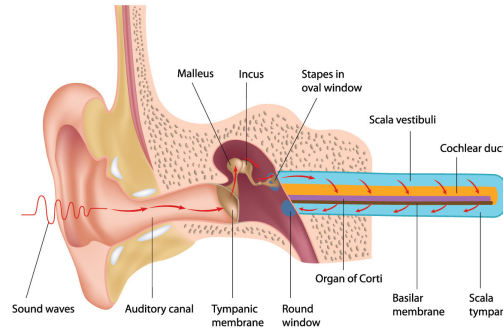


TP Méthodes Numériques

Modélisation d'une corde de guitare et du tympan

JULIEN BORDAS ANTOINE LADRECH

Avril 2016



Partie I : Modélisation et simulation d'une corde de guitare

1 Modélisation physique

On considère une corde de guitare de longueur L (en m), de masse linéique μ (en $kg.m^{-1}$) dont on applique une force tension T (en Newton) aux extrémités d'où elle est fixée.

■ Cas supposé sans raideur et de diamètre nul

La corde initialement au repos occupe un segment le long de l'axe des x (car on néglige l'effet de la pesanteur). On déforme la corde dans la direction perpendiculaire y et on la lâche. Appelons $u(x, t)$ le déplacement de la corde à l'abscisse x et à l'instant t . On obtient l'équation d'onde qui régit le mouvement de la corde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

avec $\gamma = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, la vitesse de propagation de l'onde.

■ Modes propres de la vibration d'une corde

Question 1.

On cherche $u(x, t)$ sous la forme

$$\begin{cases} u(x, t) = U(x) \cos(\omega t) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

On injecte alors $u(x, t)$ dans l'équation d'onde :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\Leftrightarrow -U(x) \omega^2 \cos(\omega t) = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos(\omega t) \\ &\Leftrightarrow -U(x) \omega^2 = \gamma^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2} U(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow U_n(x) = A_n \cos(kx) + B_n \sin(kx) \end{aligned}$$

où $k^2 = \frac{\omega^2}{\gamma^2}$.

Conditions aux limites :

- $u(0, t) = 0 \Rightarrow \forall t, U(0) \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow U_n(0) = 0 \Rightarrow A_n = 0$
- $u(L, t) = 0 \Rightarrow \forall t, U(L) \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow U_n(L) = 0 \Rightarrow B_n \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n \in \mathbb{Z}$

Donc finalement, on a $U_n(x) = B_n \sin(n\pi \frac{x}{L})$, et $\omega_n = n\pi \frac{t}{L} \Leftrightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

On en déduit enfin $u_n(x, t) = B_n \sin(n\pi \frac{x}{L}) \cos(n\pi \frac{t}{L})$ et $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos\left(n\pi \frac{\gamma t}{L}\right)$.

On a $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, donc

- quand $L \uparrow, f_1 \downarrow \Rightarrow$ son plus grave.
- quand $L \rightarrow \frac{L}{2}, f_1' \rightarrow 2f_1 \Rightarrow$ son plus aigu.
- quand $\mu \downarrow, f_1 \uparrow \Rightarrow$ son plus aigu.
- quand $T \uparrow, f_1 \uparrow \Rightarrow$ son plus aigu.

■ Cas de la corde réelle avec raideur et amortissements

La corde réelle est régie par l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

2 Discrétisation du modèle par différences finies

Discrétisons la corde de longueur $L = 1$ en $N + 1$ positions $x_l = lh$ avec $0 \leq i \leq N$ et $h = \frac{1}{N}$, et le temps en NF instants $t_n = nk$ avec $k = \frac{1}{SR}$ (où SR est le taux d'échantillonnage, typiquement 44100 Hz). Ainsi on approche la fonction continue $u(x, t)$ par u_l^n en la position $x_l = lh$ et au temps $t_n = nk$, soit $u(x_l, t_n) = u(lh, nk) \approx u_l^n$.

Question 2.

On applique la formule de Taylor avec reste de Lagrange un peu partout...

1. Montrons que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(1)$

$$\begin{aligned} u(x+h, t) &= u(x, t) + hu'(x, t) + \frac{h^2}{2}u''(x, t) + \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + O(h^3) \\ + u(x-h, t) &= u(x, t) - hu'(x, t) + \frac{h^2}{2}u''(x, t) - \frac{h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + O(h^3) \\ u(x+h, t) + u(x-h, t) &= 2u(x, t) + h^2u''(x, t) + O(h^2) \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + o(1)$

De la même manière, on montre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k))}{k^2} + o(1)$$

On discrétise ces équation, et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_l, t_k) &\approx \frac{1}{h^2}(u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_l, t_k) &\approx \frac{1}{k^2}(u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) \end{aligned}$$

2. Montrons que $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^4}(u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)$

$$\begin{aligned} u(x+2h, t) &= u(x, t) + 2hu'(x, t) + \frac{4h^2}{2}u''(x, t) + \frac{8h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(x, t) + O(h^4) \\ + u(x-2h, t) &= u(x, t) - 2hu'(x, t) + \frac{4h^2}{2}u''(x, t) - \frac{8h^3}{6}u^{(3)}(x, t) + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(x, t) + O(h^4) \\ u(x+2h, t) + u(x-2h, t) &= 2u(x, t) + 4h^2u''(x, t) + \frac{4h^4}{3}u^{(4)}(x, t) + O(h^4) \end{aligned}$$

En poussant à l'ordre 4 le développement de Taylor du 1., on obtient

$$u(x+h, t) + u(x-h, t) = 2u(x, t) + h^2u''(x, t) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x, t) + O(h^4)$$

En additionnant tous les termes, on a

$$\begin{aligned}
& u(x+2h, t) + u(x-2h, t) - 4[u(x+h, t) + u(x-h, t)] + 6u(x, t) \\
&= 2u(x, t) + 4h^2 u''(x, t) + \frac{4h^4}{3} u^{(4)}(x, t) - 4 \left[2u(x, t) + h^2 u''(x, t) + \frac{h^4}{12} u^{(4)} \right] + 6u(x, t) \\
&= h^4 u^{(4)}(x, t) + O(h^4)
\end{aligned}$$

Finalement, en discrétisant, on obtient

$$\boxed{\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_l, t_k) \approx \frac{1}{h^4} (u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n)}$$

3. Montrons que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1})$

On dérive chaque membre de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial u(x+h, t)}{\partial t} - 2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x-h, t)}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u(x+h, t+k) - u(x+h, t-k)}{2k} - 2 \frac{u(x, t+k) - u(x, t-k)}{2k} + \dots \right)
\end{aligned}$$

On obtient en discrétisant

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \approx \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1})}$$

4. On regroupe maintenant tous les termes discretisés précédemment calculés :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\sigma_0 \frac{\partial u}{\partial t} + 2\sigma_1 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2} (u_l^{n+1} - 2u_l^n + u_l^{n-1}) &= \gamma^2 \frac{1}{h^2} (u_{l+1}^n - 2u_l^n + u_{l-1}^n) \\
&\quad - \kappa^2 \frac{1}{h^4} (u_{l+2}^n - 4u_{l+1}^n + 6u_l^n - 4u_{l-1}^n + u_{l-2}^n) \\
&\quad - 2\sigma_0 \frac{1}{k} (u_l^{n+1} - u_l^{n-1}) \\
&\quad + 2\sigma_1 \frac{1}{2kh^2} (u_{l+1}^{n+1} - 2u_l^{n+1} + u_{l-1}^{n+1} - u_{l+1}^{n-1} + 2u_l^{n-1} - u_{l-1}^{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-\frac{\sigma_1 k}{k^2} \right) u_{l-1}^{n+1} + \left(1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2} \right) u_l^{n+1} + \left(-\frac{\sigma_1 k}{h^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \right) u_{l-2}^n + \left(-\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4} \right) u_{l-1}^n + \left(-2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} \right) u_l^n \\
&\quad + \left(-\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4} \right) u_{l+1}^n + \left(\frac{\kappa^2 k^2}{h^4} \right) u_{l+2}^n \\
&\quad + \left(\frac{\sigma_1 k}{h^2} \right) u_{l-1}^{n-1} + \left(1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2} \right) u_l^{n-1} + \left(\frac{\sigma_1 k}{h^2} \right) u_{l+1}^{n-1}
\end{aligned}$$

On retrouve donc bien le schéma implicite associé à l'EDP (2), avec les coefficients :

$$a_1 = -\frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_1 = \frac{\sigma_1 k}{h^2}, \quad c_2 = 1 - \sigma_0 k - \frac{2\sigma_1 k}{h^2}$$

$$b_1 = \frac{\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_2 = -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4}, \quad b_3 = -2 + \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4}$$

Question 3.

Montrons que $u_{-1} = -u_1$ et $u_{N+1} = -u_{N-1}$:

— Pour $l = 1$, on a $l - 2 = -1$, et $\forall n, u_0^n = 0$

Ainsi, en utilisant les conditions aux limites, on a

$$u_0^n = \frac{1}{h^2}(u_1^n - 2u_0^n + u_{-1}^n) \Leftrightarrow u_{-1}^n = -u_1^n$$

— De même, pour $l = N - 1$, $l + 2 = N + 1$, et $\forall n, u_N^n = 0$

Ainsi, en utilisant les conditions aux limites, on a

$$u_N^n = \frac{1}{h^2}(u_{N+1}^n - 2u_N^n + u_{N-1}^n) \Leftrightarrow u_{N+1}^n = -u_{N-1}^n$$

Ainsi, on a le schéma numérique suivant, $\forall n \in [0, N]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 0 \rightarrow u_0^{n+1} + u_0^n + u_0^{n-1} = 0 \\ l = 1 \rightarrow \dots + b_2 u_0^n + (b_3 - b_1) u_1^n + b_1 u_3^n + c_1 u_0^{n-1} + c_2 u_1^{n-1} + c_3 u_2^{n-1} = 0 \\ \dots \\ a_1 u_{l-1}^{n+1} + a_2 u_l^{n+1} + a_1 u_{l+1}^{n+1} + b_1 u_{l-2}^n + \dots + b_1 u_{l+2}^n + c_1 u_{l-1}^{n-1} + c_2 u_l^{n-1} + c_1 u_{l+1}^{n-1} = 0 \\ \dots \\ l = N - 1 \rightarrow \dots + b_2 u_{N-2}^n + (b_3 - b_1) u_{N-1}^n + b_1 u_{N+1}^n + c_1 u_{N-2}^{n-1} + c_2 u_{N-1}^{n-1} + c_3 u_N^{n-1} = 0 \\ l = N \rightarrow u_N^{n+1} + u_N^n + u_N^{n-1} = 0 \end{array} \right.$$

Celui-ci peut donc se mettre sous la forme matricielle

$$\overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{u}}^{n+1} + \overline{\mathbf{B}} \overline{\mathbf{u}}^n + \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{u}}^{n-1} = 0$$

avec les matrices de tailles $(N + 1) \times (N + 1)$ suivantes :

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & b_3 - b_1 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_1 & b_2 & b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 & b_3 - b_1 & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On définit la matrice Toeplitz suivante et son carré :

$$\mathbf{D}_{xx} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & \mathbf{0} \\ \ddots & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{xxxx} = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{D}_{xx} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ -4 & 6 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & 6 & -2 & \\ & \mathbf{0} & & & -4 & 5 & \end{bmatrix}$$

Question 4.

Montrons que $\mathbf{A} = (1 + \sigma_0 k) \mathbf{I} - \sigma_1 k \mathbf{D}_{xx}$ (même démonstration pour \mathbf{C})

$$a_1 = -\frac{\sigma_1 k}{h^2} = -\frac{1}{h^2} \times \sigma_1 k$$

$$a_2 = 1 + \sigma_0 k + \frac{2\sigma_1 k}{h^2} = (1 + \sigma_0) - \frac{2}{h^2} \times \sigma_1 k$$

Montrons que $\mathbf{B} = -2\mathbf{I} - \gamma^2 k^2 \mathbf{D}_{xx} + \kappa^2 k^2 \mathbf{D}_{xxxx}$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\kappa^2 k^2}{h^4} = \frac{1}{h^4} \times \kappa^2 k^2 \\ b_2 &= -\frac{\gamma^2 k^2}{h^2} - \frac{4\kappa^2 k^2}{h^4} = -\frac{1}{h^2} \times \gamma^2 k^2 - \frac{4}{h^2} \times \kappa^2 k^2 \\ b_3 &= \frac{2\gamma^2 k^2}{h^2} + \frac{6\kappa^2 k^2}{h^4} - 2 = -2 - \left(-\frac{2}{h^2}\right) \times \gamma^2 k^2 + \frac{6}{h^4} \kappa^2 k^2 \\ b_3 - b_1 &= -2 - \left(-\frac{2}{h^2}\right) \times \gamma^2 k^2 + \frac{5}{h^4} \kappa^2 k^2 \end{aligned}$$

■ Stabilité du schéma numérique

Par une analyse de Von Neumann on montre que la condition de stabilité du schéma s'écrit

$$h \geq h_{min} = \sqrt{\frac{\gamma^2 k^2 + \sqrt{\gamma^4 k^4 + 16\kappa^2 k^2}}{2}}$$

2.1 Programmation du schéma implicite sous Scilab

■ Choix des paramètres σ_0 et σ_1

Question 5.

On écrit l'équation caractéristique de l'EDP (2) en y injectant $\tilde{u}(x, t) = e^{st+j\beta x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= s\tilde{u} & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} &= s^2 \tilde{u} & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &= -\beta^2 \tilde{u} \\ \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial x^4} &= \beta^4 \tilde{u} & \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial t \partial x^2} &= -s\beta^2 \tilde{u} \end{aligned}$$

On obtient alors, ceci étant valable pour toute valeur de \tilde{u} :

$$s^2 + (2\sigma_0 + 2\sigma_1\beta^2)s + (\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4) = 0$$

Le discriminant vaut donc $\Delta = (2\sigma_0 + 2\sigma_1\beta^2)^2 - 4(\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4)$ et en considérant σ_0 et σ_1 petits, on a $\Delta < 0$.

De ce fait, $s = (-\sigma_0 - \sigma_1\beta^2) \pm j\sqrt{\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - (\sigma_0 + \sigma_1\beta^2)^2} \Rightarrow s = \sigma(\beta) \pm j\omega(\beta)$

Exprimons maintenant $\sigma(\omega)$:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - (\sigma_0 + \sigma_1\beta^2)^2} \\ \omega^2 &= \gamma^2\beta^2 + \kappa^2\beta^4 - (\sigma_0^2 + \sigma_1^2\beta^4 + 2\sigma_0\sigma_1\beta^2) \\ \beta^2 &= \frac{-\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 4\kappa^2\omega^2}}{2\kappa^2} \end{aligned}$$

En notant $\xi = \beta^2$, on a $\boxed{\sigma(\omega) = -\sigma_0 - \sigma_1 \xi(\omega)^2}$.

Prenons $\omega_1 < \omega_2$:

$$\begin{aligned} \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} \right) &= \frac{1}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} (-\xi(\omega_2)\sigma(\omega_1) + \xi(\omega_1)\sigma(\omega_2)) \\ &= \frac{(\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_1))\xi(\omega_2) - (\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_2))\xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_0 \frac{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} + \sigma_1 \frac{\xi(\omega_1)\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)\xi(\omega_2)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_0 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sigma_0 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(\frac{\xi(\omega_2)}{T_{60}(\omega_1)} - \frac{\xi(\omega_1)}{T_{60}(\omega_2)} \right)}$

$$\begin{aligned} \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right) &= \frac{1}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} (\sigma(\omega_1) - \sigma(\omega_2)) \\ &= \frac{(\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_2)) - (\sigma_0 + \sigma_1 \xi(\omega_1))}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_1 \frac{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \\ &= \sigma_1 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sigma_1 = \frac{6 \ln 10}{\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1)} \left(-\frac{1}{T_{60}(\omega_1)} + \frac{1}{T_{60}(\omega_2)} \right)}$

On définit comme paramètre un vecteur de perte $loss = \left[\frac{\omega_1}{2\pi}, T_{60}(\omega_1) ; \frac{\omega_2}{2\pi}, T_{60}(\omega_2) \right]$ afin de calculer σ_0 et σ_1 .

■ Conditions initiales $u_0(x)$ et $v_0(x)$

A l'instant $t = 0$,

$$\begin{cases} u(x_0, 0) = c_0 \\ v_0(x) = 0 \end{cases}$$

■ Enregistrement stéréo et positionnement des micros

La corde va ensuite osciller pour $t > 0$. Dans notre simulation nous allons considérer 2 micros dont les deux positions au niveau de la corde sont données par le vecteur $rp = [p_1, p_2]$ (rp comme *record position*). Le vecteur $out = \text{zeros}(2, NF)$ va donc enregistrer aux deux positions p_1 et p_2 , toutes les hauteurs de déplacements $u(:, p_1)$ et $u(:, p_2)$ (NF échantillons). Ces positions

ne coïncidant pas forcément avec les points de discrétisation $x_i = ih$ il sera nécessaire de faire une interpolation linéaire.

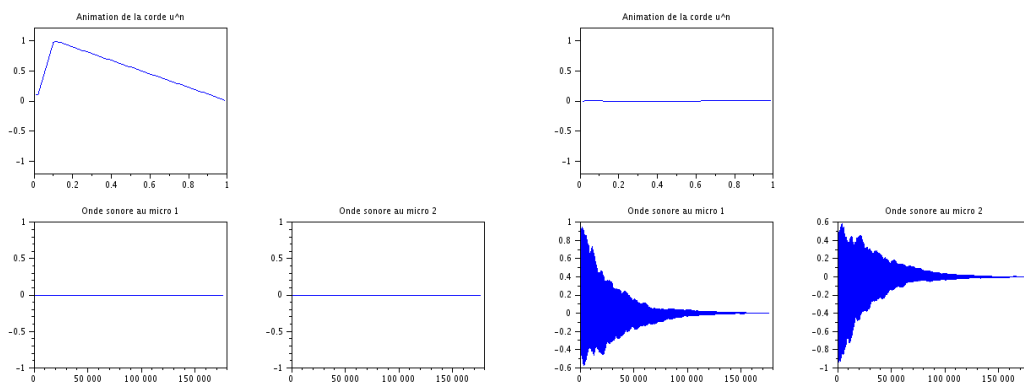
Listing 1 – Paramètres d'entrée

```

start
SR = 44100;           // taux d'échantillonnage
B = 0.001;           // paramètre d'inharmonicité
f = 110;             // fréquence fondamentale
TF = 4;              // durée de la simulation
xo = 0.1;            // position où la corde est pincée
co = 1;              // hauteur du pincement
rp = [0.3 0.7];      // positions des micros
loss = [100, 10; 1000, 8]; // couples de fréquence/temps décroissance

```

Question 6.



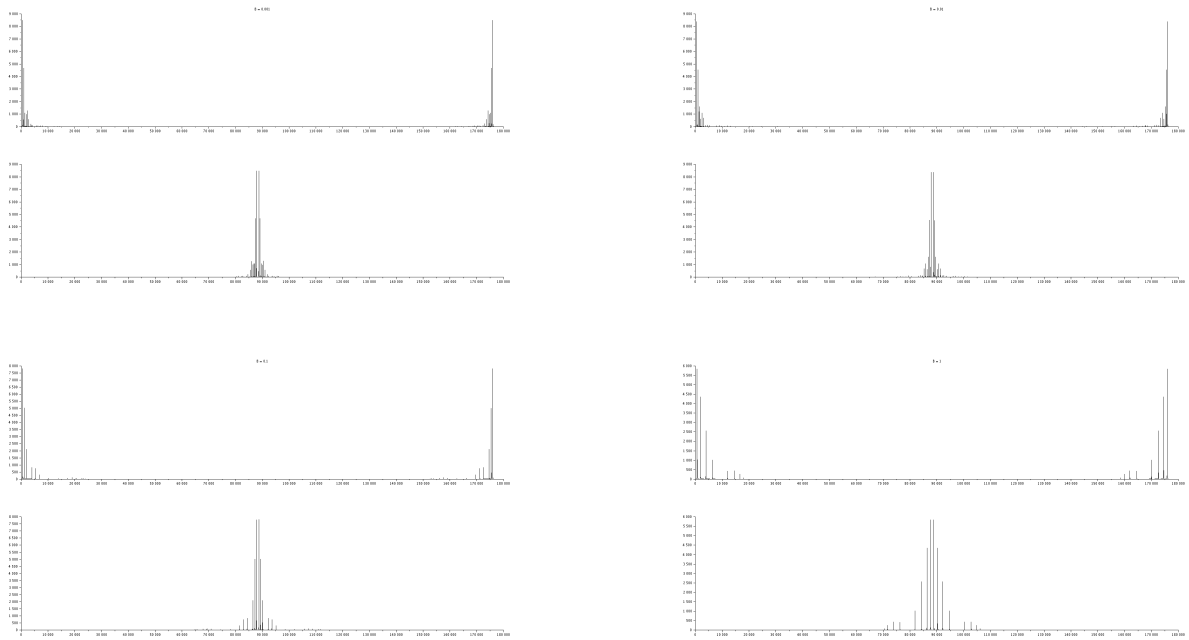
Ces deux images représentent la fenêtre aux instants initiaux et finaux, à $t=0$ et $t=176300$ itérations.

Le signal *out* est représenté juste en dessous de la représentation de u^n .

2.2 Analyses qualitative et quantitative du son produit

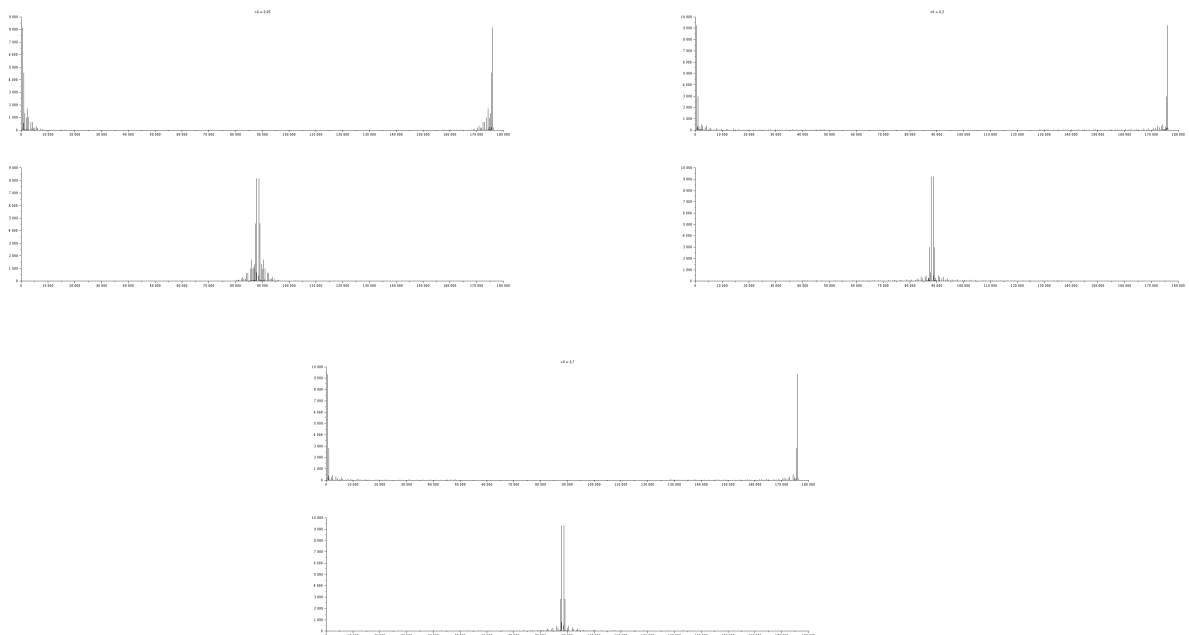
Question 7.

On remarque que sur les analyses en fréquence, le pic de maximum du spectre ne correspond pas à la fréquence entrée de 110Hz. Cela peut s'expliquer par les frottements qui opèrent sur la corde qui fait que le son perd en pureté. De plus, certaines erreurs d'approximation dans le calcul (notamment lorsque l'on calcule $inv(A)$) peuvent fausser le résultat.



Les premiers tests que nous avons effectués ($x_0 = 0.1$ est constant) permettent de voir l'effet du paramètre d'inharmonicité B sur le spectre : en faisant varier B de 0.001 (en haut à gauche) à 1 (en bas à droite) on s'aperçoit que le spectre se disperse, avec un nombre d'harmoniques plus élevé.

Ainsi, lorsque le paramètre B est faible, la corde est plus lâche et le son plus fidèle. Lorsque B est élevé, la corde paraît plus tendue, et le son devient alors plus “sec”.



Le deuxième test permet de voir l'impact de la position x_0 sur le spectre et le son entendu (la paramètre $B = 0.001$ est constant).

Lorsque l'on pince la corde très près de l'attache, le spectre est plus étendu, il y a plus d'harmoniques. Cela est dû aux répercussions rapides du signal sur l'attache, qui provoquent des perturbations, visibles sur le spectre.

En revanche, la corde pincée en "milieu" de corde offre un son au spectre moins ouvert, et plus "pur".

Partie II : Modélisation de la membrane tympanique

3 Modélisation physique d'une membrane circulaire libre fixée sur les bords

Pour $f = 0$ la membrane vérifie l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \Delta w$$

On cherche à résoudre le problème suivant, trouver $w(x, y, t)$ sur une durée T_f solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \Delta w \text{ dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T_f) \\ w(x, y, t) = 0 \text{ sur } \Gamma_T = \Gamma \times (0, T_f) \\ w(x, y, 0) = w_0(x, y) \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0 \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad (3)$$

Comme pour la corde de guitare, la membrane est fixée sur le bord circulaire (deuxième équation, condition de type Dirichlet), possède un déplacement initial $w_0(x, y)$ (troisième équation) et une vitesse initiale nulle (quatrième équation). Afin de modéliser la vibration d'une membrane circulaire, il est plus pratique d'utiliser les coordonnées polaires, notamment pour l'écriture des conditions aux bords. On note $a > 0$ le rayon de la membrane circulaire :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \Gamma = \{(x, y) \in \Omega, x^2 + y^2 = a^2\}$$

On introduit les variables adimensionnées suivantes

$$\eta = \frac{r}{a}, \tau = \frac{ct}{a}$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ représente la vitesse de propagation de l'onde.

Question 8.

On commence d'abord par calculer tous les éléments nécessaires à la suite du calcul :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et ensuite....

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

En regroupant les termes on a alors

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= T \Delta \omega \Leftrightarrow \rho \frac{c^2}{a^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = T \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{T}{a^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{x}{x^2 + y^2} \right)
\end{aligned}$$

On calcule de nouveau les morceaux intermédiaires :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \frac{y^2}{a(x^2 + y^2)^{3/2}} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \times \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \times \frac{-y}{x^2 + y^2} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \frac{x^2}{a(x^2 + y^2)^{3/2}} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \times \frac{x}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Ce qui donne ensuite :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{x}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \frac{x^2}{a^2(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{y^2}{a(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\
\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) &= -\frac{y^2}{a(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{y}{a\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \frac{y^2}{a^2(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{x^2}{a(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) &= \frac{x^2}{a(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

On regroupe enfin tous les termes (et on supprime les termes croisés) :

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \frac{x^2 + y^2}{a^2(x^2 + y^2)} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{x^2 + y^2}{a(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{x^2 + y^2}{a(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2}$$

En considérant le fait que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\eta = \frac{r}{a}$, on en déduit que :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta}}$$

Les résultats suivant découlent simplement des changements de variables polaires :

$$\begin{aligned} \omega(1, \theta, \tau) &= 0 \\ \omega(\eta, \theta, 0) &= \omega_0(\eta \cos(\theta), \eta \sin(\theta)) \\ \frac{\partial \omega(\eta, \theta, 0)}{\partial \tau} &= 0 \end{aligned}$$

4 Discrétisation polaire de la surface 2D par un schéma explicite

$$\begin{cases} \eta_i = id\eta, & 0 \leq i \leq N_\eta \\ \theta_j = jd\theta, & 0 \leq j \leq N_\theta \\ d\eta = \frac{1}{N_\eta+1} \\ d\theta = \frac{1}{N_\theta+1} \end{cases}$$

On note $d\tau$ le pas de temps et ω_{ij}^n la solution approchée de $\omega(\eta_i, \theta_j, nd\tau)$.

Question 9.

Soit $i > 1$ et $\eta \neq 0$.

On effectue un développement de Taylor de chaque membre (par rapport à chaque variable) et on obtient :

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} = \frac{\omega(\eta_i, \theta_j, (n+1)d\tau) - 2\omega(\eta_i, \theta_j, nd\tau) + \omega(\eta_i, \theta_j, (n-1)d\tau)}{d\tau^2} + o(1)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} = \frac{\omega(\eta_{i+1}, \theta_j, d\tau) - 2\omega(\eta_i, \theta_j, nd\tau) + \omega(\eta_{i-1}, \theta_j, d\tau)}{d\eta^2} + o(1)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} = \frac{\omega(\eta_i, \theta_{j+1}, d\tau) - 2\omega(\eta_i, \theta_j, nd\tau) + \omega(\eta_i, \theta_{j-1}, d\tau)}{d\theta^2} + o(1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{\omega(\eta_{i+1}, \theta_j, d\tau) - \omega(\eta_{i-1}, \theta_j, d\tau)}{2d\eta} + o(1)$$

On discrétise maintenant chaque morceau, et on a finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \tau^2} &= \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{d\tau^2} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} &= \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{d\eta^2} \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} &= \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{d\theta^2} & \frac{\partial \omega}{\partial \eta} &= \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2d\eta} \end{aligned}$$

Donc en regroupant les termes, on obtient bien :

$$\frac{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{d\theta^2} + \frac{1}{id\eta} \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2d\eta}$$

Question 10.

On écrit les conditions aux limites discrétisées :

$$\begin{aligned} \omega_{1,j}^n &= 0 \\ \omega_{i,j}^0 &= \omega_{i,j}^1 \text{ car } \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\omega_{i,j}^1 - \omega_{i,j}^{-1}}{\partial \tau} &= 0 \Leftrightarrow \omega_{i,j}^1 = \omega_{i,j}^{-1} = \omega_{i,j}^0 \end{aligned}$$

Question 11.

Montrons que, pour $\eta = 0$, on a $\frac{\omega_{1,1}^{n+1} - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{1,1}^{n-1}}{d\eta^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} w_{2,j}^n - w_{1,1}^n \right)$

On écrit le schéma explicite de l'équation d'onde en coordonnées cartésiennes :

$$\rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = T \Delta \omega \Leftrightarrow \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

On discrétise cette équation en $\omega_{x=0,y=0}^n$, on obtient :

$$\rho \frac{\omega_{0,0}^{n+1} - 2\omega_{0,0}^n + \omega_{0,0}^{n-1}}{dt^2} = T \frac{\omega_{1,0}^n - 2\omega_{0,0}^n + \omega_{-1,0}^n}{dx^2} + T \frac{\omega_{0,1}^n - 2\omega_{0,0}^n + \omega_{0,-1}^n}{dy^2}$$

On repasse ensuite en polaire, et en considérant, grâce à la figure fournie, que $d\eta \approx dx \approx dy$:

$$\frac{\omega_{1,1}^{n+1} - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{\omega_{2,1}^n - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{2,5}^n}{d\eta^2} + \frac{\omega_{2,3}^n - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{2,7}^n}{d\eta^2}$$

On remarque qu'en pivotant, sur la même figure, le repère de $d\theta$, on obtient la deuxième équation :

$$\frac{\omega_{1,1}^{n+1} - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{\omega_{2,2}^n - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{2,6}^n}{d\eta^2} + \frac{\omega_{2,4}^n - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{2,8}^n}{d\theta^2}$$

Ainsi, en sommant les équations on obtient

$$\frac{\omega_{1,1}^{n+1} - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 w_{2,j}^n - w_{1,1}^n \right)$$

On peut donc conclure, en généralisant le phénomène, que

$$\forall N_\theta, \quad \frac{\omega_{1,1}^{n+1} - 2\omega_{1,1}^n + \omega_{1,1}^{n-1}}{d\tau^2} = \frac{4}{d\eta^2} \left(\frac{1}{N_\theta} \sum_{j=1}^{N_\theta} w_{2,j}^n - w_{1,1}^n \right)$$

5 Stabilité et précision du schéma

5.1 Etude de la stabilité

On remplace $w_{i,j}^n$ dans l'équation discrétisée, par une solution de la forme :

$$W_{p_{i,j}}^n = e^{I(\alpha_1(id\eta) + \alpha_2(jd\theta) - \alpha_3nd\tau)}$$

où I est défini par : $I^2 = -1$.

Question 12.

Montrons que $\alpha_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow d\tau \leq \frac{\eta d\eta d\theta}{\sqrt{d\eta^2 + (\eta d\theta)^2}}$

On remplace dans l'équation discrétisée :

$$\begin{aligned} \frac{W_{i,j}^{n+1} - 2W_{i,j}^n + W_{i,j}^{n-1}}{d\tau^2} &= \frac{W_{i+1,j}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i-1,j}^n}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{W_{i,j+1}^n - 2W_{i,j}^n + W_{i,j-1}^n}{d\theta^2} + \\ &\quad \frac{1}{id\eta} \frac{W_{i+1,j}^n - W_{i-1,j}^n}{2d\eta} \\ \Leftrightarrow \frac{W_{i,j}^n (e^{-I\alpha_3 d\tau} - 2 + e^{I\alpha_3 d\tau})}{d\tau^2} &= \frac{W_{i,j}^n (e^{I\alpha_1 d\eta} - 2 + e^{-I\alpha_1 d\eta})}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{W_{i,j}^n (e^{I\alpha_2 d\theta} - 2 + e^{-I\alpha_2 d\theta})}{d\theta^2} + \\ &\quad \frac{1}{id\eta} \frac{W_{i,j}^n (e^{I\alpha_1 d\eta} - e^{-I\alpha_1 d\eta})}{2d\eta} \\ \Leftrightarrow \frac{(\cos(\alpha_3 d\tau) - 1)}{d\tau^2} &= \left(\frac{(\cos(\alpha_1 d\eta) - 1)}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{(\cos(\alpha_2 d\theta) - 1)}{d\theta^2} \right) + I \frac{1}{2id\eta} \frac{\sin(\alpha_1 d\eta)}{d\eta} \end{aligned}$$

Comme on suppose que $\alpha_3 \in \mathbb{R}$, on a donc que

$$\frac{1}{2id\eta} \frac{\sin(\alpha_1 d\eta)}{d\eta} = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha_1 d\eta) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 d\eta \equiv 0[\pi]$$

Ainsi, on obtient, à l'aide d'une transformation trigonométrique :

$$\frac{\sin^2(\frac{\alpha_3 d\tau}{2})}{d\tau^2} = \frac{\sin^2(\frac{\alpha_1 d\eta}{2})}{d\eta^2} + \frac{1}{(id\eta)^2} \frac{\sin^2(\frac{\alpha_2 d\theta}{2})}{d\theta^2}$$

Finalement, comme $\sin^2 \leq 1$, on peut en déduire que

$$\frac{1}{d\tau^2} \geq \frac{1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta^2 d\theta^2}$$

... et en prenant l'inverse, on a le résultat voulu :

$$d\tau^2 \leq \frac{\eta d\eta d\theta}{\sqrt{d\eta^2 + (\eta d\theta)^2}}$$

Ainsi en prenant la plus petite valeur de η on obtient la condition de courant :

$$CFL = \frac{d\tau}{d\eta d\theta} \leq 1 \quad (4)$$

5.2 Etude de la consistance

Question 13.

On développe les termes avec la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{n+1} &= \omega_{i,j}^n + d\tau(\omega_{i,j}^n)' + o(d\tau^2) \\ \omega_{i,j}^n &= \omega_{i,j}^n + o(d\tau^2) \\ \omega_{i,j}^{n-1} &= \omega_{i,j}^n - d\tau(\omega_{i,j}^n)' + o(d\tau^2) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\omega_{i,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1} = o(d\tau^2)}.$

De même, si on applique ce schéma à l'espace, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_{i+1,j}^n &= \omega_{i,j}^n + d\eta(\omega_{i,j}^n)' + o(d\eta^2) \\ \omega_{i,j}^n &= \omega_{i,j}^n + o(d\eta^2) \\ \omega_{i-1,j}^n &= \omega_{i,j}^n - d\eta(\omega_{i,j}^n)' + o(d\eta^2) \\ \\ \omega_{i,j+1}^n &= \omega_{i,j}^n + d\theta(\omega_{i,j}^n)' + o(d\theta^2) \\ \omega_{i,j}^n &= \omega_{i,j}^n + o(d\theta^2) \\ \omega_{i,j-1}^n &= \omega_{i,j}^n - d\theta(\omega_{i,j}^n)' + o(d\theta^2) \end{aligned}$$

Donc on a une erreur de troncature en $o(d\eta^2, d\theta^2)$, soit par proportionnalité en $\boxed{o(dx^2, dy^2)}.$

Finalement, on a $\boxed{E_t = o(d\tau^2, dx^2, dy^2) \rightarrow 0}.$

6 Solutions analytiques

On cherche une solution de notre équation d'onde polaire sous la forme :

$$w(\eta, \theta, \tau) = F(\eta, \theta) \cos(\omega\tau)$$

avec ω la fréquence de vibration de l'onde et F l'amplitude.

Question 14.

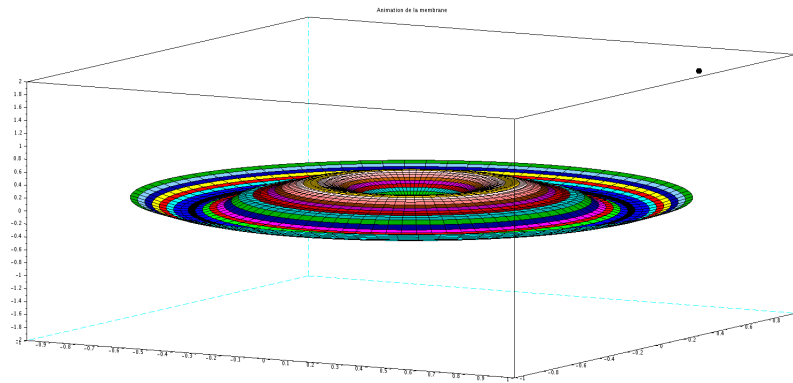


FIGURE 1 – Image de la membrane

7 Code scilab du schéma explicite et analyse des résultats

Afin de résoudre numériquement le schéma explicite en coordonnées polaires, on définit w_{ij}^n comme un tableau de taille $(N_\eta) \times (N_\theta + 1)$ avec :

$$\eta = id\eta, \quad i = 1, \dots, N_\eta$$

$$\theta = jd\theta, \quad j = 1, \dots, N_\theta + 1$$

On pose des conditions périodiques en θ :

$$w(\eta, \theta, \tau) = w(\eta, \theta + 2\pi, \tau)$$

Question 15.

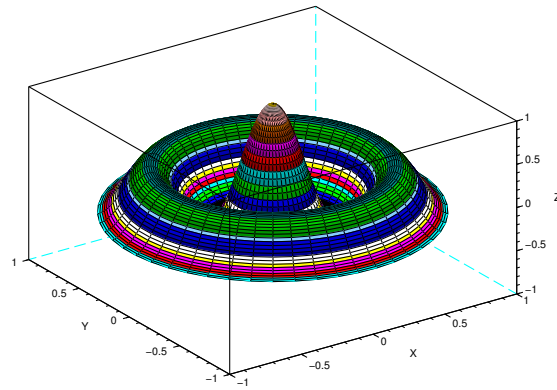
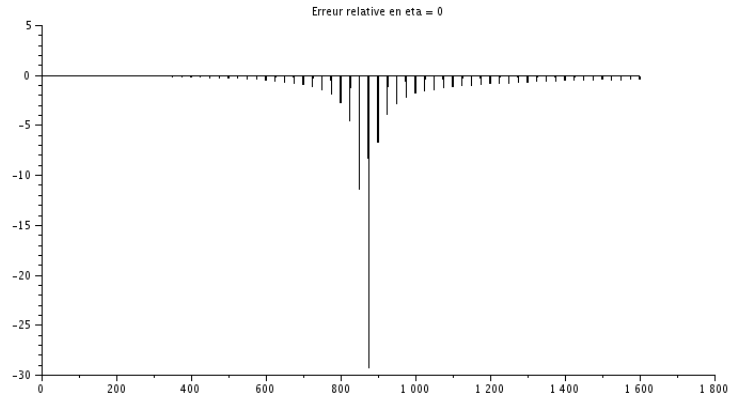
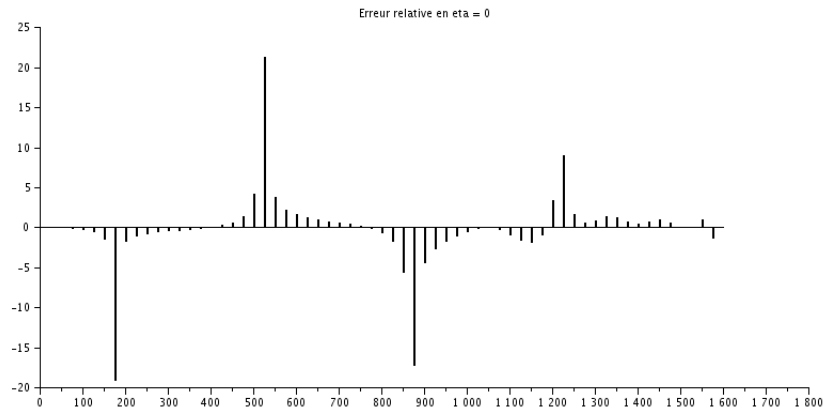
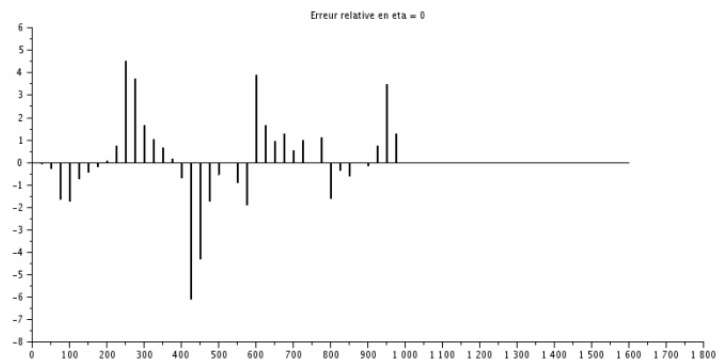


FIGURE 2 – Etat initial de la membrane

Question 16.

FIGURE 3 – Erreur relative entre les deux sloutions pour $CFL = 0.1$ FIGURE 4 – Erreur relative entre les deux sloutions pour $CFL = 0.5$ FIGURE 5 – Erreur relative entre les deux sloutions pour $CFL = 1$

On remarque que dans tous les cas, la solution numérique reste proche de la solution exacte associée à l'exception de grands pics d'erreurs espacés régulièrement. Ces pics diminuent normalement leur périodicité augmentent plus CFL est grand.

Question 17.

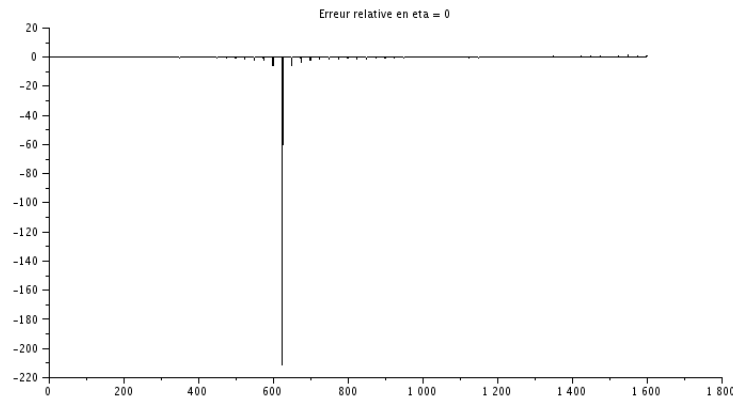


FIGURE 6 – Erreur relative entre les deux solutions pour $CFL = 0.5$

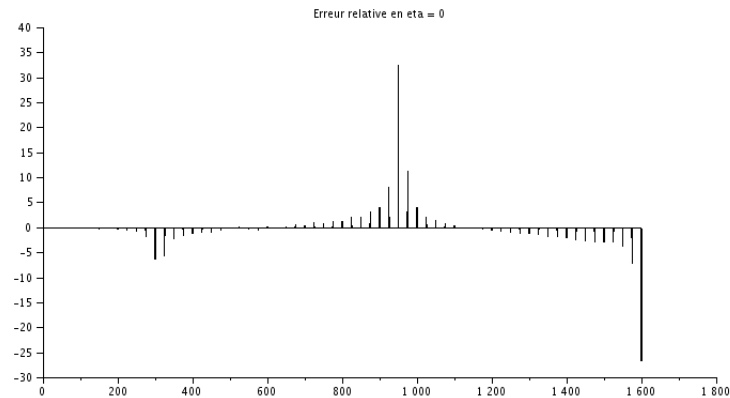


FIGURE 7 – Erreur relative entre les deux solutions pour $CFL = 1$

Les pics d'erreur relative semblent globalement plus intenses et espacés que pour le schéma initial précédent. De plus, les observations faites restent les mêmes : plus on augmente CFL, et plus les pics sont faibles en norme et peu espacés.

Question 18.

On remarque que le schéma de la question 16 ne fait pas intervenir θ , sa discrétisation n'a donc pas d'impact sur la solution finale. On remarque également que quelque soit la valeur de CFL, les pics d'erreur relative sont nettement plus forts dans le schéma faisant intervenir θ , c'est donc la cause principale de ces erreurs !

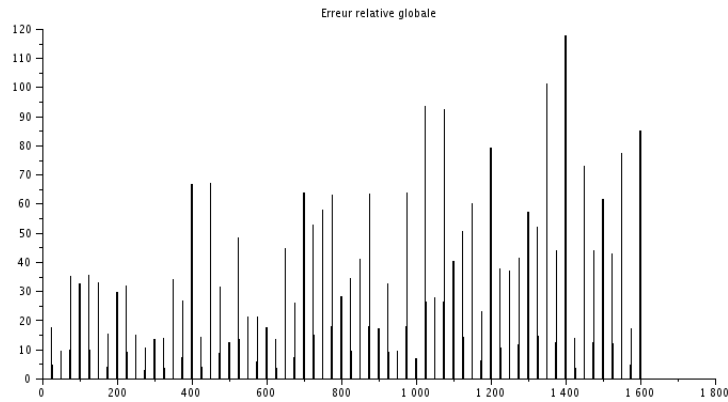
Question 19.

FIGURE 8 – Erreur relative globale entre les deux solutions pour la grille de taille ($N_\theta = 40$, $N_\eta = 20$)

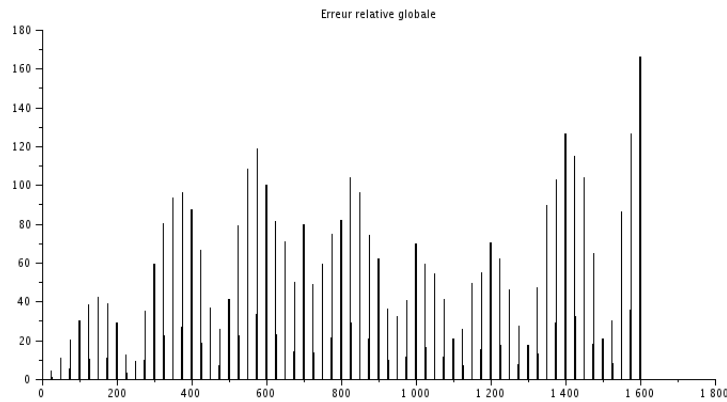


FIGURE 9 – Erreur relative globale entre les deux sloutions pour la grille de taille $(N_\theta = 80, N_\eta = 40)$

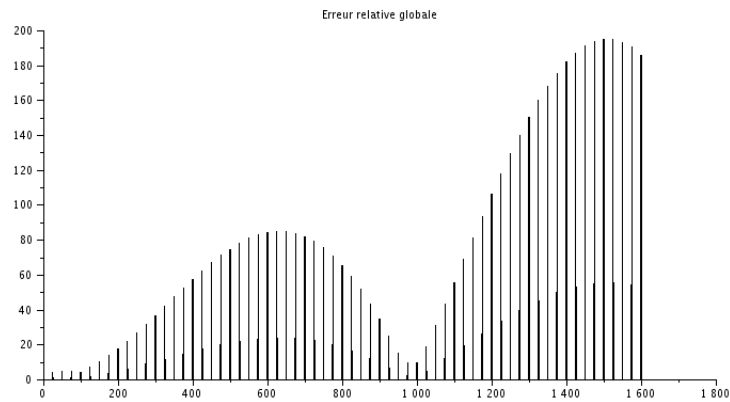


FIGURE 10 – Erreur relative globale entre les deux sloutions pour la grille de taille $(N_\theta = 160, N_\eta = 80)$

Question 20.

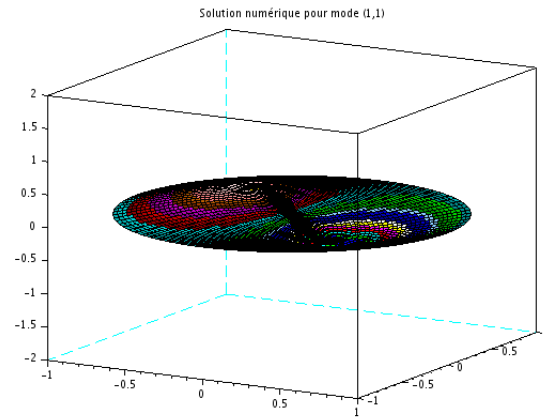


FIGURE 11 – Image de la membrane en mode (1,1)