Elsőrendű logika alapjai

Gyakorlat

Logika

2023/2024 1. félév

Elsőrend bevezető

Milyen elemekből állhat egy elsőrendű formula?

Műveleti jelek:	$\wedge, \vee, \supset, \neg$
Kvantorok:	$\forall, \exists$
Zárójelek:	$(,)$
Individuum változók:	pl.: x, y, z

Egy I interpretáció:

Univerzum:	U	
Predikátumok:	Logikai függvények, $U^n \to L$	$\lvert P(x)\rvert^I$ - x páros szám, $\lvert Q(x,y)\rvert^I$ - x osztója y
Függvények:	Matematikai függvények, $U^n \to U$	$\lvert f(x)\rvert^I$ - x rákövetkezője
Konstansok:	$c \in U$	$\lvert \bar{a}\rvert^I - 2$, $\lvert \bar{b}\rvert^I - 3$

Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat ítéletlogikában:

- "Ha valaki fiatal, akkor kávézik."

$$F \supset K, \text{ ahol}$$
$$F^I = \text{"fiatal"}$$
$$K^I = \text{"kávézik"}$$

- "Minden fiatal kávézik."

$$A \text{ ítéletváltozó, ahol } A^I = \text{"Minden fiatal kávézik"}$$

- "Van, aki nem kávézik."

$$B \text{ ítéletváltozó, ahol } B^I = \text{"Van, aki nem kávézik."}$$

Formalizálás

Formalizáljuk a következő állításokat most elsőrendben:

- "Ha valaki fiatal, akkor kávézik."

$$F(x)^I = \text{"x fiatal"}$$
$$K(x)^I = \text{"x kávézik"}$$

- "Minden fiatal kávézik."

$$\forall x(F(x) \supset K(x))$$

- "Van, aki nem kávézik."

$$\exists x \neg K(x)$$

Formalizálás - Egyfajtájú megközelítés

1) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
2) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
3) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
4) Szarvas legjobb barátja bogár.

$U = \{\text{rovarok}\}$
Predikátumok:
B(x) - x bogár
K(x) - x kitines a szárnyfedele
S(x) - x szarvasbogár
Függvények:
f(x) - x legjobb barátja
Konstans: $\bar{a}$ - Szarvas

Formalizált állítások:
1) $\neg\forall x B(x)$
2) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$
3) $\forall x(\neg K(x) \vee B(x))$
4) $B(f(\bar{a}))$

Formalizálás - egy másik univerzummal

1) Minden bogár rovar, de nem minden rovar bogár.
2) Szarvasnak, a szarvasbogárnak kitines a szárnyfedője.
3) Egy rovarnak nincsen kitines szárnyfedője vagy bogár.
4) Szarvas legjobb barátja bogár.

Lehetne-e másik univerzummal leírni ugyanezt? (bővítés/szűkítés)

$U = \{\text{élőlények}\}$

Predikátumok:

R(x) - x rovar

B(x) - x bogár

K(x) - x kitines a szárnyfedele

S(x) - x szarvasbogár

Függvények:

f(x) - x legjobb barátja

Konstans: $\bar{a}$ - Szarvas

Formalizált állítások:

1) $\forall x(B(x) \supset R(x)) \wedge \neg\forall x(R(x) \supset B(x))$

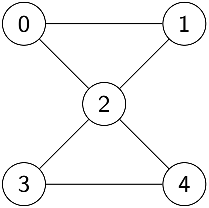
2) $S(\bar{a}) \wedge K(\bar{a})$

3) $\forall x(R(x) \supset (\neg K(x) \vee B(x)))$

4) $B(f(\bar{a}))$

Formalizálás - gráfok

Vegyük a következő gráfot: $G_1 =< V_1; E_1 >$:



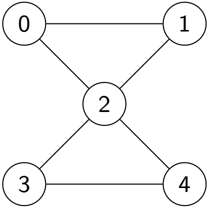
Ebben a G_1 irányítatlan gráfban:
Univerzum: U $= \{0,1,2,3,4\}$
Predikátumszimbólumok:
$E(x, y)$ - x és y csúcsok között van él
$= (x, y)$ - x és y csúcsok megegyeznek

1. Fogalmazzuk meg a következő formulákat leíró állításokat és gondoljuk át az igazságértékük:

1. $\forall x \exists y E(x, y)$
2. $\exists x \forall y E(x, y)$
3. $\forall x \forall y [E(x, y) \supset E(y, x) \wedge \neg = (x, y)]$
4. $\forall x \exists y \exists z [E(x, y) \wedge E(x, z) \supset E(y, z)]$

Formalizálás - gráfok

Vegyük a következő gráfot: $G_1 =< V_1; E_1 >$:



Ebben a G_1 irányítatlan gráfban:
Univerzum: U $= \{0,1,2,3,4\}$
Predikátumszimbólumok:
$E(x, y)$ - x és y csúcsok között van él
$= (x, y)$ - x és y csúcsok megegyeznek

2. Készítsünk formulákat a következő állításokból, szükség esetén egészítsük ki az interpretációnkat!

1. Ha két csúcs szomszédos, akkor van köztük él.
2. Ha a "2"-es csúcs és a "3"-mas csúcs között van él, akkor ők szomszédosak.
3. Minden csúcs és a szomszádja között él van.

Formalizálás - további gyakorlás

1) Minden informatikus tud logikusan gondolkozni.
2) Aki tud logikusan gondolkozni, az okos.
3) Van olyan, aki okos és nem informatikus.
4) Az informatikusok főnöke egy okos informatikus.

Univerzum: {emberek}

Predikátumok:

- I(x) - x informatikus
- L(x) - x tud logikusan gondolkozni
- O(x) - x okos

Függvények:

- f(x) - x főnöke

Formalizált állítások:

1) $\forall x(I(x) \supset L(x))$
2) $\forall x(L(x) \supset O(x))$
3) $\exists x(O(x) \wedge \neg I(x))$
4) $\forall x(I(x) \supset O(f(x)) \wedge I(f(x)))$

Formalizálás - Egyfajtájú megközelítés

1) Zokni kerti kutya.
2) Zokni szomszédjában lakó kutya házban lakik.
3) Zokni egy kutya, akinek gazdája Norbi (, aki ember).
4) Minden kutyának van gazdája (, aki ember).
5) Van olyan kutya, amelyik házban és van amelyik kertben lakik.

Univerzum: {élőlények}

Predikátumok:

- K(x) - x kutya
- E(x) - x ember
- R(x) - x kertben él
- H(x) - x házban él
- G(x, y) - x gazdája y

Konstansok:

- $\bar{a}$ - Zokni
- $\bar{b}$ - Norbi

Függvények:

- f(x) : x szomszédja

Formalizált állítások:

1) $K(\bar{a}) \wedge R(\bar{a})$
2) $K(f(\bar{a})) \wedge H(f(\bar{a}))$
3) $K(\bar{a}) \wedge E(\bar{b}) \wedge G(\bar{a}, \bar{b})$
4) $\forall x(K(x) \supset \exists y(E(y) \wedge G(x, y)))$
5) $\exists x(K(x) \wedge H(x)) \wedge \exists x(K(x) \wedge R(x))$

Formalizálás - Többfajtájú megközelítés

1) Zokni kerti kutya.
2) Zokni szomszédjában lakó kutya házban lakik.
3) Zokni egy kutya, akinek gazdája Norbi (, aki ember).
4) Minden kutyának van gazdája (, aki ember).
5) Van olyan kutya, amelyik házban és van amelyik kertben lakik.

Univerzum: { {emberek} , {kutyák} }

Predikátumok:

- K(x : kutya) - x kertben él
- H(x : kutya) - x házban él
- G(x : kutya, y : ember) - x gazdája y

Konstansok:

- $\bar{a}$: kutya - Zokni
- $\bar{b}$: ember - Norbi

Függvények:

- f(x : kutya) : kutya - x kutya szomszédja

Formalizált állítások:

1) $K(\bar{a})$
2) $H(f(\bar{a}))$
3) $G(\bar{a}, \bar{b})$
4) $\forall x \exists y G(x, y)$
5) $\exists x H(x) \wedge \exists x K(x)$

Értéktábla

Felépítése:

szabad változók	prímkomponensek	formula
változókiértékelés	helyettesítési érték	helyettesítési érték

Mit ad meg? Egy formula helyettesítési értékeit a különböző változó kiértékelések mellett, **1 interpretációban**.

Változók

- Változók előfordulása:
  - kötött: Ha kvantor által kötve van.
  - szabad: Ha nincs kvantor által kötve.
- Változó típusa:
  - kötött: Ha minden előfordulása kötött.
  - szabad: Ha minden előfordulása szabad.
  - vegyes: Ha van kötött és szabad előfordulása is.

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y)$$

- x: kötött
  - 1. előfordulása: kötött
  - 2. előfordulása: kötött
- y: vegyes
  - 1. előfordulása: szabad
  - 2. előfordulása: kötött
- z: szabad
  - 1. ef.: szabad

Prímkomponensek

Legkisebb részei a formulának, amelyhez "helyes" igazságérték társítható. Ezek egy része atomi formula, másik része kvantált formula.

- $\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(w)$

  prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge Q(x,y))$, $\forall y Q(z,y)$, $P(\bar{a})$, $Q(w)$

- $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x,y) \supset P(z))) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a})$

  prímkomponensek: $\forall z(P(x) \wedge \forall x(Q(x,y) \supset P(x)))$, $\forall y Q(z,y)$, $P(\bar{a})$

- $\forall z(\forall x(P(x) \wedge Q(x,y)) \supset \forall y Q(z,y) \supset P(\bar{a}) \vee Q(\bar{a}))$

  prímkomponensek: maga a formula

Kvantált formulák értéke

Univerzálisan kvantált formula - egy tulajdonság az univerzum minden elemére teljesül. pl.: $\forall x P(x)$

Egzisztenciálisan kvantált formula - van olyan elem az univerzumban, amire a tulajdonság teljesül. pl.: $\exists x P(x)$

Legyen $U = \{0, 1, 2\}$ és $|P(x)|^I = \{0, 2\}$

Ekkor

$$|\forall x P(x)|^I = |P(0)|^I \wedge |P(1)|^I \wedge |P(2)|^I = i \wedge h \wedge i = h$$

$$|\exists x P(x)|^I = |P(0)|^I \vee |P(1)|^I \vee |P(2)|^I = i \vee h \vee i = i$$

1. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához: $\forall x \exists y P(x,y) \land Q(\bar{a}) \lor P(\bar{a}, z)$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I - (x < y), |Q(x)|^I - (x == 0), |\bar{a}|^I = 0$

z	$\forall x \exists y P(x,y)$ (1)	$Q(\bar{a})$ (2)	$P(\bar{a}, z)$ (3)	$1 \land 2 \lor 3$
0	h	i	h	h
1	h	i	i	i

$\forall x \exists y P(x,y) = \exists y P(0,y) \land \exists y P(1,y) =$
$(P(0,0) \lor P(0,1)) \land (P(1,0) \lor P(1,1)) = (h \lor i) \land (h \lor h) = h$

Szemantikus tulajdonságok

- **Kielégíthető** egy formula, ha van olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégíti.
  Másképp: Van olyan értéktábla és annak sora, ahol igaz a formula.
- **Kielégíthetetlen** egy formula, ha nincs olyan interpretáció és változókiértékelés, ami kielégítené.
  Másképp: Minden értéktábla minden sorában hamis a helyettesítési értéke a formulának.
- **Logikai törvény** egy formula, ha minden interpretáció és változókiértékelés kielégíti.
  Másképp: Minden értéktábla minden sorában igaz a formula helyettesítési értéke.

1. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához: $\forall x \exists y P(x,y) \land Q(\bar{a}) \lor P(\bar{a}, z)$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I - (x < y), |Q(x)|^I - (x == 0), |\bar{a}|^I = 0$

z	$\forall x \exists y P(x,y)$ (1)	$Q(\bar{a})$ (2)	$P(\bar{a}, z)$ (3)	$1 \land 2 \lor 3$
0	h	i	h	h
1	h	i	i	i

Mit tudunk leolvasni a szemantikus tulajdonságokról?

Szemantikus tulajdonságok:
Kielégíthető - az adott interpretációban volt változókiértékelés, ahol igaz.
Nem kielégíthetetlen
Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists z \exists y (P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v, \bar{a}) \wedge P(f(x), \bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

x	$\exists z \exists y (P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v,\bar{a})$ (2)	$P(f(x),\bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i			
2	i			
3	i			

$\exists z \exists y (P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
$\exists y (P(1,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(2,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee \exists y (P(3,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) =$
$[(P(1,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(1,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$
$[(P(2,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(2,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] \vee$
$[(P(3,1) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,2) \wedge Q(f(\bar{a}))) \vee (P(3,3) \wedge Q(f(\bar{a})))] = i$

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v, \bar{a}) \wedge P(f(x), \bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1, 2, 3\}, |P(x, y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

x	$\exists z \exists y (P(z, y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v, \bar{a})$ (2)	$P(f(x), \bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i	h	h	
2	i	h	i	
3	i	h	h	

$\forall v P(v, \bar{a}) = P(1, \bar{a}) \wedge P(2, \bar{a}) \wedge P(3, \bar{a}) = i \wedge h \wedge h = h$

2. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a}))) \supset \forall v P(v,\bar{a}) \wedge P(f(x),\bar{b})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{1,2,3\}, |P(x,y)|^I - x == y, |Q(x)|^I -$ x páros,
$|\bar{a}|^I = 1, |\bar{b}|^I = 3, |f(x)|^I -$ x rákövetkezője univerzumon belül

x	$\exists z \exists y(P(z,y) \wedge Q(f(\bar{a})))$ (1)	$\forall v P(v,\bar{a})$ (2)	$P(f(x),\bar{b})$ (3)	$1 \supset (2 \wedge 3)$
1	i	h	h	h
2	i	h	i	h
3	i	h	h	h

Szemantikus tulajdonságok:
Lehet kielégíthető - az adott interpretációban mindenhol hamis, de lehet másik, ahol van igaz helyettesítés.
Lehet kielégíthetetlen - A többi interpretációban kérdéses
Nem logikai törvény - Volt olyan változókiértékelés, ahol hamis.

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x,y)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$	$Q(z)$	$P(z,x)$	$P(v,\bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z,x) \vee P(v,\bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0,1\}, |P(x,y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x,y)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w,y),\bar{a})$	$Q(z)$	$P(z,x)$	$P(v,\bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
0	0	0	i	i	i	i	i
0	0	1	i	i	i	i	i
0	1	0	i	i	h	i	i
1	0	0	i	i	i	i	i
0	1	1	i	i	h	i	i
1	0	1	i	i	i	i	i
1	1	0	i	i	i	i	i
1	1	1	i	i	i	i	i

3. Feladat

Készítsünk értéktáblát a következő formulához:
$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a}) \supset Q(z) \supset P(z, x) \vee P(v, \bar{a})$

A következő interpretáció alapján:
$U = \{0, 1\}, |P(x, y)|^I = (x \geq y), |Q(x)|^I = (x \geq 0), |\bar{a}|^I = 0, |f(x, y)|^I$ - összeadás univerzumon belül.

z	x	v	$\exists w \forall y P(f(w, y), \bar{a})$	$Q(z)$	$P(z, x)$	$P(v, \bar{a})$	$1 \supset (2 \supset (3 \vee 4))$
0	0	0	i	i	i	i	i
0	0	1	i	i	i	i	i
0	1	0	i	i	h	i	i
...	...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	i	i	i	i	i

Szemantikus tulajdonságok:
Kielégíthető - Van olyan interpretáció és változókiértékelés, ahol igaz.
Nem kielégíthetetlen
Lehet logikai törvény - Attól függ, hogy a többi interpretációban milyen helyettesítési értékek vannak.

Változóiban tiszta alak

Egy formula változóiban tiszta, ha egy változó csak szabad változóként, vagy csak 1 kvantor által van kötve.
Az átalakítás a kvantor által kötött változók átnevezésével lehetséges.

Változó átnevezés:

- $\forall x P(x) = \forall y P(y)$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) \neq \forall y (P(y) \wedge Q(y))$
- $\forall x (P(x) \wedge Q(y)) = \forall z (P(z) \wedge Q(y))$

Változóiban tisztává alakítás:

- $\forall x P(x) \supset \forall x Q(x) = \forall x P(x) \supset \forall y Q(y)$
- $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \wedge P(x) = \forall y P(y) \wedge \exists z Q(z) \wedge P(x)$
- $\forall x P(x) \wedge Q(x) = \forall y P(y) \wedge Q(x)$

Tautológia és logikai törvény

Logikai törvény: A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

Tautológia: A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.
Ha valami tautológia, akkor biztos, hogy logikai törvény.

$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall x P(x)$ és $\forall x R(x)$ legyenek A és B

$\forall x P(x)$	$\forall x R(x)$	$\forall x P(x) \wedge \forall x R(x) \supset \forall x P(x)$
A	B	$(A \wedge B \supset A)$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A tábla alapján leolvasható, hogy tautológia.

Tautológia és logikai törvény

Logikai törvény: A formula minden interpretáció és minden változókiértékelés esetén igaz.

Tautológia: A prímkomponensekhez rendelhető összes igazságérték esetén a formula helyettesítési értéke igaz.

$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$ - **biztos, hogy logikai törvény**

Prímkomponensek: $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ és $\forall x P(x)$ legyenek A és B

$\forall x(P(x) \wedge R(x))$	$\forall x P(x)$	$\forall x(P(x) \wedge R(x)) \supset \forall x P(x)$
A	B	$(A \supset B)$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

A tábla alapján leolvasható, hogy nem tautológia.

Tautológia - Logikai törvény

Nézzük meg, hogy a következő formulák tautológiák-e!

- $P(x,y) \vee \neg Q(x) \supset \exists x Q(x) \vee (\exists x Q(x) \supset P(x,y) \vee \neg Q(x))$
- $P(x,y) \supset \neg Q(x) \wedge Q(x) \supset P(x,y)$
- $(\exists y P(a,y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists z P(a,z)$
- $(\exists y P(a,y) \supset \neg \forall x Q(x)) \vee \exists y P(a,y)$

Egy plusz diasor canvasben elérhető az anyaghoz!