1. Oszcillációs összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegekkel.

2. Az összegfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

3. A szorzatfüggvény integrálhatóságára vonatkozó tétel.

4. Függvények hányadosának integrálhatóságára vonatkozó tétel.

5. A monoton függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

6. Az egyenletes folytonosságra vonatkozó Heine-tétel.

7. A folytonos függvények integrálhatóságára vonatkozó tétel.

8. A Newton–Leibniz-tétel.

9. Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás.

10. Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás.

11. A parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra.

12. A helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra.

1. Az integrálás jellemzése az oszcillációs összegekkel

Tétel. $f \in R[a,b] \iff$

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Longrightarrow}$ T.f.h. $f \in R[a,b]$: $I_*(f) = I^*(f) =: I(f)$.

$\sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I_*(f) = I(f) \implies$ (a sup def.)

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]: \ I(f) - \tfrac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le I(f);$$

$\inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} = I^*(f) = I(f) \implies$ (az inf def.)

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]: \ I(f) \le S(f,\tau_2) < I(f) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\tau := \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor τ finomítása τ_1, τ_2-nek, ezért

$$I(f) - \tfrac{\varepsilon}{2} < s(f,\tau_1) \le s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le$$
$$\le S(f,\tau) \le S(f,\tau_2) \le I(f) + \tfrac{\varepsilon}{2} \implies$$
$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) < \varepsilon.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\tau \in \mathcal{F}[a,b] : \Omega(f,\tau) < \varepsilon$.

Mivel $s(f,\tau) \le I_*(f) \le I^*(f) \le S(f,\tau)$, ezért

$$0 \le I^*(f) - I_*(f) \le S(f,\tau) - s(f,\tau) = \Omega(f,\tau) < \varepsilon \quad \implies$$

$$0 \le I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0\text{-ra} \implies$$

$$I^*(f) - I_*(f) = 0 \quad \implies \quad I^*(f) = I_*(f) \quad \implies \quad f \in R[a,b]. \ \blacksquare$$

2. Az összegfüggvény integrálhatósága

Tétel. *T.f.h. $f, g \in R[a,b]$, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$f + g \in R[a,b] \quad \text{és} \quad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$$

2^o Legyen $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ és

$$f_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f, \qquad F_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f,$$
$$g_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} g, \qquad G_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} g.$$

Mivel

$$f_i + g_i \le f(x) + g(x) \le F_i + G_i, \ \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i],$$

ezért

$$f_i + g_i \le \inf_{[x_{i-1},x_i]}(f+g) \le \sup_{[x_{i-1},x_i]}(f+g) \le F_i + G_i.$$

Ebből $(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után az adódik, hogy

$$s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le S(f+g,\tau) \le S(f,\tau) + S(g,\tau).$$

T.f.h. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, és legyen $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor

$$s(f,\tau_1) + s(g,\tau_2) \le s(f,\tau) + s(g,\tau) \le s(f+g,\tau) \le I_*(f+g).$$

Innen – először a $\tau_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, majd a $\tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokra a bal oldal felső határát véve – következik, hogy

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$I^*(f+g) \le I^*(f) + I^*(g).$$ Így

$$I_*(f) + I_*(g) \le I_*(f+g) \le I^*(f+g) \le I^*(f) + I^*(g).$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$ és $I_*(g) = I^*(g) = \int_a^b g$, ezért $I_*(f+g) = I^*(f+g)$, tehát $f + g \in R[a,b]$ és $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

3. A szorzatfüggvény integrálhatósága

Tétel. *T.f.h.* $f, g \in R[a,b]$, *és legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

$$f \cdot g \in R[a,b]$$

3^o Ötlet: az **oszcillációs összegek** alkalmazása.

(i) T.f.h. $f, g \geq 0$, $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$.

A **2^o**-ben bevezetett jelölésekkel:

$$f_i \cdot g_i \leq f(x) \cdot g(x) \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \Longrightarrow$$

$$f_i \cdot g_i \leq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \leq F_i \cdot G_i, \quad \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i] \quad \Longrightarrow$$

$$\Omega(f \cdot g, \tau) = S(f \cdot g, \tau) - s(f \cdot g, \tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot g \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \Big(F_i \cdot G_i - f_i \cdot g_i \Big) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Mivel f és g korlátos, ezért $\exists\, M: \; |f|, |g| \leq M \quad [a,b]$-n. Így

$$\Omega(f \cdot g, \tau) \leq \sum_{i=1}^{n} \Big[F_i \cdot (G_i - g_i) + (F_i - f_i) \cdot g_i \Big] \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq M \cdot \sum_{i=1}^{n} (G_i - g_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) + M \cdot \sum_{i=1}^{n} (F_i - f_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= M \cdot \big(\Omega(g, \tau) + \Omega(f, \tau) \big).$$

Mivel $f, g \in R[a,b]$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau: \; \Omega(f, \tau), \Omega(g, \tau) < \varepsilon$.

Tehát $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás:

$$\Omega(f \cdot g, \tau) \leq 2 \cdot M \cdot \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \in R[a,b].$$

(ii) T.f.h. f, g tetszőleges, és legyen

$$m_f := \inf_{[a,b]} f, \quad m_g := \inf_{[a,b]} g.$$

Ekkor $f - m_f \geq 0$ és $g - m_g \geq 0$ $[a,b]$-n integrálható függvények. Tehát (i) szerint

$$(f - m_f) \cdot (g - m_g) = f \cdot g \underbrace{- m_f \cdot g - f \cdot m_g + m_f \cdot m_g}_{\in R[a,b]} \in R[a,b],$$

következésképpen $f \cdot g \in R[a,b]$.

4. Függvények hányadosának integrálhatósága

Tétel. *T.f.h. $f, g \in R[a,b]$, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor ha $|g(x)| \geq m > 0$ $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)$, akkor*

$$\frac{f}{g} \in R[a,b] \qquad (\textit{csak ennyi!}).$$

4^o A **3^o** állítás miatt elég azt igazolni, hogy a g-re tett feltétel esetén $\frac{1}{g} \in R[a,b]$.

Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ekkor $\forall\; x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ pontban

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x) \cdot g(y)|} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

Ebből következik, hogy

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{g} \leq \frac{G_i - g_i}{m^2}.$$

$(x_i - x_{i-1})$-gyel való szorzás és összegzés után azt kapjuk, hogy

$$\Omega\left(\tfrac{1}{g}, \tau\right) \le \tfrac{1}{m^2} \cdot \Omega(g, \tau).$$

Mivel $g \in R[a,b]$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \tau :\ \Omega(g,\tau) < \varepsilon$. Így

$$\Omega\left(\tfrac{1}{g}, \tau\right) < \tfrac{\varepsilon}{m^2} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{g} \in R[a,b]. \quad \blacksquare$$

5. Monoton függvények integrálhatósága

Tétel. *Ha az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény* ***monoton*** *az $[a,b]$ intervallumon, akkor* ***integrálható*** *$[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Az integrálhatóság oszcillációs összegekkel való jellemzésére vonatkozó állítást alkalmazzuk. Azt igazoljuk:

$$(*) \qquad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \tau \in \mathcal{F}[a,b] :\ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Legyen pl. $f \nearrow$. Ha $f(a) = f(b)$, akkor f állandó, ezért ebben az esetben az állítás igaz.

Ha $f(a) < f(b)$, akkor $\forall\, \tau = \{a = x_0 < \ldots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_{i-1})$ és $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i)$, ezért

$$\Omega(f,\tau) = S(f,\tau) - s(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $n \in \mathbb{N}^+$: $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, valamint τ az $[a,b]$ egyenletes felosztása. Ekkor $x_i - x_{i-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ minden $i = 1, \ldots, n$ indexre, és

$$\Omega(f,\tau) < \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \cdot \tfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} <$$

$$< \tfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \Big(\big(\cancel{f(x_1)} - \underbrace{f(x_0)}_{f(a)}\big) + \big(\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}\big) + \dots + \big(\underbrace{f(x_n)}_{f(b)} - \cancel{f(x_{n-1})}\big) \Big) = \varepsilon$$

Ezzel $(*)$-ot igazoltuk $\implies f \in R[a,b]$. ■

6. Az egyenletes folytonosságra vonatkozó Heine-tétel

Heine-tétel. *Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f \in C[a,b]$, akkor f egyenletesen folytonos $[a,b]$ intervallumon.*

Bizonyítás. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. T.f.h. f nem egyenletesen folytonos $[a,b]$-n. Ez azt jelenti, hogy

$$\exists\ \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\ \delta > 0\text{-hoz}$$

$$\exists\ x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta :\ \big|f(x) - f(y)\big| \geq \varepsilon.$$

A $\delta := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással kapjuk, hogy minden n-re létezik $x_n, y_n \in [a,b]$:

$$|x_n - y_n| < \tfrac{1}{n} \quad \text{és} \quad \underbrace{\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geq \varepsilon}_{(*)}.$$

Az (x_n) sorozat korlátos, ezért van egy (x_{n_k}) konvergens részsorozata, amelynek az α határértéke ugyancsak $[a,b]$-ben van. Így

$$y_{n_k} = \big(y_{n_k} - x_{n_k}\big) + x_{n_k} \to 0 + \alpha = \alpha, \text{ ha } n_k \to +\infty$$

Mivel $f \in C[a,b]$, ezért $f \in C\{\alpha\}$ is teljesül. Az átviteli elv szerint tehát $f\big(x_{n_k}\big) \to f(\alpha)$ és $f\big(y_{n_k}\big) \to f(\alpha)$, ezért

$$\lim_{n_k \to +\infty} \big(f\big(x_{n_k}\big) - f\big(y_{n_k}\big)\big) = 0.$$

Ez azonban ellentmond $(*)$-nak. ■

7. A folytonos függvények integrálhatósága

Tétel. *Ha az f függvény **folytonos** az $[a,b]$ intervallumon, akkor **integrálható** $[a,b]$-n (jelekkel $C[a,b] \subset R[a,b]$).*

Bizonyítás. Elég megmutatni azt, hogy $\forall f \in C[a,b]$ függvényre a következő teljesül:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b]: \quad \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$

Mivel $f \in C[a,b] \Longrightarrow$ (l. Heine tételét) f egyenletesen folytonos az $[a,b]$ intervallumon, ezért $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall x, y \in [a,b], \ |x-y| < \delta : \ |f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ és $\tau = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$: $\|\tau\| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\} < \delta$.
Ekkor $\Omega(f,\tau)$-ban $i = 1, \ldots, n$ esetén legyen

$$m_i := \min_{[x_{i-1},x_i]} f = f(u_i), \qquad M_i := \max_{[x_{i-1},x_i]} f = f(v_i)$$

(Weierstrass tétele szerint $\exists$ u_i, v_i). Ekkor

$$\Omega(f,\tau) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f \in R[a,b]$. ■

8. Newton-Leibniz tétel

Newton–Leibniz-tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és a f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F a f függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye.

Bizonyítás. Legyen $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. A Lagrange-középértéktétel szerint $\forall\ i = 1, \ldots, n$ indexre $\exists\ \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Ha ezeket az egyenlőségeket összeadjuk $\forall\ i = 1, \ldots, n$ indexre, akkor a bal oldalon minden tag kiesik, kivéve a $F(x_n) = F(b)$ és $F(x_0) = F(a)$ tagokat. Így azt kapjuk, hogy

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sigma(f, \tau, \xi),$$

ahol $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Mivel $\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \le f(\xi_i) \le \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, ezért

$$s(f,\tau) \le \sigma(f,\tau,\xi) = F(b) - F(a) \le S(f,\tau,\xi).$$

Következésképpen

$$I_*(f) = \sup_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} s(f,\tau) \le F(b) - F(a) \le \inf_{\tau \in \mathcal{F}[a,b]} S(f,\tau,\xi) = I^*(f)$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért $I_*(f) = I^*(f) = \int_a^b f$. Így

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

9. Az integrálfüggvény folytonosságára vonatkozó állítás

Tétel. *T.f.h.* $f \in R[a,b]$ *és* $x_0 \in [a,b]$. *Ekkor a*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \big(x \in [a,b]\big)$$

integrálfüggvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

1^o *A* F *függvény* ***folytonos*** *az* $[a,b]$ *intervallumon.*

Bizonyítás.

1^o Tetszőleges $x, y \in [a,b]$, $x < y$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| = \left|\int_{x_0}^{y} f - \int_{x_0}^{x} f\right| = \left|\int_{x_0}^{y} f + \int_{x}^{x_0} f\right| = \left|\int_{x}^{y} f\right| \leq$$
$$\leq \int_{x}^{y} |f| \leq M \cdot \int_{x}^{y} 1 = M \cdot (y - x),$$

ahol M a f függvény egy korlátja: $|f(x)| \leq M \ \big(x \in [a,b]\big)$. (Mivel $f \in R[a,b]$, ezért f korlátos $[a,b]$-n.)

Ha tehát $\varepsilon > 0$, és $\delta > 0 : \ M\,\delta < \varepsilon$, akkor $\forall\, x, y \in [a,b]$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$\big|F(y) - F(x)\big| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy F egyenletesen folytonos $[a,b]$-n, így folytonos is az $[a,b]$ intervallumon.

10. Az integrálfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó állítás

Tétel. *T.f.h.* $f \in R[a,b]$ *és* $x_0 \in [a,b]$*. Ekkor a*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \big(x \in [a,b]\big)$$

integrálfüggvény az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

2^o *Ha egy* $d \in [a,b]$ *pontban* f ***folytonos****, akkor ott a* F *integrálfüggvény* ***deriválható****, és* $F'(d) = f(d)$*.*

3^o *Ha* $f \in C[a,b]$*, akkor* $F \in D[a,b]$ *és* $F'(x) = f(x)$ *minden* $x \in [a,b]$ *pontban. Következésképpen,* ***ha*** f ***folytonos*** $[a,b]$***-n, akkor itt van primitív függvénye****.*

2^o Legyen $d \in (a,b)$, és t.f.h. $f \in C\{d\}$. Ez azt jelenti, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$:

$$\forall\, t \in [a,b],\ |t-d| < \delta \text{ esetén } |f(t) - f(d)| < \varepsilon.$$

T.f.h. h-ra $d + h \in (a,b)$ teljesül. Ekkor

$$F(d+h) - F(d) = \int_{x_0}^{d+h} f - \int_{x_0}^{d} f = \int_{d}^{d+h} f.$$

Mivel $f(d) = \frac{1}{h} \cdot \int_{d}^{d+h} f(d)\,dt$, ezért

$$\frac{F(d+h) - F(d)}{h} - f(d) = \frac{1}{h} \int_{d}^{d+h} \big(f(t) - f(d)\big)\,dt.$$

Ha $0 < h < \delta$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \left|f(t)-f(d)\right| dt \leq$$

$$< \frac{1}{h} \cdot \int\limits_{d}^{d+h} \varepsilon\, dt = \frac{1}{h} \cdot \varepsilon \cdot h.$$

Ha $-\delta < h < 0$, akkor

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \int\limits_{d+h}^{d} \left|f(t)-f(d)\right| dt < \varepsilon.$$

Az előzőek alapján tehát $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, |h| < \delta$-ra

$$\left|\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{F(d+h)-F(d)}{h} - f(d)\right) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(d+h)-F(d)}{h} = f(d),$$

vagyis $F \in D\{d\}$ és $F'(d) = f(d)$.

A végpontokban az előzőekhez hasonlóan kapjuk az egyoldali deriváltakra vonatkozó állításokat.

3^o A **2^o** állítás közvetlen következménye. ■

11. A parciális integrálásra vonatkozó tétel határozott integrálra

Tétel. *T.f.h.* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in D[a,b]$ *és* $f', g' \in R[a,b]$. *Ekkor*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Bizonyítás. Egyrészt $f \in D[a,b] \Longrightarrow f \in C[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,b]$. Mivel $g' \in R[a,b]$, ezért $fg' \in R[a,b]$. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy $f'g \in R[a,b]$. Így $f'g + fg' \in R[a,b]$.

Másrészt fg primitív függvénye az $f'g + fg'$ függvénynek (ui. $(fg)' = f'g + fg'$). A Newton–Leibniz-tétel szerint tehát

$$\int_a^b \left(fg' + f'g\right) = \left[fg\right]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

A határozott integrál additivitását felhasználva rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b fg' = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f'g. \blacksquare$$

12. A helyettesítéses integrálás szabálya határozott integrálra

Tétel. *T.f.h.* $f \in C[a,b]$ *és a* $g : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ *függvény folytonosan deriválható. Ekkor*

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = \int_\alpha^\beta f \circ g \cdot g'.$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$F(x) := \int_{g(\alpha)}^{x} f \quad \big(x \in [a,b]\big), \qquad G(u) := \int_{\alpha}^{u} f \circ g \cdot g' \quad \big(x \in [\alpha, \beta]\big)$$

integrálfüggvényeket. Megmutatjuk, hogy

$$(*) \qquad\qquad \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f = F\big(g(\beta)\big) = G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f \circ g \cdot g'.$$

Egyrészt $f \in C[a,b] \Longrightarrow F' = f$, másrészt $f \circ g \cdot g' \in C[\alpha, \beta] \Longrightarrow$ $G' = f \circ g \cdot g'$.

Mivel $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g'$, ezért $(F \circ g - G)' = 0 \Longrightarrow$ $\exists\, c \in \mathbb{R}: \;\; F \circ g - G = c$. Ugyanakkor $F\big(g(\alpha)\big) = 0 = G(\alpha) \Longrightarrow$ $c = 0$, következésképpen $F \circ g = G \Longrightarrow F\big(g(\beta)\big) = G(\beta)$.

A $(*)$ egyenlőség tehát valóban teljesül. $\blacksquare$