Diszkrét matematika I. feladatok
Komplex számok II
Hatodik alkalom (2024.03.18-03.22.)

1. Számítsd ki a következő kifejezéseket a trigonometrikus alak felhasználásával:

a) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right)\right)^7} = \dfrac{2^{9/2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{4} + i\sin\dfrac{9\pi}{4}\right)}{2^{7/2}\left(\cos\dfrac{-7\pi}{4} + i\sin\dfrac{-7\pi}{4}\right)} =$

$= 2^{(9-7)/2}\left(\cos\dfrac{(9-(-7))\pi}{4} + i\sin\dfrac{(9-(-7))\pi}{4}\right) = 2(\cos 4\pi + i\sin 4\pi) = 2 = 2 + 0i$

b) $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24} = \sum_{n=0}^{24}\dbinom{24}{n}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^n\cdot 1^{24-n} = \sum_{n=0}^{24}\dbinom{24}{n}\cdot\left(-\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^n =$

$= \sum_{n=0}^{24}\dbinom{24}{n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right) = \dots$ Kiasználjuk, hogy $(24-n)\dfrac{\pi}{6} = 4\pi - n\dfrac{\pi}{6}$, ami ugyanazt az irányt jeleni, mint $-n\dfrac{\pi}{6}$. Továbbá $\dbinom{24}{n} = \dbinom{24}{24-n}$, és $(-1)^{24-n} = (-1)^n$.

Ezért $\dots = \dbinom{24}{12}\cdot(-1)^{12}\cdot(\cos\frac{12\pi}{6} + i\sin\frac{12\pi}{6}) +$

$+ \sum_{n=0}^{11}\dbinom{24}{n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\left(\cos\dfrac{n\pi}{6} + i\sin\dfrac{n\pi}{6}\right) + \left(\cos\dfrac{-n\pi}{6} + i\sin\dfrac{-n\pi}{6}\right)\right) = \dbinom{24}{12} +$

$+ \sum_{n=0}^{11}\dbinom{24}{n}\cdot(-1)^n\cdot\left(2\cos\dfrac{n\pi}{6}\right) = \dbinom{24}{12} + 2\cdot\dbinom{24}{0}\cdot\left(\cos\dfrac{0\pi}{6}\right) - 2\cdot\dbinom{24}{1}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{2}\cdot$ $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) - 2\cdot\dbinom{24}{3}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{4}\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cdot\dbinom{24}{5}\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{6}\cdot(\cos\pi) - 2\cdot\dbinom{24}{7}\cdot$ $\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{8}\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cdot\dbinom{24}{9}\cdot\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{10}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) - 2\cdot\dbinom{24}{11}\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)$, kihasználva azt, hogy $\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi+\alpha)$. Tovább folytatva, a $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ miatt kieső tagokat kihagyva: $= \dbinom{24}{12} + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(24 + \dbinom{24}{11})\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right) + 2\cdot(\dbinom{24}{2} + \dbinom{24}{10})\cdot$ $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) + 2\cdot(\dbinom{24}{4} + \dbinom{24}{8})\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cdot(\dbinom{24}{5} + \dbinom{24}{7})\cdot\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}\right) + 2\cdot\dbinom{24}{6}\cdot(-1)$, tovább is számolható, ha kihasználjuk, hogy $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, azaz: $\dots = \dbinom{24}{12} + 2\cdot(1 -$ $\dbinom{24}{6} + (\dbinom{24}{5} + \dbinom{24}{7} - 24 - \dbinom{24}{11})\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right) + (\dbinom{24}{2} + \dbinom{24}{10} - \dbinom{24}{4} - \dbinom{24}{8})\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)) =$ $\dbinom{24}{12} + 2 - 2\dbinom{24}{6} + (\dbinom{24}{5} + \dbinom{24}{7} - 24 - \dbinom{24}{11})\cdot\sqrt{3} + (\dbinom{24}{2} + \dbinom{24}{10} - \dbinom{24}{4} - \dbinom{24}{8})$

Másik megoldás: Ha az eredeti hatványozandó számot írjuk trigonometrikus alakba, de az sem lesz szebb.

c) $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{11}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^{13}} = \dfrac{(2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}))^{11}}{(2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^{13}} = \dfrac{2^{11}(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6})}{2^{13}(\cos\frac{13\pi}{3} + i\sin\frac{13\pi}{3})} =$

$= 2^{(11-13)}(\cos(\dfrac{11}{6} - \dfrac{13}{3})\pi + i\sin(\dfrac{11}{6} - \dfrac{13}{3})\pi) = 2^{-2}(\cos(-\dfrac{15}{6}\pi) + i\sin(-\dfrac{15}{6}\pi)) =$

$= \dfrac{1}{4}(\cos(-\dfrac{5\pi}{2}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{2})) = \dfrac{1}{4}(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}) = \dfrac{1}{4}(0 + i\cdot(-1)) = -\dfrac{1}{4}i$

d) $\dfrac{(1-i)^{13}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^5} = \dfrac{\sqrt{2}^{13}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{13}}{2^5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5} = 2^{\frac{13}{2}-5}(\cos(\frac{13\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{13\pi}{4} - \frac{5\pi}{6})) =$

$= 2^{\frac{3}{2}}(\cos(\frac{39\pi}{12} - \frac{10\pi}{12}) + i\sin(\frac{39\pi}{12} - \frac{10\pi}{12})) = 2^{3/2}(\cos(\frac{29\pi}{12}) + i\sin(\frac{29\pi}{12})) = 2^{3/2}(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12})$

2. Az alábbi geometriai transzformációk a komplex számsík mely műveleteivel írhatóak le:

   a) origó körüli forgatás $\pi/4$-gyel; **Megoldás:** $(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$-vel való szorzás.

   b) origó körüli forgatás $5\pi/6$-tal és 3-szoros nyújtás; **Megoldás:** $3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = (-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i)$-vel szorzás.

   Írja fel a transzformácó mátrixát is.
   Megoldások: $z = x+iy \mapsto (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(x+iy) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y) + i(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y)$

   $$\text{mátrixosan felírva}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}$$

   $z = x+iy \mapsto 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})(x+iy) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y) + i(\frac{3\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2}x)$

   $$\text{mátrixosan felírva}\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}/2 & -3/2 \\ 3/2 & 3\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y \\ \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y \end{pmatrix}$$

3. A sík mely geometriai transzformációnak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto (1/2 + i\sqrt{3}/2)z$. Írja fel a megfelelő transzformációt valós $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixok segítségével.
   Megoldás: $z \mapsto 3z$, ez az origó középpontú 3-szorosra nyújtás: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$
   $z \mapsto (1+i)z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)z$, ez az origó középpontú nyújtva forgatás: $\sqrt{2}$-szeresre nyújtás és $\dfrac{\pi}{4}$ szögű forgatás (pozitív, azaz az óramutató járásával ellentétes irányban).
   $x+iy \mapsto (1+i)(x+iy) = (x-y) + (x+y)i$, mátrixosan: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$
   $z \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)z$, ez az origó középpontú $\dfrac{\pi}{3}$ szögű forgatás (az óramutató járásával ellentétes irányban). $x+iy \mapsto \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$,
   mátrixosan: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$

4. Legyenek z és w különböző komplex számok. Írjuk fel az őket összekötő szakasz felezőpontját, valamint az összekötő szakaszra állítható két szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát.
   Megoldás: Két, helyvektorral megadott pont szakaszának felezőpontja a két helyvektor összegének a fele (ez a vektorösszeadás "paralelogramma-szabályának" lerajzolásából látható). A komplex számsík $x+iy$ pontja azonosítható az origóból az (x,y) koordinátájú pontba mutató helyvektorra, és a komplex számok összeadása pont a vektorösszeadás. Ezért a z és w számokat összekötő szakasz felezőpontja a $\frac{z+w}{2}$ szám.
   A két szabályos háromszög legyen az $A = z$, $B = w$, és C, illetve az $A = z$, $B = w$, és D pontokkal megadott háromszög. Két pont "összekötő vektora" a két helyvektor (illetve itt két komplex szám) különbsége: $\overrightarrow{AB} = B - A = w - z$, $\overrightarrow{AC} = C - A$, $\overrightarrow{AD} = D - A$. Mivel szabályos háromszögekről van szó, ezért $\overrightarrow{AC}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ vektornak $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ szögű elforgatottja. Ezt a forgatást a komplex számsíkon a $(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ egységnyi abszolútértékű számmal való szorzás valósítja meg: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = (w-z)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
   Tehát $C = A + \overrightarrow{AC} = z + (w-z)(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
   Hasonlóan $\overrightarrow{AD}$ vektor az $\overrightarrow{AB}$ vektornak $-60^\circ = \dfrac{5\pi}{3}$ szögű elforgatottja. Ezt a forgatást a komplex számsíkon a $(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$ egységnyi abszolútértékű számmal való szorzás valósítja

meg: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = (w-z)(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.
Tehát $D = A + \overrightarrow{AD} = z + (w-z)(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$.
Tetszőleges háromszög súlypontjának helyvektora az origóból a három csúcsba mutató vektorok összegének harmada. Most már ezt is ki tudjuk számolni erre a két háromszögre…

5. A komplex számsíkon egy négyzet középpontja a $K = 1 + 2i$ illetve egyik csúcsa az $A = 5 + 4i$ komplex számnak megfelelő pontban van. Határozza meg a négyzet többi csúcsának megfelelő komplex számokat.
Megoldás: A többi csúcs B, C és D. Tudjuk, hogy a középpontból a csúcsokba mutató vektorok egymás derékszöggel való elforgatottjai, a derékszögű forgatást az i-vel való szorzás valósítja meg: $\overrightarrow{KB} = i\cdot\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KC} = i\cdot\overrightarrow{KB} = i^2\cdot\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KD} = i\cdot\overrightarrow{KC} = -i\cdot\overrightarrow{KA}$.

$$\overrightarrow{KA} = A - K = 4 + 2i$$

így $\overrightarrow{KB} = i\cdot(4+2i) = -2+4i$, $\overrightarrow{KC} = -(4+2i) = -4-2i$, $\overrightarrow{KD} = -i\cdot(4+2i) = 2-4i$.
Tehát:
$B = K + \overrightarrow{KB} = (1+2i) + (-2+4i) = -1+6i$
$C = K + \overrightarrow{KC} = (1+2i) + (-4-2i) = -3$
$D = K + \overrightarrow{KD} = (1+2i) + (2-4i) = 3-2i$

6. Vonjon négyzetgyököt a következő számokból:

a) $3-4i$; **Megoldás:** $3-4i = 5(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, ahol $\tan\alpha = -4/3$ és α a negyedik síknegyedben van, azaz $\alpha = \arctan(-4/3) \approx -17,7^\circ$. De ez a közelítő szögérték nem megfelelő, ha precíz eredményt akarunk! Viszont elővéve a függvénytáblázatot: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ és $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$. Ha α a negyedik síknegyedben van, akkor a felének a koszinusza pozitív, szinusza negatív. Ezt kihasználva $3-4i$ két négyzetgyöke: $w_{1,2} = \pm\sqrt{5}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}) = \pm 5^{1/4}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} - i\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}\right)$. Ez a legutolsó alak már *NEM* trigonometrikus alak, hanem bonyolultan írt algebrai alak. Mivel $\cos\alpha = 3/5$, ezt beírva: $w_1 = \sqrt{5\dfrac{1+3/5}{2}} - i\sqrt{5\dfrac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\dfrac{5+3}{2}} - i\sqrt{\dfrac{5-3}{2}} = 2-i$, és $w_2 = -w_1 = -2+i$.

b) $2i$; **Megoldás:** $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ két négyzetgyöke $w_{1,2} = \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Itt a $\pm$ váltja ki az argumentum $\alpha + k\cdot\frac{2\pi}{2} = \alpha + k\cdot\pi$, $k = 0,1$ két esetét, de a $w_2 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ NEM triginometrikus alak! Ha trigonometrikus alak kell, akkor $w_2 = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}+\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\pi)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c) $z = (1-i)^3/(1-\sqrt{3}i)^5$ **Megoldás:** $z = \dfrac{\left(\sqrt{2}\left(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right)\right)^3}{\left(2\left(\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3})\right)\right)^5}$

$$z = \frac{2^{3/2}\left(\cos(-\dfrac{3\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{3\pi}{4})\right)}{2^5\left(\cos(-\dfrac{5\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{5\pi}{3})\right)} = 2^{3/2-5}\left(\cos(-\frac{32\pi}{12}) + i\sin(-\frac{32\pi}{12})\right)$$

$z = 2^{7/2}\left(\cos(-\dfrac{8\pi}{12}) + i\sin(-\dfrac{8\pi}{12})\right) = 2^{7/2}\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$. Ebből már könnyen vonunk négyztgyököt: $w_{1,2} = \pm 2^{7/4}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$, ahol w_2 trigonometrikus alakja természetesen nem $w_2 = -w_1$, hanem $w_2 = 2^{7/4}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$

7. Oldja meg a következő másodfokú egyenletet: $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

Megoldás: Megoldóképlettel: $z_{1,2}=\dfrac{5-i\pm\sqrt{(-5+i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)}$, ahol a gyök előtti $\pm$ jelzi, hogy mindkét komplex négyzetgyök használandó. $(-5+i)^2-4(2+i)(2-2i)=24-10i-4(6-2i)=-2i=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, ennek a két négyzetgyöke közül az egyik $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-1+i$, a másik pedig $\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=1-i$. Tehát $z_{1,2}=\dfrac{5-i\pm(1-i)}{4+2i}$, azaz

$z_1=\dfrac{6-2i}{4+2i}\cdot\dfrac{4-2i}{4-2i}=\dfrac{24-4-8i-12i}{4^2+2^2}=\dfrac{20-20i}{20}=1-i$, és

$z_2=\dfrac{4}{4+2i}\cdot\dfrac{4-2i}{4-2i}=\dfrac{16-8i}{4^2+2^2}=\dfrac{16}{20}-\dfrac{8}{20}i=\dfrac{4}{5}+\dfrac{2}{5}i.$

8. Adja meg a következő mátrixok sajátértékeit (számológép használata megengedett):

a) $\begin{pmatrix}7-2i & 8-4i\\ -6+3i & -7+5i\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}10-7i & 12-8i\\ -9+6i & -11+7i\end{pmatrix}$.

9. Vonjon harmadik gyököt a következő számokból

a) $1=(\cos 0+i\sin 0)$ **Megoldás:** $\left(\cos(k\frac{2\pi}{3})+i\sin(k\frac{2\pi}{3})\right)$, $k=0,1,2$

b) $-1=(\cos\pi+i\sin\pi)$ **Megoldás:** $\left(\cos(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3})\right)$, $k=0,1,2$

c) $2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Megoldás: $\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3})\right)$, $k=0,1,2$

d) $\dfrac{3+4i}{1+i}$ **Megoldás:** Mivel $3+4i$ trigonometrikus alakjában nem tudunk precíz szögértéket megadni, ezért célszerűbb algebrai alakkal kiszámolni a törtet: $\dfrac{3+4i}{1+i}=\dfrac{3+4i}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{7+i}{2}$, viszont ennek sem szép az argumentuma. $z=\dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i=\sqrt{12,5}\,(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ahol $\tan\alpha=1/7$, és α az első síknegyedbe esik, tehát $\alpha=\arctan(1/7)$. Ezt a szöget kell harmadolni...

10. Vonjon negyedik gyököt a következő számból: $\dfrac{-4}{(2+i)^3}$. **Megoldás:** Megint az a gond, hogy a nevezőnek nem nevezetes szög az argumentuma, így először algebrai alakkal érdemesebb vacakolni: $(2+i)^3=8+3\cdot 4i+3\cdot 2i^2+i^3=8-6+12i-i=2+11i$, ezután a tört: $\dfrac{-4}{(2+i)^3}=\dfrac{-4}{2+11i}\cdot\dfrac{2-11i}{2-11i}=\dfrac{-8+44i}{2^2+11^2}=\dfrac{-8+44i}{125}=-\dfrac{8}{125}+\dfrac{44}{125}i=r\cdot(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, ahol $r=\sqrt{8^2+44^2}/125=\sqrt{64+1936}/125=\sqrt{2000}/125=20\sqrt{5}/125=4\sqrt{5}/25$, és az α argumentum a második síknegyedbe esik, és $\tan\alpha=-8/44=-2/11$, azaz $\alpha=\arctan(-7/11)+\pi$.
A negyedik gyökök: $r^{1/4}\cdot\left(\cos(\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2})\right)$, $k=0,1,2,3$.

Nevezetes szögek trigonometrikus értéke

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0