INF1608 – Análise Numérica

Lab 3: Sistemas Lineares

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

Para este exercício, considere a representação de matrizes implementada no **lab 0**. A matriz é representada por um vetor de ponteiros, onde cada elemento aponta para um vetor linha.

1. Para a solução de sistemas lineares na forma $A_{n\times n}\ \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_n$, considere o método de *eliminação de Gauss* que transforma a matriz A em uma matriz triangular superior e, em seguida, aplica uma substituição regressiva para encontrar a solução. Para melhorar a estabilidade numérica do método, deve-se empregar a estratégia de *pivotamento*, isto é, as linhas da matriz são trocadas para garantir que o elemento pivô da eliminação de cada coluna seja sempre o elemento de maior valor absoluto da coluna em questão.

   Implemente uma função que receba como parâmetros uma matriz quadrada A e a vetor $\mathbf{b}$. A função deve usar o método da eliminação de Gauss, com pivotamento, para determinar e preencher o vetor solução $\mathbf{x}$. A função pode alterar os valores de A e $\mathbf{b}$ fornecidos. O protótipo da função deve ser:

   ```
   void gauss (int n, double** A, double* b, double* x);
   ```

2. Quando a matriz A é *simétrica positiva definida*, podemos empregar a fatoração de Cholesky, determinando a matriz triangular superior R tal que:

   $$A = R^T\ R$$

   De posse da matriz R, a solução de um sistema linear pode ser alcançada determinando o vetor auxiliar $\mathbf{y}$ por *substituição progressiva*, seguido da determinação de $\mathbf{x}$ por *substituição regressiva*: -5mm

   $$\begin{aligned} A\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ R^T R\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \therefore\ R^T\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ R\,\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

   Pede-se:

   (a) Implemente um método que receba uma matriz A simétrica positiva definida, *armazenada como uma matriz triangular inferior*, e a transforme pela fatoração de Cholesky. No final, o espaço de memória usado por A armazenará a matriz triangular inferior R^T. O protótipo da função deve ser:

   ```
   void cholesky (int n, double** A);
   ```

(b) Implemente uma função que receba a matriz R^T, representada como uma matriz triangular, e o vetor independente $\mathbf{b}$ e preencha o vetor solução $\mathbf{x}$. O protótipo da função deve ser:

```
void substituicoes (int n, double** A, double* b, double* x);
```

3. Escreva um código para testar suas funções. Você pode usar para testes iniciais os sistemas indicados abaixo. Note que as funções alteram a matriz A, impedindo seu reaproveitamento sem cópia para testar os dois métodos.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que as soluções destes sistemas são [1 1 1] e [1 1 1 1 1 1], respectivamente. Para testar a estratégia de pivotamento na eliminação de gauss, pode-se trocar as linhas (e os elementos do vetor independente) de forma que se tenha zeros na diagonal. No entanto, lembre-se que matrizes com zero na diagonal não são simétrica positiva definidas e, portanto, não podem ser fatoradas por Cholesky.

Agrupe os protótipos das funções em um módulo "sistlinear.h" e as implementações em um módulo "sistlinear.c". Escreva um outro módulo "main.c"para testar sua implementação.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos "sistlinear.h", "sistlinear.c" e "main.c") deve ser enviado via página da disciplina no EAD. Devem ser enviado também os códigos do Lab 0, "matriz.h" e matriz.c", se usados na solução. O prazo final para envio sem atraso é **segunda-feira, dia 21 de setembro**. O sistema receberá trabalhos atrasados pelo prazo de uma semana, com a perda de 1.0 ponto na nota.