpovídat jedna buňka buněčného fuzzy automatu. U každé parcely je třeba zjistit rozličné ukazatele, např.:

- je-li parcela zastavěna (popř. jak moc)
- typ zástavby na parcele (např. rodinné domy, obytné domy, komerční prostory, prostory pro rekreaci, dopravní stavby, průmyslová zóna)

- jak moc žije na parcele obyvatel
- jak moc vysoké budovy stojí na parcele
- jak velké produkuje parcela znečištění ovzduší/hluku

Nejčastěji se jako ukazatel používá informace o zastavěnosti parcely. Ta se totiž dá poměrně snadno stanovit s pomocí satelitních snímků sledované oblasti.

Dále je třeba získat ukazatele, které mají vliv na růst zástavby. Mezi takovéto ukazatele patří například:

- vzdálenost parcely od centra města (popř. škol, nákupních center, ...)
- dopravní obslužnost parcely (vzdálenost od hlavní silnice nebo zastávek hromadné dopravy)
- atraktivita lokality (výhled na město, okolní zástavba, ...)
- stavební podmínky (podloží, záplavová zóna, terén, ...)

Za povšimnutí stojí, že některé ukazatele jsou neměnné v čase (např. vzdálenost od centra města nebo podloží).

Následně je možné sestavit přechodová pravidla. Ta mohou být například:

- Je-li vzdálenost parcely od centra města malá, pak růst zástavby bude velký
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi malá, pak růst zástavby bude malý a množství hluku bude velké
- Je-li vzdálenost od hlavní silnice velmi velká, pak růst zástavby bude malý
- Není-li lokalita atraktivní, pak růst zástavby bude malý

Další ukázky pravidel jsou např. v [**?**], [10] a[**?**]. Ukázku toho, jak se chová automat při různých počátečních konfiguracích lze spatřit na obrázku 8.

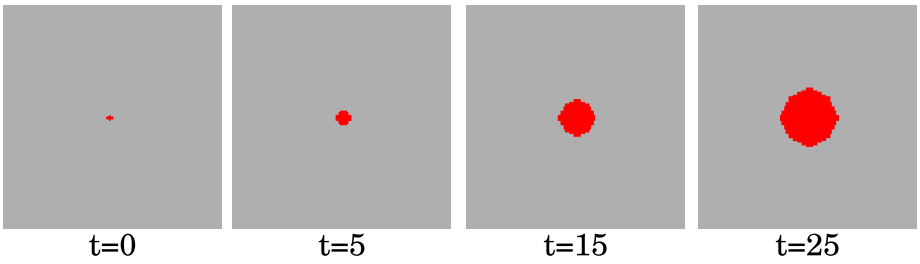
Na obrázku 9 je k vidění konkrétní ukázka městského růstu. Na obrázku jsou pro porovnání zobrazeny jak vypočtené stavy zástavby, tak i skutečné (upravené satelitní snímky). Na snímcích je patrné, že simulace rozvoje mezi lety 1987 a 1997 dosáhla poměrně přesných výsledků. Stejně tak, v simulaci růstu mezi lety 1997 a 2005 naznačuje jen malý rozvoj. Při simulaci od roku 1987 do roku 2005 už jsou patrné větší odlišnosti (simulace nevyprodukovala tak výrazný růst, jaký doopravdy nastal).

7.5 Zpracování obrazu

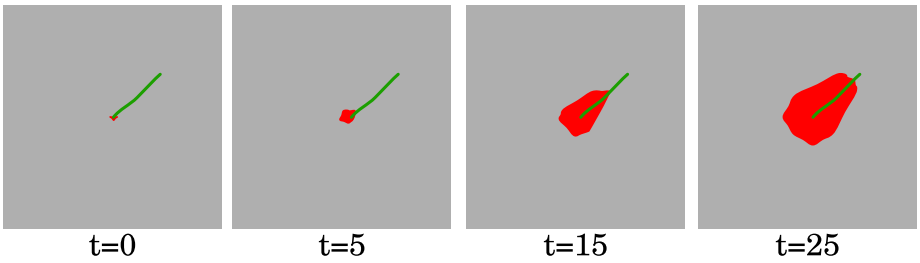
Zpracování obrazu je v dnešní době velmi populární informatická disciplína. Jak bude ukázáno, nasazení buněčných fuzzy automatů zde nachází značné uplatnění.

Uvažujme obraz jako mřížku $m \times m$ pixelů s odstíny šedi jako hodnotami od 0 do 1. Hodnota 0 značí černou, hodnota 1 bílou. Jinými slovy, barva (resp. stupeň šedi) pixelu odpovídá stupni pravdivosti tvrzení „pixel má bílou barvu“. Tato skutečnost nám umožňuje pracovat s obrazem pomocí fuzzy logiky.

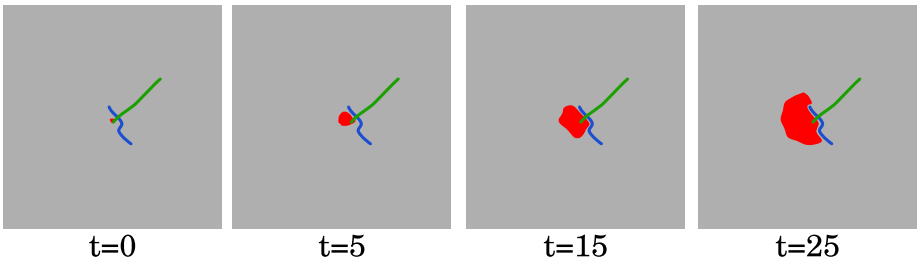
Každý obraz tak můžeme považovat za konfiguraci buněčného fuzzy automatu s množinou stavů $Q = [0, 1]$. Návrhem vhodné přechodové funkce tak



(a) Růst města bez dalších dodatečných podmínek



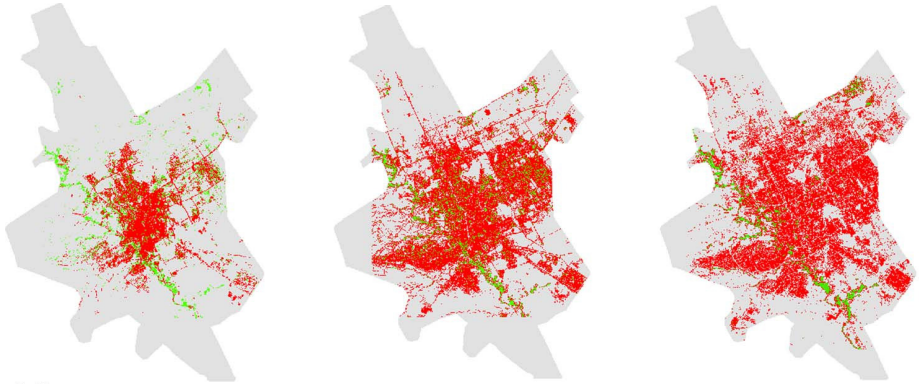
(b) Růst města podél silnice



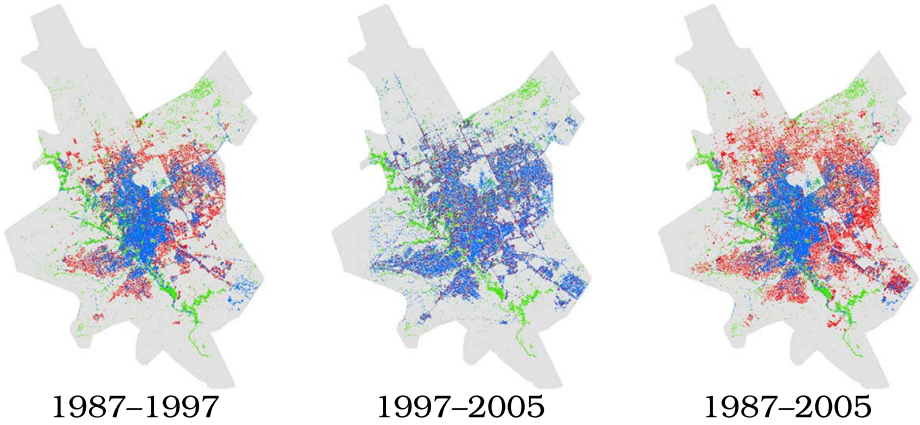
(c) Růst města brzděn řekou

Obrázek 8: (převzato z [**?**], upraveno) Ukázky chování automatu při různých počátečních konfiguracích. Šedě jsou znázorněny prázdné parcely, červeně zástavba, zeleně hlavní silnice a modře řeky.

{img-VarTransRuls}



(a) Skutečný stav zástavby v uvedeném roce. Červená značí zástavbu, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.



(b) Simulovaný stav zástavby. Modrá značí zástavbu na počátku sledovaného období, červená značí (novou) zástavbu na konci sledovaného období, zelená přírodní oblasti (např. vodní plochy) a šedá nezastavěné plochy.

Obrázek 9: (převzato z [**?**]) Ukázky simulace městského růstu {img-UrbGroProSample}

Obrázek 10: Ukázky jednoduchých filtrů. Vlevo původní obrázek, uprostřed obrázek po 5 generacích jednoduchého rozostřovacího filtru a v pravo obrázek po 8 generacích filtru pro zvýraznění tvarů ($\epsilon = 1, 1$). {img:Filters}

můžeme vytvořit automat, který provádí určitou operaci pro úpravu obrazu. Typickou operací je tzv. obrazový filtr, který obrazu $m \times m$ přiřazuje obraz $m \times m$.

Speciálním případem takového automatu je automat realizující konvoluční metodu [**?**]. Konvoluce je v základu obrazový filtr, který přiřazuje (novou) hodnotu pixelu na základě váženého součtu (stávající) hodnoty pixelu a hodnot pixelů sousedních. Váhy bývají reprezentovány tzv. konvoluční maticí. Například matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je konvoluční maticí jednoduchého rozostření. Aplikuje se následujícím způsobem:

$$c'_{i,j} = \frac{1}{S} \sum_{k,l \in \{-1,0,+1\}} B_{k+1,l+1} c_{i+k,j+l}$$

kde S je součet hodnot v matici B, tj. 16.

Další ukázkou grafického filtru pracujícího s využitím buněčného fuzzy automatu je například filtr pro zvýraznění tvarů. Je daný následujícím předpisem

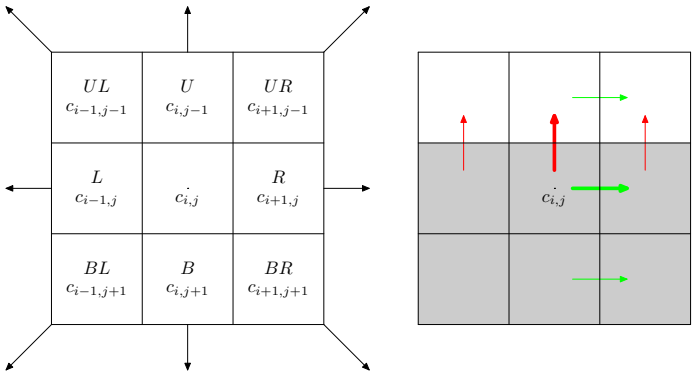
$$c'_{i,j} = \max(0, \min(1, \begin{cases} \epsilon(c_{i,j} + 1) - 1 & \text{pokud } c_{i,j} > neighs_{i,j} \\ \epsilon c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} < neighs_{i,j} \\ c_{i,j} & \text{pokud } c_{i,j} = neighs_{i,j} \end{cases}))$$

kde $\epsilon > 1$ je parametr udávají agresivitu zvýrazňování a $neighs_{i,j}$ je součet hodnot okolních buněk (viz příklad 7.1).

Ukázky aplikací obou filtrů jsou k nalezení na obrázku 10. V následujících podkapitolách budou prezentovány některé další (pokročilejší) techniky zpracování obrazu využívající buněčné fuzzy automaty.

7.6 Hledání hran

Hledání hran je jednou ze základních technik zpracování obrazu. Hledání hran je často klíčové pro rozpoznávání vzorů v obrazech. V dnešní době existuje značné množství technik pro rozpoznávání hran [**?**]. V [**?**] je popsán poměrně elegantní způsob, jak hledání hran vyřešit pomocí buněčných fuzzy automatů.



(a) 8 směrů

(b) Ukázka hrany procházející buňkou. Ve směru U (červené šipky) prochází hrana, ve směru R (zelené šipky) neprochází.

{img@ImgeDirensionsEdges}

Označme osmici směrů dle obrázku 11a. Množinu těchto směrů nazvěme dim. Dále označme c_X (kde $X \in dim$) jako sousední buňku buňky c ve směru X.

Autoři vycházejí z následující úvahy: Prochází-li buňkou c hrana ve směru $X \in dim$, pak má buňka c_X výrazně jinou barvu, než buňka c (viz obrázek 11b). Prochází-li buňkou c hrana v alespoň jednom směru $X \in dim$, pak můžeme říci, že buňka obsahuje hranu.

Nadefinujme fuzzy relaci „buňky c a c' mají zcela rozdílnou barvu“ předpisem:

$$\Delta(c, c') = 1 - |c - c'|$$

Označme Δ' jako doplňek k Δ, tedy „buňky c a c' mají zcela shodnou barvu“.
1290 Pak můžeme stanovit fuzzy množiny ϵ_X (pro všechny $X \in dim$) ve smyslu „buňkou c prochází hrana ve směru X“. Pro $X = U$ by pravidla vypadala následovně:

- Pokud $\Delta'(c_L, c_{UL})$, $\Delta'(c, c_U)$ a $\Delta'(c_R, c_{UR})$ pak $\epsilon_U(c) = 0$
- Pokud $\Delta(c_L, c_{UL})$, $\Delta(c, c_U)$ a $\Delta(c_R, c_{UR})$ pak $\epsilon_U(c) = 1$

Obdobným způsobem by se dodefinovaly zbývající fuzzy množiny ϵ_X. Následně lze nadefinovat fuzzy množinu ϵ ve smyslu „buňkou c prochází hrana“ pomocí pravidel:

- Pokud $c = \epsilon_U$ pak $\epsilon = 1$
- ...
1300 • Pokud $c = \epsilon_{UR}$ pak $\epsilon = 1$
- Jinak $\epsilon = 0$

Pomocí těchto pravidel tak lze sestavit buněčný fuzzy automat s fuzzy logikou, který rozpoznává hrany.

Dle [?] může být hodnota stupně „buňkou c prochází hrana“ použita jako parametr α tzv. Gas Diffusion Modelu, jednu z technik zaostřování obrazu.

(a) Vstupní obraz (b) Zašumněný obraz (c) Obraz s odstraněným šumem

Obrázek 12: (převzato z [**?**]) Ukázka odstraňování šumu {img:Noises}

7.7 Ostraňování šumu

Odstraňování šumu je další častý problém, který je třeba při zpracování obrazů řešit. Pro studium technik odstraňování šumu se používá zašumnění tzv. impulzním šumem popř. šumem „sůl a pepř“. Zašumnění impulzním šumem nahradí stanovený počet pixelů náhodnými barvami. Šumění „sůl a pepř“ pak narazuje pixely buď bílou (1) nebo černou (0) barvou.

V [**?**] je prezentována jednoduchá avšak efektivní technika, která kombinuje klasický bivalentní buněčný automat s buněčnýcm fuzzy automatem.

V první fázi je klasickým buněčným automatem šum detekován. Buňka obsahuje šum, pokud rozdíl její barvy od průměrné barvy jejich sousedů překračuje stanovenou mez. Tato mez může být stanovena statisticky, například na základě směrodatné odchylky barev pixelů celého obrazu. V druhé fázi je aplikován buněčný fuzzy automat, který buňky obsahující šum nahradí hodnotami spočtenými z jejich okolí.

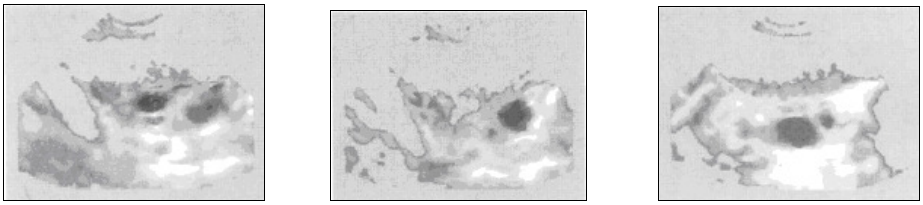
Jak autoři poukazují, tato technika je na odstraňování šumu velmi efektivní. Ukázky výsledků jsou na obrázku 12.

Velmi podobný způsob ostranění šumu je popsán v [**?**]. Zde však operace detekce šumu a jeho odstranění provádějí v jednom kroku.

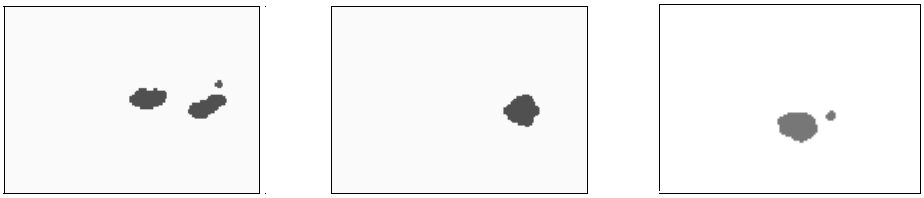
7.8 Rozpoznávání jednoduchých vzorů

Ropoznávání vzorů je další z častých způsobů práce s obrazy. Obecně je problém definován (obdobně, jako rozpoznávání textových vzorů v kapitole *(zde bude doplněno: ref na kapitolu)*) jako problém určení, zda-li obraz obsahuje předem stanovený vzor či ne. Obvykle nás také zajímá, kde přesně se vzor v obraze vyskytuje.

Rozpoznávání vzorů v obrazech je však značně komplikované i pro buněčné fuzzy automaty. V [**?**] je popsán způsob, který popisuje rozpoznávání vzorů v obrazu velikosti $1 \times m$ pomocí (jednodimenzionálního) buněčného automatu. Pomocí fuzzy množin reprezentující různé stupně šedi jsou sestavena pravidla, která popisují jak vzorový obraz, tak obrazy jemu podobné. Množina přechodových pravidel tak vyjmenovává téměř všechny možné kombinace hodnot fuzzy množin pro všechny buňky v okolí. Velikost přechodové funkce je tak exponenciální vzhledem k velikosti okolí buňky. Vzhledem k tomu, že okolí buňky je vlastně



(a) Ultrazvukové snímky vaječníků



(b) Rozpoznané folikuly

Obrázek 13: (převzato z [**?**], upraveno) Ukázky rozpoznávání folikul {img:Follicles}

předpisem pro vzor, je tato technika nepoužitelná pro vzory větší než jednotky pixelů.

Zcela jiný přístup pužívají v [**?**]. Vzor nepovažují jako konkrétní kombinaci odstínů barev, ale jako část obrazu splňující určité vlastnosti.

Autoři metodu doporučují na vyhledávání vzorů v lékařských snímcích (např. ultrazvuk, Röntgen). Techniku demonstrují na ultrazvukových snímcích vaječníků. Poukazují na to, že folikula[9] je na snímku tvořena jednolitou svrnou stejné barvy, obklopena ostatní tkání (barevné přechody). Ukázka několika snímků je k dispozici na obrázku 13a. Obecně tak lze hovořit o „popředí“ (folikula) vystupující z „pozadí“.

K nalezení popředí používají dvojici buněčných fuzzy automatů. První automat určuje hodnotu „buňka je kandidát na buňku folikuly“. Druhý automat pak buňky, které nebyly označeny jako kandidáti, ostraňuje (nastavuje na 0).

Přechodová funkce první automatu je poměrně složitá, pracuje s 5 stupni šedi a třemi stupni kandidatury, takže zde nebude rozebírána. Druhý automat pak funguje elementárně. Buňky, jež nejsou označeny jako dostatečné kandidáty na folikuly, jsou odstraněny, ostatní ponechány.

Na obrázku 13 jsou k nahlédnutí ukázky rozpoznaných folikul pomocí této techniky.

8 Strojové učení

Strojové učení je technika pro přibližné řešení komplikovaných či složitých problémů. Spočívá v tom, že namísto přímého hledání algoritmu, který požadovaný problém řeší, navrhujeme algoritmus, jehož vstupem je popis problému (ve vhodném formátu) a výstupem je algoritmus pro řešení problému. Pro popis problému se typicky používá deklarativní přístup, tj. „co má být při určitém vstupu výsledkem“ namísto „jak ze vstupu spočítat výsledek“.

[9] Folikula je dutinka ve vaječníku, v níž probíhá zrání vajíčka. *(zde bude doplněno: ocitovat: http://lekarske.slovniky.cz/pojem/folikul)*

Je třeba mít na paměti, že správnost „vygenerovaného algoritmu“ závisí na správnosti popisu řešeného problému. Vzhledem k tomu, že strojové učení se používá pro komplikované problémy, popis problému vkládaný do patřičné techniky strojového učení bude zřejmě zjednodušený. Tím vzniká prostor pro nepřesnost řešení.

Na druhou stranu, s použitím fuzzy či pravděpodobnostního přístupu můžeme tento fakt vzít v potaz. Vygenerovaný algoritmus tak sice nebude fungovat správně, nicméně jeho výsledkem bude moci být například „y je správným řešením s pravděpodobností p“ či „z je správným řešením ve stupni d“. Propojení strojového učení s fuzzy nebo pravděpodobnostního přístupu by tak mělo být přínosem. Navíc, jak bude ukázáno, může být i přirozené.

Mezi nejznáměnšjí techniky strojového učení patří například neuronové sítě, rozhodovací stromy či shlukování. Následuje popis neuronových sítí. Ty mají totiž nejlepší předpoklady pro provázání s fuzzy automaty a následné využití v praxi.

8.1 Neuronové sítě

Umělé neuronové sítě (dále jen „neuronové sítě“) jsou jednou z nejzákladnějších technik strojového učení. Neuronové síťě jsou inspirovány zpracováním informací pomocí nervových buněk známých z biologie. Vygenerovaný algoritmus je tvořen sítí tzv. neuronů, které jsou propojeny v zpravidla rozsáhlou síť. Tato síť obsahuje spoustu parametrů, které jsou nastaveny tak, aby síť tvořila algoritmus řešící požadovaný problém.

Následuje formální zavedení uvedených pojmů. Popis neuronových sítí je převzat z [**?**]. Označme X jako tzv. signální množinu, tj. množinu všech možných hodnot, kterých mohou nabýt signály přešenášené prostřednictvím spojení. Dále označme S jako množinu stavů neuronů.

V tomto textu budeme jako signální množinu X pokládat reálný interval $(0, 1)$ (v souladu s fuzzy teorií), jako množinu S stavů pak množinu všech reálných čísel. Dále budeme uvažovat pouze neurony diskrétní (v čase). Říkáme, že diskrétní neuron s nabývá v čase $t \in \mathbb{N}$ stavu $s(t)$. Dále označnme $y(t)$ jako výstup neuronu s v čase t.

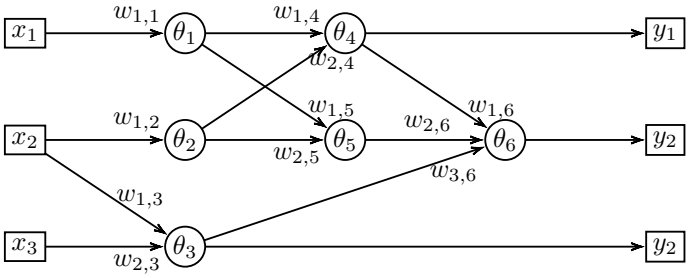
Definice 8.1 (Diskrétní neuron)**.** *Jako diskrétní neuron označujeme dvojici funkcí $f : X^n \times S \to S$ (přechodová funkce) a $g : S \to X$ (výstupní funkce) tak, že:*

$$s(t) = f(x_1(t-1), \dots x_n(t-1), s(t-1))$$
$$y(t) = g(s(t))$$

Poznámka 8.1. *x_1, ..., x_n v předchozí definici značí signální spojení, a to buď ze vstupů sítě k neuronům, nebo mezi jednotlivými neurony.*

Příklad 8.1. *Pro jeden z nejznáměnších, tzv. McCulloch-Pittsův neuron, vypadají funkce f_j a g_j neuronu s_j následovně:*

$$f_j(x_{1,j}(t), \dots x_{n,j}(t), s_j) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,j} x_{i,j}(t)$$
$$g_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x < \theta_j \\ 1 & \text{pokud } x \geq \theta_j \end{cases}$$



Obrázek 14: Ukázka neuronové sítě {img:SimplNeuNet}

kde $w_{1,j}, \ldots, w_{n,j}$ jsou tzv. synaptické váhy neuronu s_j a θ_j je jeho tzv. prahová hodnota.

Definice 8.2 (Neuronová síť)**.** *Jako neuronovou síť označme strukturu (X, S, N, I, O, o), kde X (signální množina) a S (množina stavů) byly popsány výše, N je množina neuronů, $I \subseteq X^m$ je množina vstupních spojení a $O \subseteq X^n$ množina výstupních spojení a $o : N \to O$ zobrazení propojující neurony s výstupními spojeními.*

Definice 8.3 (Rekurentní a přímočará neuronová síť)**.** *Obsahuje-li neuronová síť cyklus, tj. existuje v ní alespoň jeden neuron s splňující*

$$s(t) = f(s_1(t-1), \ldots, s_2(t-1+k), \ldots, s_n(t-1), s(t-1))$$

kde $k \geq 1$, pak se síť nazývá rekurentní. V opačném případě se nazývá přímočará.

Příklad 8.2. *Mějme $I = \{x_1, x_2, x_3\}$, $I = \{y_1, y_2, y_3\}$ a $o(s_4) = y_1$, $o(s_6) = y_2$, $o(s_3) = y_3$. Pak pro množinu $N = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ McCulloch-Pittsových neuronů znázorněných na obrázku 14 tvoří (X, S, N, I, O, o) přímočarou neuronovou síť.*

8.2 Konstrukce neuronové sítě

Existují dva základní způsoby, jak zkonstruovat neuronovou síť. Prvním je pomocí znalostní báze a druhý pomocí trénovacích dat. Jak znalostní báze, tak trénovací data nám zde plní účel popisu problému, který má neuronová síť řešit. V praxi se často používá kombinace obou přístupů.

Uvažujme, že máme Množinu P If-Then pravidel „Jestliže $x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}$ pak y_j “. Pak pro tuto množinu můžeme vytvořit neuronovou síť tak, že každému pravidlu j vytvoříme následující neuron: *(zde bude doplněno: doplnit pravidlo pro disjunkce, tj. když je více pravidel s „pak y“)*

$$y_j(t) = s_j(t) = x_{j,1}(t-1) \wedge \cdots \wedge x_{j,n}(t-1)$$

Takto vytvořená neuronová síť bude schopna pracovat jak s klasickými If-Then pravidly, tak i s fuzzy If-Then pravidly.

Druhým způsobem, jak zkonstruovat neuronovou síť, je pomocí trénovacích dat. Tato technika se dále dělí na učení s učitelem a učení bez učitele. V tomto textu se spokojíme s popisem učení s učitelem.

Hovoříme-li o trénovacích datech v souvislosti s učením s učitelem, pak jako trénovací data považujeme konečné zobrazení, které vstupům problému

přiřazuje správné nebo očekávané výsledky. Na počátku se sestaví neuronová síť s náhodnými parametry a tzv. učení se její parametry postupně modifikují tak, aby byla schopna správně přiřazovat vstupům z trénovací množiny odpovídající výstupy.

(zde bude doplněno: backpropagation algorithm (běžný algoritmus učení)?)

V praxi je možné oba přístupy kombinovat. Typicky se tedy sestaví neuronová síť pomocí znalostní báze, která je následně pomocí trénovacích dat přizpůsobena skutečným datům. Navíc, díky znalostní bázi neuronová síť je hned má hned v prvních fázích učení určitý přehled o řešeném problému a její učení tak může probíhat značně efektivněji. *(zde bude doplněno: fakt?)*

8.3 Fuzzy automaty a neuronovky

Bylo zjištěno, že fuzzy automat může být konvertován do neuronové sítě. Této problematice se věnují např. v [15], [3] [1], [**?**], [**?**], [**?**], [**?**].

Ve zjednodušené podobě se bude jednat o neuronovou síť, která bude realizovat jen přechodovou funkci, tj. přechod mezi stavy na základě vstupu. Vstupem neuronové sítě bude zakódování fuzzy stavu, v jakém se automat nachází a symbol na vstupu automatu. Výsledkem výpočtu pak bude informace, do jakého/jakých stavů by měl automat přejít, tj. opět fuzzy stav.

Na základě neuronové sítě realizující přechodovou funkci pak může být sestavena neuronová síť, která si sama pamatuje fuzzy stav, v jakém se výpočet nachází. Vzhledem k tomu, že taková neuronová síť bude muset být rekurentní, bude její struktura složitější a nad rámec této práce. Vstupem takové neuronové sítě pak bude v jednotlivých časových kvantech vstupní symboly a na výstupu číslo z intervalu $(0, 1)$ reprezentující stupeň, v jakém je zadaný řetězec automatem přijímán.

Sestavíme-li neuronovou síť pomocí přechodové funkce μ nám známého automatu A budeme generovat dvojice $(((q, d), a), (q', d')) \in \mu^*$ *(zde bude doplněno: je to tak?)* tj. „je-li automat ve stavu q ve stupni d a na vstupu je symbol a, pak přejde do stavu q' ve stupni d'“. Například v [1] autoři demonstrují učení na automatu o dvou stavech a nad dvojprvkovou abecedou. Již po 5 trénovacích dvojících se síť naučila rozpoznávat s 95% přesností a po 432 pokusech rozpoznávala se 100% přesností (při toleranci stupně pravdivosti $1.25.10^{-7}$).

Lze však použít i konstrukce s pomocí znalostní báze. V takovém případě je třeba zformulovat If-Then pravidla síť popisující. Pro každý přechod

$$\delta((q, d), a) = (q', d')$$

tedy sestavíme If-Then pravidlo

Je-li automat ve stavu q ve stupni d a na vstupu je symbol a, pak automat přejde do stavu q' ve stupni d'

Na základě této znalostní báze může být navržena neuronová síť implementující přechodovou funkci automatu.

Opačný vztah, tj. jak z neuronové sítě zpět získat fuzzy automat je popsán např. v [**?**], [**?**].

Poněkud elegantní způsob, jak z neuronové sítě vyextrahovat automat je popsán v [**?**]. Autoři uvažují neuronovou síť jako nástroj, který rozpoznává (v odstupňované pravdivosti) (n-dimenzionální) podprostory prostoru $(0, 1)^n$. Každou souřadnici v tomto prostoru pak rozkládají symboly abecedy automatu,

tj. každému vektoru v tomto prostoru přiřazují řetězec nad abecedou automatu. Vzniklá struktura, kterou je vlastně kd-tree, pak tvoří automat.[10] *(zde bude doplněno: Zapsat to nějak aspoň trochu lidsky, je např. potřeba doplnit práci s cykly)* ?

8.4 Učící se fuzzy automaty

V předchozích kapitolách byly prezentovány techniky, jak konvertovat fuzzy automat na neuronovou síť a zpět. Konverzí automatu na neuronovou síť obdržíme nástroj, který nám umožňuje učení, tj. adaptaci modelu na jiná data. Zpětnou extrakcí automatu tak můžem obdržet automat, který rozpoznává jiný jazyk, a to jazyk který odpovídá trénovacím datům.

Tento postum lze však s určitou újmou na obecnosti zjedodušit. Namísto konverze automatu na neuronovou síť, její modifikaci a následnou konverzi zpět, je možné automat modifikovat napřímo. Této technice se říká učící se automat. Této technice se věnují např. v [**?**], [**?**], [**?**], [**?**]. V [5], [**?**] a [**?**] je použit buněčný fuzzy učící se automat. V [7] používají pro učení pokročilejší techniku založenou na genetických algoritmech.

Základní myšlenka techniky učících se automatů je obvykle, že jednotlivé stupně pravdivosti, které figurují v instanci automatu, mohou být pozměněny. V rozšířené podobě je pak možné automat rozšiřovat o kompleně nové stavy a přechody.

8.5 Metoda lisování dat

Autor práce prezentuje novou, jednoduchou, techniku strojového učení. Výhodou této techniky je, že je založena čistě na teorii fuzzy automatů, není třeba žádné další techniky strojového učení.

Vstupem této techniky je (konečná a neprázdná) množina trénovacích dat ve formě jazyka L nad známou abecedou Σ a koeficient přesnosti σ. Výstupem je poté fuzzy automat $A_{L,\sigma}$, který jazyk L přijímá tak, že pro všechna $w \in L$ platí:

$$A_{L,\sigma}(w) \geq \sigma$$

tj. že řetězec w je automatem přijímán alespoň ve stupni σ. U řetězců, které do jazyka L[11] nepatří (tj. $w' \in \Sigma^* \setminus L$) by posléze měl automat být schopen určit jak moc se jazyku L podobají, tj. určit stupeň $A_{L,\sigma}(w')$.

Postup konstrukce automatu $A_{L,\sigma}$ je následující:

1. Máme jazyk L, který je konečný. Je tedy zřejmě i regulérní.
2. K jazyku L sestavíme nedeterministický konečný automat A_L rozpoznávající L. Takový automat bude v nejhorším případě obsahovat $\sum_{w \in L} |w|$ stavů.
3. K automatu A_L vytvoříme nedeterminstický fuzzy automat A'_L.
4. Fuzzy minimalizací automatu A'_L se stupněm σ získáme hledaný automat $A_{L,\sigma}$.

[10] Tímto způsobem vygenerovaný automat je automat dle definice *(zde bude doplněno: doplnit ten, co má ostré přechody, ale fuzzy koncové stavy)*

[11] Jazyk L může být klidně fuzzy jazyk, následný postup se pak jen patřičně upraví

Klíčovým bodem této techniky je minimalizace automatu. Technika předpokládá, že jazyk trénovacích dat v sobě obsahuje jeden nebo více jednoduchých regulérních jazyků (ať už jako podmnožiny nebo jako podřetězce vybraných řetězců). Části automatu reprezentující tyto „podjazyky“ budou minimalizací zmenšeny. Ve výsledku se tak dá očekávat značné zmenšení velikosti automatu.

Navíc, vygenerovaný automat poměrně přehledně popisuje strukturu ve vstupním jazyce. Technika tak může být použita pro odtranění šumu a nepřesností v jazyce L.

Technika lisování dat bude naimplementována a experimentálně ověřena. *(zde bude doplněno: naprogramovat, ověřit)* Jednou z možností, kde by mohla tato technika být uplatněna, by bylo určování síly přihlašovacícho hesla. Vstupem by byla databáze uživatelských hesel s informací od experta, která hesla jsou silná a která slabá. Ze silných hesel by poté byl sestaven jazyk, na který by bylo aplikováno lisování dat. Výsledkem by byl automat, který rozpoznává silná hesla. Tato aplikace však nebyla naimplementována, vzhledem k tomu, že je z bezpečnostních důvodů nemožné získat databázi uživatelských hesel.

Další z možných aplikací je určování dělitelnosti čísel. Uvažujme abecedu symbolů číslic, tj. $\Sigma = \{0, \ldots, 9\}$ a jazyk $L \subseteq S^*$ čísel dělitelných čtyřmi. Při velikosti jazyka x a koeficientu $\sigma = y$ se podařilo automatu dosáhnout z úspěšného rozpoznávání čísel dělitelných 4 ve stupni vyšším, než $w\%$. *(zde bude doplněno: naprogramovat, ověřit)*

8.6 Reálné příklady použití

V [**?**] používají učící se fuzzy automaty v mírně pozměněné formě k řízení výkonu při obloukovém sváření. Abeceda v tomto případě obsahuje dva symboly, „zvýšení výkonu“ a „snížení výkonu“. Automat byl sestaven tak, aby správně rozpoznával vhodné posloupnosti zvýšení a snížení výkonu za účelem zvýšení kvality sváru. V téže publikaci demonstrují obdobným způsobem uplatnění pro řízení robota pohybujícího se v neznámém prostředí. Pomocí dvojice symbolů pro zvýšení výkonu motorů a snížení výkonu motorů si kladou za cíl navržení systému pro řízení robota. Tento systém má za cíl řídit přidávání a ubírání výkonu tak, aby se robot, bez ohledu na terén, pohyboval konstantní rychlostí.

V [**?**] je fuzzy automat použit pro návrh řídících systému. Řídící systém je stavový stroj, který je překlápěn mezi diskrétními stavy pomocí událostí. Množina možných událostí tak tvoří abecedu a řídící systém může být reprezentován automatem. Použitím nepřesností je tak možno získat fuzzy automat. *(zde bude doplněno: osamostatnit definici řídícího systému? Např. do úvodu, kde budu zmiňovat, co všechno se podobá FA?)* S pomocí znalosti očekávaného chování systému je pak možné pomocí učícího automatu sestavit adekvátní řídící systém.

V [**?**] jsou učící automaty použity jako agenti v hře s nulovým součtem, která nemá jasné ekvilibrium. Automaty se postupným hraním tahů učí a vylepšují svoji strategii tak, aby bylo dosaženo ekvilibria.

V [**?**] navrhují používat učení fuzzy automatů pro konstrukci logických klopných obvodů. Tj. obvodů, které se na základě vstupů překlápí mezi různými diskrétními stavy. Sami autoři uvádějí, že bylo výhodné pracovat s učícím fuzzy automatem a teprve poté jej „diskretizovat“, tj. konvertovat na kýžený bivalentní.

V [7] a [**?**] používají učící automat na vylepšení rozpoznávání textu v obrazu. Jako trénovací data jsou použity známé (již dříve rozpoznané) texty a trénování zde plní účel přizpůsobení se reálným vytištěným textům. V [5] a [**?**] používají

učící buněčný fuzzy automat pro zpřesnění detekce hran v obrazech. *(zde bude doplněno: Odkázat na patřičné kapitoly v textu)*

Autor sám přichází s myšlenkou, že kombinace fuzzy automatů a strojového učení má poměrně značný potenciál pro uplatnění v praxi. Kombinace fuzzy automatů, které poměrně jednoduše, avšak poměrně restriktivně popisují určitý jazyk mohou být pomocí strojového učení snadno upraveny na mocnější nástroje. Důvod, proč se však nepoužívají vidí v současném boomu neuronových sítí jako takových, které utlačují všechny ostatní techniky strojového učení.

9 Biologie a medicína

9.1 Rozpoznávání řetězců DNA

Mělo by to jít, něco málo na to mám. [**?**]

9.2 Rozpoznávání vzorů v obrazech

Viz buněčné automaty a jejich jednoduché rozpoznávání vzorů.

9.3 Analýza zdravotního stavu pacienta

Tu [**?**].

9.4 Analýza kardiogramu

Např. [**?**]. Ale je to obecně zpracování signálu, popsat někde jinde?

10 Další návrhy na aplikace

V [3]: Fuzzy grammars have been found to be useful in a variety of applications such as in the analysis of X-rays [43], in digital circuit design [34], and in the design of intelligent human-computer interfaces [49].

11 Konkrétní příklady

11.0.1 Automat jako „lepší“ reprezentace něčeho

Markovův řetěz (probabilistický (dvoj)stavový systém). Petriho sítě (petri nets). Rozhodovací stromy. Řídící systémy, událostní systémy (ale není to to samé, co petriho sítě?).

11.1 Rozpoznávní ručně psaného textu

[7], [**?**] a podob. ...

11.2 Detekce překlepů

[8] až na konci, Fuzzy Aho-Corasick algorithm (popř. dohledat jiný zdroj). [**?**]

Reference

[1] M. C. Pegalajar A. Blanco, M. Delgado. Fuzzy automaton induction using neural network. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2001.

[2] Javier Echanobe José R. Gonzáles Mendívil José R. Garitagoitia Carlos F. Alastrueya. Deformed systems for contextual postprocessing. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998.

[3] C. L. Giles Ch. W. Omlin, K. K. Thornber. Fuzzy finite-state automata can be deterministically encoded into recurent neural networks. *University of Technical Report*, 1996.

[4] Roger White Conrad Power, Alvin Simms. Hierarchical fuzzy pattern matching for the regional comparison of land use maps. *International Journal of Geographical Information Science*, 2010.

[5] Prof. Sagar A. More Dhiraj Kumar Patel. Edge detection technique by fuzzy logic and cellular learning automata using fuzzy image processing. *International Conference on Computer Communication and Informatics*, 2013.

[6] H. A. Girijamma Dr. V. Ramaswamy. Conversion of finite automata to fuzzy automata for string comparison. *International Journal of Computer Applications*, 2012.

[7] J. J. Astrain; J. R. Garitagoitia; J. R. Gonzalez De Mendivil; J. Villadangos; F. Farina. Approximate string matching using deformed fuzzy automata: A learning experience. *Springer Science & Business Media*, 2004.

[8] Abdulwahed Almarimi Gabriela Andrejková and Asmaa Mahmoud. Approximate pattern matching using fuzzy logic. *CEUR Workshop Proceedings*, 2003.

[9] S.S. Yau G.F. DePalma. Fractionally fuzzy grammars with application to pattern recognition. *US–Japan Seminar on Fuzzy Sets and their Applications*, 1974. článek jako e-book: http://bit.ly/2cumxjz, výcuc v MorMalFuzzAutAndLangs 10.7.

[10] Lefteris A. Mantelas Thomas Hatzichristos and Poulicos Prastacos. A fuzzy cellular automata modeling approach – accessing urban growth dynamics in linguistic terms. *Computational Science and Its Applications*, 2010.

[11] Kou-Yuan Huang. *Syntactic Pattern Recognition for Seismic Oil Exploration*. World Scientific, 2002.

[12] J.R. Garitagoitia J. Astrain, J.R. González de Mendívil. Fuzzy automata with ϵ-moves compute fuzzy measures between strings. *Fuzzy Sets and Systems 157*, 2005.

[13] José R. Garitagoitia José R. González de Mendívil. Fuzzy languages with infinite range accepted by fuzzy automata: Pumping lemma and determinization procedure. *Fuzzy sets and Systems*, 2014.

[14] S. C. Kremer M. Doostfatemeh. New directions in fuzzy automata. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2004.

[15] Hasan Ahmed Manuj Darbari and Vivek Kr. Singh. Application of fuzzy automata theory and knowledge based neural networks for development of basic learning model. *Computer Technology and Application 2*, 2011.

[16] M. M. ZAHEDI S. MOGHARI and R. AMERI. New direction in fuzzy tree automata. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 2011.

[17] Mukta N. Joshi S. R. Chaudhari. A note on fuzzy tree automata. *International Journal of Computer Applications*, 2012.

[18] Miroslav Stamenkovic, Aleksandar; Ciric. Construction of fuzzy automata from fuzzy regular expressions. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012.

[19] Witold Pedrycz Yongming Li. Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membership values in lattice-ordered monoids. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005.