

Diszkrét matematika I. feladatok

Relációk I

Harmadik alkalom (2024.02.26-03.01.)

1. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ és $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Tekintsük a következő $R \subset A \times B$ binér (kétváltozós) relációt: $R = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 9), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$.

a) Határozza meg a R reláció értelmezési tartományát és értékkészletét.

b) Legyen $H_1 = \{1, 2, 3\}$ és $H_2 = \{4\}$. Határozza meg a R reláció H_1 illetve H_2 halmazra való leszűkítését.

c) A következő relációk közül melyek lehetnek a R reláció kiterjesztései?

- $R_1 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 2), (2, 4), (3, 6), (3, 9), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (4, 9)\}$
- $R_2 = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (3, 6), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9)\}$
- $R_3 = A \times B$
- $R_4 = B \times A$

d) Határozza meg a R reláció inverzét, $R(\{1, 2\})$ képét és $R^{-1}(\{5, 6\})$ inverz képet.

2. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Az alábbi R relációkra határozza meg $\text{dmn}(R)$, $\text{rng}(R)$ halmazokat, illetve az A képét $R(A)$, teljes inverzképét $R^{-1}(A)$, megszorítását $R|_A$:

a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,

b) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,

c) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = N\mathbf{v}\}$,

3. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ továbbá $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$,

$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, d), (3, c), (3, e)\}$ és

$S = \{(a, 2), (a, 8), (c, 2), (c, 8), (e, 4), (f, 6)\}$.

Határozza meg az $S \circ R$ kompozíciót, a kompozíció értékkészletét, értelmezési tartományát.

4. Tekintsük az emberek halmazán a G gyereke és a H házastársa relációt. Fejezzük ki segítségükkel a következőket:

a) unokája relációt; nagyszülője relációt, anyósa/apósa relációt, veje/menye relációt, testvére/önmagga relációt;

b) házások halmaza, nagyszülők halmaza.

5. Legyen $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mint a 2. feladatban. Az alábbi R, S relációkra határozza meg az $R \circ S$ és $S \circ R$ kompozíciókat.

a) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$,

b) $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = M\mathbf{v}\}$, $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \mathbf{u} = M^2\mathbf{v}\}$,

6. Legyen $M, N \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ két invertálható mátrix. Legyen $R = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : M\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$ és $S = \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : N\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$. Fejezze ki a $R \circ S$, $S \circ R$ relációkat ill. azok inverzét az M, N mátrixok segítségével.

Szorgalmi feladatok

7. Írjon programot, mely adott R relációra meghatározza $\text{dmn}(R)$, $\text{rng}(R)$ halmazokat, illetve R , S relációkra megadja az $R \circ S$ kompozíciót. (1 pont)