Diszkrét matematika I. feladatok
Kombinatorika II
Nyolcadik alkalom (2024.04.08-04.12.)

1. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér és 40 zöld golyó van, ezekből húzunk. Hányat kell húznunk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
a) fehér; b) 3 különböző színű; c) 3 azonos színű; d) 5 azonos színű; e) 15 azonos színű;
f) két egymás utáni zöld húzás?
Megoldás: **a)** $10 + 40 = 50$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy csupa piros és zöld golyót húzunk, de 51 golyó kihúzása biztosan elég.
b) $20 + 40 = 60$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy csupa fehér és zöld golyót húzunk, de 61 golyó kihúzása biztosan elég.
c) $3 \cdot 2 = 6$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy két-két golyót húzunk mindhárom színből, de 7 golyó kihúzása biztosan elég (általánosított skatulyelv).
d) $3 \cdot 4 = 12$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy négy-négy golyót húzunk mindhárom színből, de 13 golyó kihúzása biztosan elég (általánosított skatulyelv).
e) Piros golyóból csak 10 van, ezért $10 + 2 \cdot 14 = 38$ golyó kihúzása esetén még előfordulhatna, hogy tíz, illetve tizennégy golyót húzunk mindhárom színből, de 39 golyó kihúzása biztosan elég.

2. Hány részhalmaza van az $\{1, 2, .., 20\}$ halmaznak? Hány részhalmazára teljesül, hogy
a) az 1 benne van; b) 1 és 2 is benne van; c) 1, vagy 2 benne van?
Megoldás: Általában egy n elemű halmaz részhalmazainak száma: mindegyik elemről egyesével eldöntjük, hogy belerakjuk-e a részhalmazba vagy nem. Ez mindegyik elemnél két lehetőség, összesen n-szer döntünk, független döntések, tehát 2^n. A 20 elemű halmaznak így összesen 2^{20} részhalmaza van.
a) Az 1-et mindenképp belerakjuk, csak a maradék 19 elemről kell döntenünk, tehát 2^{19}.
b) Az 1-et és a 2-t mindenképp belerakjuk, csak a maradék 18 elemről kell döntenünk, tehát 2^{18}.
c) Az 1 benne van: 2^{19} lehetőség. A 2 benne van: 2^{19} lehetőség. Ezek az esetek azonban nem diszjunktak, ha összeadnánk a lehetőségek számát, akkor kétszer számolnánk azokat, amikor az 1 és 2 is benne van: 2^{18} lehetőség. Az összegből ezért egyszer le kell vonni ezeknek a számát. Az összes megfelelő részhalmazok száma tehát $2^{19} + 2^{19} - 2^{18}$. (*Megjegyzés:* Ez a típusú gondolatmenet vezet majd el a szitaformulához.)
Másik megoldás: Esetszétválasztás diszjunkt esetekre bontással: az 1 benne van, de a 2 nincs; az 1 nincs benne, de a 2 igen; az 1 és 2 is benne van. Mindhárom esetben az 1-ről és a 2-ről nem kell döntenünk, csak a maradék 18 elemről, így a lehetőségeink száma összesen $3 \cdot 2^{18}$.
Másik megoldás: Összes-kedvezőtlen: Az összes részhalmazok száma 2^{20}, ebből kedvezőtlen, ha sem 1, sem 2 nincs benne. Ilyen részhalmazból, mivel csak a maradék 18 elemről kell döntenünk, 2^{18} van. Tehát a kedvező részhalmazok száma $2^{20} - 2^{18}$.

3. Hányféleképpen lehet a MISSISSIPPI szó betűit leírni úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé?
Megoldás: Összes-kedvezőtlen. Összes eset: ismétléses sorba rakás, 11 betű, ebből 4 db S, 4 db I, 2 db P. A 11 karaktert sorba rakjuk, mintha különbözőek lennének, majd a tehénszabály értelmében az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával leosztunk, így a lehetséges sorrendek száma $\frac{11!}{4!\cdot4!\cdot2!}$. Kedvezőtlen: összeragasztjuk a 4 db S betűt, így egyetlen ,,karaktert" fognak képezni. Most már csak 8 ,,karaktert" kell sorba raknunk, melyekből 4 db I és 2 db P. Az előző számoláshoz hasonlóan a lehetséges sorrendek száma $\frac{8!}{4!\cdot2!}$. A kedvező sorrendek száma tehát $\frac{11!}{4!\cdot4!\cdot2!} - \frac{8!}{4!\cdot2!}$.

4. Hány különböző karaktersorozatot lehet az ABRAKADABRA betűiből alkotni?
Megoldás: Ismétléses sorba rakás, 11 betű, ebből 5 db A, 2 db B, 2 db R. Sorba rakjuk a 11

karaktert, mintha különbözőek lennének, majd a tehénszabály értelmében az egyformák egymás közti sorrendjeinek számával leosztunk, így a lehetséges sorrendek száma $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!}$.

5. a) Hány út vezet a 3×10-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak fel vagy jobbra léphetünk?
b) És ha fel, jobbra, vagy jobbra-fel átlósan léphetünk?
Megoldás: **a)** 2 felfelé és 9 jobbra lépés van, összesen 11 lépés. Kiválasztással: eldöntjük, melyik 2 legyen a felfelé: $\binom{11}{2}$. Ismétléses sorba rakással: 11 lépést rakunk sorba, ebből 2 egyforma (felfelé) és 9 egyforma (jobbra), ez tehát $\frac{11!}{2!\cdot 9!}$ lehetőség.
b) Esetszétválasztás az átlós lépések száma szerint, ez lehet 0, 1 vagy 2. Ha 0, akkor **a)** rész értelmében $\binom{11}{2}$. Ha 1, akkor lesz még 1 felfelé és 8 jobbra lépés, összesen 10 lépés. Kiválasztással: eldöntjük, melyik legyen az átlós, majd a maradék 9 lépés közül melyik legyen a felfelé: $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1}$. Ha 2, akkor lesz még 7 jobbra lépés, összesen 9 lépés. Kiválasztással: eldöntjük, melyik legyen a 2 átlós: $\binom{9}{2}$. Mivel diszjunkt esetekre bontottuk, a lehetőségek száma összeadódik: $\binom{11}{2} + \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} + \binom{9}{2}$.

6. Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken p darab, a másikon q darab pont. Hány olyan háromszög van, melynek csúcsai az adott pontok közül valók?
Megoldás: Egy (nem elfajuló, vagyis ,,szokásos") háromszög két csúcsa egy egyenesre esik, a harmadik pedig nem eshet arra az egyenesre. Így két csúcsot az egyik egyenesről, a harmadikat a másikról választjuk. Esetszétválasztás aszerint, hogy melyik egyenesről választunk két csúcsot. Ha a p darab pontot tartalmazóról, azt $\binom{p}{2}$ féleképpen tehetjük meg, a harmadik csúcsot a másik egyenes q pontja közül q féleképpen választhatjuk, a két egyenesről történő választás független, így szorzunk: $\binom{p}{2} \cdot q$. Ha a q darab pontot tartalmazó egyenesről választunk két pontot, azt $\binom{q}{2}$ féleképpen tehetjük meg, a harmadik csúcsot a másik egyenes p pontja közül p féleképpen választhatjuk, a két egyenesről történő választás független, így szorzunk: $\binom{p}{2} \cdot q$. A lehetőségek száma a diszjunkt esetekben megszámolt lehetőségek számának összege: $\binom{p}{2} \cdot q + \binom{q}{2} \cdot p$.

Ha elfajuló háromszögeket is megengedünk (a háromszög mindhárom csúcsa eshet ugyanarra az egyenesre), akkor az összes pont közül tetszőlegesen választhatunk három csúcsot, tehát ekkor a lehetőségek száma $\binom{p+q}{3}$.

7. 40 könyvet szeretnénk 4 dobozba csomagolni 10-esével. Hányféleképpen lehet ezt megtenni, ha a) a dobozok számozva vannak, b) a dobozon nincsenek számozva?
Megoldás: **a)** Az első dobozba kerülő 10 könyvet $\binom{40}{10}$ féleképpen választhatjuk ki. A második dobozba kerülő 10 könyvet a maradék 30 könyvből $\binom{30}{10}$ féleképpen, a harmadik dobozba kerülő 10 könyvet a maradék 20 könyvből $\binom{20}{10}$ féleképpen, az utolsó dobozba kerülő könyvcsomag már egyértelmű. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma összeszorzódik: $\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$.
b) Az **a)** részfeladatban leírt módon 4 kupacot hozunk létre a könyvekből. Azonban most a kupacok sorrendje nem számít, így minden szétosztást annyiszor számoltunk, ahányféleképpen a 4 kupacot sorba lehet rakni, azaz 4!-szor. A tehénszabály értelmében ezzel leosztjuk a szétosztások számát, így a lehetőségek száma $\frac{\binom{40}{10}\cdot\binom{30}{10}\cdot\binom{20}{10}}{4!}$.

8. Egy bolha ugrál a számegyenes egész pontjain jobbra-balra, másodpercenként egyet. Hányféleképpen ugrálhatott, ha az origóból indult, és pontosan egy perc elteltével a +24 pontban van?
Megoldás: Jelölje j a jobbra ugrások, b a balra ugrások számát. Mivel pontosan egy percig ugrál, $j + b = 60$, és mivel ekkor a +24 pontban van, ezért $j = b + 24$. A második egyenletből j kifejezését behelyettesítve az első egyenletbe $2b+24 = 60$, amiből $b = 18$, ezt visszahelyettesítve $j = 42$ adódik. Az, hogy a 60 ugrásból melyik 18 lesz az, amikor balra ugrik, $\binom{60}{18}$ féle lehet, tehát ennyiféleképpen ugrálhatott a bolha.

9. Hány olyan szám van összesen (akárhány jegyű lehet), melyben a számjegyek balról jobbra olvasva a) szigorúan monoton növekedve; b) szigorúan monoton csökkenve követik egymást?

Megoldás: Mivel a számjegyek szigorúan monoton követik egymást, ezért mindegyik számjegy legfeljebb egyszer szerepelhet; illetve ha eldöntöttük, melyik jegyek szerepeljenek, akkor a sorrendjük már egyértelmű, vagyis egy számjegyhalmazból csak egy számot tudunk létrehozni. Így elegendő a szóba jövő részhalmazokat megszámolnunk.
Először a **b)** részt oldjuk meg. A számjegyek egy 10 elemű halmazt alkotnak, e halmaz részhalmazainak száma 2^{10}, azonban az üres halmaz most nem ad jó megoldást, így a megfelelő számok száma $2^{10} - 1$.
a) Most a 0 számjegy csak egyetlen számban, a 0-ban szerepelhet, több jegyű számok nem kezdődhetnek 0-val. Így ennek az egy esetnek a kivételével az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyek közül válogathatunk. Ez egy 9 elemű halmaz, e halmaz részhalmazainak száma 2^9, azonban az üres halmaz most sem ad megoldást, így a megfelelő számok száma $1 + 2^9 - 1$.

10. Egy 25 fős osztályban küldöttséget választanak, mely 6 főből áll, majd ezen hat emberből egy-egy igazgatót és titkárt választanak. Hányféleképpen történhet ez, ha egy ember csak egy tisztséget viselhet?
Megoldás: A 25 diákból 6 embert $\binom{25}{6}$ féleképpen választhatnak. Az így kiválasztott 6 ember közül igazgatót hatféleképpen, a maradék 5 ember közül titkárt ötféleképpen választhatnak. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma $\binom{25}{6} \cdot 6 \cdot 5$.
Másik megoldás: A 25 diák közül igazgatót 25 féleképpen, maradék 24 diák közül titkárt 24 féleképpen választhatnak. A küldöttség további 4 tagját a maradék 23 ember közül $\binom{23}{4}$ féleképpen választhatják ki. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma $25 \cdot 24 \cdot \binom{23}{4}$.

11. Hányféleképpen lehet n darab egyforintos érmét k ember között szétosztani? És ha mindenki kap biztosan legalább egy forintot?
Megoldás: **a)** Mivel az egyforintosok egyformák, csak az számít, hogy ki hány darab érmét kap. Az előadáson látott módszerrel (ismétléses kombináció): az n db egyforintost n db 1-es karakter jelképezi. Az 1-esek között $k-1$ darab 0 karaktert (szeparáló karaktert) helyezünk el. Az első 0 előtt lévő 1-esek száma jelzi, hogy az 1. ember hány darab egyforintost kapott, az első és második 0 között lévő 1-esek száma jelzi, hogy a 2. ember hány darab egyforintost kapott stb., a $k-1$. szeparáló 0 után lévő 1-esek jelzik az utolsó, k. ember egyforintosait. Így minden lehetséges kiosztásnak megfeleltetünk egy $n+k-1$ hosszúságú 0/1 karaktersorozatot. A karaktersorozatok és a kiosztások között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van (biz. előadáson), így elegendő a lehetséges karaktersorozatokat megszámolnunk. Ezt megtehetjük ismétléses sorbarakással: $\frac{(n+k-1)!}{n! \cdot (k-1)!}$ vagy kiválasztással (az összes hely közül melyekre tesszük az 1-eseket): $\binom{n+k-1}{n}$.
b) Ha mindenki kap legalább egyet: mivel az egyforintosok egyformák, megtehetjük, hogy mindenkinek kiosztunk előre egyet. A maradék $n-k$ darab egyforintost az előző módszerrel osztjuk szét ($n-k$ darab 1-es, $k-1$ darab 0): $\frac{(n-k+k-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} = \binom{n-1}{n-k}$.

12. Hányféleképpen lehet 100 rekeszben 30 golyót elhelyezni úgy, hogy minden rekeszben, amelyikben van golyó, pontosan 6 darab van és a) a golyók egyformák; b) a golyók különbözőek, és minden rekeszben figyelembe vesszük a golyók sorrendjét; c) a golyók különbözőek, de a rekeszben nem vesszük figyelembe a golyók sorrendjét?
Megoldás: Mindegyik alfeladatban 5 rekeszbe fognak kerülni a golyók.
a) Itt csak azt kell kiválasztanunk, hogy melyik rekeszekbe kerülnek golyók, ezt $\binom{100}{5}$ féleképpen tehetjük meg.
b) Kiválasztjuk a rekeszeket, mint az előbb, majd sorba kell raknunk a 30 golyót: a sorba rakott golyók közül az első öt kerül az első kiválasztott rekeszbe, a második öt kerül a második kiválasztott rekeszbe stb. A golyóknak 30! lehetséges sorrendje van. A rekeszek kiválasztása és a golyók sorba rakása független, a lehetőségek száma tehát $\binom{100}{5} \cdot 30!$.
c) Kiválasztjuk a rekeszeket, mint az előbb, majd kiválasztjuk, hogy az első rekeszbe melyik

6 golyó kerül, erre $\binom{30}{6}$ lehetőség van, ezután a maradék 24 golyó közül kiválasztjuk, hogy a második rekeszbe melyik 6 golyó kerül, erre $\binom{24}{6}$ lehetőség van stb. A választások függetlenek, így a lehetőségek száma $\binom{100}{5} \cdot \binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6}$.

Szorgalmi feladatok

13. Hányféleképpen helyezhetünk el egy 8x8-as sakktáblán 8 bástyát úgy, hogy egyik se üsse semelyik másikat? Mennyi a lehetőségek száma, ha azokat a megoldásokat, amik forgatással vagy tükrözéssel egymásba vihetők, csak egynek számítuk (tehát pl. az a1-b2-c3-d4-e8-f7-g6-h5 nem szó szerint ugyanaz, mint az a4-b3-c2-d1-e5-f6-g7-h8, de ezt csak egy megoldásnak tekintjük mert középpontos tükörképek). (**1 pont**)

14. Hányféleképpen lehet az egymilliót három természetes szám szorzatára bontani, ha azok sorrendje a) számít; b) nem számít? (**1 pont**)