得 分

一、填空题（每小题 4 分，共 40 分）

1. 函数 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(1,0)$ 处的梯度 gradz = $(1,0)=\vec{i}$

2. 曲面 $xy+e^z=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $x+2y+z=4$

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$ 是绝对收敛、条件收敛、还是发散？ 发散

4. 函数 $f(x)=x\sin x$ 的麦克劳林级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\le 0\\ e^x, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 是以 2π 为周期的周期函数，其傅立叶级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(6\pi)=$ $\frac{1}{2}$

6. 设 $D:1\le x^2+y^2\le 2$，则二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\frac{3}{2}\pi$

7. 设曲线 L 为 $x=\sqrt{1-y^2}$，则曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ π

8. 设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$，则曲面积分 $\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S=$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

9. 由曲面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$

10. 微分方程 $xy'=y$ 满足 $y(1)=2$ 的特解为 $y=2x$

得 分

二、计算题（每小题 10 分，共 50 分）

11. 计算二次积分 $I=\int_1^5 \frac{1}{y}\mathrm{d}y\int_y^5 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

$$= \int_1^5 \mathrm{d}x \int_1^x \frac{\mathrm{d}y}{y\ln x} \quad 5分$$

$$= \int_1^5 \frac{1}{\ln x}\cdot \ln x\,\mathrm{d}x \quad 8分$$

$$= 4 \quad 10分$$

12. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{2n-1}$ 的收敛域及和函数。

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+1}}{(-1)^n n x^{2n-1}}\right| = |x|^2$ 4分

当 $|x|^2<1$，即 $x\in(-1,1)$ 时绝对收敛，易得收敛域为 $(-1,1)$

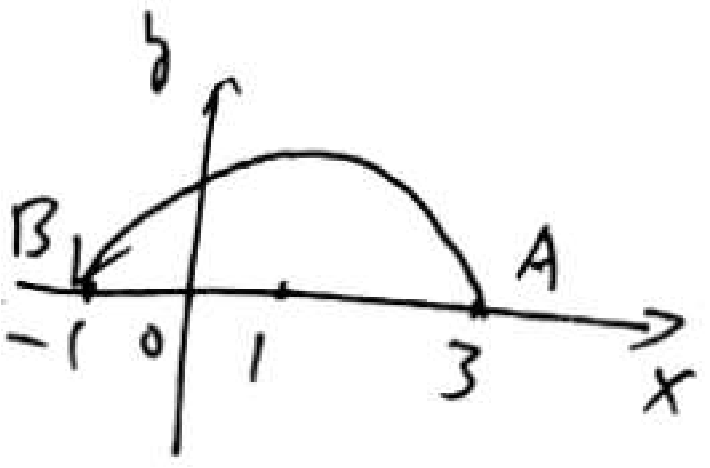
设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{2n-1}$，则

$\int_0^x S(x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{-x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ 8分

求导，得 $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{x}{(1+x^2)^2}$，$x\in(-1,1)$

10分

13. 计算曲线积分 $I=\int_L(2xe^y+1)\mathrm{d}x+(x^2e^y+2x)\mathrm{d}y$，其中 L 是 $(x-1)^2+y^2=4$ 的上半圆周逆时针方向。



设 $P=2xe^y+1$，$Q=x^2e^y+2x$

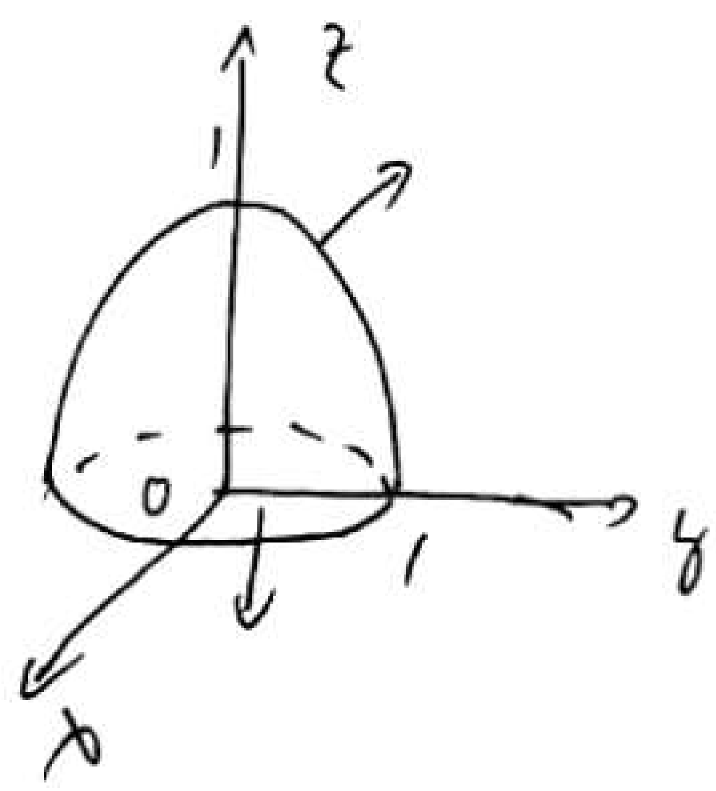
$\frac{\partial Q}{\partial x}=2xe^y+2$，$\frac{\partial P}{\partial y}=2xe^y$ 3分

补直线段 $\overline{BA}$，则 $I=\oint_{L+BA}-\int_{BA}$ 5分

$=\iint_D 2\,dxdy-\int_{-1}^{3}(2x+1)\,dx = 4\pi-12$

8分 10分

14．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(1-3x^2)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(0\le z\le 1)$ 的上侧。



补平面 Σ_1: $z=0$ $(x^2+y^2\le 1)$ 取下侧

设 $P=x^3$, $Q=(1-3x^2)y$, $R=z-1$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=2.$ 4分

$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\iiint\limits_{\Omega}2\,dV-\left(-\iint\limits_{D_{xy}}-1\,dxdy\right)$ $\quad D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

7分

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_0^{1-r^2} r\,dz-\pi=0$

10分

15. 求微分方程 $y''-2y'-3y=x^2e^{-x}$ 的通解。

特征方程为 $r^2-2r-3=0$，特征根 $r_1=-1$，$r_2=3$

原方程所对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$ 4分

设非齐次方程一特解为 $y^*=ze^{-x}$，代入原方程化简得

$z''-4z'=x^2$. 6分

设 $z=ax^3+bx^2+cx$，$z'=3ax^2+2bx+c$

$z''=6ax+2b$

故 $6ax+2b-12ax^2-8bx-4c=x^2$

$$\therefore \begin{cases} -12a=1 \\ 6a-8b=0 \\ 2b-4c=0 \end{cases} \quad \therefore a=-\frac{1}{12} \quad \underline{b=-\frac{1}{16}} \quad \underline{c=-\frac{1}{32}}$$

特解 $y^*=\left(-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{32}x\right)e^{-x}$

原方程通解为 $y=Y+y^*$

$$=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+\left(-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{16}+\frac{x}{32}\right)e^{-x}$$

10分

得分

三、证明题（每小题5分，共10分）

16. 设方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定了函数 $z=z(x,y)$，其中 $F(u,v)$ 是可微函数. 证明：$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

两边对x求导，有 $F_1'\cdot\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}$ 2分

两边对y求导，有 $F_1'\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_2'\left(1-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$

解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}$ 4分 故 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 5分

17. 设函数 $f(x)\geq 0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛。

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=0$ 3分

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，4分 由正项级数比较判别法极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 收敛 5分