Diszkrét matematika 1

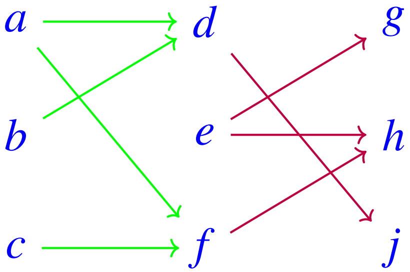
3. előadás
Relációk II.

Mérai László
merai@inf.elte.hu

Komputeralgebra Tanszék

2024 tavasz

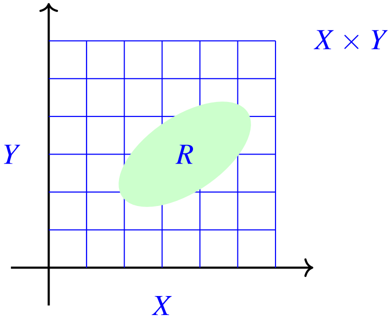
Relációk II.



Binér reláció

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.



Példa

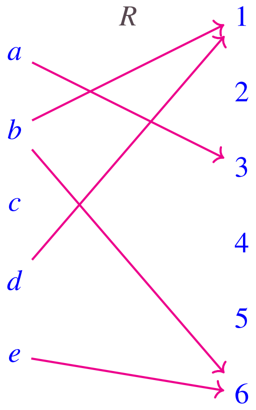
- egyenlőség reláció: $\mathbb{I}_X = \{(x, x) : x \in X\}$
- részhalmaz reláció X-en: $\{(A, B) \in 2^X \times 2^X : A \subset B : A, B \in 2^X\}$
- altér reláció: $\{(U, V) : U, V \leq \mathbb{R}^5, U \text{ altere } V\text{-nek}\}$
- sajátvektor reláció $\{(\mathbf{v}, M) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times 2} : \exists\lambda : M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$
- $\sin$ függvény relációja: $\{(x, \sin x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$

Értelmezési tartomány, értékkészlet

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R éretelmezési tartománya ('domain'):
  $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x,y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'):
  $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x,y) \in R\}$.



Példa

- Legyen $R \subset \{a,b,c,d,e\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$.
  $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,d,e\}$, $\mathrm{rng}(R) = \{1,3,6\}$.
- $N = \{(x^2,x) : x \in \mathbb{R}\}$ $\mathrm{dmn}(N) = \mathbb{R}_0^+$, $\mathrm{rng}(R) = \mathbb{R}$.

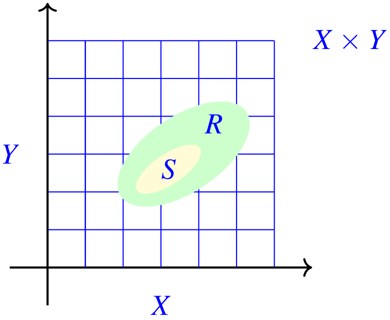
Relációk kiterjesztése, leszűkítése

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

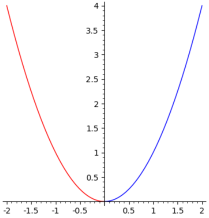
- R az S **kiterjesztése** (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való **leszűkítése** (A-ra való megszorítása)

$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$



Példa

- $N = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ és
  $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}_0^+\} = \{(\sqrt{x}, x) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$.
  Ekkor $S \subset N$
- $N|_{\mathbb{R}_0^+} = S$.
- '$\leq$' a '$=$' kiterjesztése.



Reláció inverze

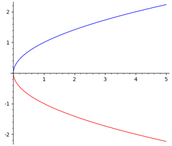
Definíció

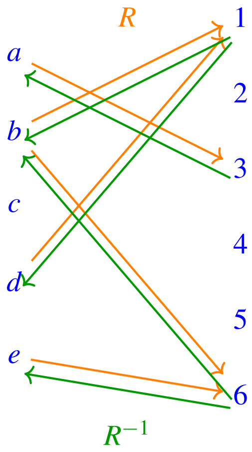
Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}.$$

Példa

- $R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(d,1),(e,6)\}$ és $R^{-1} = \{(1,b),(1,d),(3,a),(6,b),(6,e)\}$
- Legyen $R = \{(x,x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ Ekkor $R^{-1} = \{(x^2,x) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{(x,\sqrt{x}) : x \in \mathbb{R}_0^+\}$





Halmaz képe, teljes inverz képe

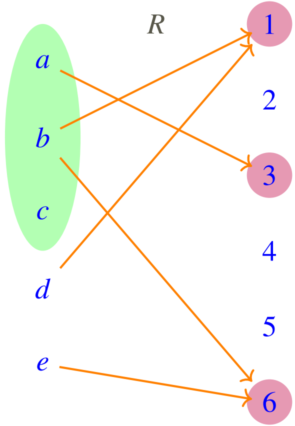
Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Példa

- $R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(d,1),(e,6)\}$. Ekkor $R(\{a,b,c\}) = \{1,3,6\}$
- Legyen $R = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$. Ekkor $R(\{2\}) = \{4\}$ (vagy ($R(2) = 4$)) és $R^{-1}(\{4\}) = \{-2,+2\}$ (vagy $R^{-1}(4) = \{-2,+2\}$).

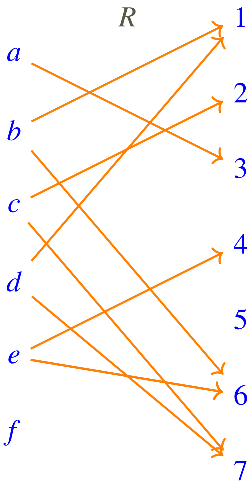


Példa

Legyen
$R = \{(a,3),(b,1),(b,6),(c,2),(c,7),(d,1),$
$(d,7),(e,4),(e,6)\}$

Ekkor

- $\mathrm{dmn}(R) = \{a,b,c,d,e\}$
- $\mathrm{rng}(R) = \{1,2,3,4,6,7\}$
- $R|_{\{a,e,f\}} = \{(a,3),(e,4),(e,6)\}$
- $R(\{a,b,c\}) = \{1,2,3,6,7\}$
- $R^{-1}(\{1,2,3\}) = \{a,b,c,d\}$



Relációk kompozíciója

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x,y) : \exists z : (x,z) \in S, (z,y) \in R\}.$$

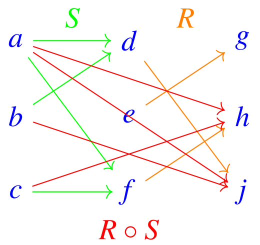
Figyelem! Kompozíció esetén a relációkat ,,jobbról-balra írjuk".

Példa

- Legyen $R_{\sin} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin x = y\}$,
  $S_{\log} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log x = y\}$.

  Ekkor

  $$\begin{aligned} R_{\sin} \circ S_{\log} &= \{(x,y) : \exists z : \log x = z, \sin z = y\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sin \log x = y\}. \end{aligned}$$



Példa

beosztás	alkalmazott
menedzser	A, B
fejlesztő	C, D, E, F, G
tesztelő	H, I,
HR	J
marketing	K, L
tech. dolgozó	M

projekt	alkalmazott	határidő
BANK	A, C, D, F,G, H	'24.03.24.
JÁTÉK	B, D, E, F, G, I	'24.03.31.

- $B \in$ **alkalmazottak** $\times$ **beosztás** a beosztás reláció: például A B menedzser.
- $P \in$ **alkalmazottak** $\times$ **projekt** a projekt reláció: például A P BANK
- $H \in$ **projekt** $\times$ **határidő** a határidő reláció: például BANK H 2024.03.24.

- Kik dolgoznak a BANK projekten? $P^{-1}(\text{BANK})$
- Kik a tesztelők? $B^{-1}(\text{tesztelő})$
- Milyen határidejei vannak az alkalmazottaknak? $H \circ P$
- Milyen határidejei vannak a tesztelőknek? $H \circ P \circ B^{-1}(\text{tesztelő})$

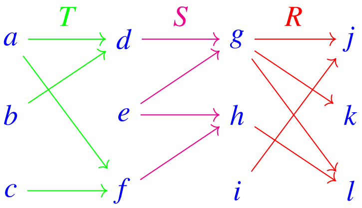
Kompozíció tulajdonságai 1

Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \mathrm{rng}(T) \cap \mathrm{dmn}(R \circ S)$:
  $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \mathrm{rng}(S) \cap \mathrm{dmn}(R)$:
  $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, w) \in (S \circ T)$
- Ha $(x, w) \in S \circ T \ \wedge (w, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ (S \circ T)$

$\square$

Kompozíció tulajdonságia 2

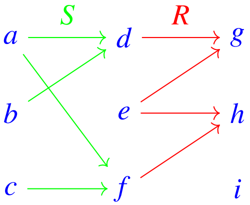
Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \ \wedge (z, x) \in R$
- $\iff (z, y) \in S^{-1} \ \wedge (x, z) \in R^{-1}$
- $\iff (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$



$R \circ S$

$\square$

Relációk tulajdonságai 1/4.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

Példa

- $=$, $\leq$, $<$ relációk $\mathbb{R}$-en
- $\subset$ halmazokon
- $|$ oszthatóság $\mathbb{Z}$-en
- $K = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 1\}$ („közelségi reláció”)

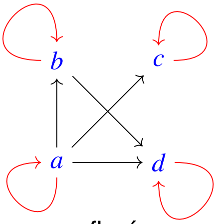
Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <, \subset, |$
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
  Példa: $=, \leq, \subset$ ellenpélda: K
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

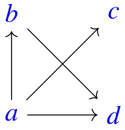
Relációk tulajdonságai 2/4.

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$



reflexív



irreflexív

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, <$ ellenpélda: K

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

Relációk tulajdonságai 3/4.

Elemek összehasononíthatósága:

Definíció

- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő ,,vagy”!)
  Példa: $\leq$ ellenpélda: $\subset, |$

$$\begin{tikzcd} 3 \\ 2 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$\leq$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on
dichotóm

$$\begin{tikzcd} & \{a, b\} & \\ \{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n
nem dichotóm

$$\begin{tikzcd} & 4 & \\ -2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en
dichotóm

Relációk tulajdonságai 4/4.

Elemek összehasonílthatósága:

Definíció

- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

$$\begin{tikzcd} 3 \\ 2 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$<$ reláció $\{1, 2, 3\}$-on
trichotóm

$$\begin{tikzcd} & \{a, b\} & \\ \{a\} \arrow[ur] & & \{b\} \arrow[ul] \\ & \emptyset \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

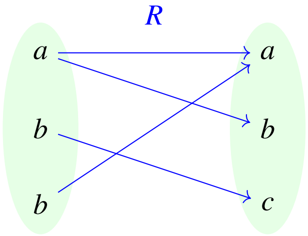
$\subset$ reláció $2^{\{a,b\}}$-n
nem trichotóm

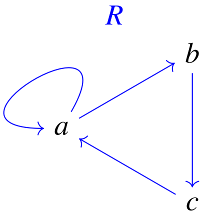
$$\begin{tikzcd} & 4 & \\ -2 \arrow[ur] \arrow[rr, leftrightarrow] & & 2 \arrow[ul] \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$|$ reláció $\{1, \pm 2, 4\}$-en
nem trichotóm

Relációk tulajdonságai, példa

Legyen R a következő reláció:





szimmetrikus	×	$aRb,\ \neg(bRa)$	reflexív	×	$\neg(bRb)$
antiszimmetrikus	✓		irreflexív	×	aRa
szig. antiszimmetrikus	×	aRa	tranzitív	×	$aRb, bRc, \neg(aRc)$
dichotóm	×	$\neg(cRc)$	trichotóm	×	aRa

Relációk tulajdonságai, összefoglalás.

Legyen R egy reláció X-en, azaz $R \subset X \times X$.

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$ (Példa: $=, K$)
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \land yRx \Rightarrow x = y$ (Példa: $=, \leq, \subset$)
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$ (Példa: $=, \leq, \subset, |, K$)
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$ (Példa: $<$)
- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \land yRz \Rightarrow xRz$ (Példa: $=, \leq, \subset, |$)
- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \lor yRx$ (megengedő ,,vagy"!)
  (Példa: $\leq$)
- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül (Példa: $<$)

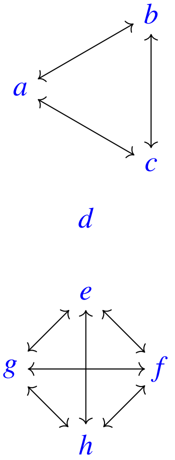
Speciális relációk

Ekvivalencia reláció, osztályozás 1

Halmaz elemeit csoportosítjuk, a csoporton belül az elemeket azonosnak tekintjük

Példa

- egyetemi hallgatók osztályozása évfolyam szerint
- cég dolgozói osztályozása beosztás szerint
- sík egyeneseit irányonként osztályozzuk



R reláció hurokélek nélkül

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív; tranzitív és szimmetrikus.

Példa

- $H_1 \sim H_2$, ha H_1 és H_2 évfolyamtársak
- $M_1 \sim M_2$, ha M_1 és M_2 beosztása megegyezik
- $\ell_1 \sim \ell_2$, ha ℓ_1 és ℓ_2 párhuzamosak