Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika I

Hetedik alkalom (2024.03.25-04.05.)

1. a) Egy irodalmi esten 5 vers hangzik el. Hányféleképpen követhetik a versek egymást?
   b) Hányféle sorrendben ültethetünk le 6 embert egymás mellé egy padra?
   c) 12 hallgató találkozót beszélt meg egymással. Hányféle sorrendben érhettek oda, ha nem volt köztük kettő olyan, akik egyszerre érkeztek?

   Megoldás: Független döntések: Ha egymást követő döntéseket kell hoznunk, és egy adott döntésnél a konkrét választás nem befolyásolja a soron következő döntésben a lehetőségeink számát, akkor független döntésekről beszélünk. Ekkor az egymás utáni döntésekben választható lehetőségek száma összeszorzódik. Tehát a döntések/választások abban az értelemben függetlenek egymástól, hogy korábban bárhogyan is választottunk, a következő döntésnél a lehetőségeink száma változatlan.
   a) Az elsőként elhangzó vers ötféle lehet, a másodikként elhangzó vers négyféle stb. Ezek független választások (bármi is volt konkrétan az első vers, másodikra mindenképp 4 lehetőség marad), tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.
   b) (Az embereket mindig megkülönböztetjük egymástól, kivéve, ha a feladat külön jelzi ennek ellenkezőjét.) A pad bal szélére 6 ember közül ültethetünk valakit, ez 6 lehetőség, közvetlenül mellé már csak a maradék 5 közül választhatunk, ami 5 lehetőség stb. Ezek független választások, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$.
   c) Elsőként 12 hallgató közül érkezik valaki, ez 12 lehetőség, másodikként már csak a maradék 11 hallgató közül valaki, ez 11 lehetőség stb. Ezek független választások, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $12 \cdot 11 \cdot 10 \ldots \cdot 1 = 12!$.
   Összefoglalva: n különböző dolog lehetséges sorba rendezéseinek száma: $n!$.

2. Hányféleképpen ültethetünk le 6 embert egy kör alakú asztalhoz, ha két ültetést azonosnak tekintünk, ha egymásba forgatással átvihetők?
   Megoldás: Ezt ciklikus permutációnak hívják (mert az elforgatottakat nem különböztetjük meg). Az összes ülésrend 6! volna, ám így minden ciklikus ülésrendet 6-szor számoltunk (ennyi elforgatottja van minden ülésrendnek), így a tehénszabály miatt $6!/6 = 5!$ ülésrend van.
   Másik megoldás: Ültessük le Aladárt valamelyik helyre. Mivel az elforgatottakat azonosnak tekintjük, mindegy, hogy hova, de ettől kezdve az ő helye lesz a viszonyítási pont. A többiek hozzá képest 5! féle sorrendben ülhetnek le.

3. Hány olyan 10 jegyű (nem 0-val kezdődő) szám van, melyben minden számjegy csak egyszer szerepel?
   Megoldás: Az első helyre kilencféle számjegyet írhatunk, mert 0-t nem; a második helyre már írhatunk 0-t, de azt a számjegyet nem, amit az első helyre írtunk, tehát ismét kilencfélét; a harmadik helyre az első két helyre írt számjegyet nem írhatjuk, tehát már csak nyolcféle jegyből választhatunk stb., mindig eggyel csökken a lehetőségeink száma. A választások függetlenek, tehát összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \ldots \cdot 1 = 9 \cdot 9!$ ilyen szám van.
   Másik megoldás: Mivel 10 jegyű a szám, minden számjegy pontosan egyszer szerepel. Az első helyre kilencféle számjegyet írhatunk, mert 0-t nem; a maradék kilenc számjegy sorba rendezéseinek száma 9!, összesen tehát $9 \cdot 9!$ ilyen szám van.

4. Egy n változós m értékű *Boole függvényen* egy $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ függvényt értünk. Hány ilyen függvény van?
   Megoldás: Általában az $f : A \longrightarrow B$ függvények száma $|B|^{|A|}$, hiszen A minden eleméhez B elemei közül pontosan egyet rendelünk, és ez bármelyik lehet (ismétléses variáció), tehát $|A|$ db helyen választunk, minden alkalommal $|B|$ db lehetőség közül. Most az A halmaz elemei az n hosszúságú $(0,1)$ vektorok, tehát $|A| = 2^n$, B halmaz elemei az m hosszúságú $(0,1)$ vektorok, tehát $|B| = 2^m$, így az $A \longrightarrow B$ függvények száma $(2^m)^{2^n} = 2^{m \cdot 2^n}$.

5. Hányféle sorrendben léphet be egy szobába 3 férfi és 7 nő? És ha az azonos nemű emberek között nem teszünk különbséget?
Megoldás: **a)** 10 ember lehetséges sorrendjeinek száma 10!.
b) Először megszámoljuk a sorrendeket úgy, mintha különbözőnek tekintenénk az embereket: 10!. Ha a férfiakat mégsem különböztetjük meg egymástól, akkor az imént minden sorrendet annyiszor számoltunk, ahányféleképpen a férfiak egymás között sorba állhatnak: 3!-féleképpen. Így a tehénszabály értelmében ezzel el kell osztanunk az összes sorrendek számát. Ugyanígy a nők egymás közti lehetséges sorrendjeinek számával, azaz 7!-sal is osztanunk kell, tehát a megoldás $\frac{10!}{3!\cdot 7!}$, mivel a nők sorba rendezése és a férfiak sorba rendezése egymástól független.
Másik megoldás: Eldöntjük, hogy a 10 hely közül melyik lesz az a 3, amikor férfi lép be, vagyis kiválasztunk a 10 helyből 3-at, ez $\binom{10}{3}$ lehetőség. Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint az előbb, hiszen definíció szerint $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!}$. Ugyanezt kaptuk volna, ha a nők helyét választjuk ki: $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\cdot 3!}$. Ez is mutatja a binomiális együtthatókról tanult azonosságot: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

6. Hányféleképpen helyezhetünk el 12 embert 3 szobába, ha az első 3, a második 4, a harmadik 5 ágyas.
Megoldás: **a)** Ha egy szobán belül az ágyakat különbözőnek tekintjük, akkor valójában csak azt kell eldöntenünk, hogy ki melyik ágyra kerül. Ez pontosan ugyanaz a feladat, mintha sorba kellene állítanunk az embereket (ki kerül az 1. ágyra, ki kerül a 2. ágyra stb.), tehát a válasz 12!.
b) Ha egy szobán belül az ágyakat egyformának tekintjük, akkor ki kell választanunk, hogy a 12 ember közül melyik 3 kerül az első szobába, ez $\binom{12}{3}$ lehetőség; a maradék 9 ember közül melyik 4 kerül a második szobába, ez $\binom{9}{4}$ lehetőség; a megmaradt 5 ember helye már egyértelmű. Ezek független döntések, tehát a lehetőségek száma összeszorzódik: $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4}$. A binomiális együtthatókat a definíció szerint kifejtve $\binom{12}{3}\cdot\binom{9}{4} = \frac{12!}{3!\cdot 9!}\cdot\frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$.
Másik megoldás: Először különbözőnek tekintjük az ágyakat, vagyis beszámozzuk őket 1-12-ig úgy, hogy az $1-3$. sorszámú ágyak az első szobában, a $4-7$. sorszámú ágyak a második szobában, a $8-12$. sorszámú ágyak a harmadik szobában legyenek. Ekkor 12! féleképpen helyezhetjük el az embereket. Valójában azonban az $1-3$. sorszámú ágyakra (az első szobába) elhelyezett emberek egymás közti sorrendje nem számít, ezért azzal a tehénszabály értelmében le kell osztanunk. Hasonlóan a $4-7$. sorszámú ágyakra, vagyis a második szobába helyezettekével, illetve a harmadik szobába helyezettekével is. Összesen tehát $\frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!}$.

7. Egy urnában hat golyó van sorra 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokkal számozva. Egymás után négy golyót kihúzva visszatevés nélkül

a) hányféle sorrend lehetséges; b) hányféle sorrend lehetséges, amikor az első húzás 1-es;
c) hányféle sorrend lehetséges, amikor az utolsó húzás páros?
Megoldás: **a)** A feladat szövege értelmében (,,egymás után") számít a húzások sorrendje. Az első húzásnál hatféle golyó közül húzunk, a másodiknál már csak ötféle közül stb., ezek független események, tehát $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$.
b) Elsőre mindenképpen 1-est húzunk, ez 1 lehetőség. Másodikra a megmaradt 5 golyó közül húzunk, harmadikra már csak 4 közül..., összesen $5\cdot 4\cdot 3$ lehetőség.
c) Most nem az első golyó kihúzásától indulva számolunk, hanem az utolsóétól. (Ha zavaró ez a megfogalmazás: húzzuk ki a golyókat, és írjuk fel sorban, hogy miket húztunk. Így négy hosszúságú karaktersorozatokat kapunk, most már ezeket számoljuk meg. A karaktereket tetszőleges sorrendben vizsgálhatjuk.) Három darab páros szám van, tehát az utolsó golyó háromféle lehet. Miután az utolsó golyót fixáltuk, most már számolhatjuk elölről: az első golyót most már csak ötféle golyó közül húzzuk, a másodikat négyféléből, a harmadikat háromféléből. Ez összesen $3\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ lehetőség.

8. Hány hatjegyű számra igaz, hogy

a) a szomszédos számjegyei különböznek; b) minden jegye különbözõ;
c) pontosan egy jegye 0, d) van 0 a jegyei között?
Megoldás: **a)** Az első számjegy nem lehet 0, csak az $1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike, tehát 9 féle. A második számjegy már lehet 0 is, de nem lehet az a jegy, amit az első helyre írtunk, vagyis szintén 9 féle lehet. A többi jegyre is igaz, hogy mindig csak a közvetlenül előtte leírt számjegy nem lehet, vagyis mindig 9 lehetőség van. Ez összesen 9^6.
b) Az első számjegy nem lehet 0, csak az $1, \ldots, 9$ számjegyek valamelyike, tehát 9 féle. A második számjegy már lehet 0 is, de nem lehet az a jegy, amit az első helyre írtunk, vagyis szintén 9 féle lehet. A harmadik számjegy nem lehet sem az első, sem a második helyre leírt számjegy, vagyis már csak 8 féle lehet. Minden jegynél eggyel csökken a lehetőségek száma, összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.
Másik megoldás: A 3. feladat megoldásából kiindulva: már megmutattuk, hogy ilyen feltétellel 10 jegyű szám $9 \cdot 9!$ van. Ezekből az utolsó 4 jegy levágásával a feltételnek megfelelő hatjegyű számot kapunk. Tehát a $9 \cdot 9!$ minden megfelelő hatjegyű számot annyiszor számol meg, ahányféleképpen az utolsó 4 jegyet sorba tudjuk rendezni, vagyis a megoldás $\frac{9 \cdot 9!}{4!}$.
c) Kezdjük a 0 helyének kiválasztásával! Erre 5 lehetőségünk van. A maradék 5 hely mindegyikére 9 féle számjegy kerülhet, összesen tehát $5 \cdot 9^5$ ilyen szám van.
d) Az összes lehetőség számából vonjuk ki a kedvezőtlen lehetőségek számát. Összesen $9 \cdot 10^5$ hatjegyű szám van. Kedvezőtlen, ha nincs benne 0, ekkor a hat hely mindegyikére 9 féle számjegy kerülhet, tehát 9^6 ilyen szám van. A kedvező lehetőségeink száma (amikor tehát szerepel 0 számjegyek között): $9 \cdot 10^5 - 9^6$.

9. 10 cukorkát osztunk szét 3 gyermek között. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni, ha a cukorkák mind különbözőek, ill. mind egyformák?
Megoldás: **a)** Ha különbözőek a cukorkák: egyesével osztjuk ki a cukorkákat. Mindegyik cukorkánál 3 választási lehetőségünk van, hogy melyik gyerek kapja; 10 alkalommal döntünk, ezek független döntések; összesen 3^{10} lehetőség.
b) Ha egyformák a cukorkák: azt kell eldöntenünk, hogy melyik gyerek hány darab cukorkát kap. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): a 10 db cukorkát feleltessük meg 10 db 1-esnek. Az 1-esek közé beírunk $3 - 1 = 2$ db 0-át (szeparátor elemet): ahány 1-es van az első 0 előtt, annyi cukorkát kap az 1. gyerek; ahány 1-es van az első és a második 0 között, annyi cukorkát kap a 2. gyerek; ahány 1-es van a második 0 után, annyi cukorkát kap a 3. gyerek. Az így létrehozható karaktersorozatok és a kiosztások között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, azaz bijekció van (mindegyik kiosztás megfelel egy karaktersorozatnak és viszont), tehát elegendő a karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt lehet ismétléses sorba rakással: 10 db 1-es és 2 db 0 lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{12!}{10! \cdot 2!}$, vagy kiválasztással: el kell döntenünk, hogy a 12 hely közül melyik két helyre írjunk 0-t: $\binom{12}{2}$.

10. Egy bárban 10-féle röviditalt kínálnak. Hányféleképpen rendelhetünk 12-t azokból?
Megoldás: Az italok sorrendje nem számít, csak az, hogy melyik fajtából hány darabot rendeltünk. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): a 12 db pohár italt feleltessük meg 12 db 1-esnek. Az 1-esek közé beírunk $10 - 1 = 9$ db 0-át (szeparátor elemet): ahány 1-es van az első 0 előtt, annyi db poharat rendelünk az 1. fajta italból; ahány 1-es van az első és a második 0 között, annyi db poharat rendelünk a 2. fajta italból;...; ahány 1-es van a kilencedik 0 után, annyi db poharat rendelünk az 10. fajta italból. Az így létrehozható karaktersorozatok és a rendelések között bijekció van (mindegyik kiosztás megfelel egy karaktersorozatnak és viszont), tehát elegendő a karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt lehet ismétléses sorba rakással: 12 db 1-es és 9 db 0 lehetséges sorrendjeinek száma $\frac{21!}{12! \cdot 9!}$, vagy kiválasztással: el kell döntenünk, hogy a 21 hely közül melyik 9 helyre írjunk 0-t: $\binom{21}{9}$.