

双方向変換における 16 個のレンズ則の含意関係

長田 和樹¹

2025 年 2 月 26 日

¹東北大学工学部電気情報理工学科

Chapter 1

概要

現在、双方向変化はデータベース管理システムやプログラミング言語、モデル駆動開発など、様々な分野でその役割をはたしている。その過程で、ソースデータとビューを一貫して同期させるために、前方関数 `get` と後方関数 `put`、それらのペアとしてレンズという概念が導入された。また、そのレンズの規則をレンズ則と呼び、これまでに 16 個のレンズ則が提案されてきた。しかし、`get` 関数と `put` 関数が全域関数、部分関数のいずれの場合でも 16 個全てのレンズ則の関係が示されたわけではなかった。そのため、本論文では `get` 関数と `put` 関数が全域関数、部分関数の場合の両方で 16 個のレンズ則全ての関係性を考察する。

Contents

1	概要	1
2	Introduction	4
2.1	レンズ	4
2.2	Core Lens Laws	4
2.3	Weaker Lens Laws	5
2.4	レンズ則の部分関数への拡張	6
2.5	well-behaved lens	8
3	Family	9
3.1	GetPut Family	9
3.2	PutGet Family	14
3.3	PutPut Family	16
3.4	Family 同士の分離	17
3.5	Family 外の含意関係	18
3.6	16 個のレンズ則の含意関係	21
4	get is partial, put is total	22
4.1	GetPut Family	22
4.2	PutGet Family	25
4.3	Family 同士の分離	26
4.4	Family 外のレンズ則の含意関係	26
4.5	16 個のレンズ則の含意関係	27
5	get is total, put is partial	28
5.1	GetPut Family	28
5.2	PutGet Family	30
5.3	PutPut Family	30
5.4	Family 同士の分離	31
5.5	Family 外のレンズ則の含意関係	32
5.6	16 個のレンズ則の含意関係	33

6	get is partial,put is partial	34
6.1	GetPut Family	34
6.2	PutGet Family	36
6.3	Family 同士の分離	37
6.4	Family 外の含意関係	37
6.5	16 個のレンズ則の含意関係	38
7	今後の課題	39
8	謝辞	40

Chapter 2

Introduction

2.1 レンズ

双方向変換とは、ソース $s \in S$ とビュー $v \in V$ という二つのデータ間の変換を双方の方向で可能にする手段である。Bancilhon と Spyrtos によるビューの更新に関するアプローチ [1] を元に、Foster et al は [2] で双方向変換をレンズにより形式化した。レンズは前方関数 `get` と後方関数 `put` の組みによって指定される。ここでは `get` と `put` からなるレンズを $([get, put])$ と表現する。

S をソースの集合、 V をビューの集合とし、 $([get, put])$ をレンズとすると、`get` と `put` は以下の要に表される。

`get` : $S \rightarrow V$: 与えられたソースからビューを生成する。

`put` : $S \times V \rightarrow S$: ビューに対して元のソースを更新し、新たなソースを返す。

一般に、ソースはそれ単体でビューを生成することができるが、ビューはそれ単体ではソースを生成できない。なぜなら、ビューはソースから情報を取り出し、再配置することで生成される都合上ソースよりもサイズが小さくなることが多い。故に、`get` の引数は S のみであるが、`put` の引数は S と V でなければならない。

双方向変換において、`get` と `put` は互いに独立しているわけではなく、互いに密接に関係していなければならない。例えば……これは意味をなさないレンズである。

故に意味のあるレンズを定義するためには、`get` と `put` が満たすべき特性が必要である。意味のあるレンズの特性を3つの一貫性、`well-behaved`、`very-well-behaved`、`bijjective` とし、それら一貫性をレンズの特性、レンズ則が特徴付けている。

2.2 Core Lens Laws

この章では、レンズの実用的な特性であるレンズの一貫性 (`well-behaved`、`very-well-behaved`、`bijjective`) を特徴付ける4つのレンズ則およびそれら4つのレンズ則を用いてレンズ則の一貫性を説明する。

$$\begin{array}{ll}
\forall s, s' \in S, \quad \text{put}(s, \text{get}(s')) = s' & (\text{StrongGetPut}) \\
\forall s \in S, \quad \text{put}(s, \text{get}(s)) = s & (\text{GetPut}) \\
\forall s \in S, \forall v \in V, \quad \text{get}(\text{put}(s, v)) = v & (\text{PutGet}) \\
\forall s \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(\text{put}(s, v), v') = \text{put}(s, v') & (\text{PutPut})
\end{array}$$

Figure 2.1: Core Lens Laws

$$\begin{array}{ll}
\forall s \in S, \forall v \in V, \quad \text{put}(s, \text{get}(\text{put}(s, v))) = \text{put}(s, v) & (\text{WeakPutGet}) \\
\forall s \in S, \forall v \in V, \quad \text{put}(\text{put}(s, v), \text{get}(\text{put}(s, v))) = \text{put}(s, v) & (\text{PutGetPut}) \\
\forall s \in S, \quad \text{get}(\text{put}(s, \text{get}(s))) = \text{get}(s) & (\text{GetPutGet}) \\
\forall s \in S, \forall v \in V, \quad \text{put}(\text{put}(s, v), \text{get}(s)) = s & (\text{Undoability}) \\
\forall s, s' \in S, \quad \text{get}(s) = \text{get}(s') \Rightarrow s = s' & (\text{GetInjectivity}) \\
\forall v \in V, \exists s \in S, \quad \text{get}(s) = v & (\text{GetSurjectivity}) \\
\forall s \in S, \forall v \in V, \quad \text{put}(\text{put}(s, v), v) = \text{put}(s, v) & (\text{PutTwice}) \\
\forall s \in S, \exists v \in V, \quad \text{put}(s, v) = s & (\text{SourceStability}) \\
\forall s, s' \in S, \forall v' \in V, \exists v \in V, \quad \text{put}(\text{put}(s', v'), v) = \text{put}(s, v) & (\text{WeakSourceStability}) \\
\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) = \text{put}(s', v') \Rightarrow v = v' & (\text{ViewDetermination}) \\
\forall s \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) = \text{put}(s, v') \Rightarrow v = v' & (\text{PutInjectivity}) \\
\forall s \in S, \exists s' \in S, \exists v \in V, \quad \text{put}(s', v) = s & (\text{PutSurjectivity})
\end{array}$$

Figure 2.2: Weaker Lens Laws

[2] で図 2.1 内の 4 つのレンズ則が提案された。この 4 つレンズ則は Core Lens Laws と呼ばれている。この 4 つのレンズ則によって、レンズの一貫性の特徴 3 つが説明される。well-behaved は (GetPut) と (PutGet) を満たすレンズで、ソースとビューの間でデータの変換が矛盾なく行えることを表す。very-well-behaved は (GetPut) と (PutGet)、(PutPut) を満たすレンズで、well-behaved に加えて、過去の更新に影響されない安定性があることを表す。bijective は (StrongGetPut) と (PutGet) を満たすレンズで、ソースとビューの間に一对一の関係があり、ソースが一意的に定まることを表す。

2.3 Weaker Lens Laws

双方向変換に関する文献では Core Lens Laws よりも弱いレンズ則がいくつか提案されている。そのいくつかは、Core Lens Law の特徴の説明や、特定のアプリケーションで必要となる。また、Core Lens Laws では強すぎるため、より実用的にするために弱くしたものもある。

$\forall s, s' \in S, \forall v \in V, \text{ get}(s') \downarrow v \Rightarrow \text{ put}(s, v) \downarrow s'$	(StrongGetPut)
$\forall s \in S, \forall v \in V, \text{ get}(s) \downarrow v \Rightarrow \text{ put}(s, v) \downarrow s$	(GetPut)
$\forall s, s' \in S, \forall v \in V, \text{ put}(s, v) \downarrow s' \Rightarrow \text{ get}(s') \downarrow v$	(PutGet)
$\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V, \text{ put}(s, v) \downarrow s' \Rightarrow (\text{ put}(s', v') \downarrow s'' \Rightarrow \text{ put}(s, v') \downarrow s'')$	(PutPut-1)
$\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V, \text{ put}(s, v) \downarrow s' \Rightarrow (\text{ put}(s, v') \downarrow s'' \Rightarrow \text{ put}(s', v') \downarrow s'')$	(PutPut-2)

Figure 2.3: 部分関数の Core Lens Laws

[3] では図 2.2 のように計 11 個の weaker Lens Laws が提案されている。図中のレンズ則は get と put がどちらも全域関数の場合の定義である。

2.4 レンズ則の部分関数への拡張

図 2.1 と図 2.2 のようなレンズ則は get と put がいずれも全域関数である場合のみを考慮して定義されており、 get と put のどちらか、あるいは両方が部分関数となると問題が生じる。例えば、 $S = V = \mathbb{N}$ 、 $s \in S, v \in V$ として、

$$\text{get}(s) = \begin{cases} 1/s & (s \neq 0) \\ \perp & (s = 0) \end{cases}$$

$$\text{put}(s, v) = s + v$$

のレンズを考える。すると、 $\text{put}(s, \text{get}(s))$ において $s = 0$ とすると、 $\text{put}(s, \perp)$ のように評価ができない場合が存在する。

故に、[4] でレンズ則を部分関数にも適用できるように以下のような式を新たに導入した。

$$\text{get}(s) \downarrow$$

上の式は、「 $\text{get}(s)$ は部分関数でかつ、 s で定義されており、その計算結果が v となる」というものである。

これを用いて先の Core lens law と Weaker lens law を更新すると以下のようになる。

表??より、(PutPut) の計算の順序を 2 通り考える。 $\text{put}(\text{put}(s, v), v') = \text{put}(s, v')$ はまず $\text{put}(s, v)$ から計算を行う。 $s'' \in S$ として $\text{put}(s, v) = s''$ とすると、元の式は $\text{put}(s'', v') = \text{put}(s, v')$ と変化する。ここで、次に左辺の $\text{put}(s'', v')$ を計算するか、右辺の $\text{put}(s, v')$ 計算するかで順番が変化する。故に、左辺を先に計算するものを (PutPut-1)、右辺を先に計算するものを (PutPut-2) とする。(PutPut-1) の方が評価の仕方としては自然であるため、 put が部分関数の場合、(PutPut-1) を (PutPut) として扱う。

また、[4] で橋場は新たに以下の部分関数のレンズ則を定義した

$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \Rightarrow \text{put}(s, v') \downarrow s'$	(WeakPutGet)
$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s'$	(PutGetPut)
$\forall s, s' \in S, \forall v \in V, \quad \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v$	(GetPutGet)
$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s) \downarrow v' \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s$	(Undoability)
$\forall s, s' \in S, \quad \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{get}(s') \downarrow v \Rightarrow s = s'$	(GetInjectivity)
$\forall v \in V, \exists s \in S, \quad \text{get}(s) \downarrow v$	(GetSurjectivity)
$\forall s, s' \in S, \forall v \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s' \Rightarrow \text{put}(s', v) \downarrow s'$	(PutTwice)
$\forall s \in S, \exists v \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s$	(SourceStability)
$\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s'' \Rightarrow v = v'$	(ViewDetermination)
$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \quad \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v') \downarrow s' \Rightarrow v = v'$	(PutInjectivity)
$\forall s \in S, \exists s' \in S, \exists v \in V, \quad \text{put}(s', v) \downarrow s$	(PutSurjectivity)

Figure 2.4: 部分関数の Weaker Lens Laws

$$\forall s, s' \in S, \forall v' \in V, \exists v \in V, \quad \text{put}(s', v') \downarrow s = \text{put}(s, v) \downarrow s \quad (\text{WeakSourceStability})$$

Table 2.1: WeakSourceStability

ここで、 get と put が部分関数の場合のレンズ則は、 get と put の内が全域関数の場合に適用された時には対応する全域関数のレンズ則と同値になる。なぜなら、部分関数は全域関数を内包しており、「全域関数であれば部分関数である」からである。

2.5 well-behaved lens

Foster は与えられたレンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (SourceStability) と (ViewDetermination) の組み合わせ、あるいは (PutInjectivity)、(PutTwice) および (PutSurjectivity) の組み合わせを満たす場合 well-behaved なレンズの get に関して、以下のような定理を示した。

定理 1. get と put がどちらも全域関数の場合、以下のいずれかの含意関係を満たすのであれば、well-behaved なレンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の get が一意的に定まる。
 (1) レンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (SourceStability) と (ViewDetermination) を満たす。
 (2) レンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (PutSurjectivity)、(PutTwice)、(PutInjectivity) を満たす。

[4] 橋場は get が部分関数な場合、与えられたレンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (WeakSourceStability) と (ViewDetermination) の組み合わせ、あるいは (PutInjectivity) と (PutTwice) の組み合わせを満たす場合 well-behaved なレンズの get に関して、以下のような定理を示した。

定理 2. [4] get が部分関数の場合、以下のいずれかの含意関係を満たすのであれば、well-behaved なレンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の get が一意的に定まる。(1) レンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (WeakSourceStability) と (ViewDetermination) を満たす。(2) レンズ $([\text{get}, \text{put}])$ の put が (PutTwice)、(PutInjectivity) を満たす。

このように、現在 16 個のレンズ則が提案されているが、[3] では get と put が全域関数の場合に (WeakSourceStability) 以外の 15 個レンズ則の、橋場の論文では put が部分関数、かつ get が全域関数または部分関数の場合に (GetPutGet)、(GetInjectivity)、(GetSurjectivity) 以外の 13 個レンズ則の含意関係のみが示されており、故に 16 個全てのレンズ則の関係性が示されていないわけではない。次の章から get と put がそれぞれ全域関数全域関数、全域関数部分関数、部分関数全域関数、部分関数部分関数の 4 通りの場合のレンズ則の含意関係を述べる。

Chapter 3

Family

[3] および [4] ではレンズ則の含意関係を元に3つのグループに分類した。そのグループを Family と呼び、3つのグループの名前を GetPut Family、PutGet Family、PutPut Family とした。この章ではその Family に分類されるレンズ則と、get と put がどちらも全域関数の場合において、その Family 内でのレンズ則の含意関係について述べる。

3.1 GetPut Family

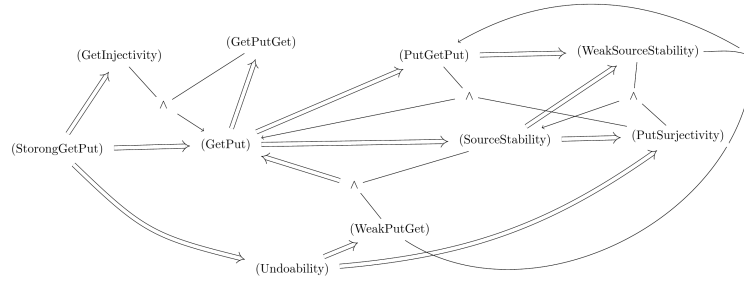


Figure 3.1: GetPut Family(get in total,put is total)

補題 1.

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (3.1.1)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (3.1.2)$$

$$(\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (3.1.3)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (3.1.4)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (3.1.5)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \quad (3.1.6)$$

$$(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (3.1.7)$$

$$(\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (3.1.8)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (3.1.9)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (3.1.10)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{WeakPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (3.1.11)$$

$$(\text{PutSurjectivity}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \quad (3.1.12)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (3.1.13)$$

Proof. (3.1.1) $(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPut})$

$\forall s \in S, \forall v \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{get}(s) \downarrow v \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \quad \text{by}(\text{StrongGetPut}) \end{aligned}$$

$$(3.1.1)(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{SourceStability})$$

$$\begin{aligned}
& \text{get が全域関数より } \forall s \in S, \exists v \in V, \text{get}(s) \downarrow v \\
& \text{get}(s) \downarrow v \\
& \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \quad \text{by(GetPut)}
\end{aligned}$$

$$(3.1.1)(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity})$$

(SourceStability) より $\forall s \in S, \exists v \in V, \text{put}(s, v) \downarrow s$ のため自明

$$(3.1.2)(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{Undoability})$$

$$\begin{aligned}
& \forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \\
& \text{get}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s) \downarrow v' \\
& \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s \quad \text{by(StrongGetPut)}
\end{aligned}$$

$$(3.1.2)(\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity})$$

$$\begin{aligned}
& \forall s \in S, \forall v \in V, \\
& \text{get と put が全域関数より、} \exists s' \in S, \exists v' \in V, \\
& \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s) \downarrow v' \\
& \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s \quad \text{by(Undoability)}
\end{aligned}$$

$$(3.1.3)(\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet})$$

$$\begin{aligned}
& \forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V, \\
& \text{get が全域関数より、} \exists v'' \in V, \text{get}(s) \downarrow v'' \\
& \text{put}(s, v) \downarrow v' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \wedge \text{get}(s) \downarrow v'' \\
& \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v' \wedge \text{put}(s', v'') \downarrow s \quad \text{by(Undoability)} \\
& \Rightarrow \text{put}(s, v') \downarrow s' \quad \text{by(Undoability)}
\end{aligned}$$

$$(3.1.4)(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{PutGetPut})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V$$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s' \end{aligned} \quad \text{by}(\text{GetPut})$$

$$(3.1.5)(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \\ & \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s \quad \text{by}(\text{GetPut}) \\ & \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge s = s' \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v \end{aligned}$$

$$(3.1.6)(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity})$$

$$\forall s', s'' \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{get}(s') \downarrow v \wedge \text{get}(s'') \downarrow v \\ & \Rightarrow \forall s \in S, \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s'' \quad \text{by}(\text{StrongGetPut}) \\ & \Rightarrow s'' = s' \end{aligned}$$

$$(3.1.7)(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability})$$

$$\begin{aligned} & (\text{SourceStability}) \text{ より } \forall s \in S, \exists v \in V, \text{put}(s, v) \downarrow s \\ & \text{よって } \exists s' \in S, \exists v' \in V, \\ & \text{put}(s', v') \downarrow s \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \text{ が成り立つ} \end{aligned}$$

$$(3.1.8)(\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v' \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{get が全域関数より } \exists v \in V, \text{get}(s) \downarrow v \\ & \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \end{aligned} \quad \text{by}(\text{PutGetPut})$$

$$(3.1.9)(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut})$$

$$\forall s \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{put } s \text{ が全域 } \downarrow \text{ あり、} \exists s' \in S, \text{put}(s, v) \downarrow s' \\ & \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \\ & \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v && \text{by } (\text{GetPutGet}) \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge s = s' && \text{by } (\text{GetInjectivity}) \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \end{aligned}$$

$$(3.1.10)(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{GetPut})$$

$$\forall s \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & (\text{PutSurjectivity}) \text{ が } \downarrow \text{ あり、} \exists s' \in S, \text{put}(s', v) \downarrow s \\ & \text{put}(s', v) \downarrow s \wedge \text{get}(s) \downarrow v \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s \end{aligned}$$

$$(3.1.11)(\text{SourceStability}) \wedge (\text{WeakPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut})$$

$$\forall s \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & (\text{SourceStability}) \text{ が } \downarrow \text{ あり、} \exists v' \in V, \text{put}(s, v') \downarrow s \\ & \text{put}(s, v') \downarrow s \wedge \text{get}(s) \downarrow v \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s && \text{by } (\text{WeakPutGet}) \end{aligned}$$

$$(3.1.12)(\text{PutSurjectivity}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{SourceStability})$$

$$\forall s \in S,$$

$$\begin{aligned} & (\text{PutSurjectivity}) \text{ が } \downarrow \text{ あり、} \exists s' \in S, \exists v' \in V, \text{put}(s', v') \downarrow s \\ & \text{put}(s', v') \downarrow s \\ & \Rightarrow \exists v \in V, \text{put}(s, v) \downarrow s && \text{by } (\text{WeakSourceStability}) \end{aligned}$$

$$(3.1.13)(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V$$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \\ & \Rightarrow \exists v'' \in V, \text{put}(s', v'') \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' && \text{by } (\text{WeakSourceStability}) \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s' && \text{by } (\text{WeakPutGet}) \end{aligned}$$

□

この Family は 10 個のレンズ則で構成されており、その含意関係は図 3.1 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 1 である。

補題 2.

$$\begin{aligned} (\text{GetPut}) &\Leftrightarrow (\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \\ &\Leftrightarrow (\text{PutGetPut}) \wedge (\text{SourceStability}) \end{aligned}$$

そして、(GetPut) に関するレンズ則として補題 1 より、補題 2 が成立する。

3.2 PutGet Family

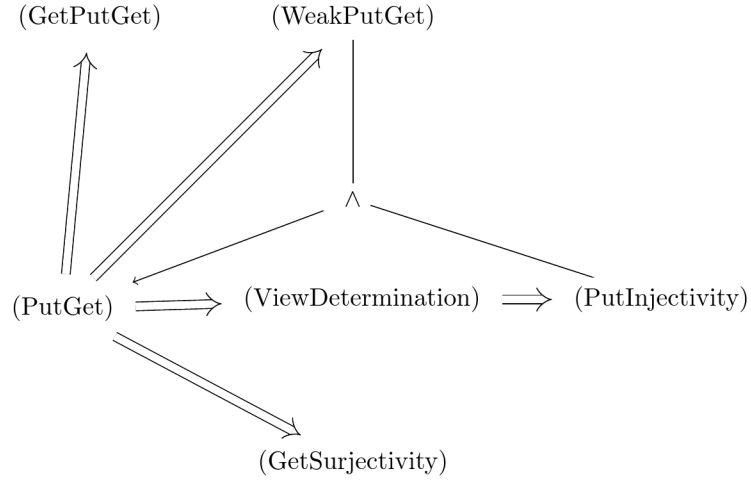


Figure 3.2: PutGet Family (get in total, put is total)

補題 3.

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutInjectivity}) \quad (3.2.1)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (3.2.2)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (3.2.3)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \quad (3.2.4)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (3.2.5)$$

Proof. (3.2.1)(PutGet) \Rightarrow (ViewDetermination)

$\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s'' \\ & \text{get}(s'') \downarrow v \wedge \text{get}(s'') \downarrow v' && \text{by(PutGet)} \\ & v = v' \end{aligned}$$

(3.2.1)(ViewDetermination) \Rightarrow (PutInjectivity)

$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v') \downarrow s' \\ & v = v' && \text{by(ViewDetermination)} \end{aligned}$$

(3.2.2)(PutGet) \Rightarrow (WeakPutGet)

$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \\ & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \wedge \text{get}(s') \downarrow v && \text{by(PutGet)} \\ & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge v = v' \\ & \text{put}(s, v') \downarrow s' \end{aligned}$$

(3.2.3)(PutGet) \Rightarrow (GetPutGet)

$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v && \text{by (PutGet)} \end{aligned}$$

(3.2.4)(PutGet) \Rightarrow (GetSurjectivity)

put が全域関数より

$$\begin{aligned} & \forall s, \in S, \forall v \in V, \exists s' \in S, \text{put}(s, v) \downarrow s' \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v && \text{by (PutGet)} \end{aligned}$$

(3.2.5) $(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutGet})$
 $\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$

get が全域関数より、 $\exists v' \in V, \text{get}(s') \downarrow v'$
 $\text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v'$
 $\text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v') \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \quad \text{by}(\text{WeakPutGet})$
 $v = v' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \wedge \text{by}(\text{ViewDetermination})$
 $\text{get}(s') \downarrow v$

□

この Family は 6 個のレンズ則で構成されており、その含意関係は図 3.2 のように表される。この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 3 である。

補題 4.

$$\begin{aligned} (\text{PutGet}) &\Leftrightarrow (\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \\ &\Leftrightarrow (\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \end{aligned}$$

そして、 (PutGet) に関するレンズ則として補題 3 より、補題 3 が成立する。

3.3 PutPut Family

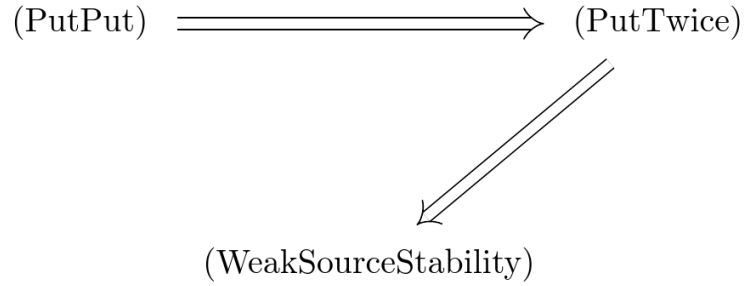


Figure 3.3: PutPut Family(put is total)

補題 5.

$$(\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (3.3.1)$$

Proof. (3.3.1)(PutPut) \Rightarrow (PutTwice)
 $\forall s \in S, \forall v, v' \in V,$

$$\begin{aligned} \text{put}(\text{put}(s, v), v') &= \text{put}(s, v') \text{ において、} v = v' \text{ の場合、} \\ \text{put}(\text{put}(s, v), v) &= \text{put}(s, v) \end{aligned}$$

(3.3.1)(PutTwice) \Rightarrow (WeakSourceStability)
 $\forall s, s' \in S, \forall v \in V, \exists v' \in V (v = v'),$

$$\begin{aligned} \text{put}(s, v) &\downarrow s' \\ \text{put}(s', v) &\downarrow s' && \text{by(PutTwice)} \\ \text{put}(s', v') &\downarrow s' \end{aligned}$$

□

この Family は 3 個のレンズ則で構成されており、その含意関係は図 3.3 のように表される。この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 5 である。なお、この Family のレンズ則 (PutPut)、(PutTwice)、(WeakSourceStability) は全て put にのみ関係するレンズ則であるため、get が全域関数か部分関数であるかに影響しない。

3.4 Family 同士の分離

[3] これまで Family 内のレンズ則の含意関係についてまとめたが、Family 内のレンズ則には以下の定理が成り立つ。

定理 3. 任意の *Family* のレンズ則 L_1, L_2, \dots, L_n と、それらとは異なる *Family* のレンズ則 L に対して、以下の関係が成り立つ。
 $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n \not\Rightarrow L$

これを証明するために、 $P \Rightarrow P' \wedge Q' \Rightarrow Q \wedge P \not\Rightarrow Q$ であるならば $P' \not\Rightarrow Q'$ であることを用いる。 $P \Rightarrow P'$ と $Q' / \text{imp} Q$ が Family 内の示されているので、 $P \Rightarrow Q$ となる反例を示せばよい。各 Family 内のレンズ則の含意関係より、 P は各 Family の最も強いレンズ則、(StrongGetPut)、(PutGet)、(PutPut) であり、 Q は各 Family の最も弱いレンズ則である。故に、補題 6 を示すことで各 Family を分離することができる。

補題 6. [3],[4]

$$(\text{StrongGetPut}) \not\Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (3.4.1)$$

$$(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \vee (\text{WeakSourceStability}) \quad (3.4.2)$$

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \quad (3.4.3)$$

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{PutGetPut}) \vee (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{GetSurjectivity}) \quad (3.4.4)$$

Proof. (3.4.1)、(3.4.3)、(3.4.4)、および (3.4.2) の $(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{PutGetPut}) \vee (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{PutSurjectivity})$ は [3] で示されている。

$$(3.4.2)(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{WeakSourceStability})$$

$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{lll} \text{get}(s_1) \downarrow v_1 & \text{get}(s_2) \downarrow v_2 & \text{get}(s_3) \downarrow v_2 \\ \text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_3, v_1) \downarrow s_1 \\ \text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_3 & \text{put}(s_3, v_2) \downarrow s_3 \end{array}$$

このレンズは (PutGet) を満たすが、 $(\text{WeakSourceStability})$ は満たさない。

□

3.5 Family 外の含意関係

ここでは、任意の Family のレンズ則とそれとは別のレンズ則の Family のレンズ則の含意関係について述べる。具体的には、任意のレンズ則 L_1, L_2, \dots, L_n と L に対して、 L_i と L_j (ただし $i \neq j$) が別の Family のレンズ則の場合、 $L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n \not\Rightarrow L$ が成立するようなレンズ則とその含意関係について述べる。そのような含意関係について補題 7 が成立する。

補題 7.

$$(\text{PutInjectivity}) \wedge (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \quad (3.5.1)$$

$$(\text{ViewDetermination}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (3.5.2)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{StrongGetPut}) \quad (3.5.3)$$

$$(\text{GetSurjectivity}) \wedge (\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (3.5.4)$$

$$(\text{GetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \quad (3.5.5)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (3.5.6)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutPut}) \quad (3.5.7)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (3.5.8)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (3.5.9)$$

Proof. (3.5.1)(PutInjectivity) \wedge (PutTwice) \Rightarrow (ViewDetermination)
 $\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s'' \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s'' && \text{by(PutTwice)} \\ & \Rightarrow v = v' && \text{by(PutInjectivity)} \end{aligned}$$

(3.5.2)(ViewDetermination) \wedge (PutGetPut) \Rightarrow (PutGet)
 $\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{get が全域関数より、} \exists v' \in V, \text{get}(s') \downarrow v' \\ & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' && \text{by(PutGetPut)} \\ & \Rightarrow v = v' \wedge \text{get}(s') \downarrow v' && \text{by(ViewDetermination)} \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v \end{aligned}$$

(3.5.3)(GetInjectivity) \wedge (PutGet) \Rightarrow (StrongGetPut)
 $\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{put が全域より、} \exists s'' \in S, \text{put}(s, v) \downarrow s'' \\ & \text{get}(s') \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s'' \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{get}(s'') \downarrow v && \text{by(PutGet)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge s' = s'' && \text{by(GetInjectivity)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \end{aligned}$$

(3.5.4)(GetSurjectivity) \wedge (StrongGetPut) \Rightarrow (PutGet)
 $\forall s, s', s'' \in S, \forall v \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \exists s'' \in S, \text{get}(s'') \downarrow v && \text{by(GetSurjectivity)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s'' \wedge \text{get}(s'') \downarrow v && \text{by(StrongGetPut)} \\ & \Rightarrow s' = s'' \wedge \text{get}(s'') \downarrow v \\ & \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v \end{aligned}$$

(3.5.5)(GetPut) \wedge (PutPut) \Rightarrow (Undoability)
 put が全域関数より、(PutPut-2) を (PutPut) として扱うことができる。

$$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{get}(s) \downarrow v' \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v') \downarrow s && \text{by (GetPut)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s && \text{by (PutPut)} \end{aligned}$$

$$(3.5.6)(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v, v' \in V,$$

$$\begin{aligned} & \text{put}(s, v) \Rightarrow s' \wedge \text{get}(s') \Rightarrow v' \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s' && \text{by(PutGetPut)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s, v') \downarrow s && \text{by(PutPut)} \end{aligned}$$

$$(3.5.7)(\text{SourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned} & (\text{SourceStability}) \text{ より } \exists v' \in V, \text{put}(s', v') \downarrow s \\ & \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s \wedge v = v' && \text{by(ViewDetermination)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v) \downarrow s \end{aligned}$$

$$(3.5.8)(\text{StrongGetPut}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutPut})$$

今回、(PutPut-1) を (PutPut) として扱う。 $\forall s, s', s'' \in S, \forall v, v' \in V,$

$$\begin{aligned} & \text{get が全域関数より } \exists v'' \in V, \text{get}(s'') \downarrow v'' \\ & \text{put}(s', v') \downarrow s'' \wedge \text{get}(s'') \downarrow v'' \\ & \Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s'' \wedge \text{put}(s, v'') \downarrow s'' \wedge \text{put}(s', v'') \downarrow s'' && \text{by(StrongGetPut)} \\ & \Rightarrow v' = v'' \wedge \text{put}(s, v'') \downarrow s'' && \text{by(PutInjectivity)} \\ & \Rightarrow \text{put}(s, s') \downarrow s'' \end{aligned}$$

$$(3.5.9)(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice})$$

$$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$$

(WeakSourceStability) より、 $\exists v' \in V, \text{put}(s', v') \downarrow s'$

$$\text{put}(s, v) \downarrow s'$$

$$\Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v') \downarrow s'$$

by(WeakSourceStability)

$$\Rightarrow \text{put}(s', v') \downarrow s' \wedge v = v'$$

by(ViewDetermination)

$$\Rightarrow \text{put}(s', v) \downarrow s'$$

$$(3.5.10)(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{PutTwice})$$

$$\forall s/inS,$$

(PutSurjectivity) より、 $\exists s' \in S, \exists v \in V, \text{put}(s', v) \downarrow s$

$$\text{put}(s', v) \downarrow s$$

$$\Rightarrow \text{put}(s, v) \downarrow s$$

by(WeakSourceStability)

□

3.6 16 個のレンズ則の含意関係

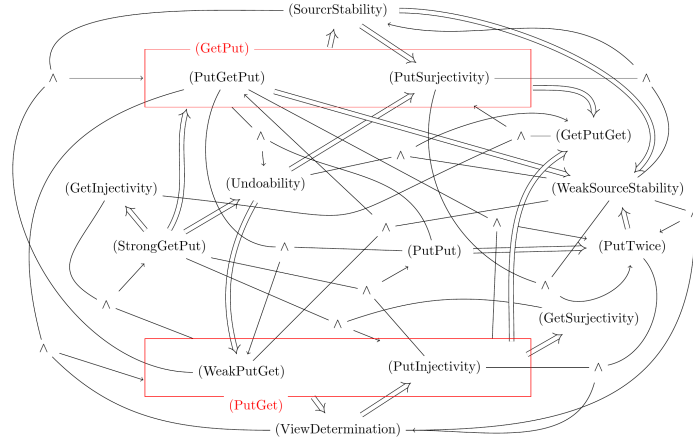


Figure 3.4: 16 個のレンズ則の含意関係 (get is total, put is total)

これまで示したレンズ則の含意関係から、get と put がどちらも全域関数の場合、16 個全てのレンズ則の含意関係は図 3.4 のようになる。

Chapter 4

get is partial, put is total

この章では get が部分関数かつ put が全域関数の場合のレンズ則の含意関係を考察する。

4.1 GetPut Family

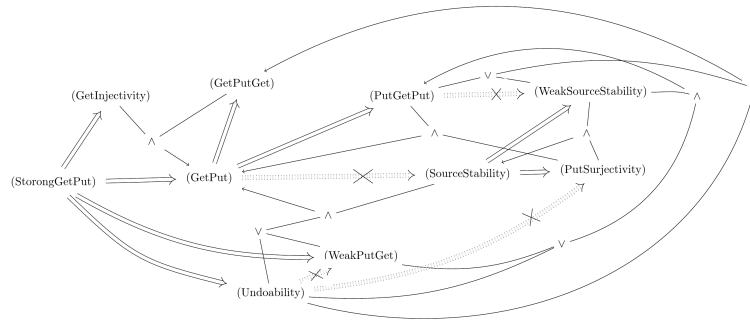


Figure 4.1: GetPut Family(get is partial, put is total)

補題 8.

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \not\Rightarrow (\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (4.1.1)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \not\Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (4.1.2)$$

$$(\text{Undoability}) \not\Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (4.1.3)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (4.1.4)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (4.1.5)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \quad (4.1.6)$$

$$(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (4.1.7)$$

$$(\text{PutGetPut}) \not\Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (4.1.8)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (4.1.9)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (4.1.10)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{WeakPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (4.1.11)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (4.1.12)$$

$$(\text{PutSurjectivity}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \quad (4.1.13)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (4.1.14)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (4.1.15)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (4.1.16)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (4.1.17)$$

Proof. (4.1.1) $(\text{GetPut}) \not\Rightarrow (\text{SourceStability})$

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll}
\text{get}(s_1) \downarrow \perp & \text{get}(s_2) \downarrow \perp \\
\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_1 \\
\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_1
\end{array}$$

(4.1.2) (Undoability) \nRightarrow (PutSurjectivity)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll}
\text{get}(s_1) \downarrow \perp & \text{get}(s_2) \downarrow \perp \\
\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_1 \\
\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_1
\end{array}$$

(4.1.3)(Undoability) \nRightarrow (WeakPutGet)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll}
\text{get}(s_1) \downarrow v_2 & \text{get}(s_2) \downarrow \perp \\
\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_1 \\
\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_2
\end{array}$$

(4.1.8)(PutGetPut) \nRightarrow (WeakSourceStability)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll}
\text{get}(s_1) \downarrow \perp & \text{get}(s_2) \downarrow \perp \\
\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_2 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_1 \\
\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_1
\end{array}$$

(4.1.16)(Undoability) \wedge (WeakSourceStability) \Rightarrow (GetPutGet)

$$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned}
& \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v) \downarrow s && \text{by (Undoability)} \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \exists v' \in V, \text{put}(s, v') \downarrow s && \text{by (WeakSourceStability)} \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s && \text{by (Undoability)} \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge s = s' \\
& \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v
\end{aligned}$$

(4.1.17)(Undoability) \wedge (PutGetPut) \Rightarrow (GetPutGet)

$$\forall s, s' \in S, \forall v \in V,$$

$$\begin{aligned}
& \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s', v) \downarrow s && \text{by (Undoability)} \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s' \wedge \text{put}(s, v) \downarrow s && \text{by (PutGetPut)} \\
& \Rightarrow \text{get}(s) \downarrow v \wedge s = s' \\
& \Rightarrow \text{get}(s') \downarrow v
\end{aligned}$$

□

get が部分関数、put が全域関数の時、GetPut Family 内のレンズ則の含意関係は図 4.1 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 8 である。

4.2 PutGet Family

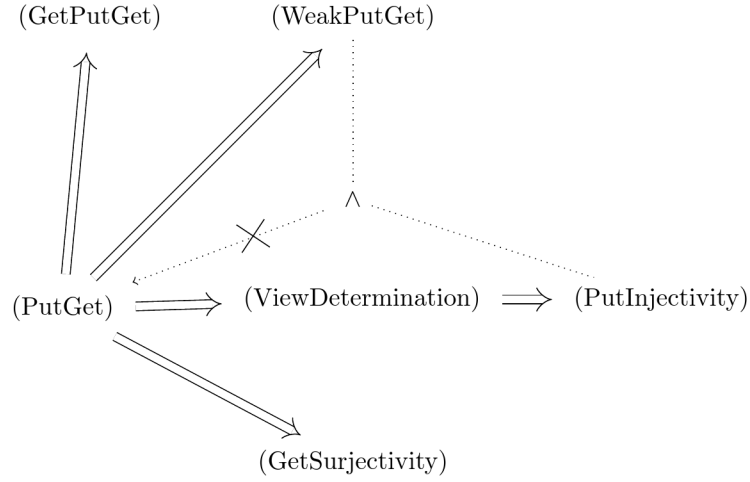


Figure 4.2: PutGet Family(get is partial, put is total)

補題 9.

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutInjectivity}) \quad (4.2.1)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (4.2.2)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (4.2.3)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \quad (4.2.4)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \not\Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (4.2.5)$$

Proof. (4.2.5) $(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \not\Rightarrow (\text{PutGet})$

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll} \text{get}(s_1) \downarrow v_1 & \text{get}(s_2) \downarrow \perp \\ \text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_2 \\ \text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_2 \end{array}$$

□

get が部分関数、put が全域関数の時、PutGet Family 内のレンズ則の含意関係は図 4.2 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 9 である。

4.3 Family 同士の分離

get が部分関数、put が全域関数の時、補題 10 によって Family を分離することができる。なお、(4.3.2) は (3.4.2) と等しく、(4.3.1)、(4.3.3)～(4.3.6) は [4] で証明されている。

補題 10. [3],[4]

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (4.3.1)$$

$$(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (4.3.2)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{GetInjectivity}) \quad (4.3.3)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \vee (\text{WeakSourceStability}) \quad (4.3.4)$$

$$(\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutGetPut}) \quad (4.3.5)$$

$$(\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{Undoability}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{GetInjectivity})(\text{GetSurjectivity}) \quad (4.3.6)$$

4.4 Family 外のレンズ則の含意関係

get が部分関数、put が全域関数の時、各 Family を超えたレンズ則の含意関係は補題 11 となる。

補題 11.

$$(\text{PutInjectivity}) \wedge (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \quad (4.4.1)$$

$$(\text{ViewDetermination}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (4.4.2)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{StrongGetPut}) \quad (4.4.3)$$

$$(\text{GetSurjectivity}) \wedge (\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (4.4.4)$$

$$(\text{GetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \quad (4.4.5)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (4.4.6)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutPut}) \quad (4.4.7)$$

$$(\text{PutGet}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (4.4.8)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (4.4.9)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (4.4.10)$$

Proof. (4.4.2)(ViewDetermination) \wedge (PutGetPut) \nRightarrow (PutGet)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$\text{get}(s_1) \downarrow \perp$ $\text{get}(s_2) \downarrow \perp$
 $\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1$ $\text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_2$
 $\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2$ $\text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_1$

(4.4.7)(StrongGetPut) \wedge (PutInjectivity) \nRightarrow (PutPut)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$\text{get}(s_1) \downarrow \perp$ $\text{get}(s_2) \downarrow \perp$
 $\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1$ $\text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_2$
 $\text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2$ $\text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_1$

□

4.5 16 個のレンズ則の含意関係

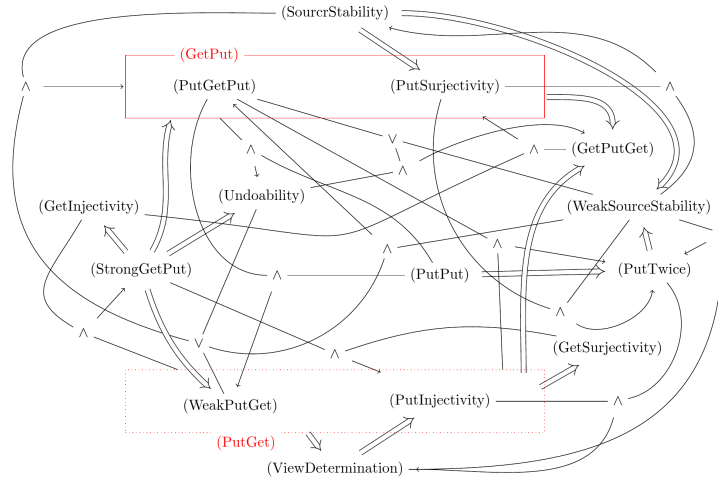


Figure 4.3: 16 個のレンズ則の含意関係 (get is partial, put is total)

これまでに示したレンズ則の含意関係から、get が部分関数、put が全域関数の場合、16 個全てのレンズ則の含意関係は図 3.4 のようになる。

Chapter 5

get is total, put is partial

この章では get が全域関数かつ put が部分関数の場合のレンズ則の含意関係を考察する。

5.1 GetPut Family

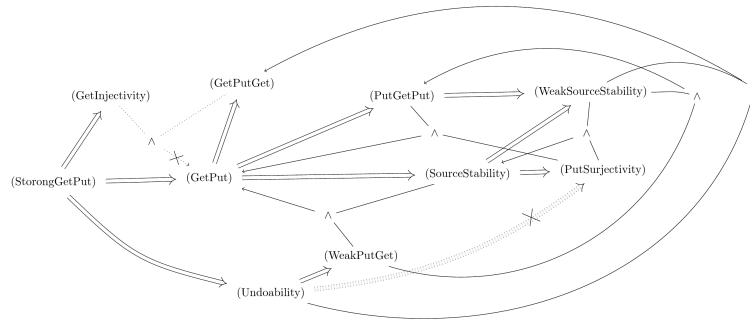


Figure 5.1: GetPut Family(get is total, put is partial)

補題 12.

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (5.1.1)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \not\Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (5.1.2)$$

$$(\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (5.1.3)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (5.1.4)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (5.1.5)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \quad (5.1.6)$$

$$(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (5.1.7)$$

$$(\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (5.1.8)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (5.1.9)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (5.1.10)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{WeakPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (5.1.11)$$

$$(\text{PutSurjectivity}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \quad (5.1.12)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (5.1.13)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (5.1.14)$$

Proof. (5.1.9) $(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetPut})$
 $S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える
 $\begin{array}{ll} \text{get}(s_1) \downarrow v_1 & \text{get}(s_2) \downarrow v_2 \\ \text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_2 \\ \text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow \perp \end{array}$ □

get が全域関数、 put が部分関数の時、GetPut Family 内のレンズ則の含意関係は図 5.1 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 12 である。

5.2 PutGet Family

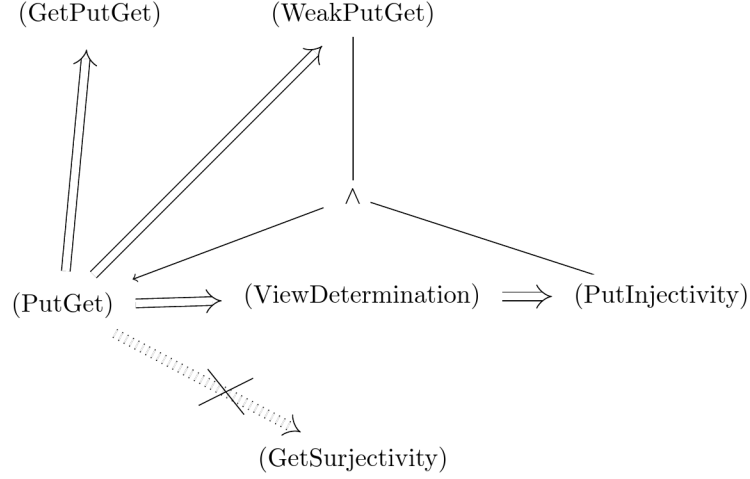


Figure 5.2: PutGet Family(get is total,put is partial)

補題 13.

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutInjectivity}) \quad (5.2.1)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (5.2.2)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (5.2.3)$$

$$(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \quad (5.2.4)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (5.2.5)$$

Proof. (5.2.4) $(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetSurjectivity})$

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll} \text{get}(s_1) \downarrow v_1 & \text{get}(s_2) \downarrow v_1 \\ \text{put}(s_1, v_1) \downarrow \perp & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow \perp \\ \text{put}(s_1, v_2) \downarrow \perp & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow \perp \end{array}$$

□

get が全域関数、put が部分関数の時、PutGet Family 内のレンズ則の含意関係は図 5.2 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 13 である。

5.3 PutPut Family

補題 14.

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (5.3.1)$$

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (5.3.2)$$

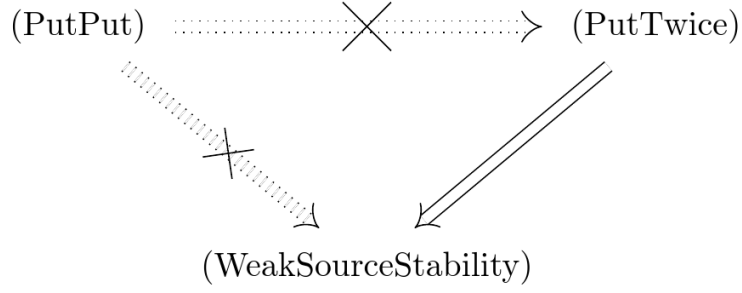


Figure 5.3: PutPut Family(put is partial)

Proof. (5.3.2)(PutPut) $\not\Rightarrow$ (WeakSourceStability)

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$\text{get}(s_1) \downarrow v_1$	$\text{get}(s_2) \downarrow v_1$
$\text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1$	$\text{put}(s_2, v_1) \downarrow s_2$
$\text{put}(s_1, v_2) \downarrow$	$\text{put}(s_2, v_2) \downarrow$

□

put が部分関数の時、PutPut Family 内のレンズ則の含意関係は図 5.1 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 14 である。

5.4 Family 同士の分離

get が全域関数、put が部分関数の時、補題 15 によって Family を分離することができる。

補題 15. [3],[4]

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (5.4.1)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (5.4.2)$$

$$(\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \vee (\text{PutPut}) \vee (\text{WeakSourceStability}) \quad (5.4.3)$$

$$(\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (5.4.4)$$

$$(\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{GetSurjectivity}) \quad (5.4.5)$$

$$(\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (5.4.6)$$

$$(\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{GetSurjectivity}) \quad (5.4.7)$$

5.5 Family 外のレンズ則の含意関係

get が全域関数、put が部分関数の時、各 Family を超えたレンズ則の含意関係は補題 16 となる。

補題 16.

$$(\text{PutInjectivity}) \wedge (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \quad (5.5.1)$$

$$(\text{ViewDetermination}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (5.5.2)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{StrongGetPut}) \quad (5.5.3)$$

$$(\text{GetSurjectivity}) \wedge (\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (5.5.4)$$

$$(\text{GetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \quad (5.5.5)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (5.5.6)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \Rightarrow (\text{PutPut}) \quad (5.5.7)$$

$$(\text{PutGet}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (5.5.8)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (5.5.9)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (5.5.10)$$

Proof. (5.5.3) $(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{PutGet}) \Rightarrow (\text{StrongGetPut})$

$S = \{s_1, s_2\}$ 、 $V = \{v_1, v_2\}$ において、以下のレンズを考える

$$\begin{array}{ll} \text{get}(s_1) \downarrow v_1 & \text{get}(s_2) \downarrow v_2 \\ \text{put}(s_1, v_1) \downarrow s_1 & \text{put}(s_2, v_1) \downarrow \perp \\ \text{put}(s_1, v_2) \downarrow s_2 & \text{put}(s_2, v_2) \downarrow s_2 \end{array}$$

□

5.6 16 個のレンズ則の含意関係

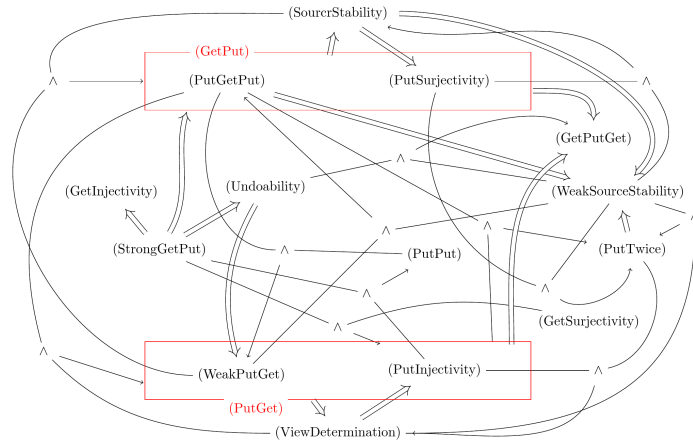


Figure 5.4: 16 個のレンズ則の含意関係 (get is total, put is partial)

これまでに示したレンズ則の含意関係から、get が全域関数、put が部分関数の場合、16 個全てのレンズ則の含意関係は図 3.4 のようになる。

Chapter 6

get is partial, put is partial

この章では get と put がどちらも部分関数の場合のレンズ則の含意関係を考察する。

6.1 GetPut Family

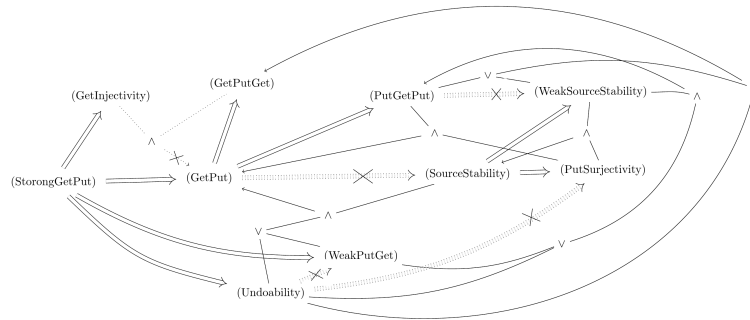


Figure 6.1: GetPut Family(get is partial, put is partial)

補題 17.

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \not\Rightarrow (\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (6.1.1)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{Undoability}) \not\Rightarrow (\text{PutSurjectivity}) \quad (6.1.2)$$

$$(\text{Undoability}) \not\Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (6.1.3)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (6.1.4)$$

$$(\text{GetPut}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (6.1.5)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \quad (6.1.6)$$

$$(\text{SourceStability}) \Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (6.1.7)$$

$$(\text{PutGetPut}) \not\Rightarrow (\text{WeakSourceStability}) \quad (6.1.8)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{GetPutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (6.1.9)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (6.1.10)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{WeakPutGet}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (6.1.11)$$

$$(\text{SourceStability}) \wedge (\text{Undoability}) \Rightarrow (\text{GetPut}) \quad (6.1.12)$$

$$(\text{PutSurjectivity}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{SourceStability}) \quad (6.1.13)$$

$$(\text{WeakPutGet}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (6.1.14)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{PutGetPut}) \quad (6.1.15)$$

$$(\text{Undoability}) \wedge (\text{WeakSourceStability}) \Rightarrow (\text{GetPutGet}) \quad (6.1.16)$$

get と put がどちらも部分関数の時、GetPut Family 内のレンズ則の含意関係は図 6.1 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 17 である。

6.2 PutGet Family

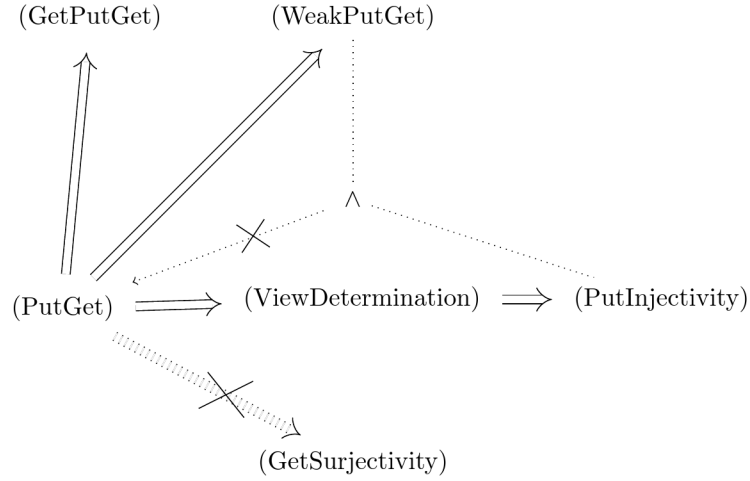


Figure 6.2: PutGet Family(get is partial,put is partial)

補題 18.

$$(PutGet) \Rightarrow (ViewDetermination) \Rightarrow (PutInjectivity) \quad (6.2.1)$$

$$(PutGet) \Rightarrow (WeakPutGet) \quad (6.2.2)$$

$$(PutGet) \Rightarrow (GetPutGet) \quad (6.2.3)$$

$$(PutGet) \not\Rightarrow (GetSurjectivity) \quad (6.2.4)$$

$$(WeakPutGet) \wedge (PutInjectivity) \not\Rightarrow (PutGet) \quad (6.2.5)$$

get と put がどちらも部分関数の時、PutGet Family 内のレンズ則の含意関係は図 6.2 のように表される。また、この Family 内のレンズ則の含意関係は補題 18 である。

6.3 Family 同士の分離

補題 19. [3],[4]

$$(\text{StrongGetPut}) \not\Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutPut}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (6.3.1)$$

$$(\text{SourceStability}) \not\Rightarrow (\text{GetSurjectivity}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{PutPut}) \vee (\text{PutTwice}) \quad (6.3.2)$$

$$(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (6.3.3)$$

$$(\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{Undoability}) \vee (\text{PutPut}) \vee (\text{WeakSourceStability}) \quad (6.3.4)$$

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (6.3.5)$$

$$(\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{Undoability}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{GetSurjectivity}) \quad (6.3.6)$$

$$(\text{PutTwice}) \not\Rightarrow (\text{GetInjectivity}) \vee (\text{GetPutGet}) \vee (\text{PutGetPut}) \vee (\text{PutSurjectivity}) \quad (6.3.7)$$

$$(\text{PutTwice}) \not\Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \vee (\text{Undoability}) \vee (\text{PutInjectivity}) \vee (\text{GetSurjectivity}) \quad (6.3.8)$$

6.4 Family 外の含意関係

get と put がどちらも部分関数の時、各 Family を超えたレンズ則の含意関係は補題 19 となる。なお、(6.4.3) は

補題 20.

$$(\text{PutInjectivity}) \wedge (\text{PutTwice}) \Rightarrow (\text{ViewDetermination}) \quad (6.4.1)$$

$$(\text{ViewDetermination}) \wedge (\text{PutGetPut}) \not\Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (6.4.2)$$

$$(\text{GetInjectivity}) \wedge (\text{PutGet}) \not\Rightarrow (\text{StrongGetPut}) \quad (6.4.3)$$

$$(\text{GetSurjectivity}) \wedge (\text{StrongGetPut}) \Rightarrow (\text{PutGet}) \quad (6.4.4)$$

$$(\text{GetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \not\Rightarrow (\text{Undoability}) \quad (6.4.5)$$

$$(\text{PutGetPut}) \wedge (\text{PutPut}) \Rightarrow (\text{WeakPutGet}) \quad (6.4.6)$$

$$(\text{StrongGetPut}) \wedge (\text{PutInjectivity}) \not\Rightarrow (\text{PutPut}) \quad (6.4.7)$$

$$(\text{PutGet}) \wedge (\text{PutGetPut}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (6.4.8)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{ViewDetermination}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (6.4.9)$$

$$(\text{WeakSourceStability}) \wedge (\text{PutSurjectivity}) \Rightarrow (\text{PutTwice}) \quad (6.4.10)$$

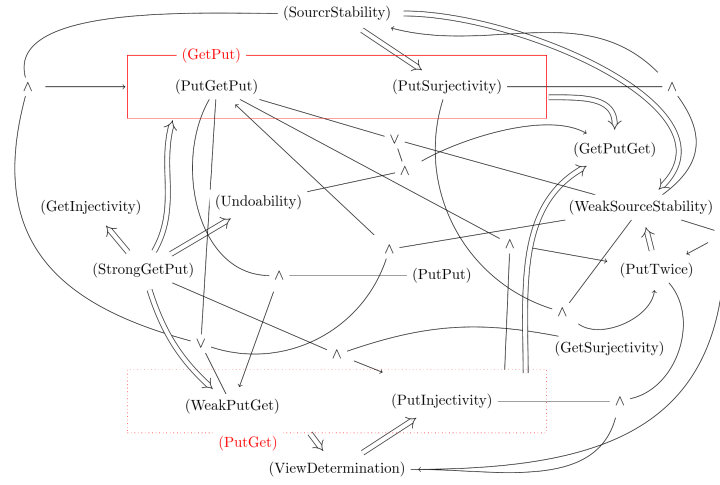


Figure 6.3: 16 個のレンズ則の含意関係 (get is partial, put is partial)

6.5 16 個のレンズ則の含意関係

これまでに示したレンズ則の含意関係から、get と put がどちらも部分関数の場合、16 個全てのレンズ則の含意関係は図 3.4 のようになる。

Chapter 7

今後の課題

本論文でこれまでに提示された全てのレンズ則の含意関係について考察したが、以下の課題が残されている。

1. 本論文の16個のレンズ則の含意関係は完全ではない。具体的には、2つのレンズ則間の単純なもの、2つのレンズ則から1つのレンズ則を導くもの、これらのみを考慮しており、3つ以上のレンズ則から他の1つのレンズ則への含意関係は今だ全ては明かされていない。また、図3.4、4.3、5.4、6.3の図の中のレンズ則の含意関係の内、矢印が存在しないレンズ則間に含意関係が存在しないことの証明は完了していない。

2. `put` が部分関数の場合、 (GetSurjectivity) への含意関係を持つレンズ則が存在しない。実際、データベースにおいて、`get` の全射性は重要であり、今後 (GetSurjectivity) を満たすための新たなレンズ則を考える必要ができる可能性がある。

3. `put` が部分関数の場合、 (PutGet) が (GetSurjectivity) を満たさないため、レンズの一貫性に関して、新たな考察が必要となる可能性がある。

4. (PutPut-1) と (PutPut-2) について、本論文では (PutPut) の計算の順番としてより自然である、という理由で `put` が部分関数の場合は (PutPut-1) を (PutPut) として採用した。しかし、これら二つの (PutPut) に関する含意関係は考察がされていない。

Chapter 8

謝辞

本研究において、指導をしてくださった中野先生、浅田先生、菊池先生、ならびに研究室で仲良くしてくださった方々、誠にありがとうございました。

Bibliography

- [1] François Bancilhon and Nicolas Spyratos. Update semantics of relational views. *ACM Trans. Database Syst.*, Vol. 6, No. 4, pp. 557–575, 1981.
- [2] Sebastian Fischer, Zhenjiang Hu, and Hugo Pacheco. A clear picture of lens laws. In Ralf Hinze and Janis Voigtländer, editors, *Mathematics of Program Construction*, pp. 215–223, Cham, 2015. Springer International Publishing.
- [3] Keisuke Nakano. *Lens Laws Zoo*, pp. 37–59. Springer Nature Singapore, Singapore, 2025.
- [4] Hashiba Keishi. Relations among lens laws for bidirectional transformations consisting of partial functions. Vol. 39, , 2024.