

Замена непрерывного распределения на дискретное для применения на практике

МЖМ

Нагуманова Карина Ильнуровна, 19Б.04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

Отчет по преддипломной практике

Санкт-Петербург
2023г.

1/29

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения на дискретное для применения на практике

Нагуманова Карина Ильнуровна, 19Б.04-мм
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Отчет по преддипломной практике

Санкт-Петербург
2023г.

Научный руководитель д.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.,
кафедра статистического моделирования

Работа выполнена на хорошем уровне
и может быть зачтена

Гял

В практических задачах нередко требуется заменить непрерывное распределение на дискретное с сохранением математического ожидания и дисперсии. Одним из методов нахождения такого распределения для трехточечной аппроксимации нормального распределения является **метод Свонсона**.

Аппроксимируемые случайные величины складывают и умножают.

Задача: находить аппроксимацию суммы и произведения логнормальных случайных величин по аппроксимациям исходных случайных величин.

Замена непрерывного распределения

— Введение

Введение

В практических задачах нередко требуется заменить непрерывное распределение на дискретное с сохранением математического ожидания и дисперсии. Одним из методов нахождения такого распределения для трехточечной аппроксимации нормального распределения является **метод Свонсона**.

Аппроксимируемые случайные величины складывают и умножают.

Задача: находить аппроксимацию суммы и произведения логнормальных случайных величин по аппроксимациям исходных случайных величин.

В практических задачах нередко требуется заменить непрерывное распределение на дискретное с сохранением математического ожидания и дисперсии. Одним из методов нахождения такого распределения для трехточечной аппроксимации нормального распределения является метод Свонсона. Однако в ряде областей, например, в нефтяной промышленности, общепринятым распределением, описывающим запасы нефти, является логнормальное распределение. Соответственно, реальной задачей является аппроксимация логнормального распределения. При этом здесь тоже применим метод Свонсона, потому что логнормальное распределение можно свести к нормальному. Ставится задача нахождения аппроксимации суммы и произведения логнормальных случайных величин по аппроксимациям исходных случайных величин.

План работы.

- 1 Рассмотреть общий подход к трехточечной аппроксимации.
- 2 Рассмотреть трехточечную аппроксимацию нормального распределения, в целом метод Свонсона и вывод правила 30-40-30.
- 3 Рассмотреть трехточечную аппроксимацию логнормального распределения и её свойства.
- 4 Построить алгоритм аппроксимации произведения двух логнормальных распределений.
- 5 Построить алгоритм аппроксимации суммы двух логнормальных распределений.

Замена непрерывного распределения

— Введение

Введение

План работы.

- 1 Рассмотреть общий подход к трехточечной аппроксимации.
- 2 Рассмотреть трехточечную аппроксимацию нормального распределения, в целом метод Свонсона и вывод правила 30-40-30.
- 3 Рассмотреть трехточечную аппроксимацию логнормального распределения и её свойства.
- 4 Построить алгоритм аппроксимации произведения двух логнормальных распределений.
- 5 Построить алгоритм аппроксимации суммы двух логнормальных распределений.

Имеем следующий план работы. Рассмотреть общий подход к трехточечной аппроксимации, рассмотреть трехточечную аппроксимацию нормального распределения, в целом метод Свонсона и вывод правила 30-40-30, рассмотреть трехточечную аппроксимацию логнормального распределения и её свойства, построить алгоритм аппроксимации произведения двух логнормальных распределений, построить алгоритм аппроксимации суммы двух логнормальных распределений.

Часть 1: Общий подход к трехточечной аппроксимации

Пусть ξ — непрерывная случайная величина, обозначим

$$m = \mathbf{E}(\xi), \quad s^2 = \mathbf{D}(\xi),$$

$F(x)$ — функция распределения, $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ — квантили ξ ,
 $\tilde{\xi}$ — случайная дискретная величина

$$\tilde{\xi}: \begin{pmatrix} x_{\pi_1} & x_{\pi_2} & x_{\pi_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{m} = \mathbf{E}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{s}^2 = \mathbf{D}(\tilde{\xi}).$$

Задача: аппроксимировать распределение случайной величины ξ дискретным распределением $\tilde{\xi}$, то есть найти p_1, p_2, p_3 такие, что

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$\tilde{m} = p_1 x_{\pi_1} + p_2 x_{\pi_2} + p_3 x_{\pi_3} = m,$$

$$\tilde{s}^2 = p_1 x_{\pi_1}^2 + p_2 x_{\pi_2}^2 + p_3 x_{\pi_3}^2 - m^2 = s^2.$$

4/30

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

└ Часть 1: Общий подход к трехточечной аппроксимации

Часть 1: Общий подход к трехточечной аппроксимации

Пусть ξ — непрерывная случайная величина, обозначим

$$m = \mathbf{E}(\xi), \quad s^2 = \mathbf{D}(\xi),$$

$F(x)$ — функция распределения, $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ — квантили ξ ,

$\tilde{\xi}$ — случайная дискретная величина

$$\tilde{\xi}: \begin{pmatrix} x_{\pi_1} & x_{\pi_2} & x_{\pi_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{m} = \mathbf{E}(\tilde{\xi}), \quad \tilde{s}^2 = \mathbf{D}(\tilde{\xi}).$$

Задача: аппроксимировать распределение случайной величины ξ дискретным распределением $\tilde{\xi}$, то есть найти p_1, p_2, p_3 такие, что

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$\tilde{m} = p_1 x_{\pi_1} + p_2 x_{\pi_2} + p_3 x_{\pi_3} = m,$$

$$\tilde{s}^2 = p_1 x_{\pi_1}^2 + p_2 x_{\pi_2}^2 + p_3 x_{\pi_3}^2 - m^2 = s^2.$$

Пусть ξ — непрерывная случайная величина, вводим основные обозначения для ξ , так же вводим дискретную случайную величину, которой будем аппроксимировать ξ . Ставится задача аппроксимации распределения ξ дискретным распределением $\tilde{\xi}$, то есть нужно вычислить p_1, p_2, p_3 такие, что верны следующие равенства.

Предложение (Swanson)

Пусть верно

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_{\pi_1} & \hat{x}_{\pi_2} & \hat{x}_{\pi_3} \\ \hat{x}_{\pi_1}^2 & \hat{x}_{\pi_2}^2 & \hat{x}_{\pi_3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_{\pi_i} = \hat{F}^{-1}(\pi_i)$, $\hat{F}(y)$ — функция распределения $\hat{\xi} = \frac{\xi - m}{s}$.
Тогда $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 1: Общий подход к трехточечной аппроксимации

Часть 1: Общий подход к трехточечной аппроксимации

Предложение (Swanson)

Пусть верно

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \hat{x}_{\pi_1} & \hat{x}_{\pi_2} & \hat{x}_{\pi_3} \\ \hat{x}_{\pi_1}^2 & \hat{x}_{\pi_2}^2 & \hat{x}_{\pi_3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\hat{x}_{\pi_i} = \hat{F}^{-1}(\pi_i)$, $\hat{F}(y)$ — функция распределения $\hat{\xi} = \frac{\xi - m}{s}$.
Тогда $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$.

Пусть верна следующая система, тогда $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$. Это Предложение дает требуемую аппроксимацию дискретным распределением, если найденные вероятности p_i являются неотрицательными.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Phi^{-1}(\pi) & 0 & -\Phi^{-1}(\pi) \\ \Phi^{-1}(\pi)^2 & 0 & \Phi^{-1}(\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\pi \\ p_{0.5} \\ p_{1-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение (Swanson)

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$, пусть верно

$$\begin{cases} p_\pi = p_{1-\pi} = \frac{\delta}{2}, \\ p_{0.5} = 1 - \delta, \end{cases}$$

где $\delta = \frac{1}{\Phi^{-1}(\pi)^2}$. Тогда $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 2: Аппроксимация нормального распределения

Часть 2: Аппроксимация нормального распределения

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Phi^{-1}(\pi) & 0 & -\Phi^{-1}(\pi) \\ \Phi^{-1}(\pi)^2 & 0 & \Phi^{-1}(\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\pi \\ p_{0.5} \\ p_{1-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение (Swanson)

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$, пусть верно

$$\begin{cases} p_\pi = p_{1-\pi} = \frac{\delta}{2}, \\ p_{0.5} = 1 - \delta, \end{cases}$$

где $\delta = \frac{1}{\Phi^{-1}(\pi)^2}$. Тогда $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$.

Если $\xi \sim N(\mu, \sigma)$ имеет нормальное распределение, то $\hat{\xi}$ имеет стандартное нормальное распределение, поэтому $\hat{\xi} \sim N(0, 1)$ в предыдущем Предложении. Поэтому значения вероятностей можно выразить через функцию распределения стандартного нормального распределения.

Рассмотрим частный случай $\pi = 0.1$, имеем

$$\Phi^{-1}(0.1) = -\Phi^{-1}(0.9) \approx -1.28, \quad \Phi^{-1}(0.5) = 0.$$

$$\begin{cases} p_1 \approx 0.305, \\ p_2 \approx 0.390, \\ p_3 \approx 0.305. \end{cases}$$

Эти вероятности примерно равны 0.3, 0.4, 0.3, поэтому это правило называют **правилом 30-40-30**.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 2: Аппроксимация нормального распределения

Рассматриваем частный случай $\pi = 0.1$. Для него вероятности примерно равны 0.3, 0.4, 0.3, поэтому это правило называют правилом 30-40-30.

Дано: квантили $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ логнормальной случайной величины η , $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$.

- 1 Вычисляем значения мат. ожидания m и дисперсии s^2 случайной величины η , используя известные $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$.
- 2 Выражаем параметры μ и σ мат. ожидание и дисперсию соответствующего нормального распределения через параметры m и s^2 логнормального распределения
- 3 С помощью системы уравнений из метода для нормального распределения находим значения весов p_1, p_2, p_3 .

Результат: веса p_1, p_2, p_3 для $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ случайной величины $\tilde{\xi}$.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Аппроксимация логнормального распределения

Часть 3: Аппроксимация логнормального распределения

Дано: квантили $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ логнормальной случайной величины η , $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$.

- 1 Вычисляем значения мат. ожидания m и дисперсии s^2 случайной величины η , используя известные $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$.
- 2 Выражаем параметры μ и σ мат. ожидание и дисперсию соответствующего нормального распределения через параметры m и s^2 логнормального распределения
- 3 С помощью системы уравнений из метода для нормального распределения находим значения весов p_1, p_2, p_3 .

Результат: веса p_1, p_2, p_3 для $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ случайной величины $\tilde{\xi}$.

Построим алгоритм для нахождения трехточечной симметричной аппроксимации логнормального распределения. Заданы три квантиля $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$, вычисляем по ним мат. ожидание m и дисперсию s^2 случайной величины η . Затем выражаем параметры μ и σ и наконец находим значения весов p_1, p_2, p_3 .

Часть 3: Условие на параметр σ

Мною доказаны следующие предложения.

Предложение

Неотрицательные вероятности p_1, p_2, p_3 для аппроксимации логнормальной случайной величины η существуют только при условии

$$\exp(\sigma^2) + \exp(-\sigma^2) - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) (\exp(c\sigma) + \exp(-c\sigma)) \leq 0,$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$.

Предложение

При уменьшении значения π диапазон значений σ увеличивается.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Условие на параметр σ

Мы рассмотрели способ вычисления весов для квантилей при аппроксимации логнормального распределения. Но найденные веса являются вероятностями не при любом σ . Выясним, какое должно быть ограничение на этот параметр. В следующем предложении получено условие на σ для существования трехточечной симметричной аппроксимации логнормального распределения. При уменьшении значения π диапазон значений σ увеличивается.

Часть 3: Условие на параметр σ

Мною доказаны следующие предложения.

Предложение

Неотрицательные вероятности p_1, p_2, p_3 для аппроксимации логнормальной случайной величины η существуют только при условии

$$\exp(\sigma^2) + \exp(-\sigma^2) - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}\right) (\exp(c\sigma) + \exp(-c\sigma)) \leq 0,$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$.

Предложение

При уменьшении значения π диапазон значений σ увеличивается.

Задача: имеются квантили x_π , $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ логнормальной случайной величины η . Нужно уметь считать m и s^2 .

- 1 Используя значения двух квантилей, найти значения параметров μ и σ нормальной случайной величины $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$. Через них вычислить значения m и s^2 .
- 2 Найти значения p_1 , p_2 , p_3 такие, что

$$p_1 x_{\pi_1} + p_2 x_{\pi_2} + p_3 x_{\pi_3} = m,$$

$$p_1 x_{\pi_1}^2 + p_2 x_{\pi_2}^2 + p_3 x_{\pi_3}^2 - m^2 = s^2.$$

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Варианты постановки задачи

Часть 3: Варианты постановки задачи

Задача: имеются квантили x_π , $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ логнормальной случайной величины η . Нужно уметь считать m и s^2 .

- 1 Используя значения двух квантилей, найти значения параметров μ и σ нормальной случайной величины $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$. Через них вычислить значения m и s^2 .
- 2 Найти значения p_1 , p_2 , p_3 такие, что

$$p_1 x_{\pi_1} + p_2 x_{\pi_2} + p_3 x_{\pi_3} = m,$$

$$p_1 x_{\pi_1}^2 + p_2 x_{\pi_2}^2 + p_3 x_{\pi_3}^2 - m^2 = s^2.$$

Рассмотрим варианты постановки задачи поиска m и s^2 . Можно не переходить к аппроксимации дискретным распределением, а сразу вычислить моменты, используя значения квантилей. Второй вариант искать значения p_1 , p_2 , p_3 . Если они положительные, то рассматривается аппроксимация дискретной $\tilde{\xi}$, у которой $\tilde{m} = m$ и $\tilde{s}^2 = s^2$. Если не все положительные, то можно воспринимать задачу формально, как поиск коэффициентов линейной комбинации x_π , $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$.

Проблема: метод Свонсона выведенный для аппроксимации нормального распределения используют для логнормального.
Вопрос: какова точность аппроксимации m и s^2 ?

Предложение

Ошибка аппроксимации мат.ожидания логнормального распределения по методу Свонсона, выведенному для аппроксимации нормального распределения, равна

$$\left| \frac{m - \tilde{m}}{m} \right| = \left| \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{2c^2} \times \right. \\ \left. \times (\exp(c\sigma) - 1 + \exp(-c\sigma)) + 1 \right| / \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right),$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$, и не зависит от параметра μ .

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Точность неправильной аппроксимации

Предлагаемые методы аппроксимации трехточечным дискретным распределением логнормального распределения не работают при $\sigma \leq 0.6913$. На практике часто используют метод Свонсона выведенный для аппроксимации нормального распределения. Мною доказано это предложение. Ошибка аппроксимации мат. ожидания выражается следующим образом и не зависит от параметра μ .

Часть 3: Точность неправильной аппроксимации

Проблема: метод Свонсона выведенный для аппроксимации нормального распределения используют для логнормального.
Вопрос: какова точность аппроксимации m и s^2 ?

Предложение

Ошибка аппроксимации мат.ожидания логнормального распределения по методу Свонсона, выведенному для аппроксимации нормального распределения, равна

$$\left| \frac{m - \tilde{m}}{m} \right| = \left| \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right) - \frac{1}{2c^2} \times \right. \\ \left. \times (\exp(c\sigma) - 1 + \exp(-c\sigma)) + 1 \right| / \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right),$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$, и не зависит от параметра μ .

Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

Предложение

Ошибка аппроксимации дисперсии логнормального распределения по методу Свонсона, выведенному для аппроксимации нормального распределения, равна

$$\begin{aligned} \left| \frac{s^2 - \tilde{s}^2}{s^2} \right| = & \left| \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1)) - \right. \\ & - \frac{1}{2c^2} \exp(-2c\sigma) - \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \exp(2c\sigma) + \\ & \left. + \left(\frac{1}{2c^2} (\exp(c\sigma) - 1 + \exp(-c\sigma)) + 1 \right)^2 \right| / \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1)), \end{aligned}$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$, и не зависит от параметра μ .

12/30

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

Ошибка аппроксимации дисперсии выражается следующим образом и тоже не зависит от параметра μ .

Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

Предложение

Ошибка аппроксимации дисперсии логнормального распределения по методу Свонсона, выведенному для аппроксимации нормального распределения, равна

$$\begin{aligned} \left| \frac{s^2 - \tilde{s}^2}{s^2} \right| = & \left| \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1)) - \right. \\ & - \frac{1}{2c^2} \exp(-2c\sigma) - \left(1 - \frac{1}{c^2}\right) \exp(2c\sigma) + \\ & \left. + \left(\frac{1}{2c^2} (\exp(c\sigma) - 1 + \exp(-c\sigma)) + 1 \right)^2 \right| / \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1)), \end{aligned}$$

где $c = \Phi^{-1}(\pi)$, и не зависит от параметра μ .

Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

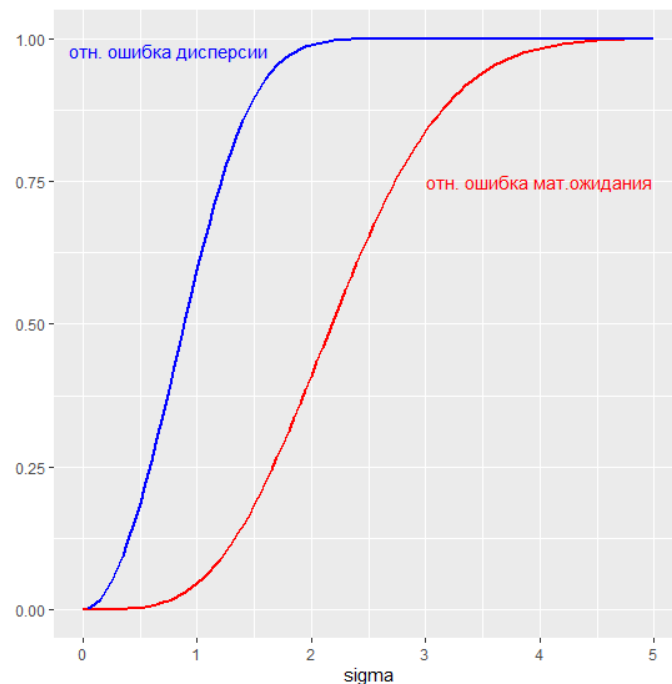


Рис.: Относительная ошибка аппроксимации мат.ож. и дисперсии

13/30

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

└ Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

Часть 3: Точность метода Свонсона для логнормального распределения

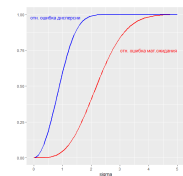


Рис.: Относительная ошибка аппроксимации мат.ож. и дисперсии

Теперь посмотрим на график зависимости ошибок аппроксимации математического ожидания и дисперсии от параметра σ . Видим, что при $\sigma \leq 1.5$ ошибка аппроксимации математического ожидания меньше 12%, а ошибка аппроксимации дисперсии может достигать 80%. Для интересующих нас значений $\sigma \geq 0.69$ ошибка математического ожидания может быть как маленькой, так и очень большой. Ошибка дисперсии при этом точно больше 25%.

Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Рассмотрим две логнормальные случайные величины

- $\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,
- $\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

которые заданы своими квантилями

- $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ — симметричные квантили ξ_1 ,
- $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ — симметричные квантили ξ_2 .

Задача: аппроксимировать непрерывную случайную величину $\eta = \xi_1 \xi_2$ дискретной, то есть найти квантили вида $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$.

Замена непрерывного распределения

— Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Рассмотрим две логнормальные случайные величины

- $\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$,
- $\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

которые заданы своими квантилями

- $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ — симметричные квантили ξ_1 ,
- $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ — симметричные квантили ξ_2 .

Задача: аппроксимировать непрерывную случайную величину $\eta = \xi_1 \xi_2$ дискретной, то есть найти квантили вида $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$.

Рассмотрим произведение логнормально распределенных случайных величин. Эта процедура применяется в нефтяной промышленности. Для случайных величин ξ_1 и ξ_2 заданы наборы квантилей. Ставим задачу аппроксимировать случайную величину $\eta = \xi_1 \xi_2$ дискретной, то есть найти квантили вида $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$.

Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Предложение (Swanson)

Зная квантили $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ случайной величины ξ_1 и квантили $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ случайной величины ξ_2 можно найти квантили $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$ случайной величины $\xi_1\xi_2$, как

$$z_\pi = \exp(b\Phi^{-1}(\pi) + a),$$

$$z_{0.5} = x_{0.5}y_{0.5},$$

$$z_{1-\pi} = \exp(b\Phi^{-1}(1-\pi) + a),$$

где a и b такие, что прямая $y = \frac{x-a}{b}$, проходит через точки $(\ln(x_\pi y_\pi), t)$ и $(\ln(x_{0.5}y_{0.5}), 0)$ при

$$t = \frac{\Phi^{-1}(\pi)((\ln(x_{0.5}) + \ln(y_{0.5})) - (\ln(x_\pi) + \ln(y_\pi)))}{\sqrt{(\ln(x_{0.5}) - \ln(x_\pi))^2 + (\ln(y_{0.5}) - \ln(y_\pi))^2}}.$$

15/30

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

— Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Часть 4: Произведение двух логнормальных распределений

Предложение (Swanson)

Зная квантили $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ случайной величины ξ_1 и квантили $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ случайной величины ξ_2 можно найти квантили $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$ случайной величины $\xi_1\xi_2$, как

$$z_\pi = \exp(b\Phi^{-1}(\pi) + a),$$

$$z_{0.5} = x_{0.5}y_{0.5},$$

$$z_{1-\pi} = \exp(b\Phi^{-1}(1-\pi) + a),$$

где a и b такие, что прямая $y = \frac{x-a}{b}$, проходит через точки $(\ln(x_\pi y_\pi), t)$ и $(\ln(x_{0.5}y_{0.5}), 0)$ при

$$t = \frac{\Phi^{-1}(\pi)((\ln(x_{0.5}) + \ln(y_{0.5})) - (\ln(x_\pi) + \ln(y_\pi)))}{\sqrt{(\ln(x_{0.5}) - \ln(x_\pi))^2 + (\ln(y_{0.5}) - \ln(y_\pi))^2}}.$$

Следующее предложение было мною подробно доказано, но сама идея доказательства взята из статьи. Зная квантили $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ случайной величины ξ_1 и квантили $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ случайной величины ξ_2 можно найти квантили $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$ случайной величины $\xi_1\xi_2$.

Рассмотрим сумму двух логнормальных случайных величин.

$$\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$

$$\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2.$$

ξ_1 и ξ_2 заданы своими квантилями.

Поставим задачу аппроксимации суммы логнормальным распределением $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$, так как нужно рассматривать сумму не обязательно двух, а произвольного числа случайных величин.

Задача: найти квантили z_π , $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$ случайной величины η .

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений

Рассмотрим сумму двух логнормальных случайных величин.

$$\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$

$$\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2.$$

ξ_1 и ξ_2 заданы своими квантилями.

Поставим задачу аппроксимации суммы логнормальным распределением $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$, так как нужно рассматривать сумму не обязательно двух, а произвольного числа случайных величин.

Задача: найти квантили z_π , $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$ случайной величины η .

Рассмотрим сумму двух логнормальных случайных величин, которые заданы наборами своих квантилей. Поставим задачу аппроксимации суммы логнормальным распределением $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$, так как нужно рассматривать сумму не обязательно двух, а произвольного числа случайных величин. По известным квантилям уже знаем, как вычислить вероятности p_1 , p_2 , p_3 такие, что $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$.

Дано: Квантили $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ — квантили ξ_1 , $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ — квантили ξ_2 .

- ❶ $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi} \rightarrow \mu_1, \sigma_1$
- ❷ $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi} \rightarrow \mu_2, \sigma_2$
- ❸ $\mu_i, \sigma_i \rightarrow m_i, s_i^2$
- ❹ $m = m_1 + m_2$
- ❺ $s^2 = s_1^2 + s_2^2$
- ❻ $m, s^2 \rightarrow \mu, \sigma$
- ❼ $\mu, \sigma \rightarrow z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$
- ❽ $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi} \rightarrow p_1, p_2, p_3$

Результат: вероятности p_1, p_2, p_3 для квантилей $z_{\pi_1}, z_{\pi_2}, z_{\pi_3}$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

Замена непрерывного распределения

— Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений

Дано: Квантили $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi}$ — квантили ξ_1 , $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi}$ — квантили ξ_2 .

- ❶ $x_\pi, x_{0.5}, x_{1-\pi} \rightarrow \mu_1, \sigma_1$
- ❷ $y_\pi, y_{0.5}, y_{1-\pi} \rightarrow \mu_2, \sigma_2$
- ❸ $\mu_i, \sigma_i \rightarrow m_i, s_i^2$
- ❹ $m = m_1 + m_2$
- ❺ $s^2 = s_1^2 + s_2^2$
- ❻ $m, s^2 \rightarrow \mu, \sigma$
- ❼ $\mu, \sigma \rightarrow z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi}$
- ❽ $z_\pi, z_{0.5}, z_{1-\pi} \rightarrow p_1, p_2, p_3$

Результат: вероятности p_1, p_2, p_3 для квантилей $z_{\pi_1}, z_{\pi_2}, z_{\pi_3}$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

Получен следующий алгоритм аппроксимации суммы двух логнормальных распределений. По набору квантилей ξ_1 находим параметры μ_1, σ_1 соответствующего нормального распределения. По набору квантилей ξ_2 находим параметры μ_2, σ_2 соответствующего нормального распределения. Потом находим мат. ожидания и дисперсии ξ_1 и ξ_2 . Затем вычисляем мат.ожидание и дисперсию $\xi_1 + \xi_2$. Через них находим параметры нормального распределения и затем находим значения квантилей через μ и σ .

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Ошибки аппроксимации квантилей q_π , $q_{0.5}$, $q_{1-\pi}$ случайной величины ξ равны

$$\frac{|q_\pi - z_\pi|}{q_\pi}, \quad \frac{|q_{0.5} - z_{0.5}|}{q_{0.5}}, \quad \frac{|q_{1-\pi} - z_{1-\pi}|}{q_{1-\pi}},$$

где

$$z_{100p} = F_\eta^{-1}(p) = \exp(\mu + \sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)).$$

Значение квантилей q_i выражаются как $q_{100p} = F_\xi^{-1}(p)$, где

$$F_\xi(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(x-y) - \mu_1}{\sigma_1\sqrt{2}} \right) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma_2} \exp \left(- \left(\frac{\ln(y) - \mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2} \right)^2 \right) \right) dy.$$

Замена непрерывного распределения

— Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Ошибки аппроксимации квантилей q_π , $q_{0.5}$, $q_{1-\pi}$ случайной величины ξ равны

$$\frac{|q_\pi - z_\pi|}{q_\pi}, \quad \frac{|q_{0.5} - z_{0.5}|}{q_{0.5}}, \quad \frac{|q_{1-\pi} - z_{1-\pi}|}{q_{1-\pi}},$$

где

$$z_{100p} = F_\eta^{-1}(p) = \exp(\mu + \sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2p - 1)).$$

Значение квантилей q_i выражаются как $q_{100p} = F_\xi^{-1}(p)$, где

$$F_\xi(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\ln(x-y) - \mu_1}{\sigma_1\sqrt{2}} \right) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma_2} \exp \left(- \left(\frac{\ln(y) - \mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2} \right)^2 \right) \right) dy.$$

Выразим ошибки аппроксимации квантилей q_π , $q_{0.5}$, $q_{1-\pi}$ случайной величины ξ , здесь параметры μ , σ можно найти через параметры случайных величин ξ_1 , ξ_2 и вычисленные значения $m = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) + \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)$, $s^2 = m_1^2(\exp(\sigma_1^2) - 1) + m_2^2(\exp(\sigma_2^2) - 1)$, так как для независимых случайных величин мат.ожидание суммы равно сумме мат.ожиданий, дисперсия суммы равна сумме дисперсий. Функция $F_\xi(x)$ получена по формуле свертки.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Рассмотрим $\ln(\xi_1) \sim N(4, \sigma_1^2)$, $\ln(\xi_2) \sim N(4, \sigma_2^2)$ и найдем ошибки с помощью моделирования, объемы выборок равны 10^6 .

Таблица: Ошибка аппроксимации медианы (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	0.24	0.46	4.19	11.67	21.10
0.75	0.74	0.40	3.06	11.46	20.99
1.25	4.25	3.27	2.48	6.18	16.15
1.75	12.18	10.12	5.57	5.24	9.92
2.25	20.94	20.20	16.29	9.59	8.47

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Рассмотрим $\ln(\xi_1) \sim N(4, \sigma_1^2)$, $\ln(\xi_2) \sim N(4, \sigma_2^2)$ и найдем ошибки с помощью моделирования, объемы выборок равны 10^6 .

Таблица: Ошибка аппроксимации медианы (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	0.24	0.46	4.19	11.67	21.10
0.75	0.74	0.40	3.06	11.46	20.99
1.25	4.25	3.27	2.48	6.18	16.15
1.75	12.18	10.12	5.57	5.24	9.92
2.25	20.94	20.20	16.29	9.59	8.47

Рассмотрим $\ln(\xi_1) \sim N(4, \sigma_1^2)$, $\ln(\xi_2) \sim N(4, \sigma_2^2)$ и найдем ошибки с помощью моделирования, объемы выборок равны 10^6 . В данной таблице представлены ошибки для аппроксимации медианы. По построению аппроксимации суммы двух логнормальных распределений логнормальным распределением ошибки мат. ожидания и дисперсии равны 0, то есть $m = \tilde{m}$ и $s^2 = \tilde{s}^2$. Но если для каких-либо расчетов понадобятся квантили η , то ошибка медианы может достигать 21%.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: Ошибка аппроксимации q_{10} (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	2.35	13.59	23.93	33.20	42.75
0.75	1.20	10.54	21.80	33.93	42.82
1.25	3.02	7.03	18.43	29.49	40.09
1.75	14.45	5.27	14.33	26.50	36.75
2.5	34.70	11.44	11.10	23.05	32.84

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: Ошибка аппроксимации q_{10} (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	2.35	13.59	23.93	33.20	42.75
0.75	1.20	10.54	21.80	33.93	42.82
1.25	3.02	7.03	18.43	29.49	40.09
1.75	14.45	5.27	14.33	26.50	36.75
2.5	34.70	11.44	11.10	23.05	32.84

В данной таблице представлены ошибки для аппроксимации q_{10} , они могут достигать 67%.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: Ошибка аппроксимации q_{90} (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	0.16	5.03	13.69	17.74	19.37
0.75	5.63	1.89	5.77	10.70	16.03
1.25	13.55	5.75	2.52	6.00	9.79
1.75	19.95	11.88	5.77	3.50	4.89
2.25	18.47	15.44	9.42	5.50	5.27

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: Ошибка аппроксимации q_{90} (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	0.16	5.03	13.69	17.74	19.37
0.75	5.63	1.89	5.77	10.70	16.03
1.25	13.55	5.75	2.52	6.00	9.79
1.75	19.95	11.88	5.77	3.50	4.89
2.25	18.47	15.44	9.42	5.50	5.27

В данной таблице представлены ошибки для аппроксимации q_{90} , они могут достигать 20%.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: Коэффициент асимметрии суммы (голубой) и аппроксимации (розовый) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	1.77	4.23	6.71	15.59	16.68
	1.53	3.75	7.48	14.76	29.70
0.75	1.66	3.86	7.39	11.43	54.43
	1.55	3.65	7.22	14.25	28.77
1.25	2.13	3.68	8.73	13.76	29.28
	1.71	3.60	6.97	13.68	27.66
1.75	5.88	4.06	7.50	31.50	24.89
	2.17	3.71	6.79	13.09	26.41
2.5	11.18	8.85	8.55	10.34	23.61
	3.30	4.29	6.90	12.66	25.13

22/30

Нагуманова К. И.

Замена непрерывного распределения

Замена непрерывного распределения

— Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: Коэффициент асимметрии суммы (голубой) и аппроксимации (розовый) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	1.77	4.23	6.71	15.59	16.68
	1.53	3.75	7.48	14.76	29.70
0.75	1.66	3.86	7.39	11.43	54.43
	1.55	3.65	7.22	14.25	28.77
1.25	2.13	3.68	8.73	13.76	29.28
	1.71	3.60	6.97	13.68	27.66
1.75	5.88	4.06	7.50	31.50	24.89
	2.17	3.71	6.79	13.09	26.41
2.5	11.18	8.85	8.55	10.34	23.61
	3.30	4.29	6.90	12.66	25.13

Теперь посмотрим на таблицу с коэффициентами асимметрии для суммы $\xi_1 + \xi_2$, они выделены голубым цветом и на коэффициенты асимметрии для аппроксимации, они выделены розовым цветом.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: Коэффициент эксцесса суммы (голубой) и аппроксимации (розовый) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	6.54	51.70	227.68	408.58	734.47
	4.42	32.60	180.39	1088.57	7274.56
0.75	6.21	61.66	144.59	201.69	1304.88
	4.56	30.53	164.86	990.42	6666.16
1.25	11.47	27.75	179.22	193.95	546.57
	5.61	29.53	150.21	886.71	5989.44
1.75	122.65	46.01	110.03	276.24	14081.05
	9.44	31.88	140.69	788.78	5280.07
2.5	195.77	283.81	344.56	4837.85	1292.23
	24.08	44.88	146.68	720.26	4612.33

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: Коэффициент эксцесса суммы (голубой) и аппроксимация (розовый) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.5
0.25	6.54	51.70	227.68	408.58	734.47
	4.42	32.60	180.39	1088.57	7274.56
0.75	6.21	61.66	144.59	201.69	1304.88
	4.56	30.53	164.86	990.42	6666.16
1.25	11.47	27.75	179.22	193.95	546.57
	5.61	29.53	150.21	886.71	5989.44
1.75	122.65	46.01	110.03	276.24	14081.05
	9.44	31.88	140.69	788.78	5280.07
2.5	195.77	283.81	344.56	4837.85	1292.23
	24.08	44.88	146.68	720.26	4612.33

Также можно посмотреть на коэффициенты эксцесса суммы и аппроксимации.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Посчитаем значения функции $F_{\xi}(x)$ от квантилей z_{10} , z_{50} , z_{90} случайной величины η . Они показывают, каким квантилем для ξ являются квантили z_i . Результаты приведены в следующих таблицах.

Таблица: $F_{\eta}(z_{50})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	50.10	49.87	46.96	42.18	36.95
0.75	49.87	49.82	48.30	44.55	39.74
1.25	46.96	48.30	49.00	47.19	43.31
1.75	42.18	44.55	47.19	47.91	46.03
2.25	36.95	39.74	43.31	46.03	46.73

Замена непрерывного распределения

— Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Посчитаем значения функции $F_{\xi}(x)$ от квантилей z_{10} , z_{50} , z_{90} случайной величины η . Они показывают, каким квантилем для ξ являются квантили z_i . Результаты приведены в следующих таблицах.

Таблица: $F_{\eta}(z_{50})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	50.10	49.87	46.96	42.18	36.95
0.75	49.87	49.82	48.30	44.55	39.74
1.25	46.96	48.30	49.00	47.19	43.31
1.75	42.18	44.55	47.19	47.91	46.03
2.25	36.95	39.74	43.31	46.03	46.73

Посчитаем значения функции $F_{\xi}(x)$ от квантилей z_{10} , z_{50} , z_{90} случайной величины η . Они показывают, каким квантилем для ξ являются квантили z_i . В данной таблице приведены значения $F_{\eta}(z_{50})$. Видим, что они не сильно далеки от нужных 50%.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: $F_{\eta}(z_{10})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	9.79	5.84	1.82	0.32	0.04
0.75	5.84	8.89	6.45	3.14	1.19
1.25	1.82	6.45	7.85	6.00	3.35
1.75	0.32	3.14	6.00	6.89	5.43
2.25	0.04	1.19	3.35	5.43	6.08

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: $F_{\eta}(z_{10})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	9.79	5.84	1.82	0.32	0.04
0.75	5.84	8.89	6.45	3.14	1.19
1.25	1.82	6.45	7.85	6.00	3.35
1.75	0.32	3.14	6.00	6.89	5.43
2.25	0.04	1.19	3.35	5.43	6.08

В данной таблице приведены значения $F_{\eta}(z_{10})$.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Таблица: $F_\eta(z_{90})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	90.08	91.47	92.31	92.42	92.19
0.75	91.47	90.38	91.11	91.83	92.02
1.25	92.31	91.11	90.57	90.93	91.31
1.75	92.42	91.83	90.93	90.62	90.75
2.25	92.19	92.02	91.31	90.75	90.56

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных
распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Таблица: $F_\eta(z_{90})$ (%) в зависимости от σ_1^2 (строка) и σ_2^2 (столбец)

	0.25	0.75	1.25	1.75	2.25
0.25	90.08	91.47	92.31	92.42	92.19
0.75	91.47	90.38	91.11	91.83	92.02
1.25	92.31	91.11	90.57	90.93	91.31
1.75	92.42	91.83	90.93	90.62	90.75
2.25	92.19	92.02	91.31	90.75	90.56

В данной таблице приведены значения $F_\eta(z_{90})$.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Построим оценки плотности для ξ и η , когда ошибки имеют очень маленькие значения и когда достаточно большие.

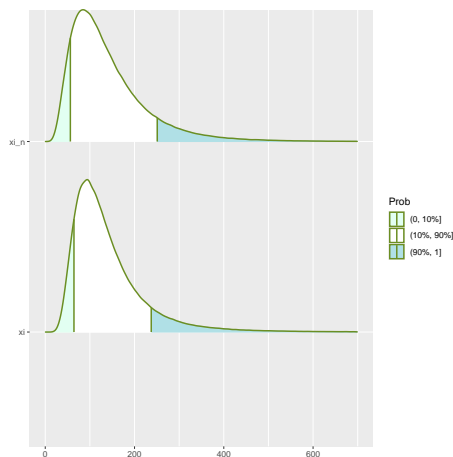


Рис.: $\sigma_1^2 = 0.25$, $\sigma_2^2 = 0.25$,
 $err_{med} = 0.17\%$,
 $err_{q_{10}} = 0.35\%$,
 $err_{q_{90}} = 0.12\%$.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

Построим оценки плотности для ξ и η , когда ошибки имеют очень маленькие значения и когда достаточно большие.

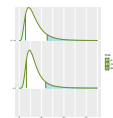


Рис.: $\sigma_1^2 = 0.25$, $\sigma_2^2 = 0.25$,
 $err_{med} = 0.17\%$,
 $err_{q_{10}} = 0.35\%$,
 $err_{q_{90}} = 0.12\%$.

Построим оценки плотности для ξ и η , когда ошибки имеют очень маленькие значения и когда достаточно большие. На данном графике представлен случай $\sigma_1^2 = 0.25$, $\sigma_2^2 = 0.25$, при этом ошибки q_{10} , q_{50} , q_{90} близки к нулю.

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений. Точность аппроксимации

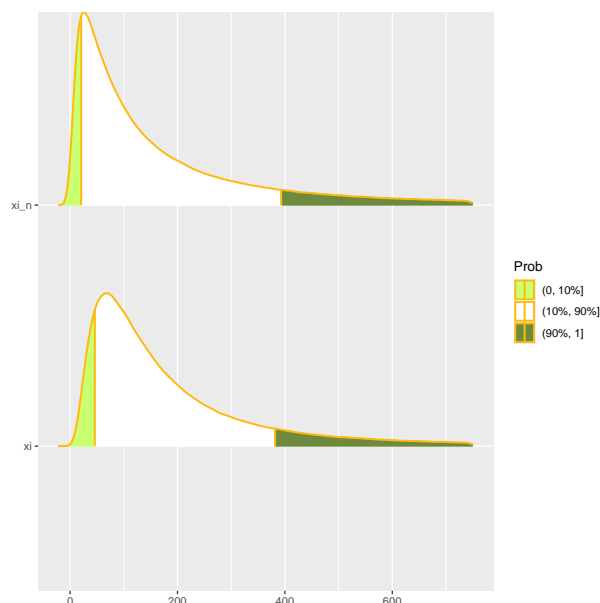


Рис.: $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.75$,
 $err_{med} = 20.4\%$, $err_{q_{10}} = 54.13\%$,
 $err_{q_{90}} = 15.54\%$.

Замена непрерывного распределения

└ Часть 5: Сумма двух логнормальных
распределений. Точность аппроксимации

Часть 5: Сумма двух логнормальных распределений.
Точность аппроксимации

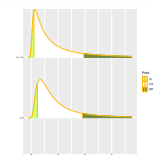


Рис.: $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.75$,
 $err_{med} = 20.4\%$, $err_{q_{10}} = 54.13\%$,
 $err_{q_{90}} = 15.54\%$.

Теперь построим оценки плотности для ξ и η , когда ошибки имеют большие значения. На данном графике представлен случай $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.75$.

Мною были получены следующие результаты:

- 1 Получено условие на σ для существования трехточечной симметричной аппроксимации логнормального распределения.
- 2 Численно оценена точность аппроксимации мат. ожидания и дисперсии логнормального распределения с помощью метода Свонсона, применяемого к нормальному распределению.
- 3 Построен алгоритм для нахождения трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений.
- 4 Численно оценена точность трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений.

Замена непрерывного распределения




└─ Заключение

Заключение

Мною были получены следующие результаты:

- 1 Получено условие на σ для существования трехточечной симметричной аппроксимации логнормального распределения.
- 2 Численно оценена точность аппроксимации мат. ожидания и дисперсии логнормального распределения с помощью метода Свонсона, применяемого к нормальному распределению.
- 3 Построен алгоритм для нахождения трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений.
- 4 Численно оценена точность трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений.

Таким образом, мною были получены следующие результаты. Получено условие на σ для существования трехточечной симметричной аппроксимации логнормального распределения. Численно оценена точность аппроксимации мат. ожидания и дисперсии логнормального распределения с помощью метода Свонсона, применяемого к нормальному распределению. Построен алгоритм для нахождения трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений. Численно оценена точность трехточечной симметричной аппроксимации суммы логнормальных распределений.




-  Keith G. Swanson's Swansong.— Текст: электронный // stochastic: [сайт].— URL: <https://www.stochastic.dk/post/swanson-s-swansong> (дата обращения: 10.05.2023).
-  Bickel, J. Eric, Lake, Larry W., and John Lehman. "Discretization, Simulation, and Swanson's (Inaccurate) Mean." SPE Econ Mgmt 3 (2011): 128–140. doi: <https://doi.org/10.2118/148542-PA>.
-  Bickel, J. Eric. "Discretization, Simulation, and the Value of Information." Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, USA, October 2011. doi: <https://doi.org/10.2118/145690-MS>.

Замена непрерывного распределения

— Список литературы

Список литературы.

Список литературы

-  Keith G. Swanson's Swansong.— Текст: электронный // stochastic: [сайт].— URL: <https://www.stochastic.dk/post/swanson-s-swansong> (дата обращения: 10.05.2023).
-  Bickel, J. Eric, Lake, Larry W., and John Lehman. "Discretization, Simulation, and Swanson's (Inaccurate) Mean." SPE Econ Mgmt 3 (2011): 128–140. doi: <https://doi.org/10.2118/148542-PA>.
-  Bickel, J. Eric. "Discretization, Simulation, and the Value of Information." Paper presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Denver, Colorado, USA, October 2011. doi: <https://doi.org/10.2118/145690-MS>.