Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika III
Kilencedik alkalom (2024.04.15-04.19.)

1. Hány nullára végződik a $11^{100}-1$ szám?
Megoldás: A binomiális tétel szerint $11^{100}=(10+1)^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}10^k=1+100\cdot 10+\frac{100\cdot 99}{2}\cdot 100+\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}\cdot 1000+x\cdot 10000$, ahol x valami egész szám (a $k\geq 4$-es tagok mindegyike osztható 10^4-nel, tehát az valóban kiemelhető ezen tagok összegéből). Sőt, már a $k=3$-as, $\frac{100\cdot 99\cdot 98}{6}\cdot 1000$ tag is osztható 10^4-nel, tehát kiszámítva az első pár tagot, kapjuk, hogy $11^{100}=1+1000+495000+x'\cdot 10^4=496001+x'\cdot 10^4$. Mivel az $x'\cdot 10^4$ hozzáadása nem változtatja meg az utolsó négy számjegyet, azt kapjuk, hogy $11^{100}-1$ utolsó négy számjegye 6000, tehát három nullára végződik.

2. Egy 2x12-es sakktábla hányféleképpen fedhető le 2x1-es dominókkal (melyeket vízszintesen vagy függőlegesen tehetünk le)?
Megoldás: Megfigyelés: Ha lerakunk egy vízszintes dominót a felső sorba, akkor közvetlenül alá is kénytelenek vagyunk vízszintes dominót rakni, tehát kettesével rakunk vízszintes dominókat. Esetszétválasztás a vízszintes dominópárok száma szerint. Minden esetben kiszámoljuk, hány függőleges dominó szükséges, ezután megszámoljuk a dominók, illetve dominópárok lehetséges sorrendjeit (kiválasztással vagy ismétléses sorba rakással). Ha nincs vízszintes dominó, akkor a 12 oszlopot 12 függőleges dominóval tudjuk lefedni, ez 1 eset. Egy vízszintes dominópár lerakása két függőleges oszlopot fed le, vagyis a szükséges függőleges dominók száma kettővel csökken. Tehát 1 vízszintes dominópár esetén 10 függőleges dominó kell, vagyis 11 ,,egységet" kell sorba raknunk, ezek sorrendjeinek száma (a 11 helyből kiválasztjuk, melyikre kerüljön a vízszintes): $\binom{11}{1}$. 2 vízszintes dominópár esetén 8 függőleges dominó kell, vagyis 10 ,,egységet" kell sorba raknunk, ezek sorrendjeinek száma $\binom{10}{2}$. És így tovább, összesen legfeljebb 6 vízszintes dominópárt tudunk lerakni. Végül az egyes esetekben kapott lehetőségek számát összeadjuk: $1+\binom{11}{1}+\binom{10}{2}+\ldots+\binom{6}{6}=1+11+45+84+70+21+1=233$.
Ugyanez másképp, általános alakban: k vízszintes dominópár esetén $12-2k$ függőleges dominó kell, vagyis $k+12-2k=12-k$,,egységet" kell sorba raknunk, ezek sorrendjeinek száma (a $12-k$ helyből kiválasztjuk, melyekre kerüljenek a vízszintesek): $\binom{12-k}{k}$; $0\leq k\leq 6$. A lehetőségek száma összesen $\sum_{k=0}^{6}\binom{12-k}{k}$.
Számolás ismétléses sorba rakással: Először a csupa különbözőnek tekintett ,,egységeket" sorba rakjuk, majd, mivel a függőleges dominók egyformák, illetve a vízszintes dominópárok is egyformák, az ,,egységek" sorrendjeinek számát a tehénszabály értelmében el kell osztanunk az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával:
$\frac{12!}{12!}+\frac{11!}{10!}+\frac{10!}{2!\cdot 8!}+\frac{9!}{3!\cdot 6!}+\ldots+\frac{6!}{6!}=\sum_{k=0}^{6}\frac{(12-k)!}{k!\cdot(12-2k)!}$.

3. Artúr király kerekasztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük haragban van a közvetlenül mellette ülőkkel. Öt lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják a királylányt. Hányféleképpen tehetjük meg ezt úgy, hogy ne legyenek ellenségek a lovagok között? És ha n lovagból kell k-t kiválasztani?
Megoldás: Képzelhetjük úgy, mint egy óra számlapját, ahol Sir Lancelot ül 12 óránál. Ekkor az 1 és 11 óránál ülő lovag Sir Lancelot két szomszédja. Most ,,kiegyenesítjük" a számlapot, Sir Lancelot lesz az első helyen, a szomszédjai a 2. és 12. helyeken. Egy lehetőséget kóduljunk 0/1 sorozattal (0: nem megy, 1: megy), így egy 12 hosszúságú 0/1 karaktersorozatot kapunk. Tehát visszavezettük a feladatot az ismétléses kombinációnál tanult módszerre, csak le kell fordítanunk a feladatban szereplő feltételeket: összesen 5 db 1-es és 7 db 0 lesz, és két 1-es nem lehet egymás mellett. Esetszétválasztás aszerint, hogy Sir Lancelot elmegy-e vagy nem. Ha Sir Lancelot megy, akkor az 1. helyen 1 áll, ezen kívül 4 db 1-es és 7 db 0 van. Ekkor a 2. és 12. helyen 0 van (Sir Lancelot szomszédjai), illetve két 1-es nem lehet egymás mellett. Ez

annak a feladatnak felel meg, amikor 5 gyerek között osztunk szét 7 egyforma cukorkát úgy, hogy mindenki legalább 1-et kapjon (most a szeparáló elemek az 1-esek, a cukorkákat a 0-k jelképezik, minden 1-es után legalább egy darab 0 következik). Ennek a megoldása: kiosztunk minden gyereknek egy cukorkát, ezután a maradék 2 cukorkát kell 5 gyerek között kiosztani, de már nincs feltétel, tehát 4 db szeparáló elem és 2 db cukorkát jelképező karakter van. Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\binom{6}{2} = 15$. Ha Sir Lancelot nem megy el, akkor az első helyen 0 áll, elegendő a sorozat további részével foglalkoznunk. Ekkor 11 hosszú 0/1 sorozatunk van, melyben 5 db 1-es és 6 db 0 szerepel, és két 1-es nem lehet egymás mellett. Ez annak a feladatnak felel meg, amikor 6 gyerek között osztunk szét 6 egyforma cukorkát úgy, hogy a 2-5. gyerekek mindenképpen legalább 1-et kapnak (a szeparáló elemek az 1-esek, a cukorkákat a 0-k jelképezik, az első előtt nem feltétlenül áll 0, és minden 1-es után legalább egy darab 0 következik, az utolsót kivéve). Ennek a megoldása: kiosztunk a 2-5. gyerekeknek egy-egy cukorkát, ezután a maradék 2 cukorkát kell 6 gyerek között kiosztani, de már nincs feltétel, tehát 5 db szeparáló elem és 2 db cukorkát jelképező karakter van. Ezek lehetséges sorrendjeinek száma $\binom{7}{2} = 21$. A leheetőségek száma a két esetben összesen: $\binom{6}{2} + \binom{7}{2} = 15 + 21 = 36$.
Más megoldás: Az eleje ugyanaz, mint az előző megoldásnál, de most nincs esetszétválasztás, csak azokat az eseteket számoljuk meg, amikor Sir Lancelot megy. Ez az előzőek szerint $\binom{6}{2} = 15$. Jelölje $L = \{lovagok\}$ a lovagok halmazát, $C = \{csapatok\}$ az ötfős mentőcsapatok halmazát, és legyen $R \subseteq L \times C$ az a reláció, hogy $(\ell, c) \in R$, ha ℓ lovag benne van c csapatban. Számoljuk meg R elemeit kétféleképpen! Egyrészt a lovagok felől: Sir Lancelotnál kiszámoltuk, hogy ő (vagy bármelyik lovag) 15 csapatban van benne, tehát a rendezett párok száma $|L| \cdot 15$. Másrészt a csapatok felől: minden csapatban pontosan 5 lovag van, tehát a rendezett párok száma $|C| \cdot 5$. Mivel ugyanazt számoltuk meg mindkétszer, a kettő megegyezik, így $|L| \cdot 15 = |C| \cdot 5$. Tudjuk, hogy $|L| = 12$, tehát $12 \cdot 15 = |C| \cdot 5 \Longrightarrow |C| = 36$, vagyis 36 csapatösszeállítás lehetséges.

4. Hányféleképpen állhat föl 10 pár a körtánchoz, ha mindenki a saját párja oldalán táncol, de a Kiss és a Nagy pár nem táncol egymás mellett?
Megoldás: Mindenkit összeragasztunk a párjával, de számít egy páron belül a férfi-nő sorrendje, ezért ez 2^{10} lehetőség, majd körbeállítjuk a tíz párt (9! lehetőség), ami összesen $2^{10} \cdot 9!$ fölállás. Ebből rossz az, ha a Nagy és Kiss párok egymás mellé kerülnek; ezen párokat összeragasztva (2 lehetőség, mert számít a Kiss és Nagy pár sorrendje) és a többi 8 (szintén ragasztott) párral körbeállítva $2^{11} \cdot 8!$ rossz fölállást kapunk, tehát $2^{10} \cdot 9! - 2^{11} \cdot 8!$ jó fölállás van.
Másik megoldás: Mindenkit összeragasztunk a párjával. Rögzítsük a Nagy pár helyét, hozzájuk képest állítjuk föl a többieket. A Nagy pár jobb oldali szomszédja 8 féle lehet, mert Kissék nem, a bal oldali szomszédja már csak 7 féle. Ezután a Nagy pár jobb oldali szomszédjától kezdve az óramutató járásával megegyezően sorban elhelyezzük a párokat, most már bármelyik helyre kerülhet a Kiss pár is, tehát $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1$ féle sorrend van. Végül minden egyes páron belül a férfi-nő sorrendje kétféle lehet, tehát a megoldás $8 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2^{10}$.

5. Egy fagyizóban puncs, vanília, csokoládé és eper fagyit árulnak. Hányféleképpen kérhetünk 6 gombócot a) tölcsérbe (azaz számít a gombócok sorrendje); b) kehelybe (nem számít a sorrend); c) + d) mindenképp szeretnénk két gombóc puncsot?
Megoldás: a) A tölcsérben van sorrend (nem mindegy, hogyan sorakoznak benne a gombócok), így alulról fölfelé haladva 4^6 lehetőségünk van.
b) A kehelyben nem számít a sorrend (bármelyik gombóchoz hozzáférhetünk), csak az, hogy miből mennyit választunk; ez tehát ismétléses kombináció, $\binom{4+6-1}{6}$-féle lehetőséggel (3 szeparátor, 6 elem).
c) Dobjuk ki azokat, amikor legfeljebb egy puncsot kértünk; ezt esetszétválasztással számoljuk. Azon választások száma, amiben nincs puncs, 3^6; amiben egy puncs van, az $6 \cdot 3^5$ (eldöntjük, hanyadik gombóc a puncs, a maradék öt gombócnál háromféle döntési lehetőségünk van). Marad tehát $4^6 - 3^6 - 6 \cdot 3^5$ jó választás.

d) Két gombóc már fix, tehát még négy gombócot kérhetünk négyféléből, amit $\binom{4+4-1}{4}$-féleképp tehetünk meg (4 elem, 3 szeparátor).

6. **a)** Egy 1 méter sugarú, kör**vonal** alakú céltáblára lövünk (pl. darts táblán csak a külső kört célozzuk). Belövünk 4 nyilat a 4 lehető legtávolabbi pozícióba (pl. legfelső, legalsó, jobb szélső, bal szélső pontok). Bizonyítsuk, hogy egy ötödik nyilat már nem tudunk úgy belőni, hogy a távolsága mindegyik nyíltól nagyobb legyen, mint 1 méter. **b)** Igaz-e tehát, hogy öt nyilat bárhogyan belőve a fenti körvonalra biztosan lesz köztük kettő, amelyek távolsága kisebb, mint 1 méter? **c)** Egy 2m×2m-es, négyzet alakú céltáblába belövünk öt golyót. Mutassuk meg, hogy lesz kettő, melyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}$ m! **d)** És hány golyót kellene belelőni ahhoz, hogy biztosan legyen legalább hat, melyek páronként legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre vannak egymástól?
Megoldás: **a)** A 4 kijelölt pont, mint középpontok körül 1 méter sugarú köröket húzva a körlapok teljesen lefedik az eredeti céltábla körvonalát.
b) Nem. Ha egy szabályos ötszög öt csúcsába lőjük a dartokat, akkor távolabb lesznek, mint 1 méter.
c) Természetes módon fölosztva a táblát négy 1m×1m-es részre, észrevehetjük, hogy ezen kis négyzetek legtávolabbi pontjai (az átellenes sarkai) között a távolság $\sqrt{2}$ méter. Tehát ha két golyó ugyanabba a kis négyzetbe kerül, akkor a távolságuk biztosan nem több $\sqrt{2}$ méternél, tehát ezek megfelelnek skatulyáknak. A skatulyaelv szerint öt golyót négy skatulyába téve biztosan lesz legalább egy olyan skatulya, amibe legalább két golyó kerül, ami az észrevételünk fényében bizonyítja az állítást.
d) Több mint $5 \cdot 4$ golyót belelőve a táblába biztosan lesz olyan skatulya, amibe több mint 5 golyó kerül. Ezek közül bármely kettő legfeljebb $\sqrt{2}$ méterre van egymástól, azaz 21 golyó bizonyosan elég. Húsz viszont nem: a tábla négy sarkába 5-5 golyót lőve nagyon közel egymáshoz nem lesz hat olyan, melyek páronként közel lennének egymáshoz.

7. Legfeljebb hány természetes szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő különbsége ne legyen osztható 8-cal?
Megoldás: Két szám különbsége akkor osztható 8-cal, ha a 8-cal vett osztási maradékuk megegyezik. A lehetséges osztási maradékok: $0, 1, \ldots, 7$. Az osztási maradékok tehát megfelelőek lesznek skatulyáknak. 8 skatulya van, így a skatulyaelv értelmében 9 (vagy több) szám esetén biztosan van kettő, melyek különbsége osztható 8-cal. Tehát legfeljebb 8 szám adható meg, és ez meg is valósítható, pl. $1, 2, \ldots, 8$.

8. Egy osztályban 37 gyerek tanul. Közülük angolul 27-en, németül 15-en, mindkét nyelven 10-en beszélnek. Hány olyan gyerek van, aki sem angolul, sem németül nem tud?
Megoldás: Legyen $H = \{\text{osztály tagjai}\}$ az alaphalmaz, $A = \{\text{angolul tanulók}\}$, $N = \{\text{németül tanulók}\}$. A szitaformula értelmében $|H \setminus (A \cup N)| = |H| - |A| - |N| + |A \cap N|$, azaz $|H \setminus (A \cup N)| = 37 - 27 - 15 + 10 = 5$, tehát 5 gyerek nem tud egyik nyelven sem.

9. Hány olyan 20 hosszúságú kockadobás-sorozat van, amelyben
   a) van 1-es? b) van 1-es és 2-es is?
   c) van 1-es, 2-es és 3-as is? d)* az $1, 2, \ldots, 6$ számok mindegyike szerepel?

Megoldás: **a)** Dobjuk ki a rosszat: $6^{20} - 5^{20}$.
b) Dobjuk ki a rosszakat, de kompenzáljuk a kétszer kidobottakat (mini szita): legyen A az összes dobássorozatok halmaza, A_1 azon dobássorozatok halmaza, melyekben nem dobtunk 1-t, A_2 pedig azoké, melyekben nem dobtunk 2-t. Ekkor $|A_1| = |A_2| = 5^{20}$, $|A_1 \cap A_2| = 4^{20}$, tehát a szitaformula értelmében $|A \setminus (A_1 \cup A_2)| = 6^{20} - 5^{20} - 5^{20} + 4^{20}$.
c) Az előző gondolatmenettel, valamint a háromszor kidobott és háromszor visszavett dobássorozatokat egyszer ki kell dobni (közepes szita): Jelölések mint a **b)** részben, továbbá legyen A_3 azon dobássorozatok halmaza, melyekben nem dobtunk 3-t, ekkor $|A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 4^{20}$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^{20}$, azaz $|A \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = 6^{20} - 5^{20} - 5^{20} - 5^{20} + 4^{20} + 4^{20} + 4^{20} - 3^{20}$.
*d)** Szitaformulával: legyen A az összes, A_i pedig azon dobássorozatok halmaza, melyekben nem

dobtunk i-t ($1 \leq i \leq 6$). Ekkor $|A_i| = 5^{20}$, $|A_i \cap A_j| = 4^{20}$ stb. (bármely k-as metszet elemszáma $(6-k)^{20}$), így a szitaformula alapján a válasz $|A \setminus (A_1 \cup \ldots A_6)| = 6^{20} - 6 \cdot 5^{20} + \binom{6}{2} 4^{20} \ldots = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} (6-k)^{20}$.

Gyakorló feladatok

10. Az 52 lapos francia kártyában négy szín mindegyikéből 13-13 darab van, minden színből egy ász van. Négy játékosnak osztunk 13-13 lapot. Hány különböző leosztás van? Hány olyan, amikor mindenkinek van ásza? Hány olyan, amikor minden ász egyvalakinél van?

11. Hányféleképpen lehet sorba rendezni n nullát és k egyest úgy, hogy két egyes ne kerüljön egymás mellé?

12. Hányféleképpen állíthatunk sorba n különböző magasságú embert úgy, hogy senkit ne fogjon közre két nála magasabb ember?

13. Hány olyan húszjegyű szám van, melyben minden számjegy pontosan kétszer szerepel?

14. Hány szelvényre van szükség a TOTÓ-n, hogy legalább 5/13 találatot érjünk el? (A TOTÓ-n 13 focimeccsnek kell megtippelni az eredményét, melyek mindegyike háromféle lehet: 1, 2, X.)

15. Hányféleképpen tehetünk be 20 szál virágot 4 különböző színű vázába, ha a virágok...
    a) egyformák; b) egyformák, és minden vázába kell jutnia legalább egynek;
    c) különbözők; d) különbözők, és minden vázába kell jutnia legalább egynek?

Szorgalmi feladatok

13. **a)** Egy ládában 10000 piros és 100 kék golyó van. Találomra kihúzunk 100-at. Mennyi az esélye, hogy van köztük kék? **b)** Az Atlanti-óceánba beleöntünk egy liter vizet. Jól megkeverjük az óceánt, majd a túlparton kiveszünk (találomra) egy liter vizet. Mennyi az esélye, hogy az eredetileg beleöntött liter víz egyik molekuláját újra kifogtuk? **c)** Mennyi az esélye, hogy a büfében vásárolt pizzaszelet egyik szénatomja a Földön élt utolsó T. rex bal combjában is járt már? Az adatoknak utánanézni, ill. a számoláshoz Wolfram Alphát használni SZABAD! (**2 pont**)

Elméleti összefoglaló

Skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $n+1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** két tárgy kerül.
Általánosított skatulyaelv: Ha n darab skatulyába legalább $k \cdot n + 1$ darab tárgyat **bárhogyan** helyezünk el, akkor **biztosan** lesz **legalább egy** olyan skatulya, melybe **legalább** $k+1$ tárgy kerül.
A 6.c) feladatnál tipikus helytelen megoldási kísérlet: ,,LEGROSSZABB ESETBEN" a négy sarokba lövünk $1-1$ golyót, és akkor az ötödik valamelyikhez már közel lesz...
Probléma: a golyók helyét nem mi választjuk meg, bármely elrendezés esetén teljesülnie kell az állításnak. Ha egy konkrét elrendezésre bizonyítjuk, akkor az összes lehetséges elrendezésre is bizonyítanunk kellene. Ha valaki ezt nem akarja megtenni, és azt állítja, hogy ez az elrendezés a legrosszabb eset, akkor három dolog kell: egyrészt definiálni egy mérőszámot a ,,rosszaság"-ra , ami alapján összehasonlítjuk, hogy egy eset mikor rosszabb, mint a másik; másrészt bizonyítani, hogy ha egy esetre már igazoltuk az állítást, akkor abból az állítás következik a nála kevésbé rossz esetekre; harmadrészt igazolni kell, hogy tényleg ez az eset a legrosszabb.
Ha így szólna a kérdés: "Legfeljebb hány golyót lehet belelőni úgy, hogy nem lehet köztük kettő, melyek távolsága legfeljebb másfél méter?" Ekkor mutatnunk kell egy példát arra, hogy négyet még igen, a skatulyaelv segítségével pedig be kell látnunk, hogy ötöt már nem.

Logikai szitaformula: a „Dobjuk ki a rosszat!" ötlet általánosítása, amikor a megszámolandó ,,jó" elemek helyett a ,,rossz" elemeket számoltuk meg, majd ezt kivontuk az összes elemek számából. Általánosabban: előfordulhat, hogy több szempont is van, amely szerint egy elem ,,rossz" lehet. Ekkor lehetnek olyan többszörösen rossz elemek (sorrendek, kiválasztások stb.), amelyek egyszerre többféle szempont szerint is rossznak minősülnek. Azonban ezeket a többszörösen rossz elemeket is csak egyszer akarjuk kivonni az összes elemek számából. Erre ad megoldást a szitaformula.

Legyen $H = \{$ összes elem $\}$ az alaphalmaz, $A_1 = \{$1. szempont szerint rossz elemek $\}$, $A_2 = \{$2. szempont szerint rossz elemek $\}$ stb., $A_1 \subseteq H$, $A_2 \subseteq H$,...

Fölírjuk a formulát kettő, három, illetve négy ,,rossz” halmaz esetére:

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = |H| - (|A_1| + |A_2|) + |A_1 \cap A_2|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = |H| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|)+$$
$$+(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|)-$$
$$-(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|)+$$
$$+|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Megjegyzés: A szitaformula általános alakja tetszőlegesen sok rossz részhalmazra vonatkozik.