

INF1608 – Análise Numérica

Lab 11: Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

Para estes exercícios, considere a representação de matrizes quadradas $M_{n \times n}$ como um vetor de vetores do Lab 0.

1. Considere o método dos Gradientes Conjugados para solução de sistemas lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 - (a) Na sua forma direta, o método é dado por:

```
 $\mathbf{x}_0$  = estimativa inicial  
 $\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$   
for  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  do  
  if  $\|\mathbf{r}_k\|_2 < tol$  then  
    stop  
  end  
  
   $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k}$   
   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$   
   $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{d}_k$   
   $\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$   
   $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k$   
end
```

Implemente o método Gradientes Conjugados para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dada uma estimativa inicial da solução \mathbf{x} . Quando a norma-2 do resíduo for menor que a tolerância especificada, a solução é considerada válida e as iterações devem ser interrompidas. A função deve sobrescrever a solução final em \mathbf{x} e retornar o número de iterações efetuado. O protótipo da função é dado por:

```
int GradConj (int n, double** A, double* b, double* x, double tol);
```

- (b) A versão do método dos Gradientes Conjugados com pré-condicionador M é dada por:

```

 $\mathbf{x}_0 =$  estimativa inicial
 $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0$ 
 $\mathbf{d}_0 = \mathbf{z}_0 = M^{-1}\mathbf{r}_0$ 
for  $k = 0, 1, \dots, n - 1$  do
    if  $\|\mathbf{r}_k\|_2 < tol$  then
        stop
    end
     $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k}{\mathbf{d}_k^T A \mathbf{d}_k}$ 
     $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ 
     $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{d}_k$ 
     $\mathbf{z}_{k+1} = M^{-1} \mathbf{r}_{k+1}$ 
     $\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{z}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{z}_k}$ 
     $\mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \beta_k \mathbf{d}_k$ 
end

```

Implemente o método Gradientes Conjugados usando como pré-condicionador a matriz D , diagonal de A , dada uma estimativa inicial da solução \mathbf{x} . Quando a norma-2 do resíduo for menor que a tolerância especificada, a solução é considerada válida e as iterações devem ser interrompidas. A função deve sobrescrever a solução final em \mathbf{x} e retornar o número de iterações efetuado. O protótipo da função é dado por:

```
int GradConjPreCond (int n, double** A, double* b, double* x, double tol);
```

2. Teste, analise e compare a eficiência dos métodos achando a solução do sistema abaixo, usando tolerância 10^{-7} e estimativa inicial igual ao vetor nulo. Seu programa deve exibir na tela o número de iterações e a solução encontrada para cada um dos métodos.

$$\begin{bmatrix}
 1.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.4 & 2.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.4 & 3.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0.4 & 4.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0.4 & 5.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 6.0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 7.0 & 0.4 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 8.0 & 0.4 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 9.0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 10.0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_0 \\
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 1.4 \\
 2.8 \\
 3.8 \\
 4.8 \\
 5.8 \\
 6.8 \\
 7.8 \\
 8.8 \\
 9.8 \\
 10.4
 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que a solução desse sistema é $[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$.

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “gradconj.h” e as implementações em um módulo “gradconj.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “gradconj.c”, “gradconj.h” e “main.c”, e *eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio sem atraso é **segunda-feira, dia 23 de novembro**. O sistema receberá trabalhos atrasados pelo prazo adicional de uma semana, com a perda de 1.0 ponto na nota.