公交车在高峰和平峰转换期间的调度

摘要

公交车是为市民出行提供服务的“准公共”产品。然后针对不同区域不同时间段的人流量情况，我们需要对公交车进行一定的调度，以使得在增加盈利的同时，兼顾“尽可能减少私家车使用以缓解城市交通拥堵”和“尽量让公众满意”两大目标。本文通过给出合理的“高峰”和“平峰”的定义，并在此基础上给出在转换期的最优化分布调度方案，最后在此基础上给出平峰和高峰的预测方法并对其进行验证。

我们在具体环境 (公交车成本为 200，发车间隔为 5min/辆，票价为：1 元/人，载客量为 84 人/辆) 下定义阈值为区分高峰和低峰的临界值：691；则相应高于阈值则为高峰，低于阈值则为低峰，通过定义阈值间接给出高峰和低峰的预测。利用排队论单目标混合模型，通过验证其在此环境下的阈值处的顾客损失率为 0.0118，小于一进而证明在此定义的阈值处，刚好是高峰和低峰的分界处，则说明该定义合理。

问题二环境与问题一相同，我们通过相应的改变发车频率进行分步调控，给出最终的调度方案 (从高峰段到低峰段的调度时，选择 5min 间隔发车–>5/10min 间隔交替发车–>10min 间隔发车；在从低峰段到高峰段的调度时，则选择与之相反调度)，使得盈利的大小均超过阈值。并将人流量作为研究指标，通过拟合调度前后各时间段盈利额与阈值的比较图，发现调度后每一个时间段的盈利额都在阈值界限上方，则说明此调度方案是合理的；通过将此调度方案放入不同人流量情况下，观察其每个时间段盈利额与阈值的比较图，若并非都在阈值上方，则说明此调度方案针对最开始所给数据是最优的。

关键字： 排队论　调度模型

一、问题重述

1.1 问题背景

公交车是为市民出行提供服务的“准公共”产品。它服务的对象是公众而非特定的个人，也就是说，不考虑任何一个人在任何时候都能得到公交服务这样的要求。另一方面，公共交通不以盈利为目标但也不是免费的。因此，公交要在给定的财政拨款约束下，兼顾“尽可能减少私家车使用以缓解城市交通拥堵”和“尽量让公众满意”两大目标。公交车的站点布局、线路规划、车型配备、票价制定、发车频率和车辆调度等都要按照它的基本属性和目标来进行设计和调整的。这是相当复杂的系统问题，反映一个现代城市的管理水平。因为这个问题的重要、复杂和困难，从传统的“交通工程”到今天的“智慧城市”，长期以来它吸引了大量的理论和应用研究，积累了丰富的研究成果和系列的设计标准与规范。

1.2 问题重述

1. 给出一条公交线路“高峰”和“平峰”的定义，并说明其合理性。
2. 对高峰和平峰任意给定的一组数据，给出“转换期”的调度方案，并说明在什么指标下，该方案是可行的、最优的。进一步，讨论调度方案对参数的稳健性和敏感性。
3. 给出“高峰”和“平峰”的预测方法。
4. 试通过实际运行数据验证你的结果。

二、问题分析

2.1 问题一

问题一需要给出高峰和低峰的定义，而高峰是指运营总收入与运营总成本之差不小于一个给定的“阈值”时段，则此问题便转换为定义一个“阈值”进而对高峰和低峰进行二次定义，在此基础上，我们定义“阈值”为界定高峰和低峰的一个值。为对此定义进行合理性分析，我们将其放入具体环境，利用排队论单目标混合模型，通过验证其在此环境下的阈值处的顾客损失率恰好小于一证明顾客恰好不用等下一辆，因此证明在此定义的阈值处，刚好是高峰和低峰的分解处，则说明该定义合理。

2.2 问题二

在给定某路段的高峰和低峰的基础上，为使得在乘客数下降和恢复的过程中，保证阈值的下界不被突破，我们通过相应的改变发车频率进行分步调控，给出最终的调度方案，使得盈利的大小超过阈值。

将人流量作为研究指标，并通过得到调度前后各时间段盈利额与阈值的比较图，若调度后每一个时间段的盈利额都在阈值界限上方，则说明此调度方案是合理的；通过将此调度方案放入不同人流量情况下，以步长为 1 遍历得出可行域，则在该可行域内，该方案是可行的、最优的。最后对其进行灵敏度分析。

2.3 问题三

根据所选择数据的特点，采取时间时序模型的简单移动平均法。

在预测高峰时，利用在第一次平峰到高峰时间段的数据为研究对象，依次计算在此基础上，以间隔上一起始点 5min 的点作为下一起始点，计算往后一个小时的上车人数。随后采用移动平均法，直到预测到某个时刻的第一次出现 $W > W_0$，则说明到达下一个高峰。同理，在预测平峰时刻时，利用在第一次高峰到平峰时间段的数据为研究对象，依次计算在此基础上，以间隔上一起始点 5min 的点作为下一起始点，计算往后一个小时的上车人数。随后采用移动平均法，直到预测到某个时刻第一次出现的 $W < W_0$，则说明到达下一个低峰。

2.4 问题四

为验证问题三所给出的预测方法，在给定数据集下，首先利用问题二所给出的调度模型进行调度，并观察调度后利润与阈值对比图，若绝大多数时间段利润都在阈值上方，说明问题二的模型调度方案合理。并代入问题三预测模型进行预测，若在可接受误差范围，则说明问题三所给的预测模型是正确的。

三、 模型的假设

本文提出以下合理假设：

- 假设该线路上运行的是同一钟类型的公交车；

讲解三线表以及网站使用

讲解符号查询以及对应含义

四、 符号说明

符号	意义
W	某一小时内该路段运行总收益-总成本
W_0	区分高峰和低峰的一个临界值
P	线路在一小时内所有站的总上车人数
x	线路在一小时内的车辆数
T_t	长期趋势项
M_t	简单移动平均项

五、 问题一

5.1 定义高峰和平峰

由题注记可以进行一下定义：

阈值 W_0：区分高峰和低峰的一个临界值：691；

高峰：正常时段，定义为运营总收入与运营总成本之差不小于 W_0 的时段；

平峰：定义为运营总收入与运营总成本之差小于 W_0 的时段。

5.2 排队论证明定义合理性

(1) 模型说明

为证明上诉定义合理，我们将该定义放入具体的数据中证明。

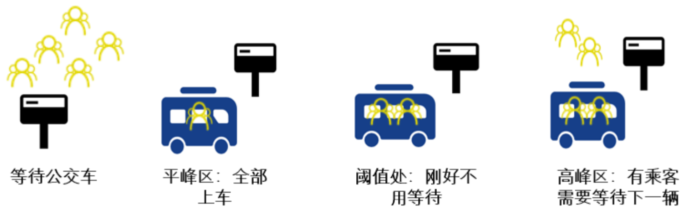
假定某条道路一辆车的成本为 200 元，一人收价为 1 元，车载人数为 84 人，发车间隔为 5min，则一小时内该线路共有 12 量正在运行车辆。按照定义阈值 $W_0 = 691$，则我们可以计算出此时总人流量 $P = 691 + 12 \times 200 = 3091$。进而该问题便转换为排队论中的单服务台混合制模型 [1]，通过判断在给定条件下计算出的顾客损失率来验证前面阈值的定义是否合理。

若在该阈值下，顾客损失率刚好小于 1，即顾客恰好不用等待下一辆，因此说明此时刚好处于高峰和低峰段的临界值，验证其合理性。

排队论是专门研究由于随机因素的影响而产生的拥挤现象的科学，凡是要求服务的对象统称为“顾客”，提供服务的统称为“服务台”。顾客与服务台构成一个随机服务系统或称排队系统。我们将需要乘车的人员作为“顾客”，提供乘车服务的车辆作为“服务台”。

讲解图片点以及引用

图 **1**　问题一模型示意图



如图 1所示，在给定“阈值”的情况下，若此时顾客损失率刚好小于 1，说明此时顾客数量处于刚好不拥堵的情况；高于此阈值，顾客只能等待下一辆车，则将会出现高峰现象；同理，低于此阈值，则说明此时的顾客都能乘车，为平峰状态。

(2) 模型建立

单服务台混合制模型 [1] M/M/1/K 是指：顾客的相继到达时间服从参数为 λ 的负指数分布，服务台个数为 1，服务时间 V 服从参数为 μ 的负指数分布，系统的空间为 K，当 K 个位置已被顾客占用时，新到的顾客自动离去，当系统中有空位置时，新到的顾客进入系统排队等待。在此模型基础上可以得到下列公式：

讲解公式以及引用

$$p_n = \rho^n p_0, \quad n = 1, 2, \cdots, K \tag{1}$$

其中：

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{K} \rho^n} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0, 1, 2, \cdots, K-1 \\ 0, & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1, 2, \cdots, K$$

(3) 模型求解

在 $W_0 = 691 \quad W = 3091$ 的条件下，查阅相关文献 [2] 可得此时一站台最高人数大约为总人数的 $\frac{1}{3}$，即 K=1020，最终计算此时的顾客损失率。排队论计算各参数值如表 1：

这里讲述一下普通表格的引用以及改变

表 **1**　顾客损失率计算参数值

参数	数值
λ	85
μ	84
ρ	1.011905
K	1020
P_0	6.7321×10^{-7}

可以得到此时的顾客损失率为：0.0118。说明当 $W_0 = 691$，此时一辆车载人数为 84 人，顾客损失率刚好不超过一个人，不会出现乘客无法乘车的现象。若高于此阈值，顾客损失率大于一，将会出现高峰；若小于此阈值，顾客损失率小于一，处于平峰区，说明此阈值定义合理。

六、 问题二

6.1 数据基础

针对问题二，我们参照下表 2的某路段不同时间的人流量数据:

表 **2**　该路段不同时间的人流量

时间段	6:00-7:00	7:00-8:00	8:00-9:00	9:00-10:00	10:00-11:00
线路所有站的总上车人数 P	3279	4271	4513	3589	2512
时间段	11:00-12:00	12:00-13:00	13:00-14:00	14:00-15:00	15:00-16:00
线路所有站的总上车人数 P	2457	2212	1895	1923	2278
时间段	16:00-17:00	17:00-18:00	18:00-19:00		
线路所有站的总上车人数 P	2457	3151	4176		

在此数据基础上，给定某路段公交车站点为 14 个，公交车运行单程的成本为：200 元，运行时间为：6：00–23：00，票价为 1 元/人。其公交车一小时内该路段的车辆运行模型如图 2：

图 **2**　调度前该路段车辆运行示意图

由问题一证明合理性部分可知，此时该路段：

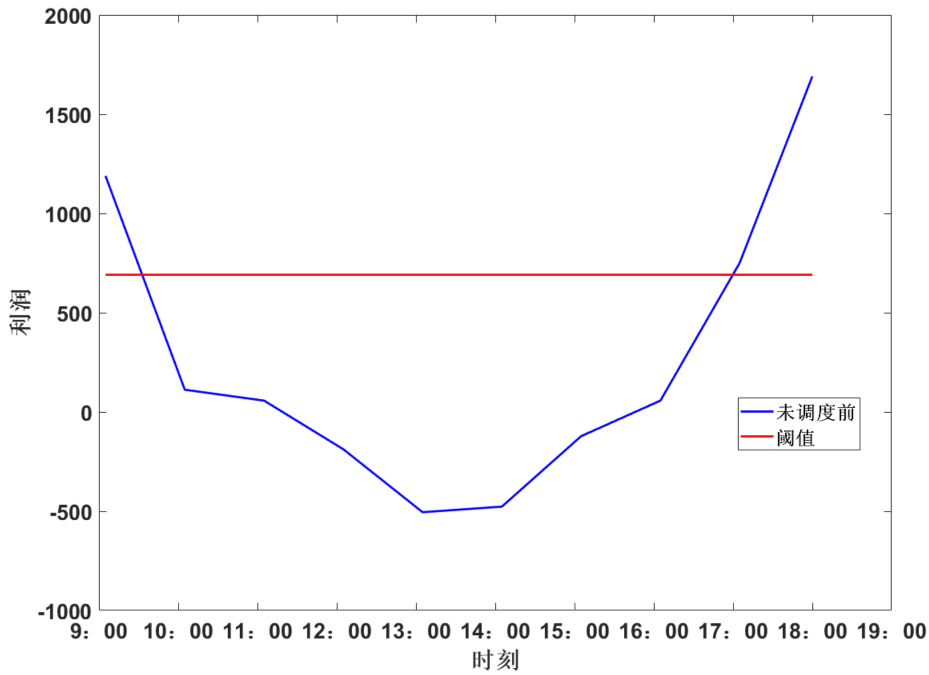
$$阈值为：W_0 = 691元$$

$$高峰：W \geq W_0$$

$$低峰：W < W_0$$

未调度之前，我们通过拟合每个时段的利润 W，并与阈值 W_0 进行对比，可得到图 3：

图 **3**　调度前该路段各时间段利润与阈值对比图



从图中我们可以看出各时间段的 W 分布在阈值上下，而在阈值下方的时间段，无论是从乘客上车率角度还是车辆收益角度，我们应该对此时的车辆分配方案做出适当调整，使得在平峰段的 W 尽可能在 W_0 界限上方。

6.2 调度方案

为使得在乘客数下降和恢复的过程中，通过相应地减少和恢复投入运营的车辆数量来保证这个“阈值”界限不被突破，而盈利的“上界”是不受限的。在从高峰段到低峰

段的调度时，选择 5min 间隔发车–>5/10min 间隔交替发车–>10min 间隔发车；在从低峰段到高峰段的调度时，则选择与之相反调度。具体调度时刻点如下图 4 和图 5 所示：

多个图片排版问题以及小标题与大标题还有引用的注意点

图 **4**　高峰区到低峰区的调度示意图

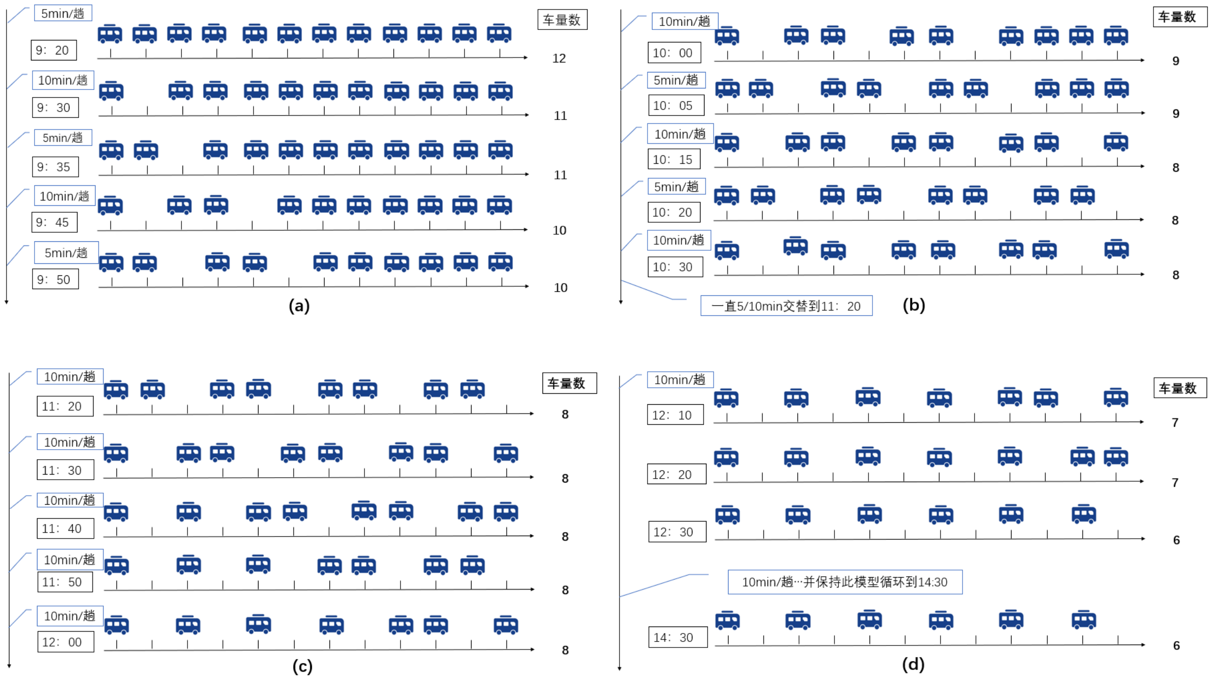
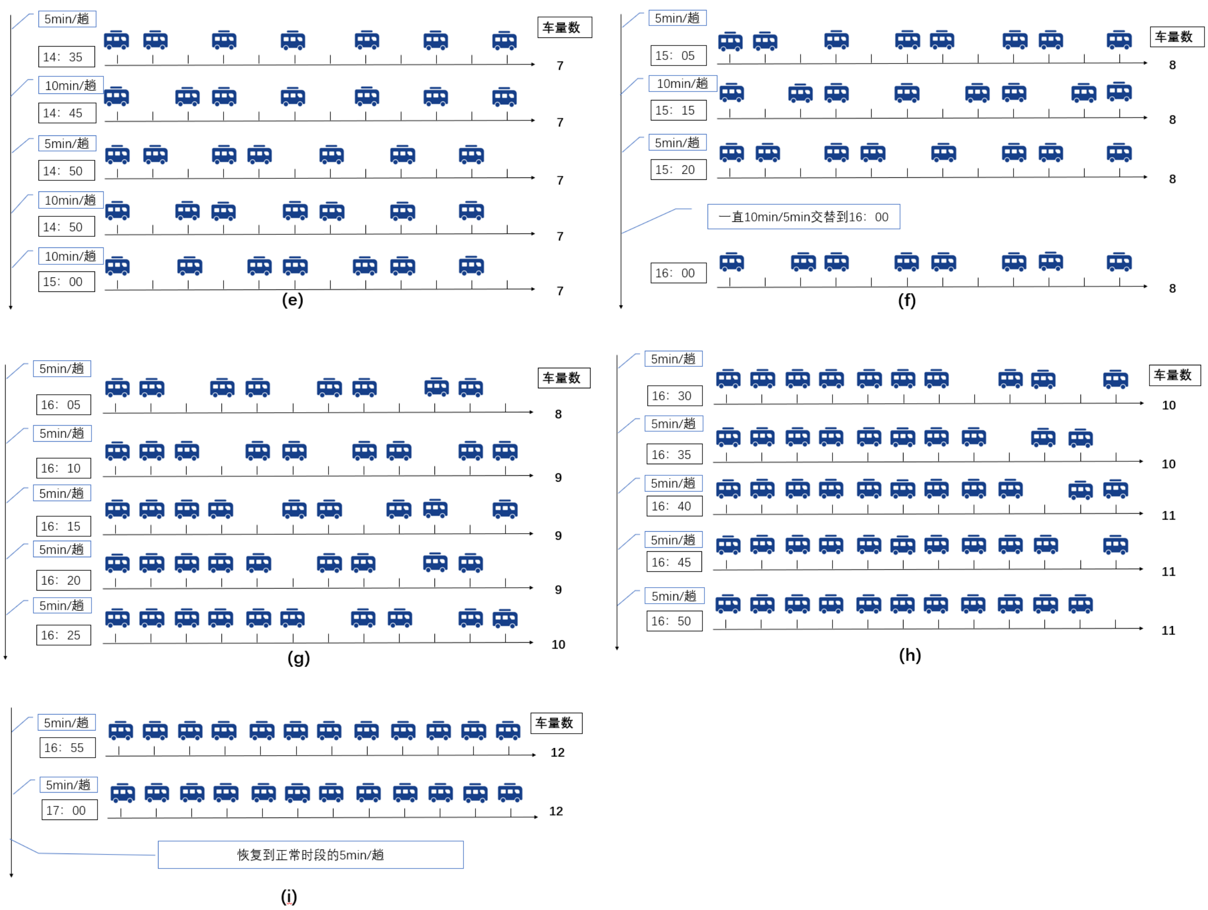


图 5　低峰区到高峰区的示意图



上图 4和图 5中的线段间隔代表 5min，高峰区到低峰区的调度如下：

从 9:20 分开始调度，由之前的 5min/趟改成 10/5min 交替发车至 11：20，此时车数量为 8 辆。此后一直维持 10min/趟的发车频率直到 14:30，此时一小时内线路车数量为 6 辆。

低峰区到高峰区的调度：

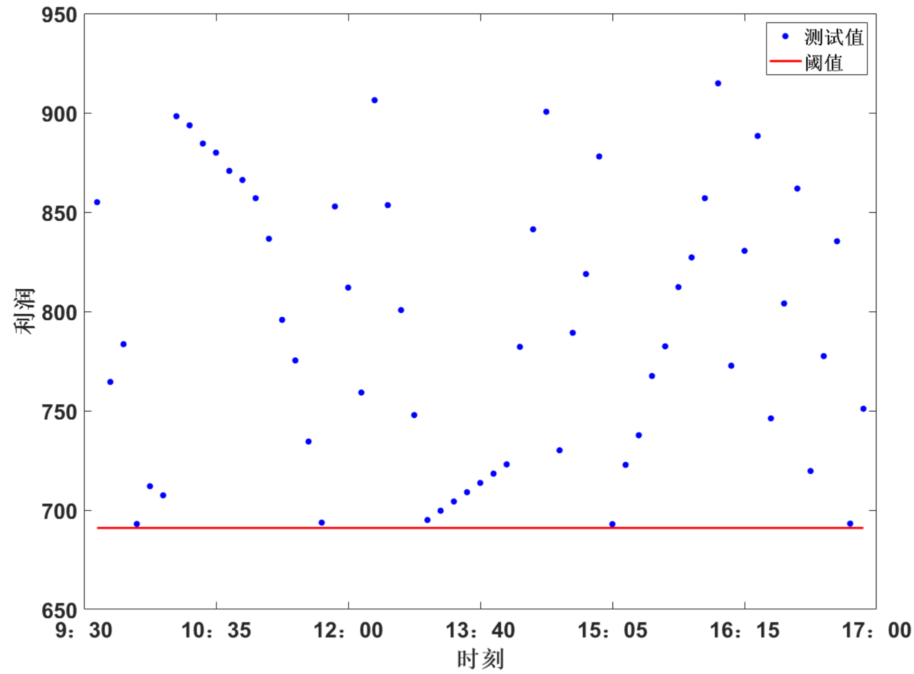
14：30 后发车间隔改为 5/10min 交替发车至 16:00 后，此时线路车数量为 8 辆，而后维持发车频率 5min/趟直到 17：00 高峰结束，在此调度过程中，车数量也从 8 量逐渐增长到 12 辆。

6.3 调度方案可行性与最优性分析

(1) 可行性分析

由表 2可以观察到该路段不同时间段存在高峰和低峰的现象，若发车频率保持 5/min 不变，大部分时间段内利润将小于阈值。因此，我们做出了前方所述调度，并将调度后的结果进行利润与阈值分析，结果如图 6：

图 **6**　调度后该路段各时间段利润与阈值对比图

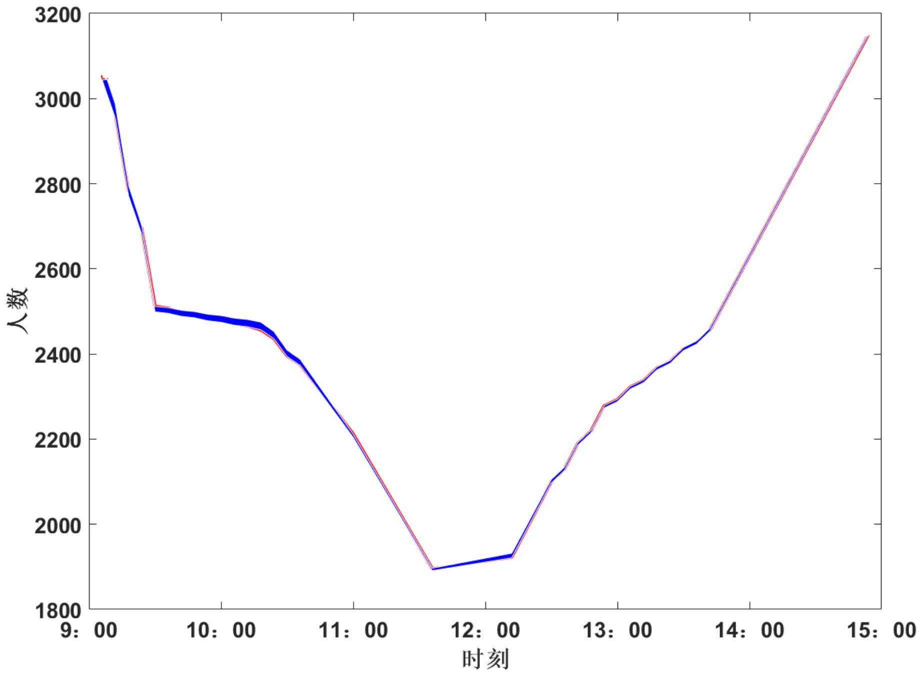


从图中可以看出，每个时间段利润 W 都位于阈值 W_0 上方或者附近，证明调度后阈值的下界没有被突破，即此调度方案合理。

(2) 最优性分析

对所给数据进行步长为 1 的遍历，并将遍历得到的可行域与调度方案后的分布曲线进行分析，如下图：

图 **7**　可行域示意图



上图中，蓝色区域为可行域，红色曲线为给定数据，在该可行域内该调度方案都是可行且最优的。

6.4 调度方案灵敏性与敏感性分析

由于利润与总人流量间满足 $W = P - x \times 200$，分析人流量对某时间段利润的敏感程度 $S(P, W)$。

$$S(P, W) = \frac{dP}{dW} \cdot \frac{W}{P} = \frac{W}{P} \tag{2}$$

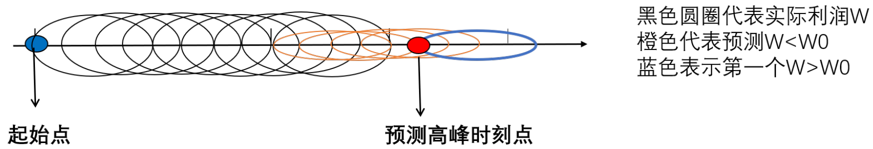
带入表 2可得 $S(P, W) = 0.33$，则说明调度之后人流量对利润不敏感，进一步说明了调度方案对人流量是比较稳定的。

七、 问题三的模型建立与求解

7.1 模型建立

根据所选择数据的特点，采取时间时序模型的简单移动平均法。其模型示意图如下图：

图 **8**　移动平均法示意图



(1) 高峰预测

在第一次平峰到高峰时间段的数据为研究对象，依次计算在此基础上，以间隔上一起始点 5min 的点作为下一起始点，计算往后一个小时的上车人数。随后采用移动平均法，直到预测到某个时刻第一次出现 $W \geq W_0$，则说明到达下一个高峰。

(2) 低峰预测

以高峰到平峰时间段的数据为研究对象，依次计算在此基础上，以间隔上一起始点 5min 的点作为下一起始点，计算往后一个小时的上车人数。随后采用移动平均法，直到预测到某个时刻第一次出现 $W \leq W_0$，则说明到达下一个低峰。

7.2 模型求解

由于到达站点的人群时平均到达，因此我们将观测序列设为 $y_1, y_2, \ldots, y_T$，取移动平均的项数 N<T。则一次简单移动的平均值为 $M_t^{(1)}$：

$$\begin{aligned} M_t^{(1)} &= \frac{1}{N}\left(y_t + y_{t-1} + \cdots + y_{t-N+1}\right) \\ &= \frac{1}{N}\left(y_{t-1} + \cdots + y_{t-N}\right) + \frac{1}{N}\left(y_t - y_{t-N}\right) = M_{t-1}^{(1)} + \frac{1}{N}\left(y_t - y_{t-N}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

建立预测模型 $\hat{y}_{t+1}$：

$$\hat{y}_{t+1} = M_t^{(1)} = \frac{1}{N}\left(y_t + \cdots + y_{t-N+1}\right), t = N, N+1, \cdots, T \tag{4}$$

其预测标准差为 S：

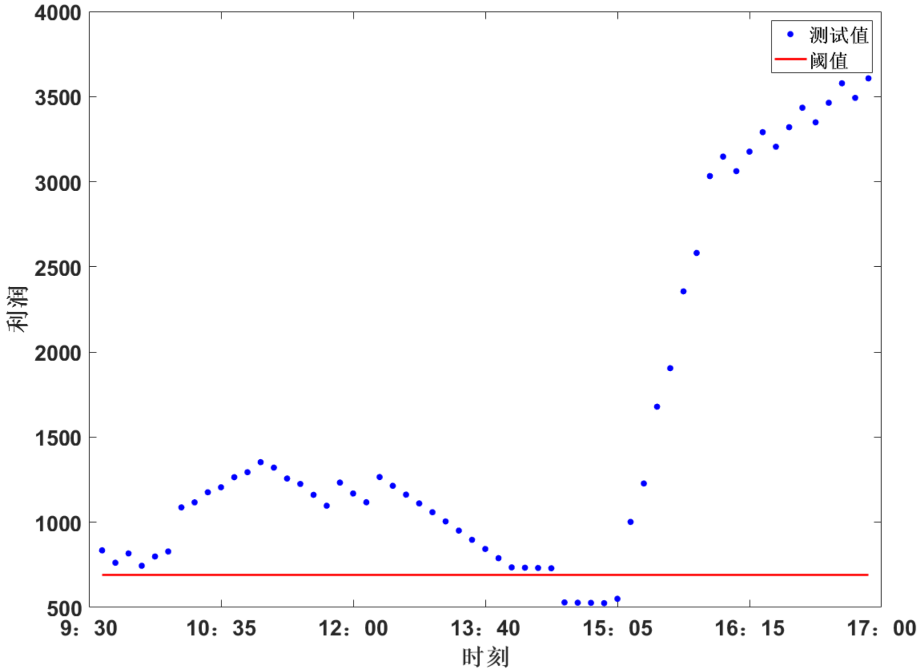
$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=N+1}^{T}\left(\hat{y}_t - y_t\right)^2}{T-N}} \tag{5}$$

八、 问题四

(1) 数据调度化

采取有关文件中一组实际数据 (见附件一) 带入问题二所建立的调度模型，对该数据进行调度，使得每一时间段的利润都高于阈值，并得到调度后的利润与阈值对比图如下图 9：

图 **9**　实际数据调度后各时间段利润与阈值对比图



如上图所示，可以看到绝大多数时间段的利润都高于阈值，则证明调度方案是合理的。

(2) 问题三基础上的高低峰预测结果

将调度后的分布情况，带入 3、4、5可得到：

预测值：高峰时间点：6 : 30　平峰时间点：18 : 50

(3) 预测值与实际值比较

实际值：高峰时间点：7 : 00　平峰时间点：19 : 00

可以看到预测方法得出的数据基本符合实际数据，说明问题三所给的预测方法是合理的。

九、 优缺点分析

9.1 优点

(1) 问题二所给的调度方案是分步调度，相较于一步调度，更难提高利润和乘客上车率。

(2) 问题二所给出的调度方案很好的将每个时间段的收益都调度到了阈值界限上方。

9.2 缺点

(1) 优化区域求解采用遍历法，求解效率低。

(2) 论文结论仅局限于此环境。

参考文献

[1] 司守奎，孙玺菁. 数学建模算法与应用. 国防工业出版社, 2011.

[2] 邹智杰. 数据驱动的公交调度分析与优化研究. 硕士, 福州大学, 2018.

附录 A 排队论源代码

```
{\colortbl ;\red0\green0\blue255;\red0\green0\blue0;}
\viewkind4\uc1\pard\cf1\lang2052\f0\fs20 model\cf2 :\par
\cf1 sets\cf2 :\par
state/1..1020/:p;\par
\cf1 endsets\cf2\par
lamda=1020/12;mu=84;rho=lamda/mu;k=1020;\par
lamda*p0=mu*p(1);\par
(lamda+mu)*p(1)=lamda*p0+mu*p(2);\par
\cf1 @for\cf2 (state(i)|i #gt#1 #and# i #lt#\par
k:(lamda+mu)*p(i)=lamda*p(i-1)+mu*p(i+1));\par
lamda*p(k-1)=mu*p(k);\par
p0+\cf1 @sum\cf2 (state:p)=1;\par
P_lost=p(k);lamda_e=lamda*(1-P_lost);\par
L_s=\cf1 @sum\cf2 (state(i)|i #le#k:i*p(i));\par
L_q=L_s-(1-p0);\par
W_s=L_s/lamda_e;\par
W_q=W_s-1/mu;\par
\cf1 end\cf2\par
}
```

附录 B 未调度利润与阈值对比图

```
clear,clc
%给每个小时间段的人数赋值
a=5;b=10;j=0;m=1; %a, b分别为不同的时间间隔
s=[3589 2512 2457 2212 1895 1923 2278 2457 3151 4176]; %整点时间的人数
A=zeros(1,108);%初始化小时间段人数
for i=1:1:9
k=1;
while j<60
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+a;m=m+1;k=k+1;
end
j=0;
end
%车辆数
c=ones(1,108)*12;
c=200*c;
x=A-c; %成本-利润
B=ones(1,108)*691;
plot(x,'b')
hold on
```

```
plot(B,'r')
```

附录 C 调度利润与阈值对比图

```
function A=dd(s)
%给每个小时间段的人数赋值
a=5;b=10;j=30;m=1; %a, b分别为不同的时间间隔
A=zeros(1,58);%初始化小时间段人数
for i=1:1:3
k=1;
while j<60
if mod(k,2)==0
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+b;k=k+1;m=m+1;
else
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+a;m=m+1;k=k+1;
end
if (i==3 && j==30)
break;
end
end
j=0;
end
j=30;
for i=3:1:6
while j<60
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+b;m=m+1;
if (i==6 && j==30)
break;
end
end
j=0;
end
j=30;
for i=6:1:7
k=1;
while j<60
if mod(k,2)==0
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+b;m=m+1;k=k+1;
else
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+a;m=m+1;k=k+1;
```

```
end
end
j=0;
end
j=0;
for i=8
while j<=60
A(m)=s(i)*(60-j)/60+s(i+1)*j/60;
j=j+a;m=m+1;
end
j=0;
end
%车辆数
c=[11 11 10 10 9 9 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 7 7 7 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 7 7 7 7 8 8 8 8
    8 8 8 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11 11 12 12];
c=200*c;
x=A-c; %成本-利润
for i=1:1:59
if x(i)>=0
minp=x(i);
end
break
end
for i=1:1:59
l=x(i);
if (l<minp && l>=0)
minp=l;
end
end
B=ones(1,59)*691;
plot(A,'b')
% hold on
% plot(B,'r')
end
```

附录 D 灵敏度分析

```
clear,clc
s1=[3589 2499 2457 2204 1891 1921 2273 2453 3150];
s2=[3650 2512 2475 2212 1897 1932 2279 2461 3156];
s3=[3598 2512 2457 2212 1895 1923 2278 2457 3151];
[y2,x2]=dd(s2);
[y1,x1]=dd(s1);
dx=x2-x1;
dy=y2-y1;
```

```
s=dy/y2/(dx/x2)
```

附录 E 最优解

```
clear,clc
s1=[3589 2499 2457 2204 1891 1921 2273 2453 3150];
s2=[3650 2512 2475 2212 1897 1932 2279 2461 3156];
s3=[3598 2512 2457 2212 1895 1923 2278 2457 3151];
y1=dd(s1);
hold on
y2=dd(s2);
hold on
dd(s3)
x1=1:1:59;
x2=x1;
fill([x1,x2],[y1 y2],'b')
```

附录 F 预测

```
clear,clc
s=[50 2018 5489 6083 3467 2215 1876 1590 1682 1937 2507 4292 7136 4978 2182 1582];k=0;m=1;
A=zeros(1,180);
for i=1:1:15
while k<60
A(m)=s(i)*(60-k)/60+s(i+1)*k/60;
k=k+5;m=m+1;
end
k=0;
end
B=A(1:18);
m1=length(B);
n=[2,3];
for i=length(n)
for j=1:m1-n(i)+1
Bhat{i}(j)=sum(B(j:j+n(i)-1))/n(i);
end
B19(i)=Bhat{i}(end);
b(i)=sqrt(mean((B(n(i)+1:m1)-Bhat{i}(1:end-1)).^2));
end
B19
C=A(85:126);
m2=length(C);
```

```
n=[2,3];
for i=length(n)
for j=1:m2-n(i)+1
Chat{i}(j)=sum(C(j:j+n(i)-1))/n(i);
end
C128(i)=Chat{i}(end);
b(i)=sqrt(mean((C(n(i)+1:m2)-Chat{i}(1:end-1)).^2));
end
C128
D=A(37:53);
m3=length(D);
n=[2,3];
for i=length(n)
for j=1:m3-n(i)+1
Dhat{i}(j)=sum(D(j:j+n(i)-1))/n(i);
end
D54(i)=Dhat{i}(end);
b(i)=sqrt(mean((D(n(i)+1:m3)-Dhat{i}(1:end-1)).^2));
end
D54
E=A(145:166);
m4=length(E);
n=[2,3];
for i=length(n)
for j=1:m4-n(i)+1
Ehat{i}(j)=sum(E(j:j+n(i)-1))/n(i);
end
E167(i)=Ehat{i}(end);
b(i)=sqrt(mean((E(n(i)+1:m4)-Ehat{i}(1:end-1)).^2));
end
E167
```