

Lab 7: Integração Numérica Adaptativa

Prof. Waldemar Celes
Departamento de Informática, PUC-Rio

O objetivo deste laboratório é experimentar Simpson Adaptativo e Quadratura de Gauss.

1. A Regra de Simpson aproxima a integração de uma função pela integração de uma parábola:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,b]} = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - E_{[a,b]}, \quad h = b - a$$

onde o erro da aproximação é dado por:

$$E_{[a,b]} = \frac{1}{2880} h^5 f^{iv}(c)$$

Se adotarmos um passo igual a $\frac{h}{2}$, fazendo duas aproximações de Simpson, chegamos a:

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_{[a,c]} + S_{[c,b]} - E'_{[a,b]}, \quad c = \frac{a+b}{2}$$

com erro dado por:

$$E'_{[a,b]} = E_{[a,c]} + E_{[c,b]} = \frac{E_{[a,b]}}{16}$$

Podemos então fazer:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= S_{[a,b]} + E_{[a,b]} = S_{[a,c]} + S_{[c,b]} + \frac{E_{[a,b]}}{16} \\ |S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}| &= \frac{15}{16} E_{[a,b]} \end{aligned}$$

Logo, a avaliação de $S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}$ nos fornece um valor 15 vezes maior que o erro de $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$. Com isso, podemos implementar um procedimento para realizar Integração de Simpson Adaptativa. Tentamos integrar o intervalo de a a b em um passo e em dois semi-passos, avaliando a diferença $\Delta = |S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}|$. Se esta diferença for menor que 15 vezes a tolerância adotada, podemos assumir o valor $S_{[a,c]} + S_{[c,b]} - \frac{\Delta}{15}$ como resultado da integral; senão, dividimos o intervalo em 2 e repetimos o processo, avaliando as integrais e suas respectivas diferenças nos sub-intervalos. Para cada sub-intervalo, a tolerância deve ser reduzida à metade, a fim de garantir que o erro total esteja dentro da tolerância original.

- (a) Implemente uma função para Integração por Simpson Adaptativa. Sua função deve receber o intervalo de integração, a função e a tolerância de erro desejada, e retornar o valor total da derivada no intervalo dentro da tolerância, seguindo o protótipo:

```
double adaptsimpson (double a, double b, double (*f) (double x), double tol);
```

- (b) A probabilidade dentro de um desvio padrão σ da média em uma distribuição normal é dada por:

$$p(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Implemente uma função que receba como parâmetro o valor de σ e retorne a probabilidade, usando a função do item anterior, com precisão de 8 dígitos. A função deve ter o seguinte protótipo:

```
double probabilidade (double sigma);
```

2. O método de Quadratura de Gauss usa espaçamentos não regulares de amostras para aproximar a função por polinômios no intervalo de integração, de tal forma que o erro seja minimizado. O valor da integral usando Quadratura de Gauss no intervalo de -1 a 1 é dado por:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$$

onde n representa o número de amostras e c_i , x_i , para $n = 4$, são dados pela tabela a seguir:

n	raízes x_i	coeficientes c_i
4	$-\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$
	$-\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$+\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$+\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$\frac{90-5\sqrt{30}}{180}$

Para intervalos quaisquer, fazemos a transformação indicada a seguir:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)t + b + a}{2}\right) \frac{b-a}{2} dt$$

- (a) Implemente uma função para calcular a integral usando Quadratura de Gauss com $n = 4$, seguindo o protótipo:

```
double quadraturagauss (double a, double b, double (*f) (double x));
```

- (b) Implemente outra função para calcular a probabilidade em distribuições normais, agora usando a integração por Quadratura de Gauss, seguindo o protótipo:

```
double probabilidade2 (double sigma);
```

Para testar, escreva um programa para comparar os valores de probabilidade retornados pelos dois métodos. Você também pode testar o valor das integrais abaixo:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^3 e^{-x^2} dx \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x + \sin x) dx$$

Agrupe os protótipos das funções pedidas em um módulo “simpson.h” e as implementações em um módulo “simpson.c”. Escreva o teste em outro módulo “main.c”.

Entrega: O código fonte deste trabalho (isto é, os arquivos “simpson.c”, “simpson.h” e “main.c”, e *eventuais códigos de laboratórios passados usados na solução*) devem ser enviados via página da disciplina no EAD. O prazo final para envio sem atraso é **segunda-feira, dia 26 de outubro**. O sistema receberá trabalhos atrasados pelo prazo adicional de uma semana, com a perda de 1.0 ponto na nota.