《概率论与数理统计》

考试说明：考试闭卷；可使用文曲星外的计算器。

承诺：本人已学习了《北京工业大学考场规则》和《北京工业大学学生违纪处分条例》，承诺在考试过程中自觉遵守有关规定，服从监考教师管理，诚信考试，做到不违纪、不作弊、不替考。若有违反，愿接受相应的处分。

承诺人：________ 学号：________ 班号：________ 得分：________

注：本试卷共 6 大题，共 7 页，满分 100 分. 考试时必须使用卷后附加的统一答题纸或草稿纸。

页面成绩汇总表（阅卷教师填写）

题号	一	二 (1)	二 (2)	二 (3)	二 (4)	二 (5)	总分
得分							
教师							

一、填空题 (15 个空, 每空 2 分, 共 30 分)

1. 设 $P(A)=0.5$, $P(A\cup B)=0.7$. 则当 A 与 B 互斥时, $P(B)=$________; A 与 B 相互独立时, $P(B)=$________.

2. 在相同条件下做 4 次独立试验, 假设每次试验时事件 A 发生的概率都是 p, 且 4 次试验中 A 恰发生 1 次与发生 2 次的概率相等. 用 X 表示 4 次试验中 A 发生的次数时, $E(X)=$________, $Var(X)=$________.

3. 设随机变量 X 服从参数 λ 的泊松分布, 且 $P\{X\geq 1\}=1-e^{-2}$, 则 $\lambda=$________, $E(X^2)=$________.

4. 设随机变量 X 可能取的值为 $-2, 0$ 和 1, 且 $P\{X=-2\}=0.4$, $P\{X=0\}=0.3$. 则 $E(X)=$________, $Var(X)=$________.

5. 若随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且 $X_1\sim N(3,\ 3^2)$, $X_2\sim N(1,\ 2^2)$, $X=X_1-2X_2$, 则 $X\sim$________, $P\{-4<X<6\}=$________.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本, μ 与 σ^2 为未知常数, $\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与方差, 即 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 则 $\overline{X}\sim$________, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim$________, $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim$________, μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间________________, σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间________________.

注：标准正态分布分布函数值 $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.645)=0.95$.

二、解答题 (每题 14 分, 共 70 分)

注：出此以下各题目要求写过程，否则没有分数！

1. 有型号相同的产品三箱, 第一箱装 12 件, 其中 2 件为次品; 第二箱装 8 件, 其中只有 1 件为次品; 第三箱装 20 件, 其中 4 件为次品.

(1). 从三箱抽取 1 箱, 然后从中随机抽取 1 件产品, 求抽到次品的概率;

(2). 如发现抽到的产品为次品, 求其抽自第 1 箱的概率.

2. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且二者均服从 $[0,1]$ 区间上均匀分布, 令 X
$X_1 + X_2$, 求

(1). X 的概率密度函数 $f_X(x)$;

(2). $E(X)$ 和 $Var(X)$;

(3). $Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

3. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 有联合概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} ay(1-x), & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(1). 确定常数 a;
(2). 求边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;
(3). 回答 X 与 Y 是否独立？为什么?
(4). 计算 $E(Y)$.

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的随机样本, $\sigma^2 > 0$ 是未知参数. 求

(1). σ^2 的矩估计 $\widehat{\sigma^2}$;

(2). σ^2 的极大似然估计 $\widetilde{\sigma^2}$.

(3). 回答 $\widehat{\sigma^2}$ 是否为 σ^2 的无偏估计, 为什么?

5. 假设某品牌日光灯的使用寿命 (单位：小时) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 未知. 现从该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验, 测得它们寿命的平均值为 100.4, 样本方差为 0.49。问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 从样本看：

(1). 能否认为 $\mu = 100$? (2). 能否认为 $\sigma^2 < 0.5$?

t 分布与 χ^2 分布表

$t_8(0.025) = 2.3060$	$t_8(0.05) = 1.8595$	$t_9(0.025) = 2.2622$	$t_9(0.05) = 1.8331$
$\chi_8^2(0.025) = 17.535$	$\chi_8^2(0.05) = 15.507$	$\chi_9^2(0.025) = 19.023$	$\chi_9^2(0.05) = 16.919$
$\chi_8^2(0.975) = 2.180$	$\chi_8^2(0.95) = 2.733$	$\chi_9^2(0.975) = 2.700$	$\chi_9^2(0.95) = 3.325$