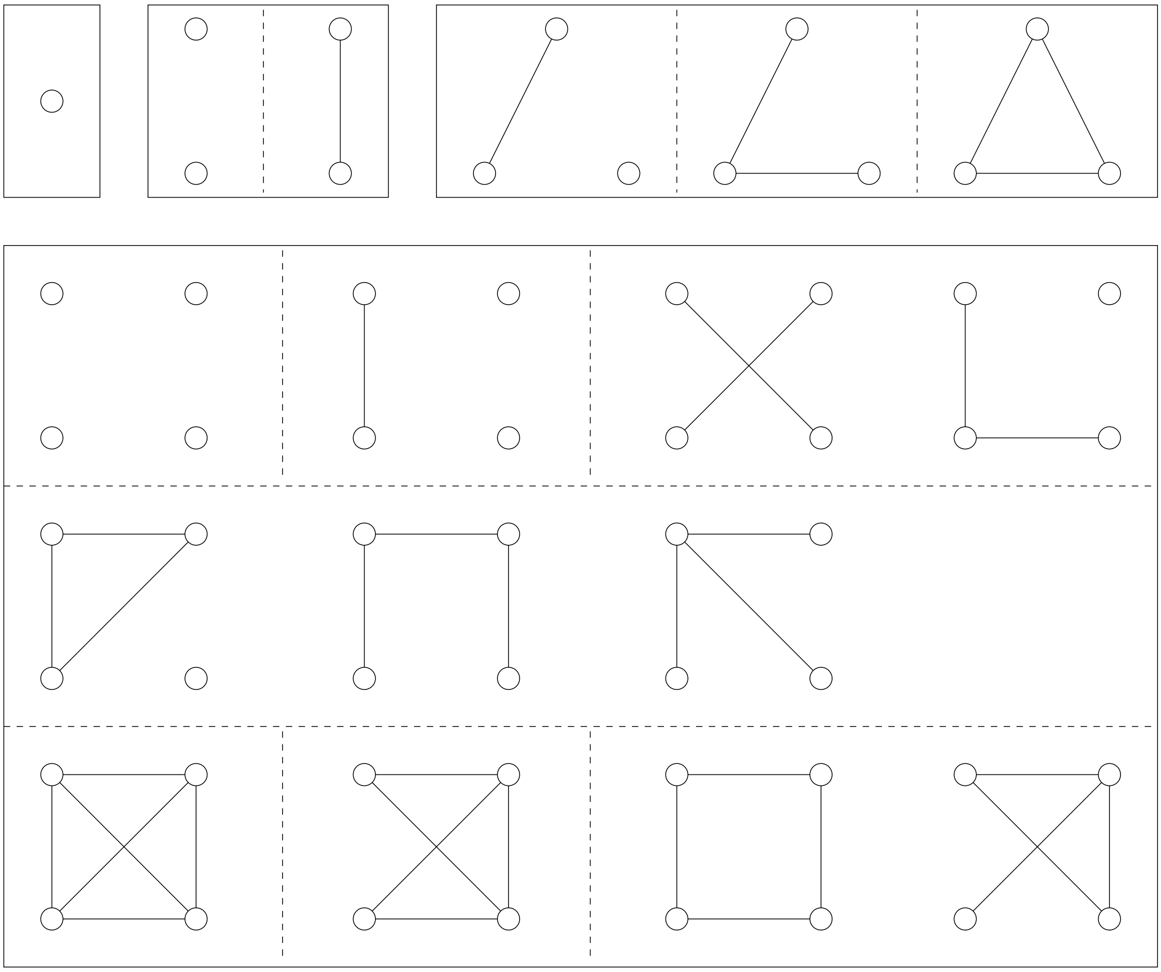
Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok I

Tizedik alkalom (2024.04.22-04.26.)

1. Rajzold le az összes, páronként nem izomorf 3, 4, illetve 5 csúcsú egyszerű gráfot. Hány összefüggő van közöttük?
Megoldás: 1, 2, 3 és 4 csúcsú egyszerű gráfok: (az ábráról hiányzik a 3 csúcsú, 0 élű gráf)



Az 1 csúcsú gráf összefüggő; a 2 csúcsú gráfok közül a két izolált csúcsból álló nem, az egy élt tartalmazó összefüggő; a 3 csúcsúak közül a 0 élű és az 1 élű (tehát az izolált csúcsot tartalmazóak) nem összefüggő, a másik kettő igen. A 4 csúcsúak közül a fölső sorban egyik sem összefüggő, a középső sorban a bal oldali (egy 3 hosszú kör + egy izolált csúcs) nem összefüggő. A többi 4 csúcsú gráf összefüggő. 5 csúcsú gráfok: H.F.

2. Van-e olyan (legalább kétpontú) gráf, melyben minden pont foka különböző?
Megoldás: **a)** Ha a gráf egyszerű: n csúcs esetén a lehetséges fokszámok: $0, 1, \ldots, n-1$, ez látszólag n féle. Azonban 0 fokú és $n-1$ fokú csúcs nem lehet egyszerre, hiszen a 0 fokú semelyik csúccsal, az $n-1$ fokú mindegyik csúccsal össze lenne kötve. Tehát egyszerre csak $n-1$ lehetséges fokszám van, viszont n csúcs, így lesz legalább két, megegyező fokszámú csúcs. (Ez valójában skatulyaelv, csak kicsit trükkösen kell megválasztani a skatulyákat: Legyenek a skatulyák a lehetséges fokszámok $1, 2, \ldots, n-2$, az utolsó skatulyában pedig a 0 és $n-1$ fokszámok egyaránt. Ha két csúcs ugyanabban a skatulyában van, akkor a fokszámuk megegyezik. Az utolsó skatulyában is, hiszen ha abban van két csúcs, akkor vagy mindkettő fokszáma 0, vagy mindkettőé $n-1$. Így tehát $n-1$ skatulyánk és n csúcsunk van, a skatulyaelv értelmében lesz két azonos fokszám.)

b) Ha nem egyszerű gráfot is megengedünk: például néhány csúcs, az első 0 fokú, a második csúcson egy hurokél, a harmadikon két hurokél stb. Másik példa: egy út, melynek beszámozzuk az éleit, a második élét megduplázzuk, a harmadikat megháromszorozzuk stb.

3. Lehet-e egy 7 pontú egyszerű gráf fokszámsorozata

   a) $4, 4, 3, 3, 2, 2, 1$;

   b) $6, 3, 3, 3, 3, 2, 0$;

   c) $5, 5, 5, 2, 2, 2, 1$;

   d) $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$?

   Megoldás: **a)** Nem, mert a fokszámok összege páratlan lenne, ellentmondás (lásd 4. feladat).
   b) Nem, mert 7 csúcsú gráfban nem lehet egyszerre 6 fokú és 0 fokú csúcs (lásd 2. feladat).
   c) Indirekt tegyük föl, hogy van ilyen gráf. Rajzoljuk a három darab öt fokú csúcsot a bal oldalra, a többit a jobb oldalra. Ekkor a bal oldal csúcsaiból összesen $3 \cdot 5$ él indul, és mind a három csúcsból legfeljebb kettő él mehet a bal oldalra, tehát $3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 9$ él legalább átmegy a jobb oldalra. Oda viszont összesen $2+2+2+1 = 7$ él mehet. Tehát nincs ilyen egyszerű gráf. (Fontos: ez csak szükséges feltétel, azaz ha találunk olyan kettéosztást, ami ellentmondáshoz vezet, akkor az bizonyítja, hogy nincs ilyen egyszerű gráf; de ha egyik kettéosztás sem ad ellentmondást, abból még nem következik, hogy ténylegesen van megfelelő fokszámsorozatú gráf. Ez utóbbit pl. igazolhatjuk úgy, hogy rajzolunk egyet.)
   d) Igen, pl. egy 7 hosszú kör. Másik példa: egy 3 hosszú kör és egy 4 hosszú kör uniója. Általában: ha egy egyszerű gráfban minden fokszám 2, akkor az diszjunkt körök uniója.

4. Mutasd meg, hogy tetszőleges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros!
   Megoldás: Előadáson beláttuk, hogy tetszőleges gráfban a fokszámok összege éppen az élek számának kétszerese. Az élek száma egész szám, kétszerese tehát páros, vagyis a fokszámösszeg páros. Ez csak úgy lehet, hogy páros sok páratlan fokszám szerepel az összegben.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő gráfnak kevesebb éle van, mint pontja, akkor van elsőfokú pontja.
   Megoldás: $G(V, E)$, $|V| = n$ csúcsú gráfra az állítás csak $n \geq 2$ esetén igaz, ugyanis $n = 1$-re lehet egy izolált csúcs, 0 él, a csúcs foka 0. $n \geq 2$ esetén: Indirekt tegyük fel, hogy minden csúcs foka legalább 2. (Ha sikerül ellentmondásra jutni, akkor ezzel beláttuk, hogy van elsőfokú pont, mivel az összefüggőség miatt 0 fokú pont nem lehet a gráfban.) Ekkor $\sum d(v) = 2 \cdot |E|$. Becsüljük az egyenlőség mindkét oldalát! Egyrészt az indirekt feltevés szerint minden fokszám legalább 2, tehát $2 \cdot n \leq \sum d(v)$, másrészt a feladat feltétele szerint $|E| < n$, azaz $2 \cdot |E| < 2 \cdot n$. Tehát $2 \cdot n \leq \sum d(v) = 2 \cdot |E| < 2 \cdot n$, ellentmondás.

6. Mutassuk meg, hogy ha egy $2n$ csúcsú gráf minden pontjának foka legalább n, akkor a gráf összefüggő! Mi történik, ha $n - 1$ fokú pontokat is megengedünk?
   Megoldás: A feladat állítása egyszerű gráfokra igaz. Nem egyszerű gráfra ellenpélda: $2n$ darab csúcs, mindegyiken legalább $n/2$ hurokél.

   Direkt bizonyításhoz ellenőrizzük az összefüggőség definícióját, azaz megmutatjuk, hogy két tetszőleges csúcs között van séta (út): Jelölje V a G csúcshalmazát. Legyen u és v két tetszőleges csúcs G-ben. Be fogjuk látni, hogy van út u és v között (tetszőleges választás esetén). Ha u és v szomszédosak (= van köztük él), akkor kész vagyunk. Ha nem szomszédosak: jelölje $N(u)$ az u, $N(v)$ a v szomszédainak halmazát. A fokszámfeltétel és az egyszerűség miatt $|N(u)| + |N(v)| \geq 2n$. Másrészt, mivel u és v nem szomszédosak, $(N(u) \cup N(v)) \subseteq V \setminus \{u; v\}$. Mivel $|V \setminus \{u; v\}| = 2n - 2$, ez csak úgy lehet, ha $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, azaz u-nak és v-nek van közös szomszédja, vagyis van köztük kettő hosszú út. *Megjegyzés:* ezzel nemcsak annyit láttunk be, hogy G összefüggő (azaz bármely két csúcsa közt van út), hanem azt is, hogy bármely két csúcsa közt van legföljebb kettő hosszúságú út.

Másik megoldás: Indirekt tegyük föl, hogy G nem összefüggő. Ekkor a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt részre, hívjuk ezeket A-nak és B-nek, melyek közt nincs él. (Ennek indoklása precízen: legyen v tetszőleges csúcsa G-nek. Legyen A a v-ből sétán elérhető csúcsok halmaza (ez éppen az az összefüggőségi komponens, melynek v az eleme); és legyen B a többi csúcs halmaza. A nyilván nem üres; és mivel G nem összefüggő, B sem üres. A és B közt nem lehet él A definíciója miatt. Mj: B nem feltétlenül összefüggő.) Ekkor $|A| + |B| = 2n$. Másrészt: legyen $u \in A$, $v \in B$ (a nemüresség miatt vannak ilyen csúcsok). Ekkor u minden szomszédja A-ban van; és mivel a gráf egyszerű, ez legalább n csúcsot jelent u-n kívül A-ban, azaz $|A| \geq n + 1$. Hasonlóan $|B| \geq n + 1$ is teljesül. Viszont ekkor $|A| + |B| \geq 2 \cdot (n + 1) = 2n + 2$, ellentmondás.

Ha $n - 1$ fokú pontokat is megengedünk, akkor tudunk példát adni nem összefüggő gráfra: két komponens, mindkettő egy-egy n csúcsú teljes részgráf (K_n), ekkor minden csúcs foka pontosan $n - 1$.

7. Igaz-e, hogy ha egy gráf bármely két pontja között van séta, akkor út is van?
Megoldás: Legyen $G(V, E)$ gráf, $v, u \in V$ két tetszőleges csúcs, és legyen
$v, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, u$ egy séta. Ha ez út, készen vagyunk. Ha ez nem út, akkor
$\exists\ 1 \leq i < j \leq k : v_i = v_j$. Töröljük a sétából a $v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_j$ szakaszt. Így egy rövidebb sétához jutottunk. Ha az így kapott séta út, készen vagyunk. Ha nem, ismételjük meg az előbbi eljárást. Mivel minden lépésben az előzőnél rövidebb sétához jutunk, az eljárás véget fog érni.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf minden pontjának fokszáma legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.
Megoldás: Tekintsünk a gráfban egy maximális (tovább már nem bővíthető) utat, és annak v végpontját! A v-ből kiinduló élek közül az egyik az útban szereplő él, de mivel $d(v) \geq 2$, ezért v-ből további él(ek) is kiindul(nak). Jelöljön e_1 egy ilyen élt, v_1 az él másik végpontját. Ha v_1 nem szerepelne az útban, ellentmondásra jutnánk, hiszen akkor e_1, v_1-gyel tovább bővíthető lenne az út. Tehát v_1 szerepel az útban. Ekkor az út $v_1, \ldots, v$ szakaszához hozzávéve e_1 élt kört kapunk.

9. Jelöljük egy fa elsőfokú pontjainak számát f_1-gyel, a kettőnél nagyobb fokúak számát pedig c-vel. Mutassuk meg, hogy ha legalább két pontja van a gráfnak, akkor $f_1 \geq c + 2$.
Megoldás: Legyen $G(V, E)$, $|V| = n$ fa gráf, jelöljük a fa másodfokú pontjainak számát f_2-vel, általában az i-edfokú pontjainak számát f_i-vel. Ekkor a fokszámösszeg
$\sum d(v) = 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot f_3 + \ldots + i \cdot f_i + \ldots$ alulról becsülhető $\sum d(v) \geq 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$-vel. Másrészt, mivel a gráf fa, $|E| = n - 1$, tehát a fokszámösszeg $\sum d(v) = 2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$. A csúcsszám felírható $n = f_1 + f_2 + c$ alakban, az előző egyenletbe behelyettesítve $\sum d(v) = 2 \cdot (f_1 + f_2 + c) - 2$. Összevetve a korábbi becsléssel $2 \cdot (f_1 + f_2 + c) - 2 = \sum d(v) \geq 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$, azaz $2 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 + 2 \cdot c - 2 \geq f_1 + 2 \cdot f_2 + 3 \cdot c$, rendezve az egyenlőtlenséget $f_1 - 2 \geq c$ adódik.
Megjegyzés: az eredmény jelentése, hogy ha a fában van(nak) nagy fokszámú csúcs(ok), akkor sok elsőfokú csúcs lesz, ami megegyezik a fákkal kapcsolatos természetes intuíciónkkal.

Szorgalmi feladatok

10. Hat versenyzõ körmérkõzést játszik. Bizonyítsd be, hogy bármely idõpontban van három olyan versenyzõ, akik már mind játszottak egymással, vagy három olyan, hogy egyik sem játszott a másik kettõvel. **1 pont**

Gyakorló feladatok

1. Van-e olyan egyszerű gráf, melyben a pontok foka rendre
a)7,7,7,6,6,6,5,5,5;   **b)** 6,6,5,4,4,3,2,2,1?

2. És olyan 8 pontú egyszerű, melyben a fokszámok 6,6,6,6,3,3,2,2?

3. Milyen C_n gráfok részgráfjai a Petersen-gráfnak?

Gráf komplementere: Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf komplementere az a $H = (V, F)$ gráf, ahol $\{u, v\} \in E \Longleftrightarrow \{u, v\} \notin E$.

4. Hány olyan 3,4, illetve 5 csúcsú gráf van, amely izomorf a komplementerével?

5. Igaz-e, hogy vagy G, vagy a komplementere biztosan összefüggõ?

6. Bizonyítsuk be, hogy minden, legalább 5 csúcsú gráf esetén maga a gráf vagy a komplementere tartalmaz kört.

7. Mely fák izomorfak a komplementerükkel?