# Замена непрерывного распределения на дискретное для применения на практике

Нагуманова Карина Ильнуровна, 19Б.04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Санкт-Петербург
2023г.

# Введение

В практических задачах часто требуется заменить непрерывное распределение на дискретное с сохранением математического ожидания и дисперсии. Одним из методов нахождения такого распределения для аппроксимации нормального распределения является **метод Свонсона**.

Однако в ряде областей, например, в нефтяной промышленности распределением, описывающим запасы нефти, общепринятым является логнормальное распределение. Соответственно, реальной задачей является аппроксимация логнормального распределения.

# Введение

Аппроксимируемые случайные величины складывают и умножают.

Пример перемножения: используем площадь дренирования пласта, среднюю чистую толщину и коэффициент извлечения углеводородов. При перемножении этих параметров получаем количество резервов нефти.

Пример сложения: зная запасы, параметры нефти и породы для всех залежей можно оценить профиль добычи нефти с каждой залежи и суммарный профиль, оценить экономическую эффективность проекта, которая учитывает выручку, налоги, капитальные затраты, операционные затраты, оптимальные решения по проекту.

**Задача:** находить аппроксимацию суммы и произведения по аппроксимациям исходных случайных величин.

**Структура работы.**

- В **разделе 2** рассмотрен общий подход к трехточечной аппроксимации.
- В **разделе 3** аппроксимация нормального распределения, вывод правила 30-40-30.
- В **разделе 4** рассматривается аппроксимация логнормального распределения, два метода, условие аппроксимации и что делать, если это условие не выполняется. А также точность аппроксимации при применении правила 30-40-30 к логнормальному распределению.
- В **разделе 5** алгоритм аппроксимации произведения двух логнормальных распределений.
- В **разделе 6** алгоритм аппроксимации суммы двух логнормальных распределений.

$\xi$ — непрерывная случайная величина с математическим ожиданием $m$, дисперсией $s^2$ и функцией распределения $F(x)$. Для неё заданы квантили $x_{\pi_1}$, $x_{\pi_2}$, $x_{\pi_3}$. Также есть случайная дискретная величина $\xi_n$ с математическим ожиданием $m_n$ и дисперсией $s_n^2$.

$$\xi_n : \quad \begin{pmatrix} x_{\pi_1} & x_{\pi_2} & x_{\pi_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Нужно аппроксимировать распределение случайной величины $\xi$ дискретным распределением $\xi_n$.

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

$$m_n = p_1 x_{\pi_1} + p_2 x_{\pi_2} + p_3 x_{\pi_3} = m,$$

$$s_n^2 = p_1 x_{\pi_1}^2 + p_2 x_{\pi_2}^2 + p_3 x_{\pi_3}^2 - m^2 = s^2.$$

# Условия аппроксимации в общем случае

## Предложение

*Пусть верно*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{x}_{\pi_1} & \tilde{x}_{\pi_2} & \tilde{x}_{\pi_3} \\ \tilde{x}^2_{\pi_1} & \tilde{x}^2_{\pi_2} & \tilde{x}^2_{\pi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

*где* $\tilde{x}_{\pi_i} = \tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi_i)$, $\tilde{\mathsf{F}}(y)$ *— функция распределения* $\eta = \dfrac{\xi - m}{s}$.
*Тогда* $m = m_n$ *и* $s^2 = s_n^2$.

***Доказательство:***

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi - m}{s} \leq \frac{x_{\pi_i} - m}{s}\right) = \tilde{\mathsf{F}}\left(\frac{x_{\pi_i} - m}{s}\right) = \pi_i,$$

$$\tilde{x}_{\pi_i} = \frac{x_{\pi_i} - m}{s} = \tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi_i).$$

# Условия аппроксимации в общем случае

Предположим, что $m = m_n$ и $s^2 = s_n^2$, и получим систему для вероятностей. Для этого подставим $\tilde{x}_{\pi_i}$ в формулу мат.ожидания, получаем

$$m(p_1 + p_2 + p_3) + s(p_1\tilde{x}_{\pi_1} + p_2\tilde{x}_{\pi_2} + p_3\tilde{x}_{\pi_3}) = m.$$

Получаем

$$s(p_1\tilde{x}_{\pi_1} + p_2\tilde{x}_{\pi_2} + p_3\tilde{x}_{\pi_3}) = 0.$$

$$p_1\tilde{x}_{\pi_1} + p_2\tilde{x}_{\pi_2} + p_3\tilde{x}_{\pi_3} = 0.$$

Подставим в формулу дисперсии

$$p_1(m + s\tilde{x}_{\pi_1})^2 + p_2(m + s\tilde{x}_{\pi_2})^2 + p_3(m + s\tilde{x}_{\pi_3})^2 - m^2 = s^2,$$

$$p_1\tilde{x}_{\pi_1}^2 + p_2\tilde{x}_{\pi_2}^2 + p_3\tilde{x}_{\pi_3}^2 = 1.$$

Получившиеся уравнения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \tilde{x}_{\pi_1} & \tilde{x}_{\pi_2} & \tilde{x}_{\pi_3} \\ \tilde{x}_{\pi_1}^2 & \tilde{x}_{\pi_2}^2 & \tilde{x}_{\pi_3}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Аппроксимация нормального распределения

В общем случае вероятности $p_1, p_2, p_3$ будут зависеть от математического ожидания и дисперсии.

Если $\xi \sim N(\mu, \sigma)$ имеет нормальное распределение, то $\eta$ имеет нормальное стандартное распределение, которое не зависит ни от $\mu$, ни от $\sigma$.

## Предложение

$\xi \sim N(\mu, \sigma)$, *пусть верно*

$$\begin{cases} p_\pi = p_{1-\pi} = \dfrac{\delta}{2}, \\ p_{0.5} = 1 - \delta, \end{cases}$$

*где* $\delta = \dfrac{1}{\Phi^{-1}(\pi)^2}$. *Тогда* $m = m_n$ *и* $s^2 = s_n^2$.

## Аппроксимация нормального распределения. Случай симметричных квантилей

***Доказательство:*** Предположим, что $m = m_n$ и $s^2 = s_n^2$, и получим значения вероятностей.

$\Phi(y) = \mathsf{P}(\eta = \dfrac{\xi - m}{s} \leq y)$ — функция распределения стандартного нормального распределения, тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Phi^{-1}(\pi_1) & \Phi^{-1}(\pi_2) & \Phi^{-1}(\pi_3) \\ \Phi^{-1}(\pi_1)^2 & \Phi^{-1}(\pi_2)^2 & \Phi^{-1}(\pi_3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В частном случае симметричных квантилей вида $\pi$, 0.5, $1 - \pi$ получаем $\Phi^{-1}(\pi) = -\Phi^{-1}(1 - \pi)$, $\Phi^{-1}(0.5) = 0$, тогда система упрощается до

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Phi^{-1}(\pi) & 0 & -\Phi^{-1}(\pi) \\ \Phi^{-1}(\pi)^2 & 0 & \Phi^{-1}(\pi)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\pi \\ p_{0.5} \\ p_{1-\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Аппроксимация нормального распределения. Случай симметричных квантилей

$$\begin{cases} p_\pi + p_{0.5} + p_{1-\pi} = 1, \\ (p_\pi - p_{1-\pi})\Phi^{-1}(\pi) = 0, \\ (p_\pi + p_{1-\pi})\Phi^{-1}(\pi)^2 = 1. \end{cases}$$

Обозначим $\delta = \dfrac{1}{\Phi^{-1}(\pi)^2}$, тогда из этой системы получим исходную. Рассмотрим случай $\pi = 0.1$, имеем

$$\Phi^{-1}(0.1) = -\Phi^{-1}(0.9) \approx -1.28, \qquad \Phi^{-1}(0.5) = 0.$$

$$\begin{cases} p_1 \approx 0.305, \\ p_2 \approx 0.390, \\ p_3 \approx 0.305. \end{cases}$$

Эти вероятности примерно равны 0.3, 0.4, 0.3, поэтому это правило называют **правилом 30-40-30**.

# Аппроксимация логнормального распределения

**Дано:** квантили $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ логнормальной случайной величины $\eta$, $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$.

1. Вычисляем значения мат. ожидания $m$ и дисперсии $d$ случайной величины $\eta$, используя известные $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$.
2. Выражаем параметры $\mu$ и $\sigma$ мат. ожидание и дисперсию соответствующего нормального распределения через параметры $m$ и $d$ логнормального распределения

$$m = \exp(\mu + \frac{\sigma^2}{2}),$$

$$s^2 = m^2[\exp(\sigma^2) - 1].$$

3. С помощью системы метода для нормального распределения находим значения вероятностей $p_1$, $p_2$, $p_3$.

**Результат:** вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ для $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ случайной величины $\xi_n$.

## Предложение

*В терминах Предложения 1 функция* $\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi)$ *выражается через* $\sigma$ *как*

$$\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi) = y = \frac{\exp(\sigma\Phi^{-1}(\pi) - \frac{\sigma^2}{2}) - 1}{\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}}.$$

***Доказательство:***

$$\begin{aligned}\tilde{\mathsf{F}}(y) &= \mathsf{P}\left(\eta \le y\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\xi - m}{s} \le y\right) = \\ &= \mathsf{P}(\log(\xi) \le \log(m + sy)) = \\ &= \mathsf{P}\left(\frac{\log(\xi) - \mu}{\sigma} \le \frac{\log(m + sy) - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{\log(m + sy) - \mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

# Аппроксимация логнормального распределения

Найдём $\log(m+sy)$, используя $m = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ и $s = m\sqrt{e^{\sigma^2}-1}$.

$m+sy = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} + ye^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\sqrt{e^{\sigma^2}-1} = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})$,

возьмем натуральный логарифм от обеих частей, получаем

$$\begin{aligned}\log(m+sy) &= \log(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})) = \\ &= \mu+\frac{\sigma^2}{2}+\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1}),\end{aligned}$$

тогда

$$\frac{\log(m+sy)-\mu}{\sigma} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})}{\sigma}.$$

# Аппроксимация логнормального распределения

$$\tilde{\mathsf{F}}(y) = \Phi\left(\frac{\log(m+sy)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})}{\sigma}\right).$$

$$\Phi\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})}{\sigma}\right) = \pi,$$

$$\Phi^{-1}(\pi) = \frac{\sigma}{2} + \frac{\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1})}{\sigma}.$$

$$\log(1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1}) = \sigma\Phi^{-1}(\pi) - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$1+y\sqrt{\exp(\sigma^2)-1} = \exp(\sigma\Phi^{-1}(\pi) - \frac{\sigma^2}{2}).$$

В итоге получаем

$$\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi) = y = \frac{\exp(\sigma\Phi^{-1}(\pi) - \frac{\sigma^2}{2}) - 1}{\sqrt{\exp(\sigma^2)-1}}.$$

# Аппроксимация логнормального распределения

## Предложение

*Параметр $\sigma$ логнормального распределения выражается как*

$$\sigma = \frac{\log\left(\dfrac{x_{\pi_2}}{x_{\pi_1}}\right)}{\Phi^{-1}(\pi_2) - \Phi^{-1}(\pi_1)}.$$

***Доказательство:***

$$\mathsf{P}\left(\frac{\log(\xi)-\mu}{\sigma} \le \frac{\log(x_\pi)-\mu}{\sigma}\right) = \pi.$$

Следовательно,

$$\Phi\left(\frac{\log(x_\pi)-\mu}{\sigma}\right) = \pi,$$

и тогда

$$\log(x_\pi) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\pi).$$

# Аппроксимация логнормального распределения

С помощью двух квантилей можем исключить $\mu$ из соответствующих уравнений. Пусть есть $\pi_1$-ый и $\pi_3$-ый квантили со значениями $x_{\pi_1}$ и $x_{\pi_3}$.

$$\log(x_{\pi_1}) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\pi_1),$$

$$\log(x_{\pi_3}) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\pi_3).$$

Вычтем из второго уравнения первое, получаем

$$\log\left(\frac{x_{\pi_3}}{x_{\pi_1}}\right) = \sigma(\Phi^{-1}(\pi_3) - \Phi^{-1}(\pi_1)).$$

И в итоге получаем

$$\sigma = \frac{\log\left(\frac{x_{\pi_2}}{x_{\pi_1}}\right)}{\Phi^{-1}(\pi_2) - \Phi^{-1}(\pi_1)}.$$

# Аппроксимация логнормального распределения

**Дано:** квантили $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ логнормальной случайной величины $\eta$, $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$.

**Шаги:**

1. Выражаем параметр $\sigma$ из отношения $x_{\pi_3}$ к $x_{\pi_1}$

$$\sigma = \frac{\log\left(\dfrac{x_{\pi_2}}{x_{\pi_1}}\right)}{\Phi^{-1}(\pi_2) - \Phi^{-1}(\pi_1)}.$$

.

2. Вычисляем значения $\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi)$ для случайной величины $\eta$

$$\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi) = y = \frac{\exp(\sigma\Phi^{-1}(\pi) - \frac{\sigma^2}{2}) - 1}{\sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}}.$$

3. Находим значения вероятностей $p_1$, $p_2$, $p_3$.

**Результат:** вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ для квантилей $x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, x_{\pi_3}$ случайной величины $\xi_n$.

## Условие на параметр $\sigma$

**Предложение**

*Положительные вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ для аппроксимации логнормальной случайной величины $\eta$ существуют только при условии*

$$\exp(\sigma^2)+\exp(-\sigma^2)-\exp(\Phi(0.1)\sigma-\frac{\sigma^2}{2})-\exp(\Phi^{-1}(0.9)\sigma-\frac{\sigma^2}{2}) \leq 0,$$

*(при $\sigma \leq 0.6913$, $\gamma_3 \leq 2.8278$ примерно).*

***Доказательство:***

$$\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma^2), \qquad \tilde{\mathsf{F}}(y) = \mathsf{P}\left(\eta \leq y\right).$$

С помощью формулы (12) найдем $\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(\pi_i)$ и сделаем следующие обозначения

$$\tilde{\mathsf{F}}^{-1}(0.1) = t_1, \qquad \tilde{\mathsf{F}}^{-1}(0.5) = t_2, \qquad \tilde{\mathsf{F}}^{-1}(0.9) = t_3.$$

Рассмотрим систему (7), запишем ее через $t_1$, $t_2$, $t_3$.

# Условие на параметр $\sigma$

Выразим вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$.

$$p_2(t_2 - t_3) = p_1(t_3 - t_1) - t_3,$$

$$p_1(t_1^2 - t_3^2) + p_2(t_2^2 - t_3^2) = 1 - t_3^2.$$

Тогда получаем

$$p_1(t_1^2 - t_3^2) + (t_2 + t_3)(p_1(t_3 - t_1) - t_3) = 1 - t_3^2,$$

$$p_1(t_1 - t_3)(t_1 - t_2) = 1 + t_2 t_3.$$

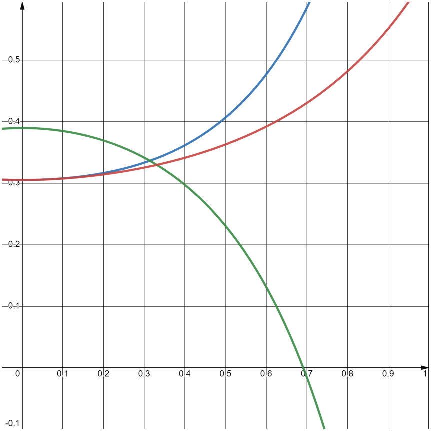
$$p_1 = \frac{1 + t_2 t_3}{(t_1 - t_3)(t_1 - t_2)},$$

$$p_2 = \frac{p_1(t_3 - t_1) - t_3}{t_2 - t_3} = \frac{1 + t_1 t_3}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)},$$

$$p_3 = 1 - p_1 - p_2.$$

# Условие на параметр $\sigma$

Построим график зависимости $p_1$, $p_2$, $p_3$ от $\sigma$.




$p_2 \geq$ при $\sigma \leq 0.6913$. Вероятности $p_1$ и $p_3$ положительные при любом параметре $\sigma$.

Получили условие $\sigma \leq 0.6913$.

# Варианты постановки задачи

**Задача:** имеются квантили $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ логнормальной случайной величины $\eta$. Нужно уметь считать $m$ и $s^2$.

1. Используя значения двух квантилей, найти значения параметров $\mu$ и $\sigma$ нормальной случайной величины $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$. Через них вычислить значения $m$ и $s^2$.
2. Перейти к трехточечной аппроксимации дискретной случайной величиной $\xi_n$, у которой $m_n = m$ и $s^2 = s^2$. И считать значения $m$ и $s$ через квантили $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ и вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$.
3. Если условие для положительных вероятностей не выполняется, можно воспринимать задачу не как поиск вероятностей для $\xi_n$, а как поиск коэффициентов для $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ таких, чтобы параметры, посчитанные как мат.ожидание и дисперсия, были равны $m$ и $s^2$.

# Точность аппроксимации мат.ожидания

**Проблема:** правило 30-40-30 используют для логнормального распределения.
**Вопрос:** какова точность аппроксимации $m$ и $s^2$?

**Предложение**

*Ошибка аппроксимации мат.ожидания логнормального распределения с помощью правила 30-40-30 равна*

$$\frac{\mid m - \widetilde{m} \mid}{m} = \mid \exp(\frac{\sigma^2}{2}) - \frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2} \times$$

$$\times (\exp(\sigma\Phi^{-1}(0.1)) - 1 + \exp(\sigma\Phi^{-1}(0.9))) + 1 \mid / \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

*и не зависит от параметра* $\mu$.

***Доказательство:*** Выразим ошибку аппроксимации через параметры $\mu$ и $\sigma$.

$$m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

Имеем следующие квантили

$$x_\pi = \exp(\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.1)),$$

Точные значения вероятностей

$$p_1 = p_3 = \frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2},$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(0.1))^2}.$$

Получили ошибку

$$\frac{\mid m - \widetilde{m} \mid}{m} = \mid \exp(\frac{\sigma^2}{2}) - \frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2} \times$$

$$\times(\exp(\sigma\Phi^{-1}(0.1)) - 1 + \exp(\sigma\Phi^{-1}(0.9))) + 1 \mid / \exp\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Построим график зависимости от $\sigma$.

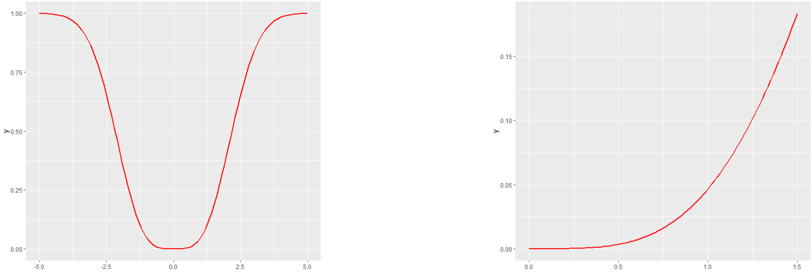



Рис.: Ошибка аппроксимации мат.ожидания

Видим, что при $\sigma \leq 1.5$ ошибка аппроксимации мат.ожидания меньше $12\%$.

### Предложение

*Ошибка аппроксимации дисперсии логнормального распределения с помощью правила 30-40-30 равна*

$$\frac{|\, d - \widetilde{d}\, |}{d} = |\, \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1)) -$$

$$-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.1)) -$$

$$-\left(1 - \frac{1}{(\Phi^{-1}(0.1))^2}\right)\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.5)) -$$

$$-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.9)) + m_2^2/2\mu \,|\, / \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2 - 1))$$

*и не зависит от параметра* $\mu$.

***Доказательство:*** Имеем ошибку

$$\frac{\mid d-\widetilde{d}\mid}{d} =\mid \exp(2\mu+\sigma^2)(\exp(\sigma^2-1))-$$

$$-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\mu+2\sigma\Phi^{-1}(0.1))-$$

$$-\left(1-\frac{1}{(\Phi^{-1}(0.1))^2}\right)\exp(2\mu+2\sigma\Phi^{-1}(0.5))-$$

$$-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\mu{+}2\sigma\Phi^{-1}(0.9)){+}m_2^2\mid/\exp(2\mu{+}\sigma^2)(\exp(\sigma^2{-}1))$$

$$=\mid \exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2-1))-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.1))-$$

$$-\left(1-\frac{1}{(\Phi^{-1}(0.1))^2}\right)\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.5))-$$

$$-\frac{1}{2(\Phi^{-1}(0.1))^2}\exp(2\sigma\Phi^{-1}(0.9)){+}m_2^2/2\mu\mid/\exp(\sigma^2)(\exp(\sigma^2{-}1)).$$

Построим график зависимости от $\sigma$.

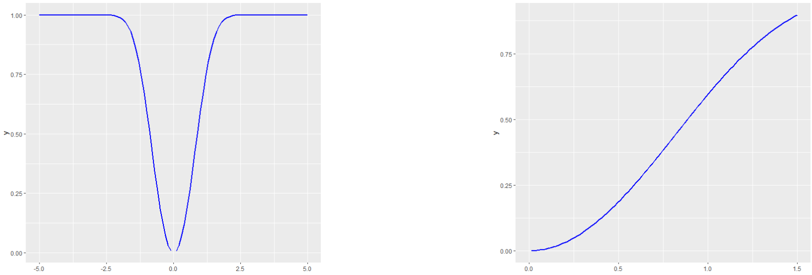



Рис.: Ошибка аппроксимации дисперсии

Видим, что при $\sigma \leq 1.5$ ошибка аппроксимации дисперсии может достигать $80\%$.

# Произведение двух логнормальных распределений

Рассмотрим две логнормально распределенные случайные величины.

- $\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- $\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

**Задача:** замена непрерывной случайной величины, полученной с помощью произведения двух логнормально распределенных случайных величин, дискретной. То есть записать произведение в виде дискретной аппроксимации с кванилями того же вида.

- $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ — симметричные квантили $\xi_1$,
- $y_\pi$, $y_{0.5}$, $y_{1-\pi}$ — симметричные квантили $\xi_2$.

**Предложение**

*При перемножении квантилей $x_\pi$ и $y_\pi$ двух логнормальных случайных величин $\xi_1$ и $\xi_2$ получается квантиль случайной величины $\xi_1\xi_2$ вида $z_q$, где*

$$q = \mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_\pi y_\pi) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\pi)(\ln(x_{0.5}) + \ln(y_{0.5}) - \ln(x_\pi) - \ln(y_\pi))}{\sqrt{(\ln(x_{0.5}) - \ln(x_\pi))^2 + (\ln(y_{0.5}) - \ln(y_\pi))^2}}\right).$$

***Доказательство:*** Выразим параметры распределений $\mu_1$, $\mu_2$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ через квантили.

$$\mathsf{P}(\xi_1 < x_\pi) = \mathsf{P}(\ln(\xi_1) < \ln(x_\pi)) = \mathsf{P}\left(\frac{\ln(\xi_1) - \mu_1}{\sigma_1} < \frac{\ln(x_\pi) - \mu_1}{\sigma_1}\right).$$

$$\frac{\ln(\xi_1) - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0, 1).$$

# Произведение $\pi$-ых квантилей

$$\ln(x_\pi) = \sigma_1 \Phi^{-1}(\pi) + \mu_1.$$

$$\mu_1 = \ln(x_{0.5}).$$

$$\sigma_1 = \frac{\ln(x_\pi) - \ln(x_{0.5})}{\Phi^{-1}(\pi)}.$$

$$\frac{\ln(y_\pi) - \mu_2}{\sigma_2} = \Phi^{-1}(\pi),$$

$$\mu_2 = \ln(y_{0.5}).$$

$$\sigma_2 = \frac{\ln(y_\pi) - \ln(y_{0.5})}{\Phi^{-1}(\pi)}.$$

Рассмотрим случайную величину $\eta = \xi_1\xi_2$. Нужно вычислить, каким квантилем для $\eta$ является произведение квантилей $x_\pi$ и $y_\pi$.

Для этого надо найти, чему равна вероятность $\mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_\pi y_\pi)$.

# Произведение $\pi$-ых квантилей

$$\mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_\pi y_\pi) = \mathsf{P}(\ln(\xi_1) + \ln(\xi_2) < \ln(x_\pi) + \ln(y_\pi)) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{\ln(\xi_1) + \ln(\xi_2) - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} < \frac{\ln(x_\pi) + \ln(y_\pi) - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

$$\ln(\xi_1) + \ln(\xi_2) \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

$$\frac{\ln(\xi_1) + \ln(\xi_2) - (\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \sim N(0, 1).$$

$$\ln(x_\pi) = \mu_1 + \Phi^{-1}(\pi)\sigma_1,$$

$$\ln(y_\pi) = \mu_2 + \Phi^{-1}(\pi)\sigma_2.$$

$$\mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_\pi y_\pi) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\pi)(\sigma_1 + \sigma_2)}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right).$$

# Произведение $\pi$-ых квантилей

$$\frac{\Phi^{-1}(\pi)(\sigma_1+\sigma_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} =$$

$$= \frac{(\ln(x_{0.5})-\ln(x_\pi))+(\ln(y_{0.5})-\ln(y_\pi))}{\frac{\sqrt{(\ln(x_{0.5})-\ln(x_\pi))^2+(\ln(y_{0.5})-\ln(y_\pi))^2}}{\Phi^{-1}(\pi)}}.$$

Тогда получаем следующую формулу

$$\mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_\pi y_\pi) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\pi)(\ln(x_{0.5})+\ln(y_{0.5})-\ln(x_\pi)-\ln(y_\pi))}{\sqrt{(\ln(x_{0.5})-\ln(x_\pi))^2+(\ln(y_{0.5})-\ln(y_\pi))^2}}\right).$$

## Предложение

*Зная квантили* $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ *случайной величины* $\xi_1$ *и квантили* $y_\pi$, $y_{0.5}$, $y_{1-\pi}$ *случайной величины* $\xi_2$ *можно найти квантили* $z_\pi$, $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$ *случайной величины* $\xi_1\xi_2$, *как*

$$z_\pi = \exp(\sigma\Phi^{-1}(\pi) + a),$$

$$z_{0.5} = x_{0.5}y_5,$$

$$z_{1-\pi} = \exp(\sigma\Phi^{-1}(1-\pi) + a),$$

*где* $a$ *и* $\sigma$ *– параметры прямой* $\dfrac{x-a}{\sigma}$, *на которой лежат точки* $(\ln(x_\pi y_\pi), t)$ *и* $(\ln(x_{0.5}y_{0.5}), 0)$,

$$t = \frac{\Phi^{-1}(\pi)((\ln(x_{0.5}) + \ln(y_{0.5})) - (\ln(x_\pi) + \ln(y_\pi)))}{\sqrt{(\ln(x_{0.5}) - \ln(x_\pi))^2 + (\ln(y_{0.5}) - \ln(y_\pi))^2}}.$$

# Квантили вида $\pi$, 0.5, $1-\pi$

***Доказательство:*** С помощью формулы (18) можно посчитать, какой получается квантиль для случайной величины $\xi_1\xi_2$, если перемножить квантили $x_\pi$ и $y_\pi$ исходных случайных величин.

$$\mathsf{P}(\xi_1\xi_2 < x_{0.5}y_{0.5}) = \Phi(0) = 0.5.$$

Получили снова 0.5-ый квантиль.
Обозначим $z_\pi$, $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$ — квантили случайной величины $\eta$.
Тогда $x_{0.5}y_{0.5} = z_{0.5}$.
С помощью точек $(\ln(x_\pi y_\pi), t)$ и $(\ln(x_{0.5}y_{0.5}), 0)$ можно найти параметры $a$ и $\sigma$ прямой, на которой они лежат.

$$\frac{\ln(x_{0.5}y_{0.5}) - a}{\sigma} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = \ln(x_{0.5}y_{0.5}),$$

# Квантили вида $\pi$, 0.5, $1-\pi$

$$\frac{\ln(x_\pi y_\pi) - a}{\sigma} = t,$$

$$\sigma = \frac{\ln(x_\pi y_\pi) - a}{t} = \frac{\ln(x_\pi y_\pi) - \ln(x_{0.5} y_{0.5})}{t}.$$

Так как точки $(\ln(z_\pi), \Phi^{-1}(\pi))$ и $(\ln(z_{1-\pi}), \Phi^{-1}(1-\pi))$ тоже лежат на этой прямой, то мы можем вычислить значения $\ln(z_\pi)$ и $\ln(z_{0.5})$, зная уравнение прямой, следующим образом:

$$\frac{\ln(z_\pi) - a}{\sigma} = \Phi^{-1}(\pi),$$

$$\ln(z_\pi) = \sigma\Phi^{-1}(\pi) + a,$$

$$\frac{\ln(z_{1-\pi}) - a}{\sigma} = \Phi^{-1}(1-\pi),$$

$$\ln(z_{1-\pi}) = \sigma\Phi^{-1}(1-\pi) + a.$$

И, наконец, находим $z_\pi$ и $z_{1-\pi}$.

# Сумма двух логнормальных распределений

Рассмотрим сумму двух логнормальных случайных величин.

$$\ln(\xi_1) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2),$$

$$\ln(\xi_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2.$$

**Задача:** найти квантили $z_\pi$, $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$ случайной величины $\eta$, а также вычислить вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ такие, что $m = m_n$ и $s^2 = s_n^2$.

Чтобы найти $z_{10}$, $z_{50}$, $z_{90}$ будем использовать аппроксимацию суммы логнормальных распределений логнормальным распределением. $\ln(\eta) \sim N(\mu, \sigma)$.

**Альтернатива:** Если это ограничение на $\sigma$ не выполняется и мы не можем вычислить положительные вероятности, то можно не переходить к аппроксимации дискретным распределением, а вычислить значения мат. ожидания и дисперсии $\eta$ с помощью квантилей $z_\pi$, $z_{0.5}$, $z_{1-\pi}$.

# Сумма двух логнормальных распределений

**Дано:** Квантили $x_\pi$, $x_{0.5}$, $x_{1-\pi}$ — квантили $\xi_1$, $y_\pi$, $y_{0.5}$, $y_{1-\pi}$ — квантили $\xi_2$.

1. Найти параметры $\mu_1$, $\sigma_1$, $\mu_2$ и $\sigma_2$ через значения квантилей, используя формулы раздела 4.2.
2. Вычислить значения мат. ожидания $m$ и дисперсии $s^2$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$, как суммы $m = m_1 + m_2$, $d = d_1 + d_2$, где $m_1, d_1$ – мат.ожидание и дисперсия $\xi_1$, а $m_2$, $d_2$ – случайной величины $\xi_2$. Они пересчитываются аналогично $m$ и $d$.
3. Выразить параметры $\mu$ и $\sigma$ нормального распределения через параметры $m$ и $d$ логнормального распределения.

# Сумма двух логнормальных распределений

1. Вычислить, какой квантиль получается при сложении $x_\pi$ и $y_\pi$, используя следующую формулу

$$\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 < x_\pi + y_\pi) = \mathsf{P}(\ln(\xi_1 + \xi_2) < \ln(x_\pi + y_\pi)) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\frac{\ln(\xi_1 + \xi_2) - \mu}{\sigma} < \frac{\ln(x_\pi + y_\pi) - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\ln(x_\pi + y_\pi) - \mu}{\sigma}\right).$$

2. Найти значения квантилей $z_{10}$, $z_{50}$, $z_{90}$ по Алгоритму 2.

**Результат:** вероятности $p_1$, $p_2$, $p_3$ для $z_{\pi_1}, z_{\pi_2}, z_{\pi_3}$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

Ошибки аппроксимации квантилей $q_{10}$, $q_{50}$, $q_{90}$ случайной величины $\eta$ равны

$$\frac{|q_{10} - z_{10}|}{q_{10}}, \qquad \frac{|q_{50} - z_{50}|}{q_{50}}, \qquad \frac{|q_{90} - z_{90}|}{q_{90}},$$

где

$$z_{p*100} = F_{\eta_n}^{-1}(p) = \exp(\mu + \sigma\sqrt{2}\mathrm{erf}^{-1}(2p-1)).$$

Значение квантилей $q_i$ выражаются как $q_{p*100} = F_{\eta}^{-1}(p)$, где

$$F_\eta(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\ln(x-y)-\mu_1}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma_2}\exp\left(-\left(\frac{\ln(y)-\mu_2}{\sqrt{2}\sigma_2}\right)^2\right)\right) dy$$

# Точность аппроксимации

Рассмотрим $\ln(\xi_1) \sim N(4, \sigma_1^2)$, $\ln(\xi_2) \sim N(6, \sigma_1^2)$ и найдем ошибки с помощью моделирования.

Ниже приведены фрагменты таблиц с ошибками, выраженными в $\%$ для $0.05 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < 2.25$.

Таблица: Ошибка аппроксимации медианы

| | **0.25** | **0.75** | **1.25** | **1.75** | **2.5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0.25** | 0.58 | 0.29 | 0.89 | 2.64 | 6.41 |
| **0.75** | 0.13 | 0.12 | 2.15 | 4.88 | 7.27 |
| **1.25** | 0.01 | 0.83 | 2.94 | 5.58 | 10.02 |
| **1.75** | 2.23 | 0.52 | 3.61 | 6.74 | 9.84 |
| **2.5** | 9.15 | 3.35 | 3.25 | 6.76 | 9.89 |

# Точность аппроксимации

Таблица: Ошибка аппроксимации $q_{10}$

| | **0.25** | **0.75** | **1.25** | **1.75** | **2.5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0.25** | 2.35 | 13.59 | 23.93 | 33.20 | 42.75 |
| **0.75** | 1.20 | 10.54 | 21.80 | 33.93 | 42.82 |
| **1.25** | 3.02 | 7.03 | 18.43 | 29.49 | 40.09 |
| **1.75** | 14.45 | 5.27 | 14.33 | 26.50 | 36.75 |
| **2.5** | 34.70 | 11.44 | 11.10 | 23.05 | 32.84 |

Таблица: Ошибка аппроксимации $q_{90}$

| | **0.25** | **0.75** | **1.25** | **1.75** | **2.5** |
|---|---|---|---|---|---|
| **0.25** | 1.01 | 3.00 | 4.24 | 4.10 | 3.40 |
| **0.75** | 0.04 | 2.51 | 4.11 | 3.26 | 5.45 |
| **1.25** | 1.44 | 1.81 | 3.29 | 3.93 | 5.82 |
| **1.75** | 8.25 | 2.60 | 2.93 | 3.60 | 4.49 |
| **2.5** | 18.17 | 3.00 | 3.30 | 2.44 | 4.99 |

# Точность аппроксимации

- При аппроксимации суммы двух логнормальных распределений логнормальным распределением ошибки математического ожидания и дисперсии равны 0, то есть $m = m_n$ и $s^2 = s_n^2$. Но ошибки аппроксимации квантилей $\eta$ могут достигать 11% для $q_{50}$, ошибка квантиля $q_{10}$ достигает 51%, ошибка квантиля $q_{90}$ достигает 40%.

- При этом значения мат ожидания и дисперсии $\eta$, вычисленные по этим квантилям тоже имеют нулевую ошибку.

# Точность аппроксимации

Построим графики зависимости ошибки аппроксимации квантилей от $\sigma_2^2$ при фиксированной $\sigma_1^2 = 0.45$. При моделировании объемы выборок равны $10^6$, а количество рассматриваемых $\sigma_2^2$ равно 23.

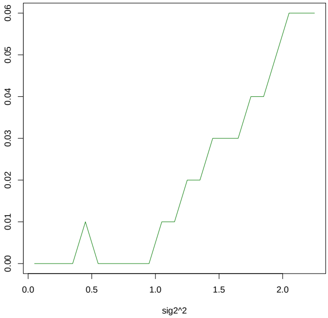



Рис.: Ошибка аппроксимации медианы при $\sigma_1^2 = 0.45$.

# Точность аппроксимации

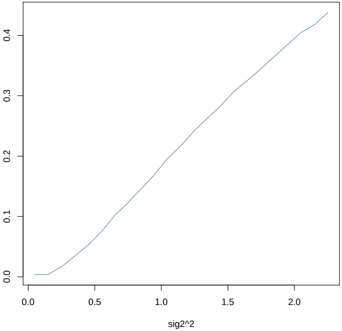



Рис.: Ошибка аппроксимации $q_{10}$ при $\sigma_1^2 = 0.45$.

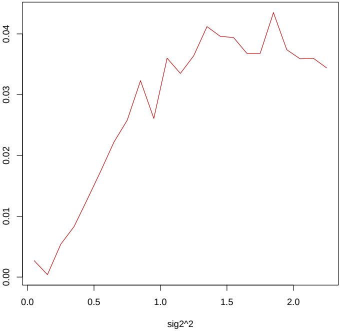



Рис.: Ошибка аппроксимации $q_{90}$ при $\sigma_1^2 = 0.45$.

# Точность аппроксимации

Посчитаем значения функции $F_\eta(x)$ от квантилей $z_{10}$, $z_{50}$, $z_{90}$ случайной величины $\eta_n$ при $0.15 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < 2.25$. Они показывают, каким квантилем для $\eta$ являются квантили $z_i$. Результаты приведены в следующих таблицах.

Таблица: $F_\eta(z_{50})$ в % при $0.15 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < 2.25$

| | **0.15** | **0.85** | **1.55** | **2.25** |
|---|---|---|---|---|
| **0.15** | 0.51 | 0.50 | 0.49 | 0.48 |
| **0.85** | 0.50 | 0.50 | 0.48 | 0.47 |
| **1.55** | 0.49 | 0.50 | 0.48 | 0.46 |
| **2.25** | 0.40 | 0.49 | 0.48 | 0.46 |

# Точность аппроксимации

Таблица: $F_\eta(z_{10})$ при $0.15 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < 2.25$

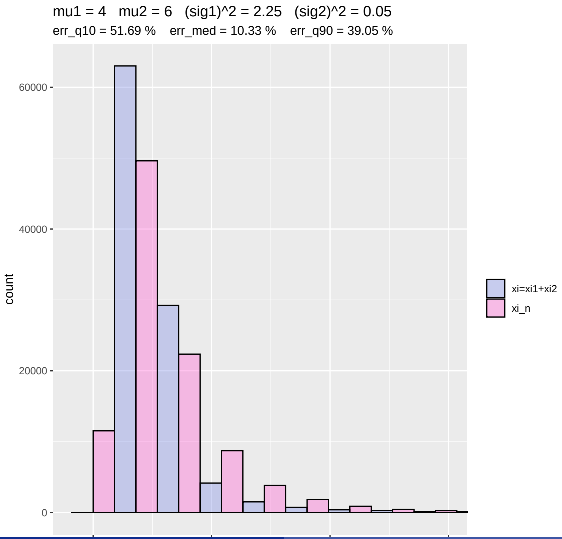
| | **0.15** | **0.85** | **1.55** | **2.25** |
|---|---|---|---|---|
| **0.15** | 0.09 | 0.06 | 0.04 | 0.02 |
| **0.85** | 0.10 | 0.07 | 0.05 | 0.03 |
| **1.55** | 0.05 | 0.08 | 0.06 | 0.04 |
| **2.25** | 0.00 | 0.08 | 0.07 | 0.05 |

Таблица: $F_\eta(z_{90})$ при $0.15 < \sigma_1^2, \sigma_2^2 < 2.25$

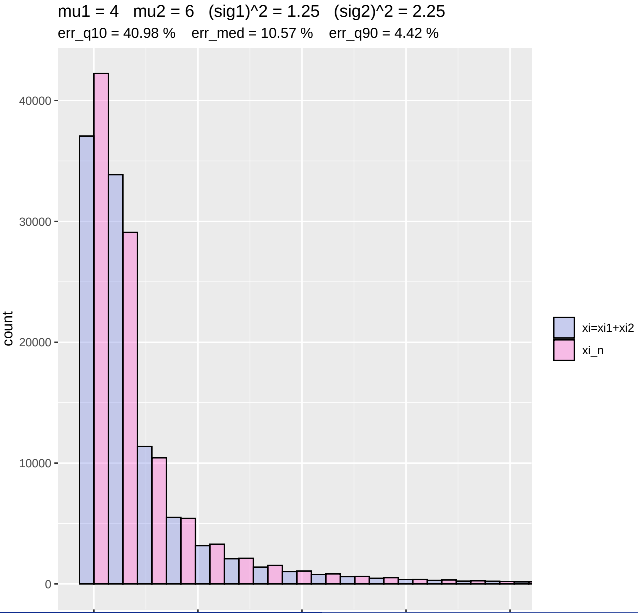
| | **0.15** | **0.85** | **1.55** | **2.25** |
|---|---|---|---|---|
| **0.15** | 0.90 | 0.90 | 0.90 | 0.90 |
| **0.85** | 0.90 | 0.91 | 0.91 | 0.90 |
| **1.55** | 0.93 | 0.90 | 0.91 | 0.91 |
| **2.25** | 0.95 | 0.91 | 0.90 | 0.91 |

# Точность аппроксимации

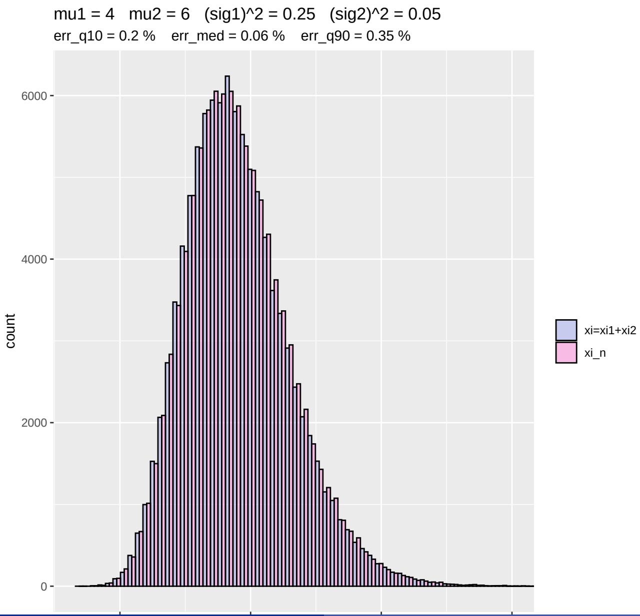
Также построим гистограммы для $\eta$ и $\eta_n$, когда ошибки имеют очень маленькие значения и когда достаточно большие.



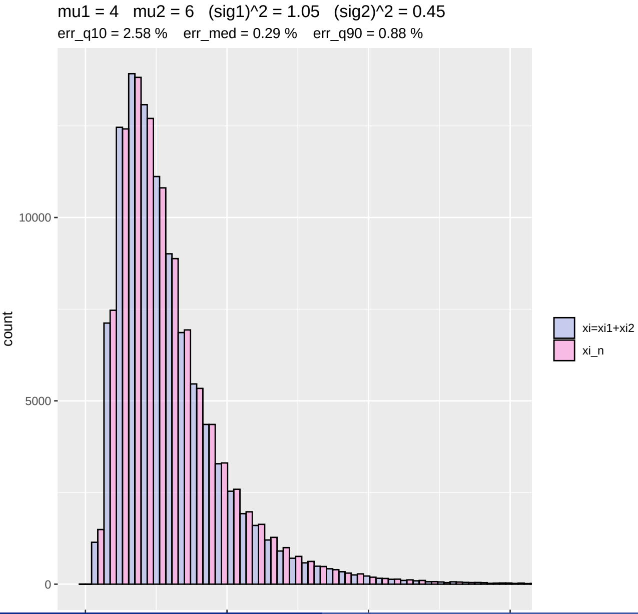
# Точность аппроксимации



# Точность аппроксимации



# Точность аппроксимации



## Результаты:

1. Методы аппроксимации нормального, логнормального распределений.
2. Условие на $\sigma$ для аппроксимации.
3. Точность аппроксимации логнормального правилом 30-40-30.
4. Метод аппроксимации произведения логнормальных распределений.
5. Метод аппроксимации суммы логнормальных распределений.
6. Точность аппроксимации суммы логнормальных распределений.

## Проблемы:

1. Аппроксимировать дискретным распределением получается только при ограниченных $\sigma$.
2. Для суммы логнормальных результат имеет ошибки, так как сумма логнормальных не логнормальная.