

Mi a belső pont definíciója?

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A **halmaz belső pontja**, ha

$$\exists r > 0, \text{ hogy } K_r(a) = (a - r, a + r) \subset A.$$

Jelölés: $\boxed{\text{int } A} := \{a \in A \mid a \text{ belső pontja } A\text{-nak}\}.$

Mikor mondja azt, hogy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely $a \in \text{int } D_f$ pontban?

Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \text{int } D_f$ pontban **differenciálható** (vagy **deriválható**), ha

$$\exists \text{ és véges a } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték.}$$

Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

Tegyük fel, hogy $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } D_f$. Ekkor

$$1^\circ \quad f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\},$$

2° Az állítás megfordítása nem igaz.

Adjon példát olyan függvényre, ami az $a \in \mathbb{R}$ pontban folytonos, de nem differenciálható!

$$\text{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \text{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\text{abs}(x) - \text{abs}(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int } (D_f \cap D_g)$ pontban. Ekkor

3° $f \cdot g \in D\{a\}$ és

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$

Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in D\{a\}$ valamilyen $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor

4^o ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ és egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_g$ pontban

$g \in D\{a\}$, továbbá $f \in D\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in D\{a\}$, és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Mi az exp, sin, cos függvények deriváltfüggvénye?

$\exp'(x) = (e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\sin'(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$	$\cos'(x) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$
--	--	---

Milyen tételt (ismer?) hatványsor összegfüggvényének differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n$ ($x \in \mathbb{R}$) hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és legyen

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1} \quad (\forall x \in K_R(a)).$$