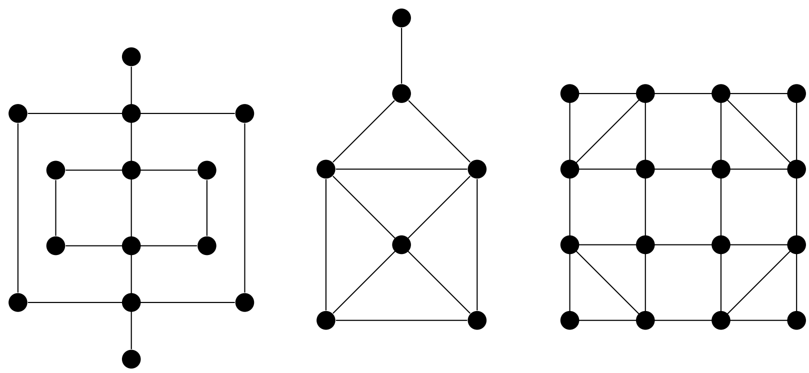
Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok II
Tizenegyedik alkalom (2024.04.29-05.03.)

1. Mutasd meg, hogy egy véges fában az összes leghosszabb út egy ponton megy át!
Megoldás: Először bizonyítjuk, hogy bármely két leghosszabb útnak van közös pontja. Indirekt tfh. van két diszjunkt leghosszabb út, P_1 és P_2, hosszuk legyen k. Mivel fa, ezért összefüggő, tehát van "átkötés" a két út között, azaz van $v_1 \in P_1$ és $v_2 \in P_2$ úgy, hogy van olyan v_1-ből v_2-be vezető út, melynek egyik éle sincs rajta sem P_1-en, sem P_2-n. v_1 két részre osztja P_1-et, tekintsük a hosszabbik részt, ez legalább $k/2$ hosszú. Hasonlóan v_2 két részre osztja P_2-t, tekintsük a hosszabbik részt, ez legalább $k/2$ hosszú. A két rész és a $v_1 - v_2$ út együtt egy több mint k hosszú út, ellentmondás.
Most szintén indirekt tfh. van 3 leghosszabb út P_1, P_2 és P_3, de nem egy ponton mennek át. A következő gondolatmenettel azt fogjuk megmutatni, hogy ekkor van a gráfban kör, ami ellentmondás. (Két leghosszabb útnak lehet több közös pontja is, azaz egy egész közös útszakasz, de a körmentesség miatt csak egy ilyen közös szakasz lehet, ami legalább egy pontú. Jelölje $\gamma_1 = P_2 \cap P_3$ útszakaszt, és jelölje $\gamma_2 = P_3 \cap P_1$ útszakaszt. Az indirekt feltevés szerint nincs olyan csúcs, ami mindhárom leghosszabb útnak közös csúcsa, ezért γ_1 és γ_2 két diszjunkt szakasza P_3-nak. Jelölje $m_1 \in \gamma_1$ és $m_2 \in \gamma_2$ azt a két pontot, ami a P_3 úton egymáshoz a legközelebb van. Jelölje $\gamma_3 = P_2 \cap P_1$ útszakaszt. Az indirekt feltevés szerint ez diszjunkt P_3 úttól. Jelölje $m_3 \in P_3$ az egyik csúcsot.) Tehát m_1, m_2, m_3 csupa különböző csúcs. m_1 és m_2 csúcsok között van β séta m_3 csúcson keresztül, ami nem használja P_3 útnak az m_1 és m_2 közötti szakaszát (amit jelöljön α_3). A β sétából kiválasztható α_2 út, ami úgy köti össze m_1 és m_2 csúcsokat, hogy nincs közös belső csúcsa a α_3 úttal. Ekkor tehát m_1, m_2, m_3 rajta van egy körön (ami α_2 és α_3 útszakaszokból áll), de a gráf fa, ellentmondás.

2. Igazold, hogy véges gráfban a komponensek számának és az élek számának összege nem kisebb, mint a csúcsszám.
Megoldás: Legyen s db komponens, a csúcsok száma a komponensekben k_1, ... k_s. Egy komponens öf., és öf. gráf minimális élszáma a csúcsszám-1. Ezért az i. komponensben legalább $k_i - 1$ él van, így összesen az élek száma + komponensek száma $\geq k_1 - 1 + \ldots + k_s - 1 + s = n$.

3. Van-e az alábbi gráfokban Euler-séta?



Megoldás: Mindhárom gráf összefüggő, tehát csak a fokszámokat kell vizsgálni. Bal oldali: 2 db elsőfokú csúcs, a többi páros fokú, tehát van nyílt Euler-séta (keressünk!). Középső: 3 db harmadfokú és 1 db elsőfokú csúcs, nincs sem nyílt, sem zárt Euler-séta. Jobb oldali: minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta (keressünk!).

4. Van-e olyan egyszerű gráf, amelyben van Euler-kör, páros sok csúcsa és páratlan sok éle van?
Megoldás: Pl. egy C_4 és egy C_3 egy csúcsánál összeragasztva: 6 csúcs, 7 él, öf. és minden fokszám páros. Másik pl.: C_3 és egy izolált csúcs: 4 csúcs, 3 él, minden fokszám páros, és az izolált csúcstól eltekintve öf. a gráf.

5. Igazold, hogy minden összefüggő gráfban van olyan séta, amely a gráf minden élét pontosan kétszer tartalmazza. Igaz-e ez zárt sétára?
Megoldás: Minden élt kétszerezzünk meg! Ekkor minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta. Ez az eredeti gráfban olyan séta, amely minden élt pontosan kétszer tartalmaz.

6. Mutasd meg, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetőek piros és kék színekkel úgy, hogy minden csúcshoz két-két piros és kék él illeszkedjen
Megoldás: Tf. öf. a gráf. Ha nem öf., az alábbi eljárást komponensenként végrehajthatjuk. Minden fokszám páros, tehát van zárt Euler-séta. Menjünk végig egy zárt Euler-sétán! Menet közben az éppen bejárt éleket színezzük felváltva piros és kék színnel, pirossal kezdve. Minden közbenső csúcsban kétszer járunk, belépéskor az egyik, kilépéskor a másik színnel színezünk. Így minden közbenső csúcsra 2 piros és 2 kék él fog illeszkedni. Mivel minden fokszám 4, ezért $\sum d(v) = 4|V| = 2|E|$, azaz $2|V| = |E|$, tehát az élszám páros. Így amikor a séta végén másodszor visszaérünk a kiindulási csúcsba, az utolsó élt kékkel színezzük, így a kiindulási csúcshoz is két piros és két kék él illeszkedik.

7. Mutasd meg, hogy ha egy gráfban van Hamilton-kör, de bárhogy töröljük egyetlen élét, a maradék gráf összefüggő.
Megoldás: Ha a törölt él nem a Hamilton-kör éle volt, akkor a maradék gráfban is van Hamilton-kor, nyilván öf. Ha a törölt él a Hamilton-kör egy éle volt, akkor a maradék gráfban van Hamilton-út, nyilván öf.

8. Bizonyítsd be, hogy ha egy véges összefüggő gráf K köréből egy élt eltörölve a gráf egy leghosszabb útját kapjuk, akkor K Hamilton-köre a gráfnak!
Megoldás: Indirekt tfh. nem igaz az állítás, vagyis az él törlése után leghosszabb utat kaptunk, de K nem Hamilton-kör volt. Ekkor van olyan v csúcs, amely nincs benne K-ban. Mivel a gráf öf., van olyan u csúcs, mely benne van K-ban, és létezik olyan u-ból v-be vezető út, amelynek egyik éle sincs benne K körben. Menjünk végig a v-ből u-ba vezető úton, majd a kör összes élén: ez az út hosszabb, mint az egy él törlésével kapható leghosszabb út, ellentmondás.

9. Egy hotelba 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal köré ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alatt az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor minden résztvevő aznap este hazamegy. Mutasd meg, hogy legalább 25 éjszakát a hotelben tölt a társaság!
Megoldás: Készítsünk gráfot! A csúcsok feleljenek meg a résztvevőknek, él menjen két csúcs között, ha a két ember jóban van egymással. Ha a feltételnek megfelelően leülnek, az a gráfban egy Hamilton-kört jelent. Így kezdetben K_{100} van. Minden egyes este új gráf keletkezik: az addigi gráfból törlünk egy Hamilton-kört; így minden csúcs foka 2-vel kevesebb lesz, mint az előző esti gráfban. Kezdetben $d(v) = 99$ minden csúcsra, x eltelt este után $d(v) = 99 - 2x$. Akkor tudnak leülni vacsorázni, ha az aktuális gráfban van Hamilton-kör, a Dirac-tétel értelmében ha $99 - 2x \geq 50$, azaz ha $24,5 \geq x$, akkor biztosan van. Tehát 24 eltelt este után, vagyis a 25. estén még biztosan le tudnak ülni a vacsorához.

Szorgalmi feladatok

10 Írjon programot, mely egy tetszőleges gráf esetén ellenőrzi, hogy a gráfban van **a)** Euler-séta, **b)** Hamilton-kör. Pozitív válasz esetén a program meg is adja azt (**2+2 pont**)

Gyakorló feladatok

1. Legfeljebb hány szeparáló él (olyan él, amit elhagyva több komponensre esik szét a gráf) van egy $n(\geq 1)$ pontú gráfban? És legfeljebb hány szeparáló pont? Mindkét esetben mutass olyan példát, ahol pontosan ennyi van!

2. Bizonyítsd be, hogy amennyiben egy gráfban található k pont, melyeket elhagyva a gráf több, mint k komponensre esik szét, akkor a gráfnak nincs Hamilton-köre!

3. Mutasd meg, hogy egy dominócsomagból kirakható kör.

4. Egy $G = (V, E)$ gráf *páros* gráf, ha V csúcsok halmaza felírható két diszjunkt U, W halmaz uniójaként, hogy és csak U és W-beli csúcsok között megy. Bizonyítsa be, hogy ha egy páros gráfban van Hamilton-kör, akkor a két csúcsosztálya azonos elemszámú!

5. Bejárható-e a 9×9-es sakktábla lóugrással úgy, hogy a kiindulási mezőre érjünk vissza?