

22. 证明：整数加群与偶数加群同构。

记  $S$  为偶数集合： $S = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ ,  $\langle S, + \rangle$  分别为整数加群与偶数加群

$\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow S$ ,  $\varphi(x) = 2x$ . 显然  $\varphi$  是双射, 对任意  $x, y \in \mathbb{Z}$ ,

$$\varphi(x+y) = 2(x+y) = 2x + 2y = \varphi(x) + \varphi(y)$$

故  $\varphi$  为同构映射, 从而  $\langle \mathbb{Z}, + \rangle \cong \langle S, + \rangle$ . 证毕.

24. 找出所有与  $K_4$  群同构的  $S_n$  的子群.

$$\{ \sigma_1, (12), (34), (1234) \}$$

$$\{ \sigma_1, (14)(23), (13)(24), (12)(34) \}$$