Ejercicios resueltos de ecuaciones diferenciales

Alberto Parramón Castillo

UAM - 2013 / 2014

14 de junio de 2016 13:09

Apuntes UAM
Doble Grado Mat.Inf.

Código en Github

Índice general

[0] Documento compilado el 14 de junio de 2016 a las 13:09

1. Hoja 1

Ejercicio 1.1:

a) *Comprobar que, para cada valor de la constante C, la función*

$$y = e^{x^2}\left(C + \int_0^x e^{-t^2} dt\right)$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$y' = 2xy + 1$$

b) *Sean $y_1(x)$, $y_2(x)$ dos funciones de la familia anterior, correspondientes a dos valores distintos de la constante C. Hallar la ecuación diferencial que satisface $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$.*

Apartado a)

Explicación: Si y es una solución de la ecuación diferencial y', entonces, si derivamos con respecto a x, y, deberíamos llegar a algo parecido a y'.

$$y' = \underbrace{2x}_{2x} \underbrace{e^{x^2}(C + \int_0^x e^{-t^2} dt)}_{y} + \underbrace{e^{x^2} e^{-x^2}}_{1}$$

Explicación: Puede que os líe el término e^{-x^2} del final de la fórmula. Sale de derivar con respecto a x la integral. Esto se debe al *Teorema Fundamental del Cálculo*, que aplicado a este caso nos dice que:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}[F(x)]_0^x = \frac{\partial F(x)}{\partial x} - \frac{\partial F(0)}{\partial x} = f(x) - 0 = f(x)$$

Sustituyendo en el razonamiento anterior $f(x)$ por e^{-x^2}, obtenemos dicho término.

Apartado b)

Partimos y_1 e y_2, soluciones de la ecuación diferencial. Y tenemos $u = y_1 - y_2$. La ecuación diferencial que satisfaga u deberá ser u', por tanto, vamos a calcularla:

$u' = y_1' - y_2'$

Como y_1 e y_2, son soluciones, tenemos que:

$y_1' - y_2' = 2xy_1 + 1 - 2xy_2 - 1 = 2x(y_1 - y_2) = 2xu$

Por tanto, la ecuación diferencial que satisface u es: $u' = 2xu$.

Ejercicio 1.2:

a) *Hallar los valores de* m *para los cuales* $y = e^{mx}$ *es solución de la ecuación diferencial*

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0$$

b) *A partir de combinaciones lineales de las soluciones encontradas en el apartado anterior. hallar una solución que verifique las condiciones*

$$y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$$

Explicación: Aquí irá una breve explicación sobre este ejercicio.

Apartado a)

Puesto que las soluciones son de la forma: $y = e^{mx}$ tenemos que:

$$y' = me^{mx} \quad y'' = m^2e^{mx} \quad y''' = m^3e^{mx}$$

Por tanto, sustituyendo en la fórmula dada tenemos que:

$$2y''' + y'' - 5y' + 2y = 0 \implies 2m^3e^{mx} + m^2e^{mx} - 5me^{mx} + 2emx = 0 \implies$$
$$\implies e^{mx}(2m^3 + m^2 - 5m + 2)$$

Que, resolviendo por Ruffini da como soluciones: $m = 1 \quad m = -2 \quad m = 1/2$

Apartado b)

El resultado tiene que ser combinación lineal de las soluciones anteriores, es decir será de la forma:

$$y = ae^{-2x} + be^{x} + ce^{x}/2$$

Planteamos un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas con los datos proporcionados por el enunciado:

$$\begin{cases} y(0) = a + b + c = 0 \\ y'(0) = -2a + b + c/2 = 1 \\ y''(0) = 4a + b + c/4 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -1/3 \\ b = 1/3 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.3: *Comprobar que para cada valor de la constante $C > 0$, la identidad*

$$Cx - y\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = 0$$

define y como función de x. Hallar la ecuación diferencial que satisfaga todas las funciones de la familia. Hallar $y(0)$ e $y'(0)$ para cada una de ellas.

Explicación: Este ejercicio no le deis mucha importancia, es más de repaso de Analisis.

Basta ver que al despejar la y, te queda la integral en el denominador, y para ver que y es una funcion de x, debes comprobar que esa integral no se hace 0, hay dos opciones:
a) Usar L'Hopital, y ver que al derivar no te queda un 0 en el denominador. LLegas $\sin(x)/x$ que es 1.
b) Usar el teorema de la función implícita. Es decir, que si la derivada parcial con respecto a y (que es la que queremos despajar) es distinta de 0 en todo x, entonces se puede despejar y en función de x. (esta opción no renta mucho en este ejercicio)

Solución

- $y = y(x)$?
  $y(x) = f\frac{Cx}{\int_0^x \frac{\sin t}{t}}$, lo que pasa es que la integral puede ser 0, por lo que tenemos que pensar dónde está definido.
  (dibujo de sint/t)
  Es una función que va oscilando y sus oscilaciones cada vez son más pequeñas.
  Estudiamos el caso $x = 0$ ya que no vamos a tener problemas en ningún otro sitio dado que las áreas cada vez se van haciendo más pequeñas, entonces nunca se van a anular.
  LLamamos $g(t) = \frac{\sin t}{t}$

  $$g(0) = \lim_{0} \frac{\sin t}{t}$$

  Haciendo L'Hopital nos queda que el limite es 1.La otra forma de hacerlo es tomando desarrollo de Taylor:

  $$\lim_{0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{0} \frac{t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 ...}{t} = ... = 1$$

  ¿Está $y(x)$ bien definida en $x = 0$? Para ver esto vamos a calcular:

  $$\lim_{0} \frac{Cx}{\int_0^x \frac{\sin t}{t}} \overset{L'Hopital}{=} \lim_{0} \frac{C}{\sin x/x} = cte$$

- Para hallar la ecuación diferencial derivamos con respecto de x:

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = C - y'\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - y\frac{\sin x}{x} = 0$$

¿$y'(0)$?

$$y' = \frac{C\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - Cx\frac{\sin x}{x}}{(\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t)^2}$$

Solo faltaria calcular el limite cuando x tiende a 0 de y'.

Ejercicio 1.4:

a) *Utilizando isoclinas, esbozar las soluciones de* $y' = y^2 - 1$

b) *Resolver explícitamente la ecuación* $y' = y^2 - 1$, $y(0) = 0$ *y comparar el resultado con lo obtenido por el método de isoclinasintegrate empleado anteriormente.*

Apartado a)

> *Explicación:* La siguiente figura muestra la pendiente de la curva solución que buscamos en cada punto. Como la pendiente es la derivada de la y, entonces, los valores que obtenemos en y' son con los que dibujaríamos la curva solución. Por supuesto, dependiendo del punto en que empiece nuestra curva, está seguirá un camino u otro.

$y' = 0$ en $y = 1$ e $y = -1$, por tanto en esas rectas horizontales la pendiente de la curva solución será 0, además esas dos rectas serán a su vez una solución de la ecuación diferencial.

Para valores de y entre 1 y -1, la pendiente de la curva variará entre -1 y 0.

Para valores altos de y, la pendiente aumentará infinitamente. Y para valores negativos de y, la pendiente será más negativa y aumentará su negativo también infinitamente.

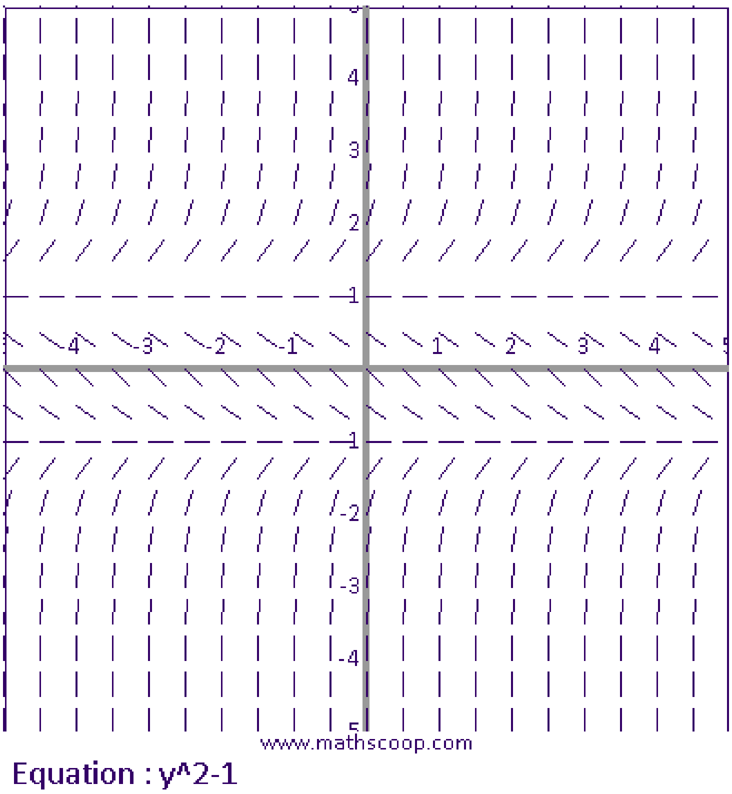


Figura 1: *Isoclinas de* $y' = y^2 - 1$

Apartado b)

> *Explicación:* Nos encontramos ante un problema de Cauchy, en el que partimos de una ecuación diferencial $y' = y^2 - 1$, y de un dato $y(0) = 0$. Y lo que hacemos es integrar la ecuación diferencial, obteniendo al hacerlo una constante, que tenemos que eliminar con el dato

Antes de integrar, vamos a ver si se puede resolver fácilmente. Si escribimos:

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = 1$$

Vemos que tenemos una ecuación de "variables separadas". Procedemos a integrar:

$$\int \frac{y'}{y^2 - 1} dx = \int 1 dx$$

> *Explicación:* Para resolver la integral cambiamos variables: $y = u$, $y'dx = du$. Y sustituimos:
>
> $$\int \frac{du/dx}{u^2 - 1} du/y' = \int \frac{1}{u^2 - 1} du = \int 1 dx$$
>
> Resolvemos con raíces:
>
> $$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{A}{u + 1} + \frac{B}{u - 1}$$
>
> Nos queda: $1 = A(u - 1) + B(u + 1)$
>
> Sustituimos:
>
> $u = 1 \implies B = 1/2$
>
> $u = -1 \implies A = -1/2$
>
> Y obtenemos finalmente que:
>
> $$\int \frac{y'}{y^2 - 1} dx = \int \frac{1}{u^2 - 1} du = -\frac{1}{2} \ln |u + 1| + \frac{1}{2} \ln |u - 1| = -\frac{1}{2} \ln |y + 1| + \frac{1}{2} \ln |y - 1|$$

Por tanto tenemos que:

$$-1/2 \ln |y+1| + 1/2 \ln |y-1| = x + C$$

$$\ln \frac{|y-1|}{|y+1|} = 2x + C \implies \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^{2x+c} \implies y - 1 = ye^{2x+c} + e^{2x+c} \implies$$

$$\implies y(1 - e^{2x+c}) = e^{2x+c} + 1 \implies y = \frac{e^{2x+c}+1}{1-e^{2x+c}} \implies \quad y = \frac{e^{2x}k+1}{1-e^{2x}k} \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

NOTA: suponemos que el valor absoluto es "absorbido" por la constante c, y por ello no lo tenemos en cuenta al acabar los cálculos.

Sustituimos ahora el dato $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{k+1}{1-k} \implies k = -1$$

Por tanto, la solución obtenida es:

$$y = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Que podemos ver que cuadra perfectamente con las isoclinas, entre valores de $y = 1$ e $y = -1$, concretamente a la solución que pasa por el origen.

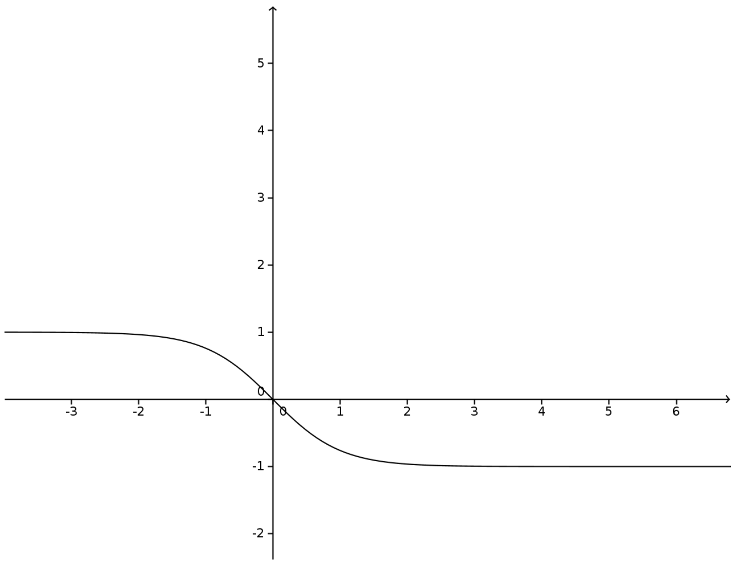


Figura 2: $y = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Ejercicio 1.5: *Trazando algunas isoclinas, esbozar las soluciones de las siguientes ecuaciones:*

a) $y' = \operatorname{sen}(y + x)$

b) $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$

Explicación: Aquí irá una breve explicación sobre el ejercicio

Apartado a)

$y' = 0$ si $x + y = k\pi$. Por tanto: pendiente será 0 en rectas $y = -x + k\pi$

$y' = 1$ si $x + y = \pi/2 + 2\pi k$. Por tanto: pendiente será 1 en rectas $y = -x - \pi/2 + 2\pi k$.

$y' = -1$ si $x+y = -\pi/2+2\pi k$. Por tanto: pendiente será -1 en rectas $y = -x+\pi/2+2\pi k$. Estas últimas rectas serán soluciones de la EDO.

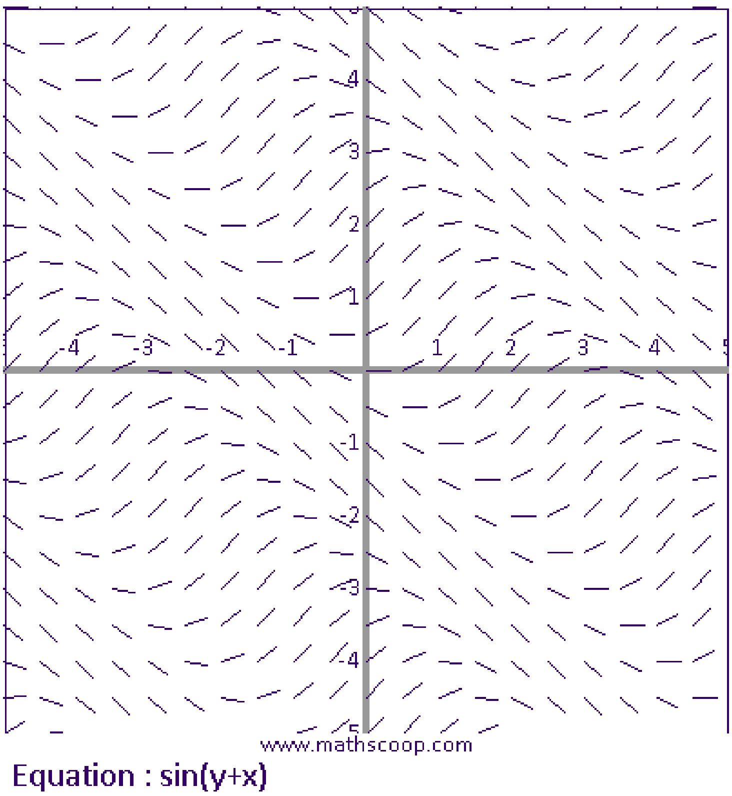


Figura 3: *Isoclinas de* $y' = \operatorname{sen}(y + x)$

Apartado b)

En este caso tenemos una curva $x(t) = x$, podemos ver que los conjuntos de nivel (es decir, los valores que toman t y x para valores fijos de x') son circunferencias de radio x' centradas en el origen:

$x' = \sqrt{t^2 + x^2} \implies (x')^2 = t^2 + x^2$

Por tanto, las isoclinas quedan:

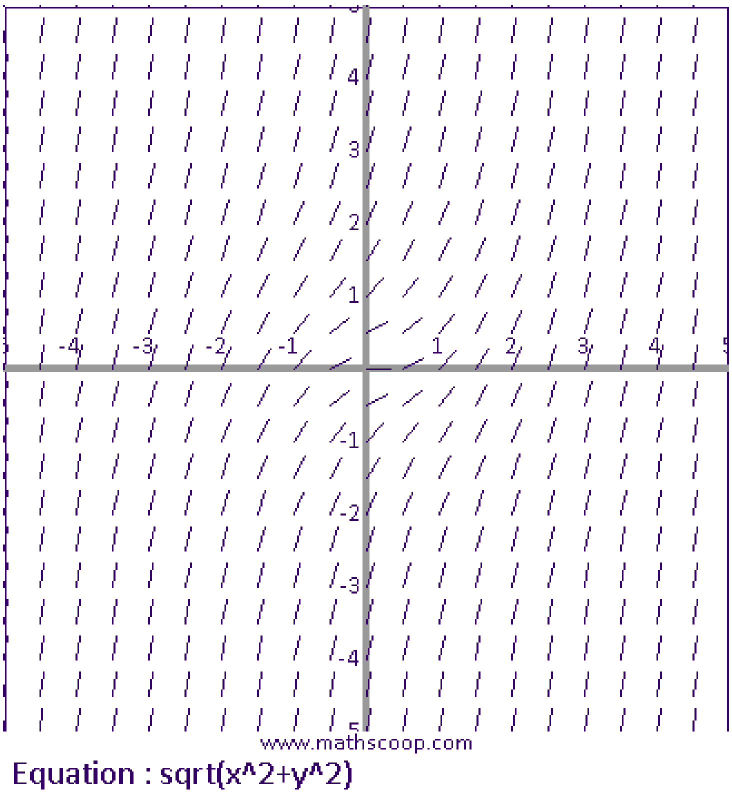


Figura 4: *Isoclinas de* $x' = \sqrt{t^2 + x^2}$

Ejercicio 1.6:

a) *Describir geométricamente la familia de curvas*

$$x^2 + y^2 + 2Cx = 0$$

y calcular una ecuación diferencial que la satisfaga.

b) *Determinar la ecuación diferencial de la familia de curvas*

$$y(x) = x\cos(x + C)$$

APARTADO A)

Explicación: Ejercicio tipo: Dada una familia de curvas, queremos encontrar su ecuación diferencial. Para ello procedemos de la siguiente forma: 1)Derivamos con respecto a x la función ($F(x, y(x), c) = 0$) 2)Eliminamos C utilizando la derivada y la función original.

En estos ejercicios partimos de la ecuación de las curvas solución de una ecuación diferencial (por eso tienen el parámetro constante C). Para llegar a la ecuación diferencial no tenemos más que derivar respecto a x (o respecto a t si tenemos $x(t) = 0$ por ejemplo), y eliminar la constante C con ayuda de la ecuación original.

1)Tenemos: $F(x, y(x), c) = x^2 + y^2 + 2cx = 0$

Derivamos con respecto a x.

$$\frac{\partial F(x, y(x), c)}{\partial x} = 2x + 2yy' + 2c = 0$$

2)Despejamos C de la ecuación original

$$c = \frac{-x^2 - y^2}{2x}$$

Y sustituimos, obteniendo la ecuación diferencial:

$$2x + 2yy' - \frac{x^2 + y^2}{x} = 0$$

Contestando a la primera parte, la de la interpretación geométrica, podemos ver, completando cuadrados que:

$x^2 + y^2 + 2cx = 0 \implies x^2 + y^2 + 2cx + c^2 = c^2 \implies (x + c)^2 + y^2 = c^2$

Por tanto, la familia de curvas son circunferencias centradas en el punto (-c,0) de radio c.

Apartado b)

1) Tenemos $F(x, y(x), c) = y - x\cos(x + c) = 0$

Derivamos con respecto a x: $y' - \cos(x + c) + x\,\mathrm{sen}(x + c) = 0$

Y operamos para quitarnos la c:

$$y' = \cos(x + c) - x\,\mathrm{sen}(x + c) = x\frac{\cos(x + c)}{x} - x\,\mathrm{sen}(x + c) = \frac{y}{x} - x\,\mathrm{sen}(x + c) =$$

$$= \frac{y}{x} - x\sqrt{1 - \cos^2(x + c)} = \frac{y}{x} - x\sqrt{1 - \frac{x^2\cos^2(x + c)}{x^2}} = \frac{y}{x} - x\sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}} =$$

$$= \frac{y}{x} \pm \sqrt{y^2 + x^2}$$

Explicación: El $\pm$ viene de meter la x (que podía ser tanto negativa como positiva) dentro de la raíz.

Ejercicio 1.7: *Dada la ecuación diferencial*

$$y' = (1+x)y + 1 - 3x + x^2$$

calcular los primeros términos del desarrollo de Taylor de la solución que satisface $y(0) = 0$.

Explicación: Aquí irá una breve explicación sobre el ejercicio

Solución

Ejercicio 1.8: *Esbozar las siguientes familias uniparamétricas de curvas y hallar sus trayectorias ortogonales:*

a) $xy = C$.

b) $y = Ce^x$

c) $y = Cx^n$, *donde* n *es un entero positivo. Explicar qué sucede con las trayectorias ortogonales cuando aumentamos el valor del entero* n.

Explicación: Ejercicio tipo: A partir de una función $f(x, y)$, hallar las familias de curvas ortogonales a esa función. Pasos a seguir:
1) Se deriva implícitamente $f(x, y)$ en función de x.
2) Se obtiene la EDO asociado, eliminando la constante C.
3) Se sustituye $y' = -1/y'$ (Esto sale de que el producto escalar entre las tangentes a y y a y deben ser 0 en el punto de intersección, ya que serán ortogonales. Viene mejor explicado en los apuntes).
4) Se resuelve la EDO obtenida de nuevo, para obtener la familia de curvas ortogonales. El resultado es una familia de curvas ya que queda en función de una constante de integración (D).

Apartado a)

1) Derivamos implícitamente $xy = C$:

$$y + xy' = 0$$

2) Obtenemos la EDO eliminando C. En este caso ya ha sido eliminado C al derivar.

3) Sustituimos $y' = -1/y'$:

$$y - x/y' = 0$$

4) Integramos:

$$y - \frac{x}{y'} = 0 \implies y'y = x \implies \int ydy = \int xdx \implies$$
$$\implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + D \implies y = \sqrt{x^2 + 2D} \implies y = \sqrt{x^2 + D}$$

Explicación: NOTA 1: Para resolver la integral, hay dos posibles caminos, el que expliqué en el ejercicio 4, con cambio de variables y tal. O de una manera más directa, el que he hecho en este caso, sustituyendo $y' = dy/dx$, e integrando.

NOTA 2:en el último paso, transformo $2D$ en D, se que no son iguales, simplemente es por no poner D' o $D*$, me refiero a que no es más que una constante que no sabemos su valor.

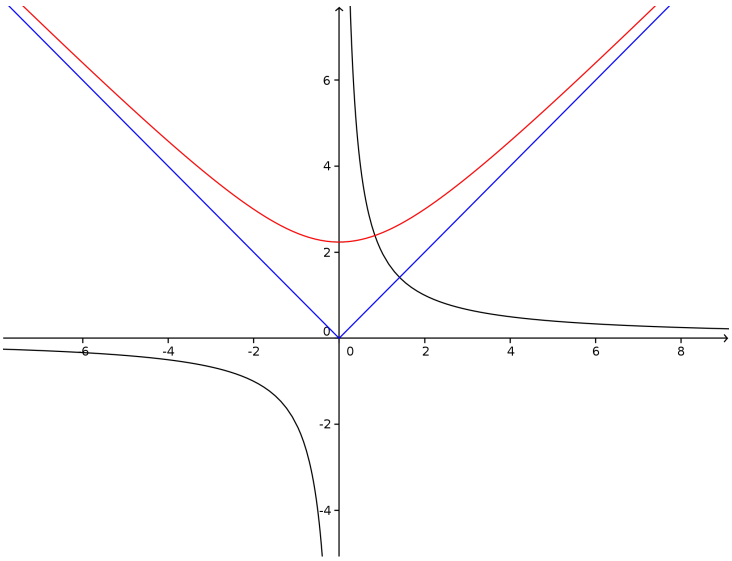


Figura 5: *negro:*$y = 2/x$,*color:*$y = \sqrt{x^2 + D}$

Vemos en negro $y = 2/x$ (escogemos el valor c=2), y en rojo y azul dos soluciones, una con $D = 0$ y otra con $D = 5$ (Podríamos dar los valores que quisiéramos a D y C, que siempre se cumpliría la ortogonalidad).

Apartado b)

1) Derivamos implícitamente $y = Ce^x$:

$$y' = Ce^x$$

2) Obtenemos la EDO eliminando C.
Sustituimos $Ce^x = y$ y nos queda $y' = y$

3) Sustituimos $y' = -1/y'$:

$$-1/y' = y$$

4) Integramos:

$$y'y = -1 \implies \int ydy = \int -dx \implies$$
$$\implies \frac{y^2}{2} = -x + D \implies y = \sqrt{-2x + D}$$

Sustituyendo (insisto en que es por poner un ejemplo y da igual por qué valor sustituyas) C=2 y D=2.

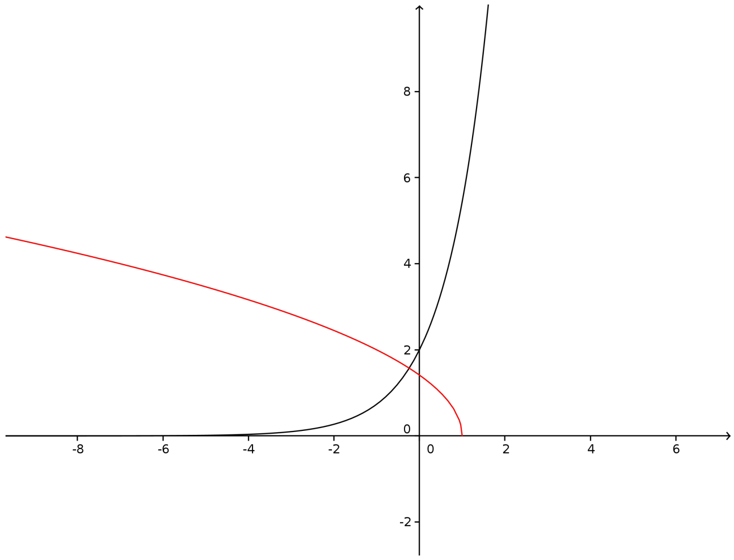


Figura 6: *negro:*$y = 2e^x$*,color:*$y = \sqrt{x^2+2}$

Apartado c)

1) Derivamos implícitamente $y = Cx^n$:

$$y' = nCx^{n-1}$$

2) Obtenemos la EDO eliminando C.
Sustituimos $Cx^n = y$ y nos queda $y' = ny/x$

3) Sustituimos $y' = -1/y'$:

$$-1/y' = ny/x$$

4) Integramos:

$$y' = -\frac{x}{ny} \implies y'ny = -x \implies \int yndy = \int -xdx \implies$$
$$\implies \frac{ny^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + D \implies y = \sqrt{-\frac{x^2}{n} + D}$$

Sustituyendo la n por 3 en el primer caso (curvas azul oscura y azul clarita), y por 25 en el segundo caso (curvas roja y rosa) , C=2 y D=2. Lo que ocurre es que AUMENTA LA EXCENTRICIDAD de la curva ortogonal (elipse) al aumentar el valor de n.

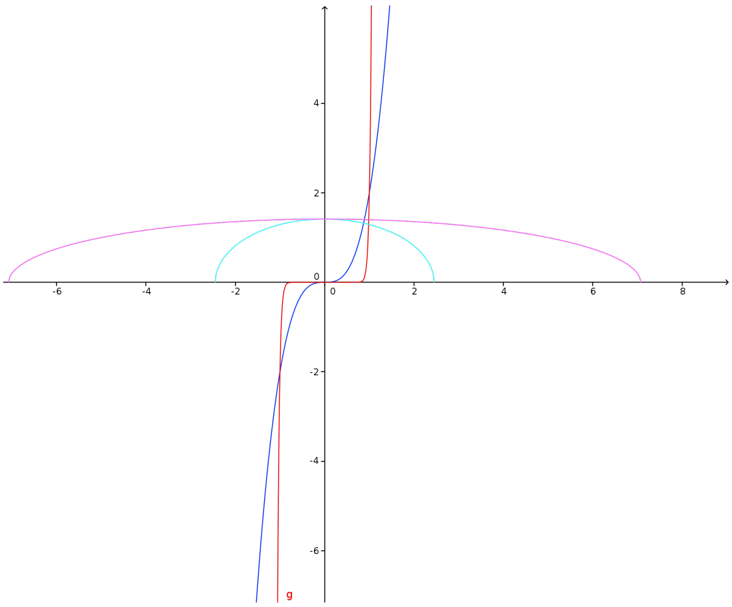


Figura 7: *azul oscura:*$y = 2x^3$,*roja:*$y = 2x^{25}$

Ejercicio 1.9: *Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas*

$$y^2 - Cx = \frac{C^2}{4}$$

Explicación: Resolvemos como en el ejercicio anterior. Leer explicación del ejercicio anterior si algo no se entiende.

1) Derivamos implícitamente $y^2 - Cx = \frac{C^2}{4}$, y nos queda:

$$2yy' - C = 0$$

2) Obtenemos la EDO eliminando C.

Para ello tenemos, la ecuación de la EDO y de la curva: $\begin{cases} 2yy' = C \\ y^2 - Cx = \frac{C^2}{4} \end{cases}$

Sustituimos la C en la curva y obtenemos:

$$y^2 - 2yy'x = \frac{4y^2y'^2}{4} \implies y^2 - 2yy'x = y^2y'^2$$

3) Sustituimos $y' = -1/y'$:

$$y^2 + 2y/y'x = y^2/y'^2 \implies y^2y'^2 + 2yy'x = y^2 \implies y^2 - 2yy'x = y^2y'^2$$

Como se puede observar, la EDO que satisfacen ambas curvas es la misma y por tanto esta familia de curvas es autoortogonal a si misma. Por tanto, tienen la misma ecuación.

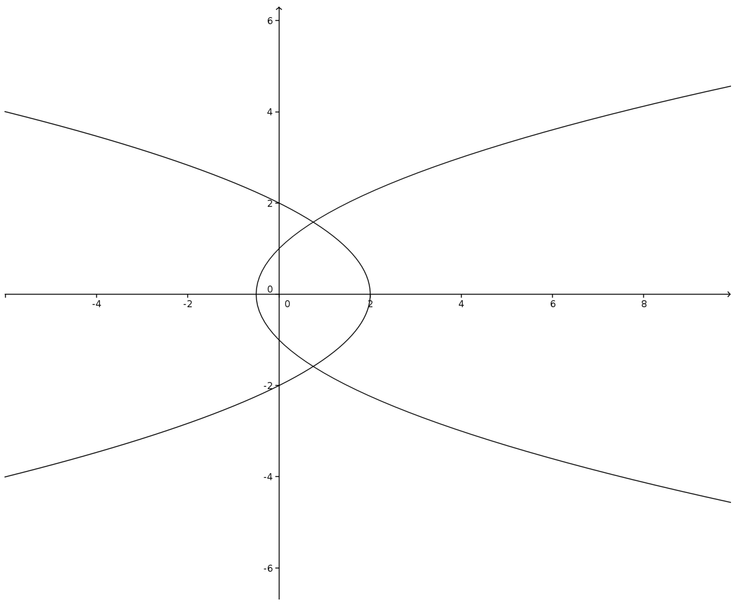


Figura 8: *Valores de C=2 y C=-2*

Ejercicio 1.10: *Hallar la familia de curvas ortogonales a la familia de circunferencias definida por:*

$$x^2 + (y - C)^2 = C^2$$

Interpretar el resultado geométricamente.

Explicación: Llega un momento en el que para resolverlo hay que usar el método de resolución 2: por ecuaciones homogéneas.

Despues de derivar implicitamente, despejar la C y sustituirla en la ecuación de la curva nos queda:

$$2xy + y'(y^2 - x^2) = 0$$

Sustituimos $y' = -1/y'$

$$2xy = \frac{y^2 - x^2}{y'} \implies \underbrace{(y^2 - x^2)}_{M(x,y)} - \underbrace{(2xy)}_{N(x,y)} y' = 0$$

Se cumple que es homogénea de grado 0, esto es porque si despejas la y', el grado que suman (entre las x e y) es 2 en el numerador y en el denominador: (y'=$\frac{y^2-x^2}{2xy}$)
Ahora lo que hay que hacer es hacer el cambio de variables $z(x) = y(x)/x$. Por tanto tenemos:
$y(x) = z(x)x \qquad y'(x) = z'(x)x + z(x)$
Sustituimos en la ecuación y tras varias operaciones llegamos a:

$$-\frac{2zz'}{z^2+1} = 1/x \implies -\int \frac{2z}{z^2+1}dz = \int \frac{1}{x}dx \implies -\ln\left|z^2+1\right| = \ln|x| + D$$

Sustituyendo $z = y/x$ obtenemos:

$$LODEJOCOMOEJERCICIO$$

Ejercicio 1.11: *Hallar las trayectorias ortogonales de las siguientes familias uniparamétricas de curvas expresadas en coordenadas polares:*

a) $r = C(1 + \cos\theta)$

b) $r = 2C \operatorname{sen}\theta$

Explicación: Ejercicio tipo: En los ejercicios con coordenadas polares, lo que hacemos es construir nuestra ecuación en polares: $\alpha(\theta) = (r(\theta)\cos(\theta), r(\theta)\sin(\theta))$

Y queremos hallar: $\beta(\theta) = (\tilde{r}(\theta)\cos(\theta), \tilde{r}(\theta)\sin(\theta))$

Como tiene que cumplir la condición de ortogonalidad ($< \alpha(\theta), \beta(\theta) >$) y que en el punto de intersección sean iguales ($r(\theta) = \tilde{r}(\theta)$). Concluimos que para construir la curva ortogonal, tenemos que sustituir:

$r' = -r^2/r'$

Por tanto, los pasos a realizar son los MISMOS que cuando tenemos la curva dada en forma de grafo. Sólo que ahora en los pasos 1),2) y 4), vamos a usar $r(\theta)$ en lugar de $y(x)$, y en el paso 3) sustituiremos $r' = -r^2/r'$.

Apartado a)

EN ESTE EJERCICIO ME HE EQUIVOCADO AL DERIVAR Y EN OTRAS COSAS QUE ESTAN SIN CORREGIR, SOY TOLI 1) Derivamos implícitamente $r = C(1 + \cos(\theta))$:

$$r' = -C\sin(\theta)$$

2) Obtenemos la EDO eliminando C.
Sustituimos $C = r/(1 + \cos(\theta))$ y nos queda $r' = -\frac{r\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

3) Sustituimos $r' = -r^2/r'$:

$$\frac{r^2}{r'} = \frac{r\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} \implies \frac{r'}{r} = \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

4) Integramos:

$$\int \frac{1}{r} dr = \int \frac{1+\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \implies \ln(r) = \int \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta + \int \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta$$

La segunda integral es inmediata, la primera es jodida, hay que multiplicar y dividir por $sin(\theta)$ y luego hacer el cambio de variable $sin(\theta) = x$, despues resolver por raíces, y ale, listo.

Apartado b)

1) Derivamos implícitamente $r = 2C\sin(\theta)$:

$$r' = -C\cos(\theta)$$

$2)$ Obtenemos la EDO eliminando C.
Sustituimos $C = r/2\sin(\theta)$ y nos queda $r' = -\frac{r\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

$3)$ Sustituimos $r' = -r^2/r'$:

$$-\frac{r^2}{r'} = -\frac{r\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \implies \frac{r'}{r} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$4)$ Integramos:

$$\int \frac{1}{r}dr = \int \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta \implies \ln(r) = -\ln(\cos(\theta)) + c \implies$$
$$\implies r = \frac{1}{\cos(\theta)} + c$$

Ejercicio 1.12: *Hallar las curvas que satisfacen las condiciones geométricas siguientes:*

a) *El segmento de la tangente limitado por los ejes coordenados tiene como punto medio al punto de tangencia.*

b) *La proyección sobre el eje OX de la parte de la tangente entre (x, y) y el eje OX tiene longitud 1.*

c) *EL ángulo entre el radio polar y la tangente es constante.*

d) *La curva pasa por $(0, 0)$ y está contenida en el primer cuadrante, de modo que el área bajo la curva desde $(0, 0)$ hasta (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene a esos puntos como vértices opuestos.*

Explicación: Breve explicación.

Apartado a)

Aquí va la solución del apartado a).

Apartado b)

Aquí va la solución del apartado b).

Apartado c)

f^{-1} Aquí va la solución del apartado c).

Apartado d)

Aquí va la solución del apartado d).

Ejercicio 1.13: *Para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, hallar la solución particular que satisface la condición inicial dada.*

a) $y' = e^{3x-2y}$, *con* $y(0) = 0$.

b) $e^{-y} + (1 + x^2)y' = 0$, *con* $y(0) = 0$.

c) $xyy' = (x + 1)(y + 1)$, *con* $y(1) = 0$.

Explicación: Para integrar intentamos ponerlo como ecuación de variables separadas, las y a un lado y las x a otro. Después solo hay que integrar y sustituir el dato.

Apartado a)

$$y' = e^{3x-2y} \implies y'e^{2y} = e^{3x} \implies \int e^{2y}dy = \int e^{3x}dx \implies$$
$$\implies \frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{3x}}{3} \implies 2y = \ln(2/3) + 3x + c \implies y = \frac{\ln(2/3) + 3x}{2} + C$$

Sustituimos $y(0) = 0$:

$$0 = \frac{\ln(2/3)}{2} + c \implies c = \frac{\ln(2/3)}{2}$$

Solución con dato $y(0) = 0$:

$$y = \ln(2/3) + 3x/2$$

Apartado b)

Aquí va la solución del apartado c).

Apartado c)

Aquí va la solución del apartado b).

Ejercicio 1.14: *Según la Ley de enfriamiento de Newton la tasa de variación de la temperatura en un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura con el ambiente. Si una barra de hierro a 100° C se enfría a 90° C en 5 segundos cuando se deja a una temperatura ambiente de 20° C, ¿cuánto tardará en estar a 30° C?*

Explicación: De la primera frase tenemos que obtener la ecuación diferencial. *La variación de la temperatura en un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura con el ambiente*

$\Delta(T) = K(T - A)$ (*Ley de enfriamiento de Newton*)

Así definimos $T(t)$ como la temperatura del cuerpo en cada instante de tiempo. $\Delta(T) = T'(t)$ como la variación de esa temperatura, A como la temperatura ambiente (suponemos constante); y K como una constante (que será la constante que crea la familia de curvas, y la cual tendremos que eliminar)

Primero vamos a obtener $T(t)$, para ello integramos:

$$\frac{T'}{T-A} = k \implies \int \frac{T'}{T-A} dt = \int k dt \implies \ln(T-A) = KT + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\implies T = A + e^{Kt}C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Sabemos: $T(0) = 100$, $T(5) = 90$ y $A = 20$

$T(0) = 20 + 100 = C \implies C = 80$

$T(5) = 90 = 20 + e^{5K}80 \implies 70 = e^{5K}80 \implies \frac{\ln(7/8)}{5} = k$

Por tanto: $T(t_1) = 30 = 20 + e^{\frac{\ln(7/8)}{5}t_1}$

Se despeja t_1 y terminado.

Ejercicio 1.15: *En una sala que está a una temperatura de 20° C nos sirven dos tazas de café, a una temperatura de 40° C. Disponemos de leche fría, a una temperatura de 10° C. En una de las tazas echamos una cantidad de leche fría igual a la de café contenido en su interior, y esperamos cinco minutos. En la otra taza esperamos cinco minutos, y después agregamos la leche. Determinar cual de las dos tazas tiene el café con leche más caliente.*

Explicación: Utilizamos las mismas ecuaciones que en el ejercicio anterior: $\Delta(T) = K(T-A)$ y $T = A + e^(Kt)C$ Como la temperatura disminuye, la constante K es negativa. Como tenemos dos ecuaciones, una para cada taza, tendremos también dos constantes C diferentes.

$$T_1(t) = A + C_1 e^{kt}$$
$$T_2(t) = A + C_2 e^{kt}$$

Ejercicio 1.16: *Una bola de naftalina tiene inicialmente un radio de 1 cm. Al cabo de un mes su radio se ha reducido a 0,5 cm. Suponiendo que la naftalina se evapora a un ritmo proporcional a la superficie de contacto con el aire, hallar la evolución del radio de la bola en función del tiempo.*

Explicación:

Tomamos como ecuación diferencial: $R'(t) = 4\pi k R(t)^2$

$$R' = 4\pi k R^2 \implies \frac{R'}{R^2} = 4\pi k \implies \int \frac{1}{R^2} dR = \int 4\pi k dt \implies -\frac{1}{R} = 4\pi k t + c$$

Tenemos los datos: $R(0) = 1$ y $R(1) = 0,5$, Sustituyendo en $-\frac{1}{R(t)} = 4\pi k t + c$ obtenemos:
$R(0) = 1 \implies C = -1$
$R(1) = 1/2 \implies -2 = 4\pi k + c \implies -2 = 4\pi k - 1 \implies -1 = 4\pi k \implies k = -1/4\pi$

Sustituimos en la ecuación anterior y obtenemos la solución:

$$-\frac{1}{R} = 4\pi k t + c \implies -\frac{1}{R} = 4\pi(-\frac{1}{4\pi})t - 1 \implies \frac{1}{R} = 4\pi(\frac{1}{4\pi})t + 1 \implies \frac{1}{R} = t + 1 \implies$$
$$\implies R = \frac{1}{t+1}$$

Ejercicio 1.17: *Un día comenzó a nevar por la mañana y siguió cayendo la nieve de forma constante todo el día. A las 12 del mediodía una quitanieves comenzó a limpiar una carretera, con velocidad inversamente proporcional al espesor de la nieve depositada. Sabiendo que a las 2 de la tarde había limpiado 2 km., y que a las 4 de la tarde había limpiado 1 km. más, determinar a qué hora comenzó a nevar.*

Explicación: explicación.

Ejercicio 1.18: *Cuatro hormigas situadas en las esquinas de una mesa cuadrada de lado 1 comienzan a andar simultáneamente a la misma velocidad, cada una en la dirección de su vecina más próxima en la dirección contraria a las agujas del reloj. Tomando coordenadas polares con origen en el centro de la mesa y eje polar a lo largo de una diagonal, hallar la trayectoria de la hormiga que parte del eje polar.*

Explicación: hecho en clase, lo podéis encontrar en los apuntes de Rual.

Ejercicio 1.19: *Una población de bacterias sigue la Ley de Malthus (la tasa de variación es proporcional al número de individuos) se duplica al cabo de 24h. ¿Cuánto tardará en triplicarse.*

Explicación:

Ecuación planteada: $P'(t) = kP(t)$ Integramos y nos queda:

$$\ln(P) = kt + C \implies P = e^{kt+c}$$

Ahora tenemos dos caminos:
1) Sustituimos:
$P(0) = n \implies n = e^c \implies c = \ln(C)$

$P(1) = 2n \implies 2n = e^{k+c} \implies 2n = e^{k+\ln(n)} \implies \ln(2n) = k + \ln(n) \implies k = \ln(2n/n) = \ln(2)$

Y nos queda como ecuación solucion:

$$P = e^{t\ln(2)+\ln(n)}$$

Para saber cuando se triplica la población:

$$3n = e^{t\ln(2)+\ln(n)} \implies t = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

2)

$$P(1) = 2P(0) \implies e^{k+c} = 2e^c \implies k + c = \ln(2) + c \implies k = \ln(2)$$

Y la c nos da igual, ya que ahora repetimos proceso:

$$P(t) = 3P(0) \implies e^{kt+c} = 3e^c \implies \ln(2)t + c = \ln(3) + c \implies t = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$$

Ejercicio 1.20: *Supongamos que una población sigue el modelo $p' = bp^2 - ap$ con $a, b > 0$.*

a) *Representar en un diagrama de fases, clasificando los puntos críticos del sistema.*

b) *Demostrar que si $p(t_0) < \frac{a}{b}$, entonces la población tiende a extinguirse.*

Explicación: Aquí irá una breve explicación sobre el ejercicio

Apartado a)

solución a).

Apartado b)

solución b)

Ejercicio 1.21: *dada la ecuación $y' = \cos y$, sin encontrar las soluciones explícitamente, estudiar su comportamiento cualitativo (en particular, clasificar los puntos críticos según su estabilidad).*

Explicación: explicación.

2. Hoja 2

Ejercicio 2.2:

Sea f una función continua y supongamos que todo problema de valor inicial para la ecuación autónoma:

$$x' = f(x)$$

tiene solución única, (P.V.I.) para el problema del valor inicial.

a) *Demostrar que toda solución $x(t)$ no constante es una función estrictamente monótona.*

APARTADO A)

Sea x una solución que no es constante, existe t_0 tal que $x'(t_0) = f(x(t_0)) \neq 0$.

Vamos a reducirlo al absurdo: Supongamos que $\exists t_1$ tal que $x'(t_1) = f(x(t_1)) = 0$

Entonces $u \equiv x(t_1)$ es también solución y el problema $\begin{matrix} v' = & f(v) \\ v(t_1) = & x(t_1) \end{matrix}$ tiene 2 soluciones: x (no constante) y u (constante), luego $x'(t) \neq 0 \forall t$ y x es estríctamente monónota.

$x(t)$ es solución tal que $\lim_{t\to\infty} x(t) = c$, $u = c$ es solución si $f(c) = 0$.

Entonces tenemos que:

$$f(c) = f(\lim_{t\to\infty} x(t)) = \lim_{t\to\infty} f(x(t)) = \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$$

Quedando probada la contradicción por algo que se me escapa.

Ejercicio 2.3:

Probar que el cambio $z = ax + by + c$ transforma la ecuación $y' = f(ax + by + c)$ en otra de variables separadas. Aplicar este método para resolver

Al parecer es mazo facil asique pasamos de él (de momento)

Ejercicio 2.4: *Enunciado:*

$$z = \frac{y}{x^k} \implies \left\{ \begin{array}{c} y = x^k z \\ y' = kx^{k-1}z + x^k z' \end{array} \right\}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenemos (no estoy seguro de haber distinguido bien todos los caracteres):

$$\begin{aligned} kx^{k-1}z + x^k z' &= \frac{x^k z - x^{2k+1}z^2}{x + x^{k+2}z} \\ x^k z' &= \frac{x^k z - x^{2k+1}z^2 - kx^k z - kx^{2k+1}z^2}{x + x^{k+2}z} \\ x^k z' &= \frac{(1-k)x^k z - (1+k)x^{2k+1}z^2}{x(1 + x^{k+1}z)} \end{aligned}$$

Queremos encontrar un valor de k para converrtirlo en una ecuación de variables separadas.

Estudiamos el caso $k = -1$:

$$z' = \frac{2z}{x(1+z)}$$

Ejercicio 2.5:

a)

b) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$

Apartado a)

Apartado b)

Aplicando el truco de las homogéneas:

$$y' = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

En realidad esto está mal, porque en la ecuación del enunciado podemos tener pendientes negativas, pero en la transformada no, por lo que

$$y' = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

es lo correcto.

Como el valor de la pendiente sólo depende de $\frac{y}{x}$ (que en el fondo es la tangente del ángulo θ que forma la recta que pasa por $(0,0)$ y por (x,y)), por lo que el valor de las isoclinas será el mismo para todas las rectas dado un ángulo.

$$\left|\begin{array}{cc} (1,1)\rightarrow & y'=\sqrt{2} \\ (1,0)\rightarrow & y'=1 \\ (0,1)\rightarrow & y'=\pm\infty \end{array}\right|$$

Haciendo el cambio $z=\frac{y}{x}$ tenemos:

$$z+xz'=\pm\sqrt{1+z^2} \implies z'=\frac{-z\pm\sqrt{1+z^2}}{x}$$

Ahora ya podemos integrar a ambos lados:

$$\int\frac{dz}{-z\pm\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{dx}{x}=log|x|+C$$

Vamos a resolver la ecuación de la izquierda, utilizando el $cosh$ (otra posibilidad sería la tangente).

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{-z\pm\sqrt{1+z^2}}\frac{-z\pm\sqrt{1+z^2}}{-z\pm\sqrt{1+z^2}}dz=\int\frac{z\pm\sqrt{1+z^2}}{1+z^2-z^2}dz$$
$$\int\sqrt{1+z^2}dz=\int cosh^2(t)dt=\int\frac{2cosh(t)+1}{2}dt$$

Aplicando identidades trigonométricas hiperbólicas obtenemos

$$=\frac{1}{4}senh(2t)+\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}cosht(t)senh(t)+\frac{1}{2}t+C$$

Ahora deshacemos los cambios de variables

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+z^2}z+\frac{1}{2}arcsenh(z)+C=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{y}{x}+\frac{1}{2}arcsenh\frac{y}{x}\right)=log|x|+C$$

Solución en forma implícita:

$$\frac{f(v)}{v^*}\xrightarrow[\rightarrow]{v\rightarrow\infty}1$$

Completar

Ejercicio 2.7:

a)

b)

c)

APARTADO A)

Para nosotros

APARTADO B)

Lo que tenemos en realidad es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+4}{x+y-6}$$

Podemos recurrir a la interpretación geométrica. Si $AB \neq DE$ entonces son 2 rectas que se cortan en algún punto (que podemos imaginarnos que será problemático). Si $AB = DE$ tendremos el "cociente" de 2 rectas paralelas.

Miramos el caso concreto para entender mejor la generalización. Haciendo el cambio de variable $z = x + y \implies z' = y' - 1$.

Tomando este cambio tenemos:

$$z' - 1 = \frac{z+4}{z-6}$$

que es una ecuación autónoma, que ahora mismo no vamos a resolver.

Vamos a resolver algún ejercicio de ecuaciones exactas.

Ejercicio 2.9:

a)

b)

c) ...

APARTADO A)

APARTADO B)

APARTADO C)

$$\underbrace{(2xy^4 + sen\,y)}_{M} + \underbrace{(4x^2y^3 + xcos\,y)}_{N}\,y' = 0$$

Para comprobar si es exacta comprobamos si $\dfrac{\partial\,M}{\partial\,y} = \dfrac{\partial\,N}{\partial\,x}$.

$$\frac{\partial\,M}{\partial\,y} = 6xy^3 + cos\,y$$
$$\frac{\partial\,N}{\partial\,x} =$$
$$\frac{\partial\,M}{\partial\,y} = \frac{\partial\,N}{\partial\,x}$$

La ecuación es exacta, por lo que existe un potencial $V(x,y)$ tal que las soluciones vienen dadas por los conjuntos de nivel del potencial, es decir, $V(x,y) = c$. Hacemos el cambio

$$\partial_y V = N$$

$$\partial_x N = M$$

Obtenemos:

$$V(x,y) = \int M(x,y)dx = \int (2xy^2 + sen\,y)dx x^2y^3 + xsen\,y + W(y)$$

$$\begin{array}{cc} \partial_y V(x,y) & = N(x,y) = 4x^2y^3 + xcos\,y \\ \downarrow & \\ 4x^2 + y^3 + xcos\,y + W'(y) & \end{array}$$

De aquí deducimos que $W'(y) = 0 \implies W(y) = C, C \in \mathbb{R}$

Las soluciones son (escogiendo $W \equiv 0$):

$$V(x,y) = x^2 + y^4 + xsen\,y = C, C \in \mathbb{R}$$

Apartado d)

...

Ejercicio 2.12:

a)

b)

c)

d) ...

Apartado a)

Apartado b)

Apartado c)

Apartado d)

$$y + (2x - ye^y)y' = 0$$

Comprobación No es exacta.

Vamos a aplicarle un factor integrante. Buscamos $\mu = \mu(x, y)$ tal que $\mu y + \mu(2x - ye^y)y' = 0$ sea exacta.

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu y = \frac{\partial}{\partial y}\mu y + \mu$$

Por otro lado:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(2x - ye^y)) = \frac{\partial}{\partial x}\mu(2x - ey^y) + 2\mu$$

Nos queda un sistema de ecuaciones en derivadas parciales aparentemente más complicado. El enunciado nos limita las opciones de elección de μ. En nuestro caso, vemos que nos interesa $\mu(x, y) = \mu(y)$ para simplificar el problema.

Nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu = \frac{d}{dy}\mu$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dy}y + \mu &= 2\mu \\ \frac{d\mu}{dy}y &= \mu \\ \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{dy}{y} \\ log|\mu| = log|y| + C, C &\in \mathbb{R} \\ \mu = ky, k &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Tomando $\mu(y) = y$, tenemos:

$$\underbrace{y^2}_{M} + \underbrace{(2xy - y^2e^y)}_{N}y' = 0$$

es exacta.

comprobar

Como es exacta entonces las soluciones vienen dadas por los conjuntos de nivel de un potencial $V(x,y)$ tal que $\partial_x V = M; \partial_y V = N$.

$$V(x,y) = \int M(x,y)dx = \int y^2 dx = y^2 x + W(y)$$

La $W(y)$ la sacamos de la ecuación que no hemos usado:

$$2xy + W'(y) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = N(x,y) = 2xy - y^2 e^y$$

Entonces: $W'(y) = -y^2 e^y \implies W(y) = -\int y^2 e^y dy$ que se resuelve integrando por partes y da

$$W(y) = -y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + K, K \in \mathbb{R}$$

Escogiendo $K = 0$, las soluciones son: $V(x,y) = y^2 x - y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y = C, C \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.nose: $y' - 2xy = 6xe^{x^2}$

Buscamos un factor integrante $\mu(x)$, de modo que $\mu(-6xe^{x^2} - 2xy) + \mu y' = 0$ sea exacta.

Se plantea:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}(...) - \mu 2x$$

y se resuelve.

Ejercicio 2.17:

a)

b)

c)

d)

Apartado a)

Apartado b)

$y' - 2xy = 6xe^{x^2}$.

Buscamos un factor integrante $\mu = \mu(x)$ de modo que

$$\underbrace{\mu(-2xy - 6xe^{x^2})}_{M} ...$$

Completar

APARTADO C)

$x'+x=2te^{-t}+t^2$. Si definimos $y=x_1,x_2$ tenemos que $y'+y=0$ una ecuación diferencial más facil.

Vamos a resolverlo con el **método de variación de las constantes.**

1 Buscamos una solución de la eucación homogenea (la que no tiene término independiente). En este caso es: $x'+x=0$. y vemos que serán exponenciales negativas: $x=ke^{-t}$.

2 Buscamos soluciones de la ecuación general de la forma $k=k(t)e^{-t}$.

Si x es solución tenemos entonces que $x'+x=k'(t)e^{-t}-k(t)e^{t}+k(t)e^{t}=2te^{-t}+t^2$.

Entonces tenemos que

$$k'(t)=2t+t^2e^t$$
$$k(t)=\int 2t+t^2e^tdt=(1)=t^2+t^2e^t-\int 2te^tdt$$
$$(1)=t^2+t^2e^t-2te^t+\int e^tdt=$$
$$t^2+t^2-2te^t+2e^t+C, C\in\mathbb{R}$$

(1) resolviendo por partes.

Solución Ahora que ya tenemos definido k(t), tenemos:

$$x(t)=k(t)e^{-t}=t^2e^{-t}+t^2-2t+22+Ce^{-t},\ c\in\mathbb{R}$$

Ejercicio 2.20:

a)

APARTADO A)

$xy''=y'+(y')^3$.

Parece complicada, pero si **reducimos el orden** queda de variables separadas.

Si hacemos el cambio: $z=y'$; $z'=y''$ tenemos:

$$xz'=z+z^3 \iff \int\frac{dz}{z+z^3}=\int\frac{dx}{x}$$

Se deja como ejercicio para el lecto r la resolución (de momento).

Ejercicio 2.22:

a) *Demostrar que...*

b) *Resolver* $y' = \dfrac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, *siendo* $y_1 = x$ *una solución.*

Apartado a)

$$y' = p(x) + q(x)t + r(x)y^2$$

Cambio de variable, sea $z = y - y_1$ siendo y_1 una solución conocida.

Sustituyendo tenemos:

$$z' + y_1' = p(x) + q(x)(z + y_1) + r(x)(z^2 + y_1^2 + 2zy_1) \iff z' + \underbrace{y_1'}_{A} = \underbrace{p(x) + q(x)y_1 + r(x)y_1^2}_{B} + (q(x) + 2y_1)z$$

Si nos fijamos $A = B$, porque y_1 es solución, asíque podemos simpflificar quedando la ecuación:

$$z' = (q(x) + 2y_1)z + r(x)z^2$$

Que es una ecuación de tipo Bernoulli que sí sabemos resolver.

Apartado b)

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

Hacemos el cambio descrito en el apartado anterior, que es el **método para resolver ecuaciones de Ricatti**

Quedando:

$$z' + 1 = \frac{(z + x)}{x}x^3(z^2 + x^2 + 2xz) - x^5$$

Haciendo cuentas...

$$z' = \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)z + x^3z^2$$

, que es una ecuación de tipo Bernoulli, que resolveremos aplicando el siguiente cambio de variables para conventir la ecuación en una lineal.

$$\begin{aligned} W &= z^{1-2} = \tfrac{1}{z} \\ z' &= \tfrac{-W'}{W^2} \end{aligned}$$

Nos queda transformada (tras unas cuentas) en

$$-W' = W\left(\frac{1}{x} + 2x^4\right) + x^3$$

Que es una ecuación lineal que se deja como ejercicio para el lector (o para Parra o Kasner).

3. Hoja 3

No se qué es esto... Tenemos el sistema lineal $x' = Ax$, siendo A una matriz **real** 4×4, cuyos autovalores (previamente calculados) son $\lambda_i = \{2, 1+2i, 1-2i\}$, siedo $\lambda_1 = 2$ un autovalor doble (multiplicidad algebraica $= 2 \geq$ multiplicidad geométrica).

Los autovectores asociados:

$$\lambda_1 = 2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1+2i \to \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ i \\ 1+2i \end{pmatrix} = u$$

$$\lambda_3 = 1-2i \to \overline{u}$$

Tenemos:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3+i & 3-i \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1+2i & 1-2i \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}}_{J} P^{-1}$$

Buscamos una matriz fundamental:

$$\Phi(t) = e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$$

Esta matriz fundamental cumple que $\Phi(0) = t$. La matriz Pe^{tJ} también es fundamental pero no cumple $\Phi(0) = t$.

Vamos a calcular $\Phi(t)$.

$$\Phi(t) = P \begin{pmatrix} e^2t & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^2t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & (3+i)e^{(1+2i)t} & (3-i)e^{(1-2i)t} \\ e^{2t} & & 2e^{(1+2i)t} & 2e^{(1-2i)t} \\ 0 & 0 & ie^{(1+2i)t} & -ie^{(1-2i)t} \\ 0 & e^{2t} & (1+2i)e^{(1+2i)t} & (1-2i)e^{(1-2i)t} \end{pmatrix}$$

Cada una de las columnas de esta matriz fundamental es una solución. Cualquier combinación lineal de columnas también será una solución. Como nos interesa una solución **real** (porque el problema planteado era real, en cuanto a que la matriz A era real y buscamos soluciones reales).

Si nos damos cuenta podemos combinar linealmente la 3ª y la 4ª columna que son conjugadas.

Para ello, primero expresamos en senos y cosenos las exponenciales complejas (para facilitar el cálculo)

$$\begin{matrix} e^{2t} & te^{2t} & e^t\big([3cos(2t) - sen(2t)] + i[3sen(2t) + cos(2t)]\big) & e^t\big([3cos(2t) - sen(2t)] - i[3sen(\\ e^{2t} & e^{2t}(i+2) & 2e^t[cos(2t) + isen(2t)] & 2e^t[cos(2t) - isen(2t \\ 0 & 0 & e^t[-sen(2t) + icos(2t)] & e^t[-sen(2t) - icos(2 \\ 0 & e^{2t} & e^t\big([(cos(2t) - 2sen(2t)] + i[sen(2t) + 2cos(2t)]\big) & e^t\big([cos(2t) - 2sen(2t)] - i[sen(2 \end{matrix}$$

Vamos a poner en la tercera columna la combinación lineal $\frac{u+\overline{u}}{2}$ (que es la parte real) y en la cuarta columna $\frac{u-\overline{u}}{2}$ que es la parte imaginaria, siendo u la tercera columna (y $\overline{u}$ su conjugado), obteniendo:

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & e^t\big(3cos(2t) - sen(2t)\big) & e^t\big(3sen(2t) + cos(2t)\big) \\ e^{2t} & e^{2t}(i+2) & 2e^t[cos(2t)] & 2e^t[sen(2t)] \\ 0 & 0 & -e^t[sen(2t)] & e^t[cos(2t)] \\ 0 & e^{2t} & e^t[(cos(2t) - 2sen(2t)] & e^t[sen(2t) + 2cos(2t)] \end{pmatrix}$$

Cualquier solución se escribe como $\Phi(t)C$, con $C = (c_1, c_2, c_3, c_4)$.

Ejercicio 3.1: *Considerar la ecuación lineal*

$$x'(t) + a(t)x(t) = 0$$

Donde $a \in C(\mathbb{R}), a(t) = a(t+T), \forall t$. *(*$a(t)$ *es continua en los reales y periódica de parámetro* T*)*

a) *Demostrar que si* $x(t)$ *es solución, entonces* $y(t) = x(t+T)$ *también lo es.*

b) *Demostrar que* $\exists c \;/\; x(t+T) = Cx(t), \forall t$

> ***c)*** *Encontrar la condición que debe cumplir $a(t)$ para que existan soluciones de período T o $2T$*
>
> ***d)*** *Si $a(t)$ es constante, calcular su valor para que existan soluciones de período $2T$.*

APARTADO A)

$$y'(t) + a(t)y(t) = x'(t+T) + a(t)x(t+T) = x'(t+T) + a(t+T)x(t+T) = 0$$

APARTADO B)

Queremos ver que

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = c$$

lo que se da si y sólo si, derivando

$$0 = \left(\frac{x(t+T)}{x(t)}\right)' = \frac{x'(t+T)x(t) - x(t+T)x'(t)}{x(t)^2} = \frac{-a(t)x(t+T)x(t) + x(t+T)a(t)x(t)}{x(t)^2} = 0$$

por lo que efectivamente, existe esa constante c.

Otra posibilidad es resolver el problema:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} \, \mathrm{d}s = -\int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s$$

Haciendo cuentas llegamos a la solución $x(t)$:

$$\log|x(t)| - \log|x(t_0)| = -\int a(s) \, \mathrm{d}s$$

$$x(t) = x(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s) \, \mathrm{d}s}$$

Vemos ahora qué ocurre al pasar un período

$$x(t+T) = x(t_0)e^{\int_{t_0}^{t+T} a(s) \, \mathrm{d}s} = x(t_0) \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s) \, \mathrm{d}s}}_{C} e^{\int_{t_0}^{t+T} a(s) \, \mathrm{d}s} = Cx(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t+T} a(s) \, \mathrm{d}s} = Kx(t)$$

Efectivamente, de este modo obtenemos otra constante K tal que $x(t+T) = Kx(t)$.

APARTADO C)

Para que exista una solución de período T, tenemos que tener que $x(t+T) = x(t)$. Dicho de otra forma, la constante C del apartado anterior tiene que valer 1:

$$\exp \int_{t_0}^{t_0+T} a(s) \, \mathrm{d}s = 1$$

. Es decir, la integral a lo largo del período tiene que valer $0 \forall t_0$:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

.

Resolveríamos el problema de forma análoga para período $2T$.

Apartado d)

Si $a(t) = \alpha$ constante, tenemos que aplicar la condición del apartado anterior

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \alpha\,\mathrm{d}s = 0$$

lo que no nos deja otra opción que pedir $a(t) = \alpha = 0$.

Ejercicio 3.4: *Resolver*

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 10 \end{cases}$$

Buscamos soluciones $y = e^{\lambda x}$, porque a ojo vemos que tiene que salir (la derivada de una exponencial es ella misma y así vamos a conseguir un cero. Si tuviéramos polinomios, la derivada tiene grado menor y no se nos cancelaría todo. Por esto, las soluciones de lineales homogéneas son siempre exponenciales)

El polinomio característico a resolver es

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \implies \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

lo que nos da dos soluciones $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{3x}$. La solución general será la combinación lineal de ambas:

$$y = Ae^x + Be^{3x} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Buscamos ahora los valores de A y B que satisfacen nuestros valores iniciales:

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 6 \\ y'(0) &= 10 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} A + B &= 6 \\ A + 3B &= 10 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Es decir, la solución al problema de valores iniciales es

$$y = 4e^x + 2e^{3x}$$

Ejercicio 3.4'5: $x'' - 6x' + 13x = 0$

Buscamos soluciones exponeciales de la forma $y = e^{\lambda x}$ es solución, entonces

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \implies \lambda 3 \pm 2i$$

Tenemos las soluciones $y_1 = e^{(3+2i)t} = e^{3t}(cos2t + isen2t)$ e $y_2 = 3^{3t}(cos2t - isen2t)$.

Entonces tomamos parte real y parte inmaginaria para tener soluciones reales.

Entonces la solución general será $y = e^{3t}(Acos2t + Bsen2t)$.

Ejercicio 3.9: *Hallar la solución general de*

$$y''' - 2y'' + y' = x^2$$

El espacio de soluciones de una ecuación lineal no homogénea se define como $X_G = X_H + X_P$ donde X_H son las soluciones de la ecuación homogénea asociada y X_P una solución particular de la ecuación no homogénea. Vamos por orden

Solución homogénea Lo primero es hallar las soluciones de la ecuación homogénea

$$y''' - 2y'' + y' = 0$$

, para lo cual resolvemos el polinomio característico

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 1)^2 = 0$$

.

Las soluciones del polinomio característico son $\lambda = 1$, $\lambda = 0$, lo que nos da las siguientes soluciones de la ecuación homogénea:

$$y_1 = e^0 = 1$$
$$y_2 = e^x$$
$$y_3 = xe^x$$

y_3 sale de que la solución $\lambda = 1$ del polinomio característico está repetida 2 veces (multiplicidad 2). Si hubiera una raíz triple, entonces tendríamos otra solución más $y = x^2e^x$.

La solución general de la homogénea es una combinación lineal de las tres que hemos obtenido:

$$y = A + Be^x + Cxe^x \quad A, B, C \in \mathbb{R}$$

Solución particular Buscamos una solución particular polinómica de grado 3 del tipo $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Sabemos que tiene que ser de grado 3 porque el término no homogéneo es $f(x) = x^2$. Si la derivada de menor orden es y', eso significa que derivamos la solución una vez y nos saldrá como máximo un polinomio de orden dos. Es decir, la solución polinómica tiene que tener grado 3.

$$\begin{aligned} y &= bx + cx^2 + dx^3 \\ y' &= b + 2cx + 3dx^2 \\ y'' &= 2c + 6dx \\ y''' &= 6d \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la ecuación inicial e igualando los coeficientes de términos de mismo grado llegamos a:

$$\begin{matrix} 6d - 4c + b & = 0 \\ -12d + 2c & = 0 \\ 3d & = 1 \end{matrix} \implies (b, c, d) = \left(6, 2, \frac{1}{3}\right)$$

Tenemos que: $y_p = 6x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ es una solución particular de la ecuación completa.

Solución general La solución general de la ecuación general es:

$$y = 6x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + A + Be^x + Cxe^x,\ A, B, C \in \mathbb{R}$$

Cualquier combinación de (A, B, C) me da una solución particular.

Ejercicio 3.14: *Hállese la solución general de la ecuación no homogénea*

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Solución homogénea Buscamos las soluciones del polinomio característico:

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 2$$

Entonces la solución general de la homogénea es:

$$y_h = Ae^x + Be^{2x},\ A, B \in \mathbb{R}$$

Particular Como no podemos ver a ojo que la solución sea un polinomio de grado 3 (como en el ejercicio 9), utilizamos el **método de variación de las constantes** .

Buscamos soluciones de la ecuación general de la forma: $y = A(x)e^x + B(x)e^{2x}$

Y empezamos a calcular las derivadas:

$$\begin{array}{rc} y' = & A'(x)e^x + B'e^{2x} + A(x)e^x + 2B(x)e^{2x} \\ y'' = & A''(x).... \end{array}$$

Como no nos interesan las segundas derivadas de $A(x), B(x)$ (porque no nos simplifican nada el problema porque volvemos al punto de partida) imponemos: $A'(x)e^x + B'e^{2x} = 0$ de tal manera que tenemos: $y' = A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}$. Esta imposición la podemos poner por algo del Wronskiano.

$$\begin{array}{rc} y' = & A(x)e^x + 2B(x)e^{2x} \\ y'' = & A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} + A(x)e^x + 4B'(x)e^{2x} \end{array}$$

Y ahora escribimos la ecuación:

$$\left(A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} + A(x)e^x + 4B'(x)e^{2x}\right) - 3\left(A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}\right) + 2\left(A(x)e^x + 2B(x)e^{2x}\right)$$

Y vemos que se cancelan los $A(x)$ y los $B(x)$. quedando:

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^{2x} & = 0 \\ A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} & = \frac{1}{1+e^{-x}} \end{cases}$$

Restando las 2 ecuaciones tenemos:

$$B'(x)e^{-2x} = \frac{1}{1+e^{-x}} \iff B'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{-x}}$$

Y resolvemos integrando (aplicando la genialidad de sumar y restar e^{-x})

$$B' = \frac{e^{-2x} + e^{-x} - e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

Entonces:

$$B = -e^{-x} + log|1 + e^{-x}| + K_2,\ K_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora despejamos $A'(x)$, integramos y llegamos tras unas cuentas a:

$$y = e^x log(1 + e^{-x}) + e^x + e^{2x} log(1 + e^{-x}) + K_1 e^x + K_2 e^{2x},\ K_i \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3.16: *Siendo P, Q continuas*

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$$

Comprobar que si x_1, x_2 *son soluciones* $\implies \exists t_0 \;/\; x_1(t_0) = x_2(t_0) \implies \exists K \;/\; x_1 = Kx_2$

Que P, Q sean continuas nos asegura que el P.V.I. tiene solución única.

Ejercicio 3.17:
Movimiento armónico simple con rozamiento.

Ecuación sin rozamiento:

$$x'' + 2x = 0$$

Como el rozamiento es el doble de la velocidad, entonces, la ecuación con rozamiento será:

$$\begin{matrix} x'' + 2x' + 2x & = 0 \\ x'(0) & = v_0 \\ x(0) & = x_0 \end{matrix}$$

Que es un problema muy muy parecido al 18 que sí está resuelto.

Ejercicio 3.18: *La amplitud de cierto péndulo sometido a oscilaciones forzadas responde a la ecuación*

$$x'' + \varepsilon x' + 4x = sen(\omega t)$$

donde $\varepsilon > 0$*es muy pequeño. Hallar la solución estacionaria (esto es, sin términos que tiendan a cero cuando* $t \to +\infty$*) para* $\omega = 1$ *y* $\omega = 2$*. Explicar en qué se manifiesta el fenómeno de la resonancia.*

Homogénea $y = e^{\lambda t}$ es solución de la homogénea, donde λ_i son las raíces del polinomio característico.

En este caso: $\lambda^2 + \varepsilon\lambda + 4 = 0$.

$$\lambda = \frac{-\varepsilon}{2} \pm i\frac{\sqrt{16 - \varepsilon^2}}{2}$$

porque ε es muy pequeño.

Entonces: $y_i = e^{\lambda_i t}$ son soluciones, luego $z_! = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ y $z_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$ son soluciones.

Entonces:

$$y = e^{\frac{-3}{2}t}(Acos\left(\frac{\sqrt{16-\varepsilon^2}}{2}t\right) + Bsen\left(\frac{\sqrt{16-\varepsilon^2}}{2}t\right)$$

Podemos emplear el siguiente truco: $\Phi = arcsen\frac{A}{R}$ donde $R = \sqrt{A^2+B^2}$.

Obtenemos:

$$Re^{-\frac{\varepsilon}{2}t}sen\left(\Phi + \frac{\sqrt{16-\varepsilon^2}}{2}t\right)$$

(esto ha sido bien copiado seguro. Si hay alguna inconsistencia hacer caso a esto y no a lo anterior)

Particular Buscamos soluciones de la forma: $y = acos(\omega t) + bsen(\omega t)$.

Calculamos las derivadas, sustituimos esa información en la ecuación...

Llegamos a:

$$y'' + \varepsilon y' + 4y = (algo_1)cos(\omega t) + (algo_2)sen(\omega t)$$

Y ahora resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} algo_1 = 0 \\ algo_2 = 1 \end{array} \right\}$$

Descubriendo a,b en función de ω.

En vez de hacer esto así, podríamos haber aplicado el truco de convertir $algo*sen(algo)+algo*cos(algo)$ en $algo*cos(algo+algo)$ o $algo*sen(algo+algo)$.

Estoy muy muy cansado de copiar asíque... Parra a COMPLETAR!!

Ejercicio 3.25:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} x = Ax$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ doble, con multiplicidad geométrica 2, tendremos que utilizar la forma de Jordan.

Calculamos la diagonalización (a forma de Jordan)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que Pe^{Jt} es una matriz fundamental para el sistema. Vamos a calcular Pe^{Jt}

$$Pe^{Jt} = exp\left(\begin{pmatrix} -3t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El cálculo de $exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = COMPLETAR = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por P para sacar la matriz fundamental:

$$\Phi(t) = Pe^{Jt} = ... = \begin{pmatrix} 4e^{-3t} & (4t+1)e^{-3t} \\ 4e^{-3t} & 4te^{-3t} \end{pmatrix}$$

Entonces la solución general de la ecuación es:

$$\Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-3t} & (4t+1)e^{-3t} \\ 4e^{-3t} & 4te^{-3t} \end{pmatrix}$$

Ahora nos interesa hallar c_1, c_2 tal que

$$\Phi(0)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para ello resolvemos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo este sistema sacamos: $c_1 = \frac{1}{2}$ y $c_2 = 1$.

Luego la solución del PVI es:

$$x(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4t+3)e : -3t \\ (4t+2)e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.26:

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Vemos *por inspección* (mirando a ojo) que $\lambda = 1$ es un autovalor asociado a $u = (1, 0, 0)$

Calculando autovalres y autovectores nos queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un par de conceptos interesantes:

- Los autovalores de una matriz simétrica son reales.
- Los autovectores asociados a autovalores distintos siempre son ortogonales en una matriz simétrica.

Vamos a calcular la exponencial para tener una matriz fundamental

$$e^{At} = \underbrace{Pe^{Jt}}_{\Phi(t)} P^{-1}$$

$$\Phi(t) = Pe^{Jt} = P\begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 3e^3t \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

La solcuión general es $x(t) = \Phi(t) \cdot c$, $c \in \mathbb{R}^2$

Buscamos c para que $x(0) = (1, 1, 1)$, es decir,

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema y llegamos a $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$.

Entonces la solución buscada es

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Truquillo La columna i de la solución es el autovector i multiplicado por $e^{\lambda t}$.

En este caso (la segunda columna, asociada al autovalor 2):

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3.31:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} cosec(t) \\ sec(t) \end{pmatrix}$$

Buscamos la solución general de la ecuación homogénea.

El cálculo de autovalores y autovectores se deja como ejercicio para el lector y llegamos a:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$$

Entonces una matriz fundamental es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} exp \left[t \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(cost + isent) & 5(cost - isen \\ COMPLETAR & COMPLET \end{pmatrix}$$

Si $u, \overline{u}$ (la primera y la segunda columna respectivamente) son soluciones de la ecuación homogénea, entonces $Re(u), Im(u)$ son también soluciones.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 5cost & 5sent \\ 2cost + sent & 2sent - cost \end{pmatrix}$$

Es una matriz fundamental *real* por tanto las soluciones de la ecuación homogénea son: $\Phi(t) \cdot c, c \in \mathbb{R}^2$.

Ahora vamos a buscar las soluciones de la ecuación completa. Para ello, el truco es pensar en c como una función de t.

Es decir, buscamos soluciones de la ecuación completa de la forma $\Phi(t)c(t)$.

Entonces:

$$x'(t) = \big(\Phi(t)c(t)\big)' = A\Phi(t)c(t) + \begin{pmatrix} cosec(t) \\ sec(t) \end{pmatrix}$$

Vamos a calcularlo:

$$\Phi(t)c(t) = \begin{pmatrix} 5\left(c_1(t)cost + c_2 sent\right) \\ c_1(2cost + sent) + c_2(2sent - cost) \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar una técnica aprendida en la asignatura de **Geometría de curvas y superficies**. Se da por supuesto el conocimiento adquirido del empleo de esta técnica refinada.

$$\big(\Phi(t)c(t)\big)' = A\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t)$$

Esto es en general, del **método de variación de las constantes**

Completar, que no me he enterado porqué esto es así

En nuestor caso tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5(c_1' cost + c_2' sent) \\ c_1'(2cost + sent) + c_2'(2sent - cost) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosec(t) \\ sec(t) \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema por sustitución

...

haciendo cuentas

...

y más cuentas

...

keep waiting

...

y más cuentas

...

y más cuentas

...

$c_2' = \dfrac{-4}{5} + \dfrac{1}{5}cotan(t)$, con lo que:

$$c_2 = \frac{-4}{5} + \frac{1}{5}log|sen(t)| + K_2 \in \mathbb{R}$$

Y ahora calculamos c_1

$c_1' = \dfrac{2}{5sen2t} + \dfrac{4}{5}tant - \dfrac{1}{5}$, con lo que

$$c_1 = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}log|1+cos2t| + \frac{1}{4}|1-cos2t| + C\right) - \frac{1}{5}t + K_1$$

Ahora ya podemos escribir la solución general:

$$x(t) = \Phi(t)c(t) = \Phi(t)\left[\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}log|1+cos2t| + \frac{1}{4}|1-cos2t|\right) - \frac{1}{5}t \\ \frac{-4}{5} + \frac{1}{5}log|sen(t)| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}\right]$$

con $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

4. Hoja 4

Ejercicio 4.5:

$$f_n(x) = cos^{2n}(\pi x)$$

Apartado a)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} cos^{2n}(\pi x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ 0 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esto no es continuo, luego no puede ser límite uniforme de las f_n que son funciones continuas.

Apartado b)

Podemos escribir

$$\lim_{n\to\infty} cos^{2n}(k!\pi x) = \begin{cases} 1 & k \in \mathbb{Z} \\ 0 & k \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Entonces tenemos que $s \in \mathbb{Q}$, para k suficientemente grande, $k!x \in \mathbb{Z}$ luego $g_k(x) = 1$.

Por el contrario, si tenemos $x \notin \mathbb{Q}$ entonces $\forall k \in \mathbb{N}, k!x \notin \mathbb{Z}$, luego $g_n(x) = 0$.

Tenemos por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} g_k(x) = X_{\mathbb{Q}}(x)$$

Apartado d)

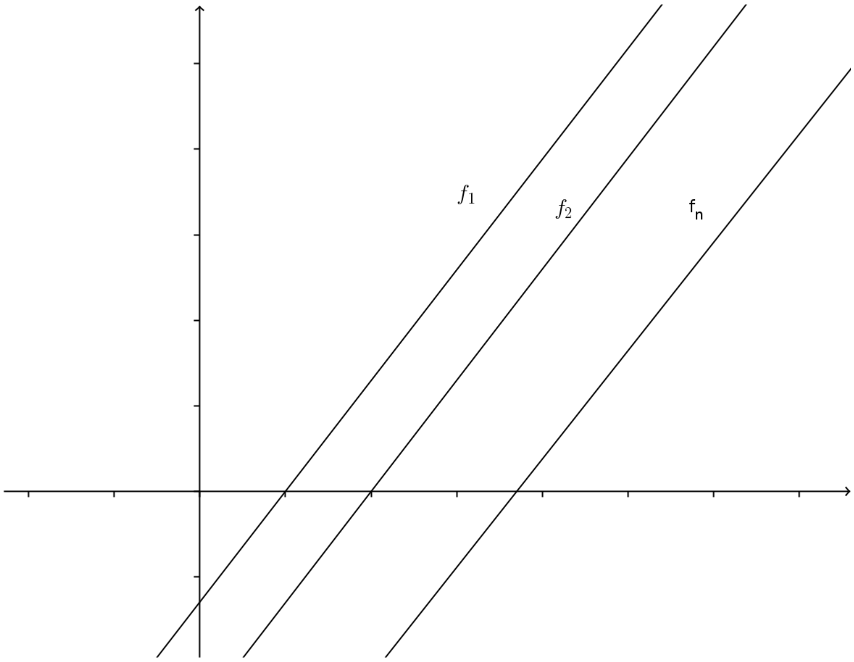


Figura 9: f_n

La sucesión es algo como:

Tenemos: $\forall x \in \mathbb{R} \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m > x$, luego $\forall n \geq m, f_n(x) = 0$.

En $\mathbb{R}$ no hay ocnvergencia uniforme, ya que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x)| = sup|f_n(x)| = \infty$$

, ya que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$$

En cambio, en $[a, b]$ **sí** hay convergencia uniforme.

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x)| = sup|f_n(x)| = 0 \impliedby n > b$$

.

Apartado f)

$$f_n(x) = x^{-n}e^x$$

$$\lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} x^{-n}e^x = 0, \forall x > 1$$

El límite no es uniforme:

$$\sup_{x>1}|f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{x>1}|f_n(x)| = \infty$$

Debido a que $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \infty\, \forall n$.

Ejercicio 4.2: ....

...

Ejercicio 4.10:

$$\left\{ \begin{array}{cc} y' & = |y|^\alpha = f(y) \\ y(0) & = 0 \end{array} \right\}$$

Nos piden cosas sobre existencia global.

Para tener existencia y unicidad global necesitamos que f sea Lipchitz.

Para ello miramos que la derivada esté acotada.

$f'(y) = \alpha|y|^{\alpha-1}$ que está globalmente acotada si $\alpha = 0, 1$, luego en esos casos f es globalmente Lipschitz y tenemos existencia global y unicidad de soluciones.

Otros casos Vamos a buscar Lipschitz local en un entorno del 0 (que es nuestro dato inicial.)

Si $\alpha > 1$ Entonces $f'(y) = \alpha y^{\alpha-1}$ está acotada localmente en entornos que contienen al 0, luego tenemos existencia local y unicidad de soluciones.

¿existencia global? El razonamiento normal sería hacer esto:

$$\int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int_0^x 1 dt = x$$

$$\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{|v|^\alpha} dv = \int_0^{y(x)} \frac{1}{v^\alpha} dv = ...$$

Pero en este caso, la solución del PVI es $y(x) = 0$, luego hay existencia y unicidad global.

Si $0 < \alpha < 1$, $f'(y)$ no está acotada en ningún compacto que contenga a 0. No podemos aplicar los teoremas de existencia y unicidad.

Vamos a integrar para intentar descubrir algo.

$$\frac{y'}{y} = 1 \implies \frac{1}{1-\alpha} y^{1-\alpha} = x + C \implies \left\{ \begin{array}{c} y = [(1-\alpha)(x+C)]^{(1-\alpha)^{-1}} \\ y(0) = 0 \end{array} \right\} \implies C = 0$$

Hemos llegado a que otra solución para el PVI es

$$y = [(1-\alpha)x]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Ejercicio 4.11:

a) $y \geq z \implies y' \geq z'$.

b) $y' \geq z' \implies y \geq z$

c) $y(0) = z(0), y' \geq z' \implies y \geq z$

Apartado a)

Falso. Apartado b)

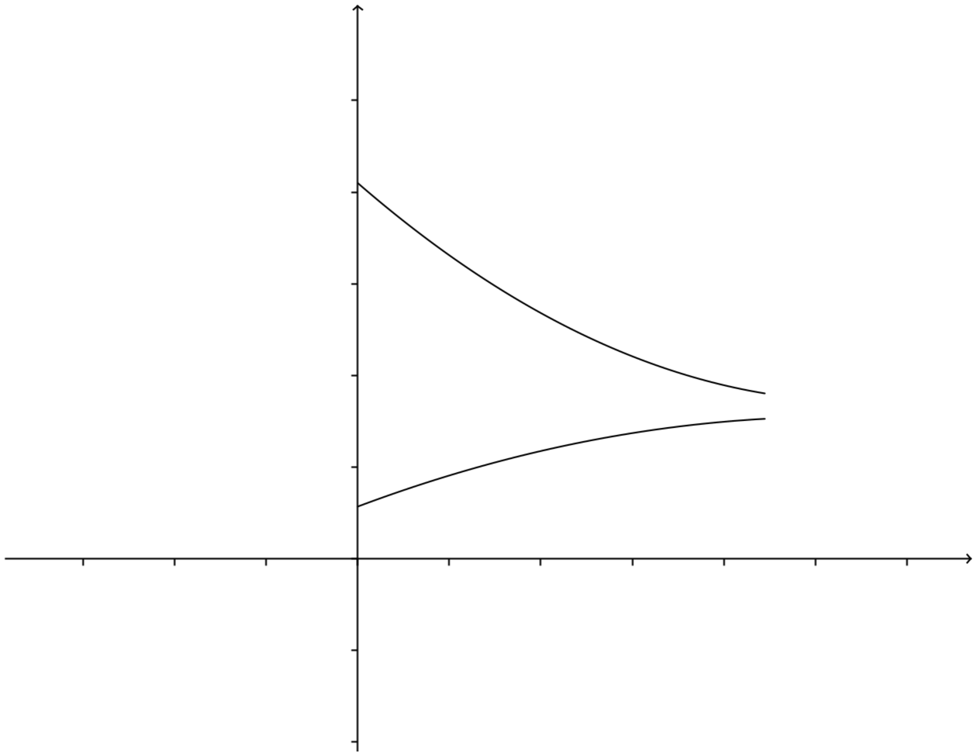


Figura 10: *Contraejemplo*

Falso (Mismo contrajemeplo) Apartado c)

Verdad

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y'(t)dt \geq z(0) + \int_0^x z'(t)dt = z(x)$$

Ejercicio 4.12:
asdf

$\forall y_1, y_2$ tenemos $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$ Luego tenemos existencia global y unididad de soluciones para el PVI propuesto $\forall y_0$.

Tenemos:

$$y'(x) = |y| + x = \begin{cases} y + x & y \geq 0 \\ -y + x & y \leq 0 \end{cases}$$

Vamos con el caso $y \geq 0$.

Solución de la ecuación homogénea: $y' = y \implies y = Ce^x, C \in \mathbb{R}$.

Buscamos una solución particular de la completa de la forma $y = Ax + B$.

Con la información $y' = A$ e $y = Ax + B$ sacamos $A = B = -1$

Solución de la ecucación completa: $y = Ce^x - x - 1, C \in \mathbb{R}$.

$y \leq 0$ Vamos con el caso $y \leq 0; y' = -y + x$.

La ecuación homogénea asociada es $y' = -y$. Solución: $y(x) = Ce^{-x}, C \in \mathbb{R}$.

Si $y = Ax + B$ es solución de la ecuación completa, igual que antes sacamos $A = 1, B = -1$.

Solución de la ecuación completa: $y = Ce^{-x} + x - 1$.

Conclusión: Mientras la solución sea positiva, será de la forma: $y = Ce^x - x - 1$. Si imponemos $y(0) = 1 \implies C = 2$.

La solución general es:$y = 2e^x - x - 1$. Pero... ¿es siempre positiva?

$y' = 2^x - 1$ luego y alcanza su mínimo global en $x = log\frac{1}{2}$ e $y\left(log\frac{1}{2}\right) = log2 > 0$ Luego y es siempre positiva y siempre se rige por la fórmula calculada anteriormente: $y = 2e^x - x - 1$ que además es C^∞.

$y \geq 0$ Mientras la solución sea negativa de la forma: $y = Ce^{-x} + x - 1$ e imponiendo $y(0) = -1 \implies C = 0$.

Entonces nuestra solución es: $y = x - 1$. Para $x \geq 1$ la solución tiene la forma $y = Ce^x - x - 1$ e imponiendo $y(1) = 0 \implies c = \frac{e}{2}$.

La solución entonces nos queda: $2e^{x-1} - x - 1$.

Juntando ambos resultados llegamos a:

$$y = \left\{ \begin{array}{cc} x-1 & x \leq 1 \\ 2e^{x-1} - x - 1 & x \geq 1 \end{array} \right\}$$

Y ahora calculamos las derivadas no se muy bien porqué.

$$y' = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & x < 1 \\ 2e^{x-1} - 1 & x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$y'' = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & x < 1 & \lim_{x \to 1^-} y'' = 0 \\ 2e^{x-1} & x > 1 & \lim_{x \to 1^+} y'' = 2 \end{array} \right\}$$

Luego y no es 2 veces derivable en $x = 1$. Por tanto $y \in C^1(\mathbb{R})$.

Ejercicio 4.15:

$$(A) = \left\{ \begin{array}{c} y' = y + sen(xy) \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

$$(B) = \left\{ \begin{array}{c} z' = z + xz \\ z(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Vamos a ver si es Lipschitz: $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2| + |sen(xy_1) - sen(xy_2)| \leq |y_1 - y_2| + |cos(\xi)||xy_1 - xy_2| \leq (1 + |x|)|y_1 - y_2|$

Luego f es localmente Lipschitz en un compacto en el que x esté acotada, luego existe solución del problema (A), es única y está definida en todo $\mathbb{R}$.

Solucionamos (B)

$$\frac{z'}{z} = 1$$

$$log|z| = x + \frac{x^2}{2} + C$$

$$z(0) = 1 \implies C = 0$$

$$x = e^{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$z(0.1) = e^{0.105} \approx 1.1$$

Solucionamos (A) y (B) como si desconociéramos las soluciones (para ver si se parecen)

$$y(x) = y(0) + \int_0^x y(t) + sen(xy(t))dt$$

$$z(x) = z(0) + \int_0^x (z(t) + tz(t)dt$$

Ahora las restamos y al final aplicaremos el lema de Growngwall.

$$|y(x) - z(xx)| \leq \int_0^x \big(|y(t) - z(t)| + |sen(ty(t)) - tz(t)\big)\, dt \leq \int_0^x$$

Ahora podemos acotar

$$|sen(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}$$

Tenemos que si $t \in [0, 0.1]$

$$tz(t) = t^{t+\frac{t^2}{2}} \leq 0.1e^{0.105}$$

luego

$$|sen(tz(t) - tz(t))| \leq \frac{(tz(t))^3}{3!} = \frac{t^3 e^{3t+\frac{3}{2}t^2}}{3!} \leq \frac{e^{0.315}}{3!}t^3$$

Ya tenemos acotadas por partes la estimación anterior. Entonces tenemos:

$$|y(x) - z(t)| \leq \int_0^x (1+t)|y(t) - z(t)|dt + \int_0^x \frac{e^{0.315}}{3!}t^3 dt$$

aplicamos el lema de Wrongwall

$$W'(x) \leq \int_0^x W(t)f(t)dt + h \implies W(x) \leq he^{\int f(t)dt}$$

$$|y(x) - z(x)| \leq \frac{e^{0.315}}{4!}\frac{1}{10^4}e^{\int \cdots}$$

Estoy harto de copiar.... descanso.

4.1. Segundo Parcial

Ejercicio 4.1:

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} x = Ax$$

Buscamos los autovalores de A:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -9 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Y ahora calculamos los autovectores:

$A - I$

$(A-I)^2 = 0$

Buscamos un vector del núcleo de $(A-I)^2$ (que es nilpotente) que no pertenezca al núcleo de $(A-I)$.

La solución (matriz fundamental es)

$$\Phi(t) = P \exp Jt = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.2: ...

APARTADO A)

$$\left\{ \begin{array}{rc} y' = & x^2y + cos(y^2) = f(x,y) \\ y(0) = & 1 \end{array} \right\}$$

$$|y'| = |f(x,y)| \leq x^2|y| + 1$$

Teorema: Si $f(x,y)$ es localmente Lipschitz en $(a,b) \times \mathbb{R}$

$y|f(x,y)| \leq A(x)|y| + B(x)$ en $(a,b) \times \mathbb{R}$ con $A, B \in C(a,b)$ entonces $\forall x_0 \in (a,b), y_0 \in \mathbb{R}, \exists!$ solución $\begin{array}{c} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array}$ definida en (a,b).

Como $|f(x,y)| \leq x^2|y| + 1$ en $(a,b) \times \mathbb{R}, \forall a < b \in \mathbb{R}$.

Luego tenemos una única solución definida en cada intervalo (a,b) tal que $0 \in (a,b)$. Como (a,b) son arbitrarios tomando $b \to \infty$ tenemos que la solución existe en $[0, \infty)$

APARTADO B)

$$\left\{ \begin{array}{rc} y' = & x^2y \\ y(0) = & 1 \end{array} \right\} \Longrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\left\{ \begin{array}{rc} y' = & -x^2y \\ y(0) = & -2 \end{array} \right\} \Longrightarrow y = 2e^{\frac{-x^3}{3}}$$

Apartado c)

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = x^2|y| \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Por el mismo teorema del apartado a) tenemos: $|y'| \leq x^2|y|$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, luego por el teorema anterior tenemos que los problemas de valores inicialies tienen una única solución definida en $\mathbb{R}$.

Otra forma: $x^2|y| = f(x,y)$ es Lipschitz en cada banda $(a,b)\times\mathbb{R}$ con $a < b \in \mathbb{R}$ porque: $|f(x,y) - f(x,z)| = |x^2|y| - x^2|z|| \leq x^2|y-z|$ (Teorema de nosequé visto en clase).

Luego el problema de valor inicial tiene única solución en (a,b) y como a,b son arbitrarios, en todo $\mathbb{R}$.

Ahora creo que vamos a resolverlo:

$$\left\{ \begin{array}{c} y' = x^2|y| \\ y(0) = 1 \end{array} \right\}$$

Sabemos que tiene solución definida en todo $\mathbb{R}$ (global) que vamos a llamar y.

Como $y(0) = 1, \exists\varepsilon > 0 \;/\; x \in (-\varepsilon, +\varepsilon), y(x) > 0$.

Si $x \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$ entonces y verifica $y'(x) = x^2 \cdot y(x) \overset{b)}{\Longrightarrow} y(x) = e^{\frac{x^3}{3}}$

Sea $z : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, z(x) = e^{\frac{x^3}{3}} > \forall x$. Además es solución del PVI. Entonces por unicidad $y \equiv z$, siendo una solución C^∞

Apartado d)

Se hace igual.

5. Hoja 5

Ejercicio 5.1:

a)

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = 2x + 3y - 7 \\ y' = -x - 2y + 4 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = -x - 2y + 3 \\ y' = 2x - y - 6 \end{array} \right.$$

Apartado a)

Comenzamos calculando los puntos críticos del sistema:

En este caso tenemos: (x,y)=(2,1) y calculamos la matriz jacobiana en este punto (para aproximar linealmente el sistema por Taylor), que es justamente la matriz del sistema.

$$J_{F,G}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para obtener la información del punto crítico diagonalizamos la matriz y vemos los autovalores. En este caso:

$$J_{F,G} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Como tenemos 2 autovalores reales, uno positivo y el otro negativo tenemos un punto de silla que vamos a dibujar:

De momento breve descripción: dibujamos las rectas $x' = 0, y' = 0$. Si las soluciones cortan a esas rectas lo harán vertical y horizontalmente. Además, dibujamos las direcciones de los autovectores. Dependiendo del signo del autovalor asociado (no estoy seguro de cómo) sabemos que el es una dirección de entrada o de salida. Con esto

Apartado b)

Calculamos los puntos críticos del sistema y obtenemos (x,y) = (3,0)

Diagonalizamos la matriz del sistema.

Esto se lo saca un poco de la manga... no entiendo porqué.

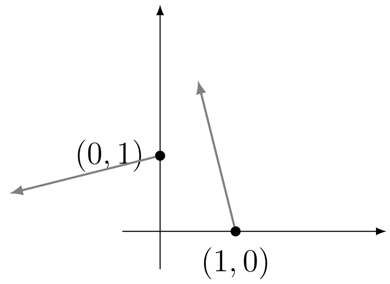
$$J_{F,G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1-2i & 0 \\ 0 & -1+2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{pmatrix}$$

Como tenemos autovalores **complejos con parte real negativa** tenemos un foco estable, es decir una espiral.

Ahora nos queda ver en qué sentido gira la espiral. Para ello nos quedamos con la aproximación lineal ignorando también el punto inicial para suponer que estamos en el origen. De esta forma, simplemente con mirar los vectores tangentes en 2 puntos (el (1,0) y el (0,1))

En este caso tenemos: Otra posibilidad de hacerlo es pasarlo a coordenadas polares y derivamos respecto del tiempo:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



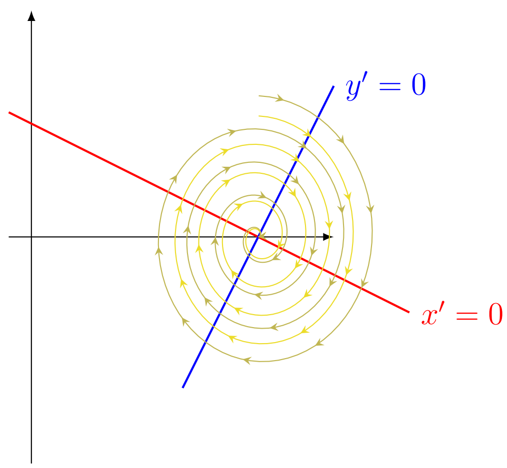
Derivamos:

$$\underbrace{\left(1 + tan^2\theta\right)}_{1+\frac{y^2}{x^2}} \theta' = \frac{xy' - yx'}{x^2}$$

$$\theta' = \frac{xy' - yx'}{x^2}$$

Simplemente comprobando el signo de θ' evaluando en un punto cualquiera obtenemos la misma información. Si $\theta' > 0 \implies$ sentido antihorario.

Al final queda un dibujo de la forma:



Ejercicio 5.2:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

El único punto crítico es (x,y) = (0,0), con lo que no aplica el Tª de linealización porque no hay parte lineal a la derecha. ¿Como?

Las trayectorias de las soluciones están contenidas en las curvas solución de:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

Y resolvemos la ecuación diferencial. Primero dividimos por x^2 y aplicamos el cambio de variables $z = \frac{y}{x}$.

Al final llegamos a:

$$\log(1+z') = -\log|x| + C \implies 1+z^2 = \frac{K}{x}, K \in \mathbb{R}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$1+\frac{y^2}{x^2} = \frac{K}{x} \implies y^2 = kx - x^2 \implies y = \pm\sqrt{(k-x)x}$$

Y dibujamos estas curvas, empezando a dibujar las soluciones del sistema.

Ejercicio 5.3:

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-x^3 \\ x-y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$$

Calculamos los **puntos críticos:**

Sólo hay un punto crítico que es: (x,y) = (0,0)

$$J_{F,G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con el truquillo de antes sabemos que la diagonalización va a ser:

$$J_{F,G}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{pmatrix}$$

Como son autovalores complejos con parte real $\equiv 0$ tenemos un centro en el sistema lineal lo que será un centro o un foco en el sistema de verdad.

Para comprobar pasamos a coordenadas polares:

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$2rr' = 2xx' + 2yy'$$
$$r' = \frac{xx' + yy'}{r} = \frac{x(-y - x^3) + y(y - x^3)}{r} = ... = \frac{x^4 + y^4}{r} > 0$$

Ahora calculamos $\theta' = \frac{xy' - yx'}{r^2} > 0$ con lo que el giro es antihorario.

Y dibujamos...

Apartado a)

$$x' = x^2 \implies \frac{x'}{x^2} = 1 \to x = \frac{1}{c - t}, c \in \mathbb{R}$$
$$y' = y \implies y = Ke^t$$

Vamos a intentar relacionar x con y:

Tenemos una trayectoria de la forma

$$\sigma(t) = \left(\frac{1}{c - t}, Ke^t\right), c, K \in \mathbb{R}$$

$$y = Ke^t = Ke^{c - \frac{1}{c}} = Le^{\frac{-1}{x}}$$

Ejercicio 5.8: *Funciones de Liapunov*

Apartado 1)

$$x\prime = -y + x - \tfrac{1}{4}x^3$$
$$y\prime = -\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}y - 2y^3$$

Definimos la función: $E(x, y) = a\dfrac{x^{2m}}{2m} + b\dfrac{y^{2m}}{2n}$.

Hacemos lo de las derivadas y tomamos $a = m = n = 1; b = 3$.

Apartado 2)

La función de Liapunov que siempre se prueba la primera es: $E(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

Comprobamos:

$$\overline{E}(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x}x\prime + \frac{\partial E}{\partial y}y\prime = xy - 3x^4 - xy - 7y^4 < 0\,(x,y) \neq 0$$

Tenemos que $\overline{E}$ es definida negativa luego por el teorema de Lyapunov, el origen es atintóticamente estable.

Apartado 3)

Con el teorema de Chetaev, el origen es inestable.

Ejercicio 5.11:

$$\begin{aligned} x' &= y + x(x^2+y^2) &= F \\ y' &= -x + y(x^2+y^2) &= G \end{aligned}$$

Calculamos los puntos críticos y diagonalizamos:

$$J_{F,G}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{pmatrix}$$

Pasamos a coordenadas polares obteniendo:

$r' = r^3$ por lo que será inestable y $\theta' = -1 < 0 \to$ giro horario.

Resolvemos la EDO $r' = r^3 \implies r^2 = \dfrac{1}{c-2t}, c \in \mathbb{R}$. Descubrimos que si $t = c$ tenemos un radio infinito que significa que no se dan infinitas vueltas alrededor del centro, sino que al hacerse *infinito en tiempo finito* dejamos de girar.

Las soluciones (en coordenadas polares) serán de la forma:

$$\left[\left(\frac{1}{c-2t}\right)^2 cos(c-t), \left(\frac{1}{c-2t}\right)^2 sen(c-t)\right]$$

Ejercicio 5.18:

a)

$$x\prime\prime + x\prime - \frac{(x\prime)^3}{3} + x = 0$$

Apartado a)

Lo reescribimos como un sistema, que hace que sea más fácil de tratar con ello.

$$x\prime = y$$
$$y\prime = x\prime\prime = -y + \tfrac{y^3}{3} - x$$

Lo que queremos ver es si $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Esto es lo mismo que demostrar que x, y tienden a 0 cuando $t \to \infty$, es decir, el origen es un punto crítico del sistema y que además es estable.

Ni coordenadas polares ni linealización nos dicen nada sobre el punto crítico. (Comprobar)

Buscamos entonces una función de Lyapunov de la forma:

$$E(x,y) = x^2 + xy + y^2 \geq x^2 + y^2 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right)$$

Que tampoco nos ayuda mucho... Recurrimos al criterio de LaSalle y al final acaba saliendo, pero es un ejercicio que no pasa nada por no saber hacer porque es muy difícil (o algo así ha dicho en prácticas).

Apartado b)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x'' = -(y^3 + x^3) \end{cases}$$

- Linealización: No nos dice nada
- Con Lyapunov. Buscamos la función más fácil y típica: $E(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$

  Y obtenemos: $\overline{E}(x,y) = xy - y^4 - yx^3$. Vemos que esto no va a ser siempre positivo, con lo que no tendremos estabilidad. Buscamos un dominio de Chetaiev en el que $\overline{E}$ sea positivo y que contenga al origen (en la frontera o en el interior).

  Si restringimos: $D = \{(x,y) \;/\; x, y > 0, x < \frac{1}{2}, \frac{x}{2} > y^3\}$ tenemos que $\overline{E} \geq 0 \forall (x,y) \in D$. Entonces, por el teorema de Chetaev, el origen es inestable para el sistema y $x(t) = 0$ es inestable para la ecuación original.

Ejercicio 5.19: *Vamos a estudiar planos de fases y estudiar si hay trayectorias cerradas.*

Sabemos que toda trayectoria cerrada tiene que encerrar un punto crítico. Tenemos además el criterio de Bendixon.

a)

$$x' = y = F$$
$$y' = -y - x^2y + x^5 = G$$

b)

$$x' = y + x^3(2 - e^{x^2+y^2})$$
$$y' = -x - y^3(2 - e^{x^2+y^2})G$$

Apartado a)

$$div(F,G) = -1 - x^2 < 0 \forall (x,y)$$

Por el teorema de Bendixon, no puede haber trayectorias cerradas.

Apartado b)

La divergencia no queda de signo constante... con lo que lo intentamos de otra manera. Vamos a pasar a coordenadas polares:

$$r' = \frac{xx' + yy'}{r} = ... = \frac{(x^4 + y^4)(2 - e^{r^2})}{r} = 0 \iff r = \sqrt{log2} = r_0$$

Luego la circunferencia de radio r_0 contiene trayectorias cerradas. (La circunferencia contiene trayectorias cerradas que son las varias vueltas que se pueden dar)

5.1. Segundo Parcial (mates)

Ejercicio 5.1: *Convergencia de esto:*

Apartado a)

$$f_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{X}\right)$$

en $0 < x < \infty$.

Si x>0 tenemos:

Convergencia puntual:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) = ... = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

¿Convergencia uniforme?

$$\sup_{x>0}|f_n(x) - \lim_{j\to\infty} f_j(x)| = sup\left|\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right| = \infty$$

Luego la convergencia no es uniforme.

Apartado b)

$$f_n(x) = sen\frac{x}{n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

¿Convergencia uniforme?

$$sup|f_n(x) - \lim_{k\to\infty} f_k(x)| = sup\left|sen\frac{x}{n}\right| \geq \left|sen\frac{n\frac{\pi}{2}}{n}\right| = 1 \neq 0$$

Ejercicio 5.2: *Calcular la frecuencia de resonancia:* $x'' = 2\mu x' + 4x = 6sen(3t)$

Buscamos la solución estacionaria de esta forma: $x(t) = Acos(3t) + Bsen(3t)$.

Calculamos $A = A(\mu)$ y $B = B(\mu)$ y buscaremos escribir $A = cos\theta$ y $B = sen\theta$ y "normalizamos" pare tener $A^2 + B^2 = R^2$ de tal forma que $\frac{A}{R} = \cos\theta$.

Al final tenemos:

$x(t) = R\left(\frac{A}{R}cos(3t) + \frac{B}{R}sen(3t)\right) = R(\mu)cos(3t-\theta)$. Buscamos μ para que R sea máxima.

Ejercicio 5.3: *Un PVI:*

$$\begin{cases} y' = y + \lambda x^2 sen(y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad |\lambda| \leq 1$$

Apartado a)

Probar que existe una solución Ψ en $[-1, 1]$. Utilizamos el teorema de ... global:

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|1 + \lambda x^2 cos(y)\right| \leq 1 + |\lambda| x^2$$

Luego f es Lipschitz en $(a, b) \times \mathbb{R}$ con $a < -1$ y $b > 1$. Por ejemplo $a = -2, b = 2$ y por el teorema de existencia y unicidad global tenemos una única solución definia en $(-2, 2)$ y por tanto en $[-1, 1]$.

Apartado b)

$$|\Psi(x) - e^x| \leq |\lambda|(e^{|x|} - 1)$$

Índice alfabético