

0 — 1 — 2 — 3 — 4 — 5 — 6

(T) A B C D E (T)

-

Vì  $\gamma = 1$  và reward chỉ xuất hiện khi vào ô 6 (reward = 1, còn lại reward = 0), ta có với mỗi trạng thái  $s \in \{1, \dots, 5\}$ :

$$v_*(s) = \mathbb{E}[R_{t+1} + v_*(S_{t+1}) \mid S_t = s] = 0.5(0 + v_*(s-1)) + 0.5(0 + v_*(s+1))$$

tức là

$$v_*(s) = \frac{1}{2} v_*(s-1) + \frac{1}{2} v_*(s+1).$$

Chúng ta sẽ thiết lập 5 phương trình tuyến tính cho  $v_i = v_*(s = i)$ , với  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Gọi  $v_0 = 0$  và  $v_6 = 1$ . Từ phương trình Bellman không chiết khấu:

$$v_i = \frac{1}{2} v_{i-1} + \frac{1}{2} v_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

**1.  $i = 1$ :**

$$v_1 = \frac{1}{2} v_0 + \frac{1}{2} v_2 = 0 + \frac{1}{2} v_2 \implies v_1 = \frac{1}{2} v_2 \quad (1)$$

**2.  $i = 2$ :**

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3 \quad (2)$$

**3.  $i = 3$ :**

$$v_3 = \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} v_4 \quad (3)$$

**4.  $i = 4$ :**

$$v_4 = \frac{1}{2} v_3 + \frac{1}{2} v_5 \quad (4)$$

**5.  $i = 5$ :**

$$v_5 = \frac{1}{2} v_4 + \frac{1}{2} v_6 = \frac{1}{2} v_4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \quad (5)$$

**Bước 1.** Từ (1):

$$v_2 = 2 v_1.$$

**Bước 2.** Thay vào (2):

$$2 v_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3 \implies 4 v_1 = v_1 + v_3 \implies v_3 = 3 v_1.$$

**Bước 3.** Thay  $v_2 = 2v_1$  và  $v_3 = 3v_1$  vào (3):

$$3 v_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 v_1 + \frac{1}{2} v_4 \implies 3 v_1 = v_1 + \frac{1}{2} v_4 \implies \frac{1}{2} v_4 = 2 v_1 \implies v_4 = 4 v_1.$$

**Bước 4.** Thay  $v_3 = 3v_1$  và  $v_4 = 4v_1$  vào (4):

$$4 v_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 v_1 + \frac{1}{2} v_5 \implies 4 v_1 = 1.5 v_1 + \frac{1}{2} v_5 \implies \frac{1}{2} v_5 = 2.5 v_1 \implies v_5 = 5 v_1.$$

**Bước 5.** Cuối cùng thay  $v_4 = 4v_1$  vào (5):

$$v_5 = \frac{1}{2} v_4 + \frac{1}{2} \implies 5 v_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 v_1 + \frac{1}{2} \implies 5 v_1 = 2 v_1 + \frac{1}{2} \implies 3 v_1 = \frac{1}{2} \implies v_1 = \frac{1}{6}.$$

---

Vậy mỗi  $v_i$  là

$$v_i = i \cdot v_1 = \frac{i}{6},$$

tức:

- $v_1 = 1/6$
- $v_2 = 2/6$
- $v_3 = 3/6 = 0.5$
- $v_4 = 4/6$
- $v_5 = 5/6.$