

1.  $E$  是万有集合. 在  $\mathcal{P}(E)$  上定义的下列关系具有什么性质?

(1)  $S\rho_1 T \iff S \cap T = \emptyset$ ;

(2)  $S\rho_2 T \iff S \cap T \neq \emptyset$ ;

(3)  $S\rho_3 T \iff S \subset T$ ;

(4)  $S\rho_4 T \iff S \subseteq T$ ;

(5)  $S\rho_5 T \iff S = T$ .

(1) 对称性

(2) 对称性

(3) 不自反性、传递性

(4) 自反性、反对称性、传递性

(5) 自反性、对称性、反对称性、传递性

2. 在整数集合  $\mathbb{Z}$  上给出三个关系, 它们分别具有如下性质:

(1) 自反、对称, 但不是传递的;

(2) 自反、传递, 但不是对称的;

(3) 对称、传递, 但不是自反的.

$$(1) \quad xR_1y \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$$

$$(2) \quad xR_2y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$(3) \quad xR_3y \Leftrightarrow R_3 = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)\}$$

3. 令  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $R_1$  和  $R_2$  是  $A$  上的关系, 其中

$$R_1 = \{(a, a), (a, b), (b, d)\},$$

$$R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\},$$

求  $R_1 \circ R_2, R_2 \circ R_1, R_1^2, R_2^2$ .

$$\textcircled{1} R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$$

$$\textcircled{2} R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c)\}$$

$$\textcircled{3} R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} R_2^2 &= R_2 \circ R_2 \\ &= \{(b, b), (c, c), (c, d)\} \circ R_2 \\ &= \{(b, c), (b, d), (c, b)\}\end{aligned}$$

4.  $R_1$  是从集合  $B$  到集合  $C$  的关系,  $R_2$  和  $R_3$  是从集合  $A$  到集合  $B$  的关系. 证明:

$$R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3.$$

证明: 任取  $x \in A, y \in C$ , 满足  $x [R_1 \circ (R_2 \cap R_3)] y$

即存在  $z \in B$ , 使  $x (R_2 \cap R_3) z$ ,  $z R_1 y$

由  $x (R_2 \cap R_3) z \Leftrightarrow x R_2 z$  且  $x R_3 z$ .

又  $z R_1 y$ , 故  $x R_2 z, z R_1 y$  且  $x R_3 z, z R_1 y$ .

$\Rightarrow x R_1 \circ R_2 y$  且  $x R_1 \circ R_3 y$ .

即  $x (R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3) y$

故  $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq R_1 \circ R_2 \cap R_1 \circ R_3$ .  $\square$

5. 证明  $R' = I_A \cup R$  是  $R$  的自反闭包.

证明:

首先证明  $R'$  是自反的:

因为  $I_A$  是  $A$  上的恒等关系, 即  $\forall x \in A, x I_A x$

又  $R' = I_A \cup R$ , 故  $I_A \subseteq R'$ , 那么  $R'$  满足  $I_A$  上述性质

即  $R'$  是自反的.

再证明  $R \subseteq R'$ : 显然,  $R' = I_A \cup R$ , 故  $R \subseteq R'$ , 即  $R \subseteq R'$ .

最后证明  $R'$  是包含  $R$  的最小自反关系:

设  $P$  是包含  $R$  的自反关系, 如果  $x R' y$ :

①  $y \neq x$ . 则  $x R' y \Rightarrow x R y \Rightarrow x P y$

②  $y = x$ . 则  $x R' y \Rightarrow x P y$

故  $x R' y \Rightarrow x P y$ . 即  $R' \subseteq P$ .

综上,  $R'$  是  $R$  的自反闭包