Diszkrét matematika I. feladatok
Gráfok III

Tizenkettedik alkalom (2024.05.06-05.10.)

1. Legyen a G gráf csúcsainak halmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Határozzuk meg G éleinek és összefüggőségi komponenseinek számát, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: i és j pontosan akkor van összekötve, ha
a) $i - j$ páratlan;
b) $2 \leq |i - j| \leq 3$;
c) $i - j$ osztható 3-mal és $i \neq j$;
d) $|i - j| = 3$ vagy $|i - j| = 8$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)
Megoldás: Általában: Összefüggőség igazolásához elég megmutatni, hogy van olyan csúcs, melyből bármely másik csúcsba eljuthatunk sétával (séta = ,,átjárás éleken"); vagy mutathatunk egy összefüggő, feszítő részgráfot; vagy megmutathatjuk, hogy bármely két csúcs közt van séta. Összefüggőség cáfolásához elég mutatni két olyan csúcsot, melyek közt nincs séta; vagy megpróbálhatjuk felosztani a csúcsokat nemüres részhalmazokra úgy, hogy a részek között ne vezessen él; vagy választhatunk egy csúcsot, és megmutathatjuk, hogy az ebből a csúcsból sétával elérhető csúcsok halmaza nem tartalmazza az összes csúcsot.
a) A gráf öf (azaz 1 öf komponense van), hiszen bármely két eltérő paritású szám között van él, két azonos paritású szám között pedig van kettő hosszúságú út tetszőleges ellenkező paritású szám közbeiktatásával. Mind a 100 csúcs fokszáma 50, így az élek száma $100 \cdot 50/2 = 2500$.
b) Az 1-ből kettő távolságokra lépkedve végig tudunk menni a páratlan számokon (találunk egy utat, ami tartalmazza mindet, tehát ezek mind egy komponensen belül kell, hogy legyenek), és ugyanúgy a 2-ből indulva találunk olyan utat is, mely az összes páros számot tartalmazza (tehát a páros számok is egyazon komponensen belül kell, hogy legyenek – eddig azt állapítottuk meg, hogy a komponensek száma legfeljebb kettő). Ráadásul páros és páratlan számok között is vezet él (pl. az 1 és a 4 között), így bármely két csúcs közt van séta (avagy a páros és páratlan számok halmaza nem alkothat két külön komponenst, hiszen van él a két halmaz között), tehát a gráf öf, azaz összefüggőségi komponenseinek száma 1. Az élek számát megállapíthatjuk a fokszámok segíségével: az 1, 2, 99, 100 csúcsok foka 2, a 3 és a 98 csúcsok foka 3, a többié ($100 - 6 = 94$ db) 4, tehát a fokszámok összege $4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 94 \cdot 4 = 390$, így az élek száma 195.
c) A feltétel szerint két csúcs között pontosan akkor van él, ha a hárommal való osztási maradékuk megegyezik. Így a gráfnak három összefüggőségi komponense lesz: a nulla, illetve kettő maradékot adó számok egy-egy K_{33}-at (33 csúcsú teljes gráf), míg az egy maradékot adó számok egy K_{34}-et feszítenek, melyek között nem megy él. Egy n csúcsú teljes gráf éleinek száma $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$, így a gráf élszáma $2\binom{33}{2} + \binom{34}{2}$.
d) A gráf összefüggő, ehhez elegendő megmutatni, hogy az i csúcsból el tudunk jutni az $i+1$-be ($1 \leq i \leq 99$). Az élek behúzási szabálya miatt az i, $i+3$, $i+6$, $i+9$, $i+1$ csúcssorozat egy út i-ből $i+1$-be. Ez jó, feltéve, hogy $i + 9 \leq 100$, azaz $i \leq 91$. Ha $i \geq 92$, először balra lépve nyolcat, majd háromszor jobbra hármat kapunk jó utat: i, $i-8$, $i-5$, $i-2$, $i+1$.
Másik megoldás: A ,,háromlépéses" éleket behúzva látszik, hogy a hárommal osztva azonos maradékot adó számok egyazon komponensben lesznek; tehát ha csak ezek az élek volnának G-ben, akkor három komponense volna, az $\{1, 4, 7, 10, \ldots, 100\}$, $\{2, 5, 8, \ldots, 98\}$ és a $\{3, 6, 9, \ldots, 99\}$ csúcsok által feszítettek. Viszont vannak még a ,,nyolclépéses" élek is, pl az $\{1, 9\}$ és a $\{2, 10\}$, melyek összekötik ezeket a kupacokat. Ezek alapján G összefüggő, vagyis az öf. komponensek száma 1.
Élek száma: a csúcsok többségének 4 a fokszáma, kivéve azokat, melyeknél nincs 3-mal vagy 8-cal kisebb vagy nagyobb szám a csúcshalmazban. Tehát $d(1) = d(2) = d(3) = d(98) = d(99) = d(100) = 2$, $d(4) = \ldots = d(8) = d(93) = \ldots = d(97) = 3$, $d(9) = \ldots = d(92) = 4$. Így $|E| = \frac{\sum_{i \in \{1,2,\ldots 100\}} d(i)}{2} = \frac{6 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 84 \cdot 4}{2} = 189$.

2. Egy körmérkőzéses sakkversenyen 27-en indultak. Lehetett olyan pillanat, amikor mindenki pontosan 9 ellenfélen volt túl?

Megoldás: Készítsünk gráfot! A csúcsok legyenek a versenyzők, és húzzunk élt két versenyző közé, ha már játszottak egymással. A kérdéses pillanatban a gráfban minden csúcsnak kilenc volna a foka, és így a fokszámösszeg $27 \cdot 9$ volna, ami páratlan; tehát nem lehetett ilyen pillanat.

3. Olyan fát szeretnék készíteni, melyben csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik fajta 92-szer. Mi lehet a szóban forgó két fokszám?
Megoldás: Ennek a fának $9+92 = 101$ csúcsa és így 100 éle lesz. Ha a két fokszám x és y, akkor a fokszámösszege $9x + 92y = 200$, emiatt x páros kell, hogy legyen. Mivel legalább két csúcsú fában van levél, x és y közül valamelyik 1; ezekből $y = 1$ és $x = 12$ adódik. Ilyen fokszámokkal valóban lehet fát készíteni, pl. egy 11 csúcsú út minden másodfokú pontjára tegyünk 10 további levelet.

4. Legyen G egy n csúcsú, egyszerű gráf, melyben bármely két nem szomszédos pont fokszámának összege legalább $n-1$. Mutassuk meg, hogy G összefüggő.
Megoldás: Tegyük föl indirekt, hogy G nem összefüggő. Ekkor a csúcshalmaza felbontható két diszjunkt részre, hívjuk ezeket A-nak és B-nek, melyek közt nincs él. (Ezt már láttuk.) Egy $u \in A$ csúcsnak legfeljebb $|A|-1$, egy $v \in B$ csúcsnak legfeljebb $|B|-1$ lehet a fokszáma, hiszen G egyszerű. Ebből $\deg(u) + \deg(v) \leq |A| - 1 + |B| - 1 = |A| + |B| - 2 = n - 2$ adódik. Másrészt a fokszámokra vonatkozó feltétel miatt (u és v nyilván nem szomszédosak) $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$ teljesül. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az indirekt feltevés hamis.

5. Igazold, hogy ha egy n csúcsú, egyszerű gráf izomorf a komplementerével, akkor n néggyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad.
Megoldás: Legyen $G(V,E)$, $|V| = n$. Egy gráf élei és a komplementerének élei együtt pontosan kiadják a teljes gráf éleit, azaz $|E(G)|+|E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \binom{n}{2}$, továbbá ha G és $\overline{G}$ izomorfak, akkor $|E(G)| = |E(\overline{G})|$. Ezt visszahelyettesítve az előző egyenletbe $2|E(G)| = \binom{n}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$, azaz $|E(G)| = \frac{n\cdot(n-1)}{4}$ adódik. Az élek száma egész, ezért $n \cdot (n-1)$ osztható 4-gyel, és mivel a két szám közül az egyik páratlan, a másik osztható lesz 4-gyel. $4|n$ esetén n néggyel osztva 0 maradékot, $4|(n-1)$ esetén n néggyel osztva 1 maradékot ad.

6. Az alábbi gráfok közül melyekben van (nyílt vagy zárt) Euler-séta?
a) $V_1 = \{1, 2, \ldots, 102\}$, $E_1 = \{\{i,j\} \subset V_1 \colon 1 \leq |i-j| \leq 2\}$, $G_1 = (V_1, E_1)$;
b) $V_2 = \{1, 2, \ldots, 102\}$, $E_2 = \{\{i,j\} \subset V_2 \colon 1 \leq |i-j| \leq 3\}$, $G_2 = (V_2, E_2)$;
c) $V_3 = \{1, 2, \ldots, 102\}$, $E_3 = \{\{i,j\} \subset V_3 \colon i-j \text{ páros}\}$, $G_3 = (V_3, E_3)$;
d) $H = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $V_4 = \{A \subset H \colon |A| = 3\}$, $E_4 = \{\{A,B\} \subset V_4 \colon A \cap B \neq \emptyset\}$, $G_4 = (V_4, E_4)$.
Megoldás: Euler-vonal keresésénél két dologra kell figyelni: páratlan fokú csúcsok száma, illetve összefüggőség.
a) Az 1 és a 102 foka kettő, a 2 és a 101 foka három, a többié négy; és mivel összefüggő (ld. pl. az $1-2-3-\ldots-101-102$ utat), Euler tétele miatt lesz benne nyílt Euler-vonal.
b) Az 1 és a 102 foka három, a 3 és a 100 foka öt, azaz találtunk négy páratlan fokú csúcsot, tehát biztosan nincs a gráfban sem nyílt, sem zárt Euler-vonal.
c) Két csúcs között pontosan akkor megy él, ha a paritásuk megegyezik, tehát a gráf két komponensből áll (páros, ill. páratlan számok), vagyis a gráf nem összefüggő. Mindkét komponensben vannak élek, tehát biztosan nincs a gráfban sem nyílt, sem zárt Euler-vonal.
d) $|V_4| = \binom{10}{3}$, és minden csúcs foka $\binom{10}{3} - 1 - \binom{7}{3}$ (ugyanis $\binom{7}{3}$ diszjunkt háromelemű részhalmaz van egy rögzített háromelemű részhalmazhoz), ami páros (kiszámolandó!). A gráf továbbá összefüggő, hiszen ha az $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ és a $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ csúcsok közt nincs él (azaz $A \cap B = \emptyset$), akkor pl. a $C = \{a_1, a_2, b_1\}$ csúcs közös szomszéd, tehát van út A és B között. (Ha A és B szomszédosak, akkor nyilván van köztük út.) Euler tétele alapján van G_4-ben zárt Euler-vonal.

7. a) Mutass olyan gráfot, amelyben minden csúcs foka páros, és nincs benne zárt Euler-séta (Euler-körséta)!

b) Mutass olyan gráfot, ami nem összefüggő, de van benne zárt Euler-séta!
Megoldás: **a)** Két háromszög (mint hat csúcsú, nem összefüggő gráf).
b) Egy háromszög és egy izolált csúcs (avagy: legalább két izolált csúcs). Ebben van zárt Euler-vonal, mert ott annyi a feladat, hogy minden élen pontosan egyszer járjunk, tehát az izolált csúcsokon nem kell áthaladnunk.

8. Mutass ellenpéldát a Dirac-tétel megfordítására!
Megoldás: Egy 10 csúcsú kör. Avagy bármilyen, legalább 5 csúcsú kör, ugyanis ekkor nyilvánvalóan van Hamilton-kör (maga a gráf), de minden csúcs fokszáma 2, ami $n \geq 5$ esetén kisebb, mint $n/2$. Vagyis a Dirac-tétel elégséges, de messze nem szükséges feltételt ad Hamilton-kör létezésére.

9. Legyen a G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, ..., 100\}$. Van-e G-ben Hamilton-út, ha az éleket a következőképpen adjuk meg: (i, j) pontosan akkor él, ha ...
a) $0 < |i - j| \leq 2$?
b) $|i - j| = 2$ vagy 3?
c) $i \mid j$ vagy $j \mid i$?
d) $|i - j| > 23$? (A négy alfeladatban négy különböző gráfról van szó.)
Megoldás: **a)** 1–2–3...–100 egy Hamilton-út.
b) Induljunk az 1-ből. A +2, +2, −3, +2, +2 lépésekkel bejárjuk az 1–5 csúcsokat, és elérkezünk a 6-ba. Ismételve a folyamatot a gráf összes csúcsát bejárjuk (ötös blokkokban; a legvégén az utolsó +2 nem kell).
c) Nincs, mert az 50-nél nagyobb prímek foka egy, és több mint kettő ilyen csúcs van (ráadásul mind az 1-gyel szomszédosak, így az 1-et kitörölve is igazolhatjuk az állítást).
d) Például az 1-ből indulva a +50, −49 lépések ismételgetésével Hamilton-utat kapunk. Máshogyan: minden csúcsnak legalább $99 - 2 \cdot 23 = 53 \geq 100/2$ szomszédja van (a 100 csúcsból saját magával, és a tőle legfeljebb 23-mal jobbra vagy balra levő csúcsokkal nincs összekötve), tehát Dirac tétele szerint van Hamilton-kör a gráfban (és persze ekkor Hamilton-út is).

10. Mutass olyan egyszerű gráfot, amelyben van Hamilton-út és zárt Euler-séta, de nincs Hamilton-kör! (Igazoljuk is a megfelelő tulajdonságok meglétét vagy hiányát.)
Megoldás: Pl. két darab három hosszú kör összeragasztva egy csúcsánál. Az indoklások egyszerűek, Hamilton-kör nemlétét a ragasztási csúcs törlésével igazolhatjuk.