Diszkrét matematika I. feladatok
Relációk II

Negyedik alkalom (2024.03.04-03.08.)

1. Legyen $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$. Döntse el, mely reláció reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív.

   a) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$
   Megoldás: *Reflexív*, mert $(1,1)$ is, $(2,2)$ is és $(3,3)$ is benne van. *Szimmetrikus*, mert minden (x,y) párra az (y,x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1,2)$ és $(2,1)$ is benne van. *Tranzitív*, mert minden elképzelhető pár benne van, így az a feltétel, hogy (x,y) és (y,z) tartalmazása esetén (x,z) is benne legyen "automatikusan" teljesül.

   b) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3)\}$
   Megoldás: *Reflexív*, mert $(1,1)$ is, $(2,2)$ is és $(3,3)$ is benne van. *Szimmetrikus*, mert minden (x,y) párra az (y,x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1,2)$ és $(2,1)$ is benne van. *NEM tranzitív*, mert $(2,1)$ és $(1,3)$ benne van, de $(2,3)$ nincs.

   c) $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$
   Megoldás: *NEM reflexív*, mert nincs benne $(1,1)$. *Szimmetrikus*, mert minden (x,y) párra az (y,x) pár is benne van. *NEM antiszimmetrikus*, mert $(1,2)$ és $(2,1)$ is benne van. *NEM tranzitív*, mert $(2,1)$ és $(1,3)$ benne van, de $(2,3)$ nincs.

2. Döntse el, mely reláció reflexív, irreflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus illetve tranzitív, továbbá határozza meg a relációk értelmezési tartományát és értékkészletét.

   a) $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \cdot b \text{ páratlan}\}$
   Megoldás: Minden páratlan pozitív egész minden másik páratlan pozitív egésszel (és saját magával) áll relációban. Páros számok pedig senkivel sem. Mivel $(2,2)$ nincs benne, így NEM reflexív. Mivel $(1,1)$ benne van, így NEM is irreflexív. Mivel $a \cdot b = b \cdot a$, így (a,b) és (b,a) vagy egyszerre van benne vagy egyszerre nincs benne, azaz szimmetrikus. Mivel $(1,3)$ és $(3,1)$ is benne van, így NEM antiszimmetrikus. Ha (a,b) benne van, akor a is és b is páratlan; ha (b,c) benne van, akkor c is páratlan, és így (a,c) is benne van: tehát tranzitív. Értelmezési tartománya és értékkészlete is: a pozitív páratlan egész számok halmaza.

   b) $S = \{(M,N) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \exists P \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \det P \neq 0, M = P^{-1}NP\}$
   Megoldás: $P = I$ egységmátrix választással minden N mátrix saját magával relációban áll, azaz *reflexív*. Ha $M = P^{-1}NP$, akkor $P' = P^{-1}$ választással $M = P'NP'^{-1}$ (hiszen $P'^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$), és így $N = P'^{-1}NP'$, ezért *szimmetrikus*. Ha $M = P_1^{-1}NP_1$ és $N = P_2^{-1}TP_2$, akkor $M = P_1^{-1}P_2^{-1}TP_2P_1$, és így $P = P_2P_1$ választással ($P^{-1} = (P_2P_1)^{-1} = P_1^{-1}P_2^{-1}$ miatt) $M = P^{-1}TP$, ezért *tranzitív* is. Tehát ez egy ekvivalenciareláció, értelmezési tartománya és értékkészlete is a teljes alaphalmaz: $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

   c) $T_X = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ ahol X adott halmaz.
   Megoldás: Mivel $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, ezért NEM reflexív ($\emptyset \in P(X)$). Ha az X halmaz nem az üreshalmaz, akkor $X \cap X = X \neq \emptyset$, és így NEM is irreflexív ($X \in P(X)$). (De ha $X = \emptyset$, akkor irreflexív, hiszen akor $P(X) = \{\emptyset\}$.) Mivel $A \cap B = B \cap A$, ezért ha A relációban áll B-vel, akkor fordítva is relációban állnak, ezért szimmetrikus. Ha X legalább két elemet tartalmaz (pl. $X = \{1,2,\dots\}$), akkor $\{1\},\{2\},\{1,2\} \in P(X)$ halmazokra: $\{1\} \cap \{1,2\} \neq \emptyset$, $\{1,2\} \cap \{2\} \neq \emptyset$, viszont $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, ezért NEM tranzitív. (Ha viszont X halmaz legfeljebb egy elemű, akkor nincs ilyen ellenpélda, akkor tranzitív.) A szimmetria miatt az értelmezési tartomány és az értékkészlet megegyezik, és ez a hatványhalmazból kivéve az üres halmazt: $P(X) \setminus \{\emptyset\}$, mivel minden nemüres részhalmaz valakivel (legalább saját magával) relációban áll.

3. a) Lehet-e egy reláció egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus? Illetve reflexív és irreflexív? Állítását indokolja.
Megoldás: Az "egyenlőség" reláció (az A alaphalmazon, azaz $\{(a,a) : a \in A\}$) például szimmetrikus is és antiszimmetrikus is, azaz lehetséges.
Ha $R \subseteq A \times A$ reláció *reflexív*, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : (xRx)$. Ha $R \subseteq A \times A$ reláció *irreflexív*, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : \neg(xRx)$. Ha tehát $R \subseteq A \times A$ reláció *reflexív* is és *irreflexív* is, az azt jelenti, hogy $\forall x \in A : (xRx) \wedge \neg(xRx)$. De $(xRx) \wedge \neg(xRx)$ egy azonosan hamis állítás, így $\forall x \in A : (xRx) \wedge \neg(xRx)$ csak akkor lehetne igaz, ha $A = \emptyset$ az üres halmaz lenne az alaphalmaz (amit általában nem szoktunk megengedni, de ez "ízlés" — definíció — kérdése).

b) Bizonyítsuk be, hogy minden reláció, amely egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus, egyúttal tranzitív is.
Megoldás: Az, hogy az $R \subseteq A \times A$ reláció *szimmetrikus*, az azt jelenti, hogy $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow yRx)$. Az, hogy R reláció *antiszimmetrikus*, az azt jelenti, hogy $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$. Mivel $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow xRy) \Leftrightarrow (\neg xRy \vee xRy)$ mindig IGAZ, ezért ha R *szimmetrikus* is és *antiszimmetrikus* is, akkor $\forall x, y \in A : (xRy \Rightarrow xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$, azaz A minden eleme csak saját magával állhat relációban (de nem feltétlenül kell relációban állnia saját magával). Tehát az A alaphalmazon értelmezett, egyszerre szimmetrikus és antiszimmetrikus reláció az az A halmaz "egyenlőség" relációjának a megszorítása, tehát $(xRy) \Rightarrow x = y$ miatt, $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow x = y = z$, és ha xRy, akkor xRx, és így xRz is (mert $z = x$).

4. Konstruáljon az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmazon olyan relációt, amely

a) reflexív és nem irreflexív
Megoldás: ami reflexív, az biztosan nem irreflexív (ha az alaphalmaz nem üres), azaz elég csak a reflexivitásra ügyelni. Ahhoz csak az kell, hogy az alaphalmaz minden eleme saját magával relációban álljon. Azaz két jó megoldás a sok lehetséges közül: $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$, illetve $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (2,3)\}$.

b) antiszimmetrikus és nem szimmetrikus
Megoldás: Mivel antiszimmetrikus, ezért *két különböző* elem nem állhat mindkét irányban relációban egymással, erre ügyelni kell. Mivel nem szimemtrikus, így legalább egy elempárra sérülnie kell a szimmetria feltételének, azaz kell olyan (x, y) pár a relációba, amire (y, x) pár nincs benne. Ez könnyen megoldható, például úgy, hogy $R = \{(1, 2)\}$. De jó megoldás lehet az is, hogy $R = \{(1,3), (2,2), (4,4)\}$ vagy $R = \{(1,4), (1,3)\}$.

c) szimmetrikus és nem antiszimmetrikus
Megoldás: Mivel nem antiszimmetrikus, így sérülnie kell annak, hogy "*két különböző* elem nem állhat mindkét irányban relációban egymással", vagyis kell bele két különböző elemre mindkét irányú relációban állás. Mivel szimmetrikus, így nem lehet benne olyan, hogy két elem csak az egyik irányban áll relációban. Egy jó megoldás a sok lehetséges közül: $R = \{(1,3), (3,1), (4,4)\}$. De jó lenne az is, hogy $R = \{(1,2), (2,1)\}$, vagy az, hogy $R = \{(1,3), (3,1), (1,2), (2,1)\}$, és még sok más jó megoldás is van.

d) nem reflexív, nem tranzitív, nem szimmetrikus, nem antiszimmetrikus, nem trichotóm
Megoldás: Nem reflexív, ezt elérhetjük azzal, hogy valamelyik elem nem áll saját magával relációban (pl. az $(1,1) \notin R$). Nem tranzitív, ezt elérhetjük azzal, ha például $(1,2), (2,3) \in R$ de $(1,3) \notin R$. Nem szimmetrikus, ezt úgy érhetjük el, hogy ha $(1,2) \in R$ (ezt már beletettük), akkor $(2,1) \notin R$. Nem antiszimmetrikus, ehhez az kell, hogy legyen két különböző elem, ami mindkét irányban relációban áll egymással, azaz pl. $(3,2), (2,3) \in R$. Nem trichotóm, azaz nem minden különböző elem áll vagy az egyik vagy a másik irányban relációban, vagy valaki saját magával relációban áll (mindkettő elrontja a trichotómiát). Azaz például jó megoldás: $R = \{(1,2), (2,3), (3,2)\}$ (ebben sem a $(3,4)$ sem a $(4,3)$ nincs

benne). Vagy szintén jó lenne $R = \{(1,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$. És még egyéb megoldások is lehetségesek.

5. Legyenek $R, S \subseteq A \times A$ szimmetrikus relációk. Bizonyítsuk be, hogy $R \circ S$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $R \circ S = S \circ R$.
   Megoldás: Azt, hogy egy T reláció szimmetrikus, úgy is megfogalmazhatjuk, hogy azonos a saját inverzrelációjával: $T^{-1} = T$. Tehát a feladat szerint $R^{-1} = R$ és $S^{-1} = S$. A $T = R \circ S$ reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha $T^{-1} = T$, vagyis ha $(R \circ S)^{-1} = R \circ S$. Mivel $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ (ez általában *tetszőleges* $R, S \subseteq A \times B$ relációkra is igaz lenne), ezért, $R^{-1} = R$ és $S^{-1} = S$ kihasználásával $T^{-1} = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$. Tehát $T^{-1} = T$ akkor és csak akkor, ha $S \circ R = T^{-1} = T = R \circ S$.

6. Tekintsük a következő R és R' relációt.

   - $A = \{1,2,3,4,5\}$ és
     $R = \{(1,1),(1,5),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,1),(5,5)\} \subset A \times A$
   - $A' = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ és
     $R' = \{(1,1),(1,5),(1,6),(1,8),(2,2),(2,4),(3,3),(3,7),(4,2),(4,4),(5,1),(5,5),(5,6),$
     $(5,8),(6,1),(6,5),(6,6),(6,8),(7,3),(7,7),(8,1),(8,5),(8,6),(8,8)\} \subset A' \times A'$

   a) Mutassa meg, hogy az R reláció ekvivalenciareláció.
   Megoldás: *Reflexív*, mert $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5) \in R$.
   Szimmetrikus, mert különböző elemek relációban csak így vannak benne: $(1,5),(5,1),(3,4),(4,3) \in R$, vagyis ha egyik irányban relációban állnak, akkor fordított irányban is.
   Tranzitív, mert nem található olyan $x, y, z \in \{1,2,3,4,5\}$ (sem három különböző, sem úgy, hogy valamelyik kettő megyegyezne), hogy $(x,y),(y,z) \in R$ de $(x,z) \notin R$.

   b) Határozza meg az A halmaz osztályfelbontását (azaz az $\{[a] : a \in A\}$ halmazt).
   Megoldás: Az 1-gyel relációban álló elemek halmaza: $\{1,5\}$, a 2-vel relációban álló elemek halmaza: $\{2\}$, a 3-mal relációban álló elemek halmaza: $\{3,4\}$, a 5-tel relációban álló elemek halmaza: $\{1,5\}$, a 4-gyel relációban álló elemek halmaza: $\{3,4\}$, azaz: $\{\{1,5\},\{2\},\{3,4\}\}$ az osztályfelbontás.

7. Bizonyítsa be, hogy az alábbi relációk ekvivalenciarelációk. Adja meg az ekvivalenciaosztályokat.

   a) Adot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$.
   Megoldás: *Reflexív*, mert $|\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|$.
   Szimmetrikus, mert ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ akkor $|\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|$.
   Tranzitív, mert ha $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ és $|\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$, akkor $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}| = |\mathbf{w}|$.
   Két vektor ekvivalens, ha ugyanaz a hosszuk, azaz az egy ekvivalenciaosztályt alkotó vektorok végpontjai egy adott sugarú, origó körüli kört alkotnak. Tehát az ekvivalenciaoszályok az origó körüli körvonalak (beleértve magát az origót, mint nulla sugarú kört).

   b) Legyen $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ egy nem-nulla vektor és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$, ha $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{z}$.
   Megoldás: *Reflexív*, mert $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{u}^T\mathbf{z}$.
   Szimmetrikus, mert ha $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{z}$, akkor $\mathbf{v}^T\mathbf{z} = \mathbf{u}^T\mathbf{z}$.
   Tranzitív, mert ha $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{v}^T\mathbf{z} = \mathbf{w}^T\mathbf{z}$, akkor $\mathbf{u}^T\mathbf{z} = \mathbf{w}^T\mathbf{z}$.
   Az ekvivalenciaosztályok a $\mathbf{z}$ vektorra merőleges egyenesek. (Egy ilyen egyenesbe eső pontokba mutató vektorok ugyanazt a skaláris szorzatot adják $\mathbf{z}$-vel.)

   c) Legyen $m > 1$ egész és $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén $a \sim b$ ha $m \mid (a - b)$.
   Megoldás: *Reflexív*, mert $a - a = 0$, és 0 bármely egész m számmal osztható.
   Szimmetrikus, mert $b - a = -(a - b)$, azaz ha $a - b$ osztható m-mel ($a - b = k \cdot m$), akkor $b - a = (-k) \cdot m$ is osztható vele.
   Tranzitív, mert ha $a - b = k_1 \cdot m$, és $b - c = k_2 \cdot m$, akkor $a - c = (a - b) + (b - c) = (k_1 + k_2) \cdot m$.

Az m-mel maradékosan osztva ugyanazt az osztási maradékot adó számok alkotnak egy ekvivalenciaosztályt.