Projet Modélisation Graphique
Splines Hermites

Julien BORDAS Antoine LADRECH

Novembre 2016

On définit les polynômes d'interpolation Hermite par

$$P(t) = P_0 H_0(t) + P_1 H_1(t) + m_0 H_2(t) + m_1 H_3(t) \qquad t \in [0,1]$$

Les Splines Hermites cubiques sont définies comme suit :

$$P(u) = P_k H_0(t) + P_{k+1} H_1(t) + (u_{k+1} - u_k) m_k H_2(t) + (u_{k+1} - u_k) m_{k+1} H_3(t) \qquad t = \frac{u - u_k}{u_{k+1} - u_k} \quad (1)$$

Question 1.

On prend une paramétrisation équidistante : $u_k = k$, $k = 0, ..., N$.
Ecrivons l'équation 1 sous forme de Bézier.

Prenons $t = \frac{u-u_k}{u_{k+1}-u_k}$, on a alors :

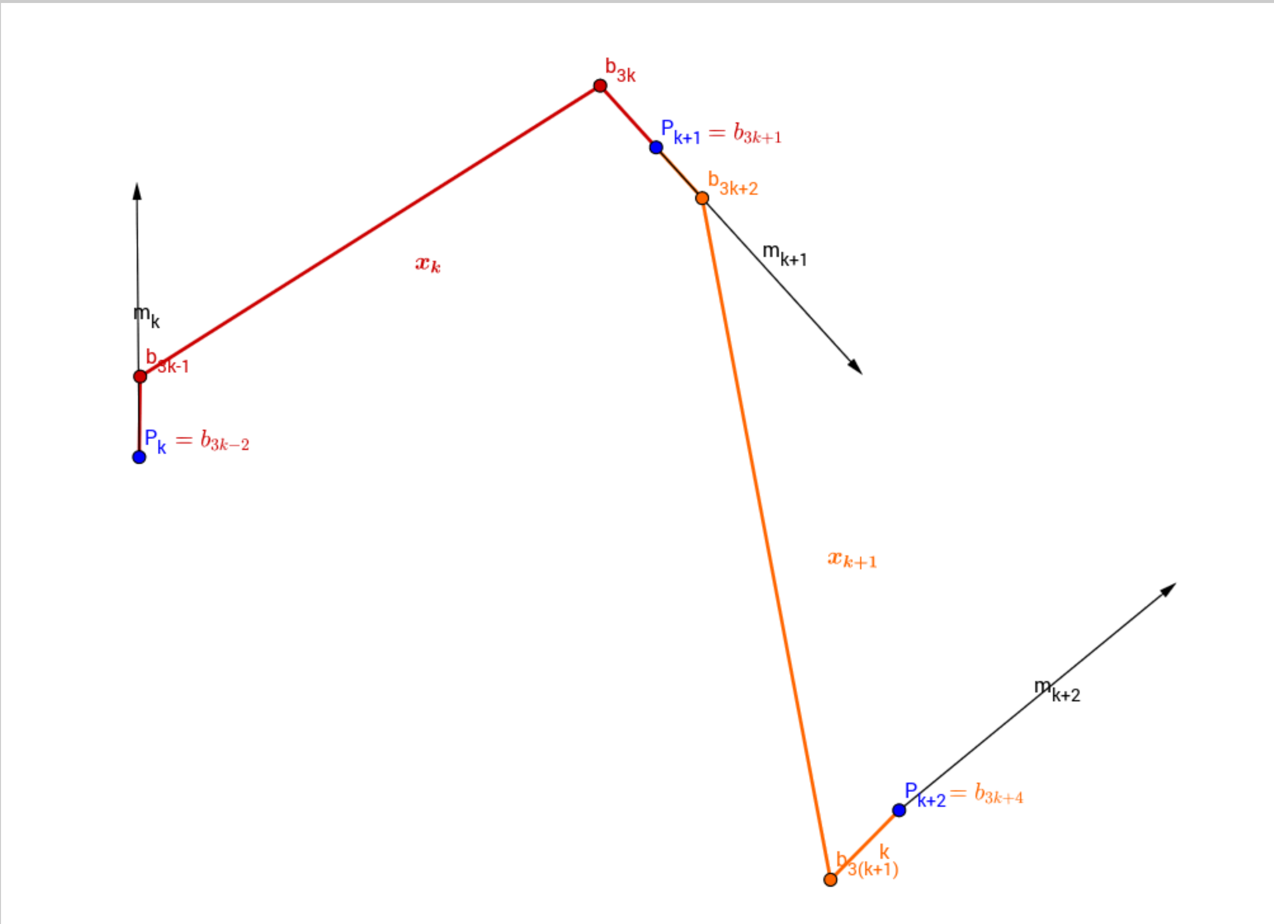
$$P(t) = P_0 B_0^3(t) + \left(P_0 + \frac{1}{3} m_0\right) B_1^3(t) + \left(P_1 + \frac{1}{3} m_1\right) B_2^3(t) + P_1 B_3^3(t)$$

$$P_{|[u_k, u_{k+1}]}(t) = P_k B_0^3(t) + \left(P_k + \frac{1}{3} m_k\right) B_1^3(t) + \left(P_{k+1} + \frac{1}{3} m_{k+1}\right) B_2^3(t) + P_{k+1} B_3^3(t) \qquad (2)$$

On définit alors les points de contrôle suivants :

$$\begin{aligned}
b_{3,k} &= P_k \\
b_{3,k+1} &= \left(P_k + \frac{1}{3} m_k\right) \\
b_{3,k+2} &= \left(P_{k+1} + \frac{1}{3} m_{k+1}\right) \\
b_{3,k+3} &= P_{k+1}
\end{aligned}$$

Question 2.



Question 3.

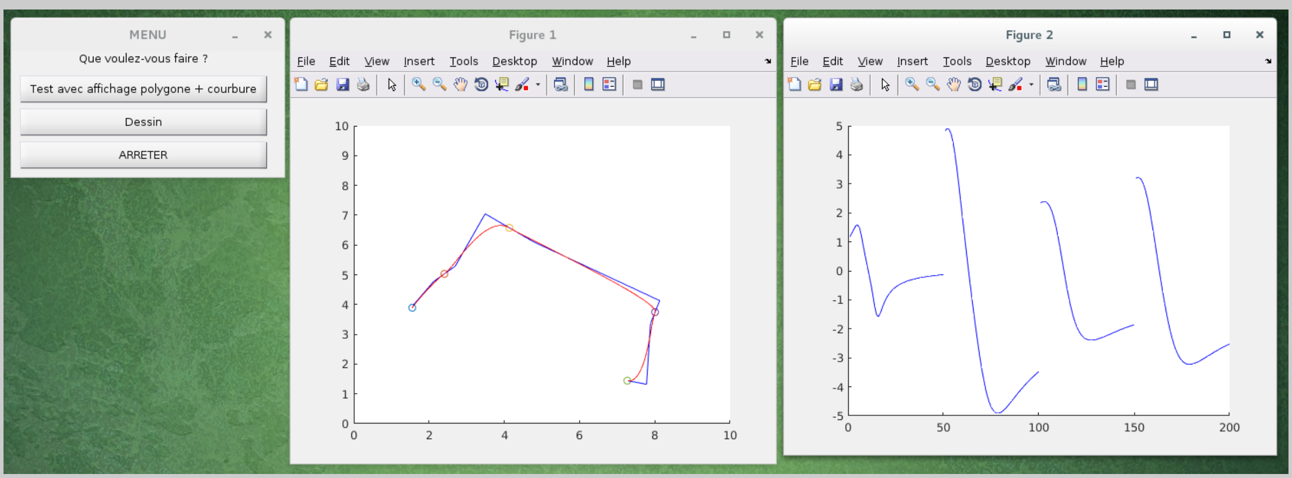
Nous avons choisi d'implémenter la méthode des **cardinal splines** avec choix de m_0 et m_N à la souris :

$$m_k = (1-c)\frac{P_{k+1} - P_k}{u_{k+1} - u_k} \qquad c \geq 0$$

```
% Calcul des tangentes : cardinal splines
matrice_mi(1,1) = 0;
matrice_mi(2,1) = 0;

% On calcule d'abord les mi de Catmull-Rom
for j = 2:size(matrice_pi, 2) - 1
    matrice_mi(1,j) = matrice_pi(1,j+1) - matrice_pi(1,j);
    matrice_mi(2,j) = matrice_pi(2,j+1) - matrice_pi(2,j);
```

```
end

% On entre la première tangente à la souris
[X,Y] = ginput(1);
matrice_mi (1,1) = X - matrice_pi(1,1);
matrice_mi (2,1) = Y - matrice_pi(2,1);

% On entre la dernière tangente à la souris
[X,Y] = ginput(1);
m = size(matrice_mi, 2);
matrice_mi(1,m+1) = X - matrice_pi(1,m+1);
matrice_mi(2,m+1) = Y - matrice_pi(2,m+1);

% Choix du paramètre de tension
prompt = {'c:'};
dlg_title = 'Paramètre␣de␣tension';
answer = inputdlg(prompt,dlg_title);
c=str2num(answer{:});

% On multiplie par (1-c)
matrice_mi = (1-c)*matrice_mi;
```

Question 4.



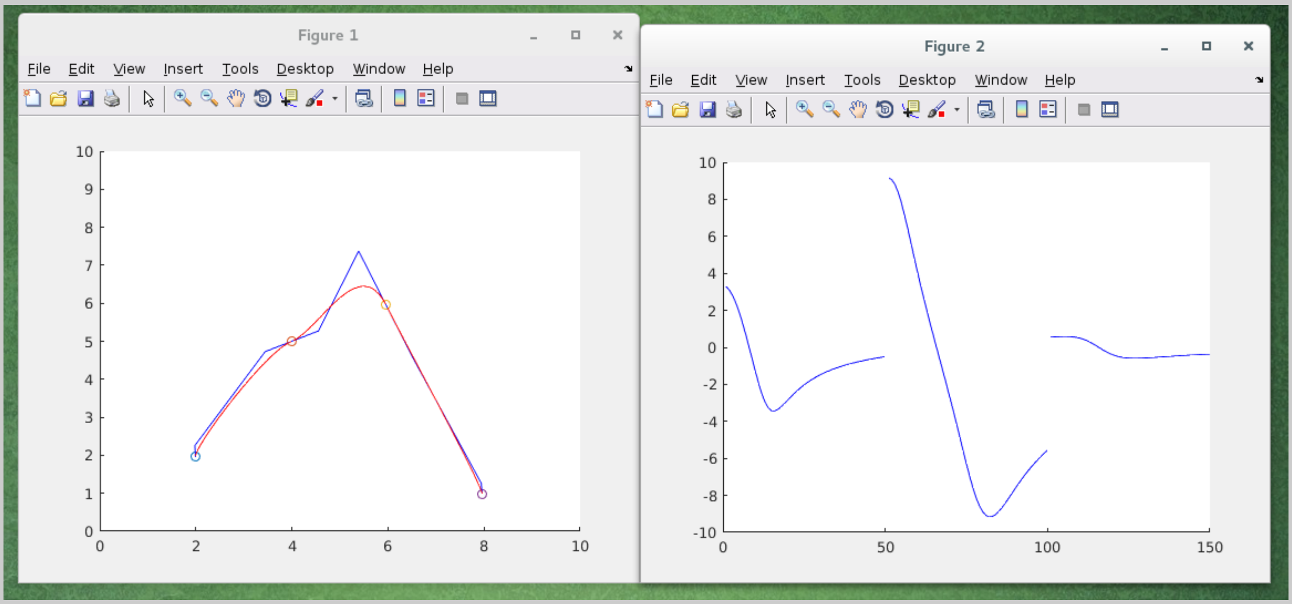
4.1) Le paramètre c correspond en quelque sorte à la tension de la courbe, plus c est proche de 1, plus les morceaux de courbe qui relient les points se rapprochent de segments de droites. On peut également noter que pour $c = 0$, on retrouve l'expression des tangentes de

Catmull-Rom qui correspondent à une interpolation plus fluide et plus courbée des points.

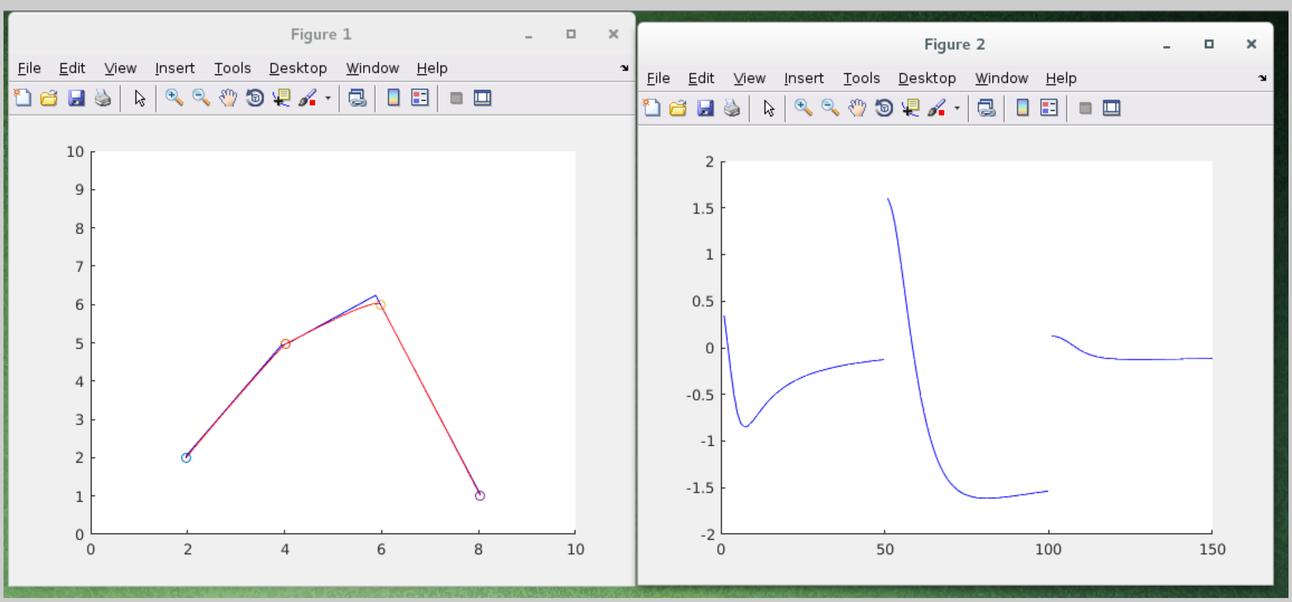
Question 5.

5.1) Nous avons tracé la courbe et sa courbure d'un ensemble de points à interpoler pour deux valeurs de c :

Premier cas : $c = 0.15$



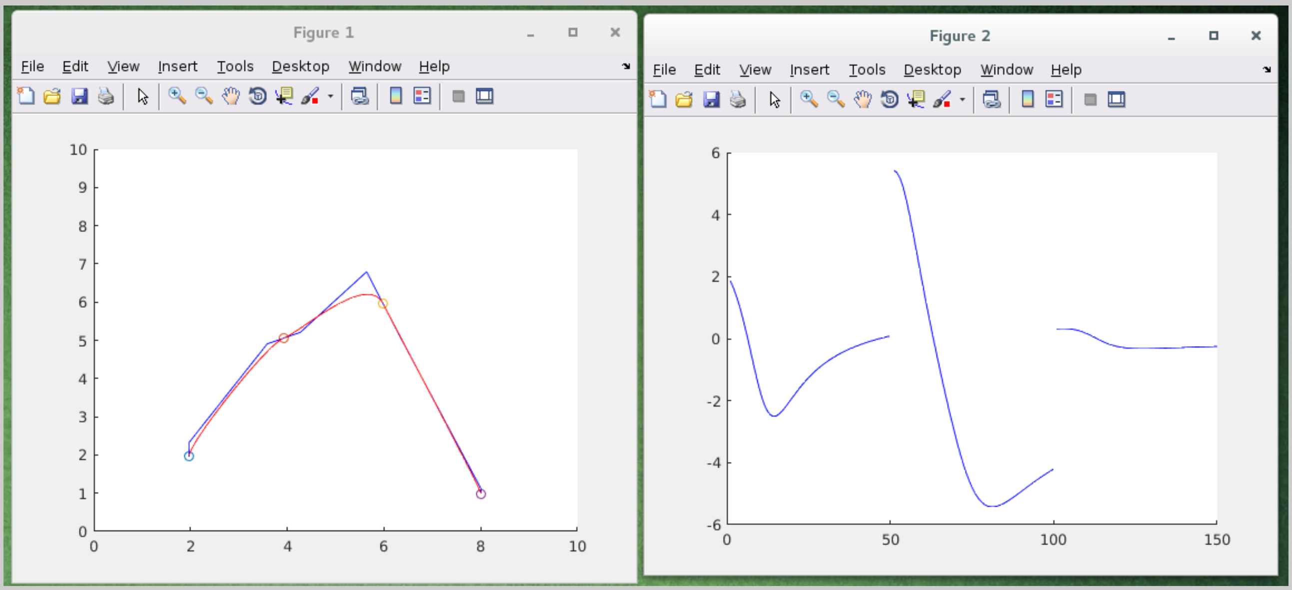
Second cas : $c = 0.85$



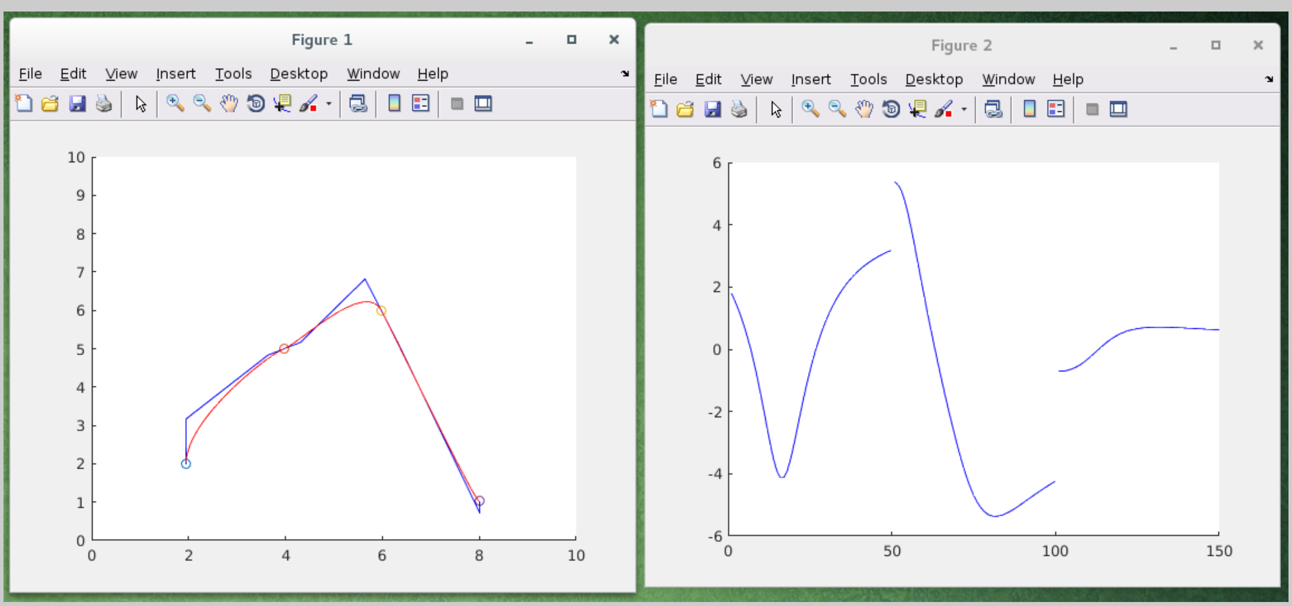
On peut vérifier dans un premier temps que la courbe est beaucoup plus t́enduédans le second cas. Et cela se répercute sur la courbure également. En effet, sa norme est bien plus élevée dans le premier cas que dans le second ! Logique puisque dans le second nous avons presque à faire à des droites.

5.2) Nous avons ici tracé les deux courbes avec c constant. Cependant dans le premier cas les tangentes m_0 et m_N sont de norme faible et dans le sens du point suivant alors que dans le second cas elles sont soit de norme grande, soit orientées dans l'autre sens :

<u>Premier cas :</u>



<u>Second cas :</u>

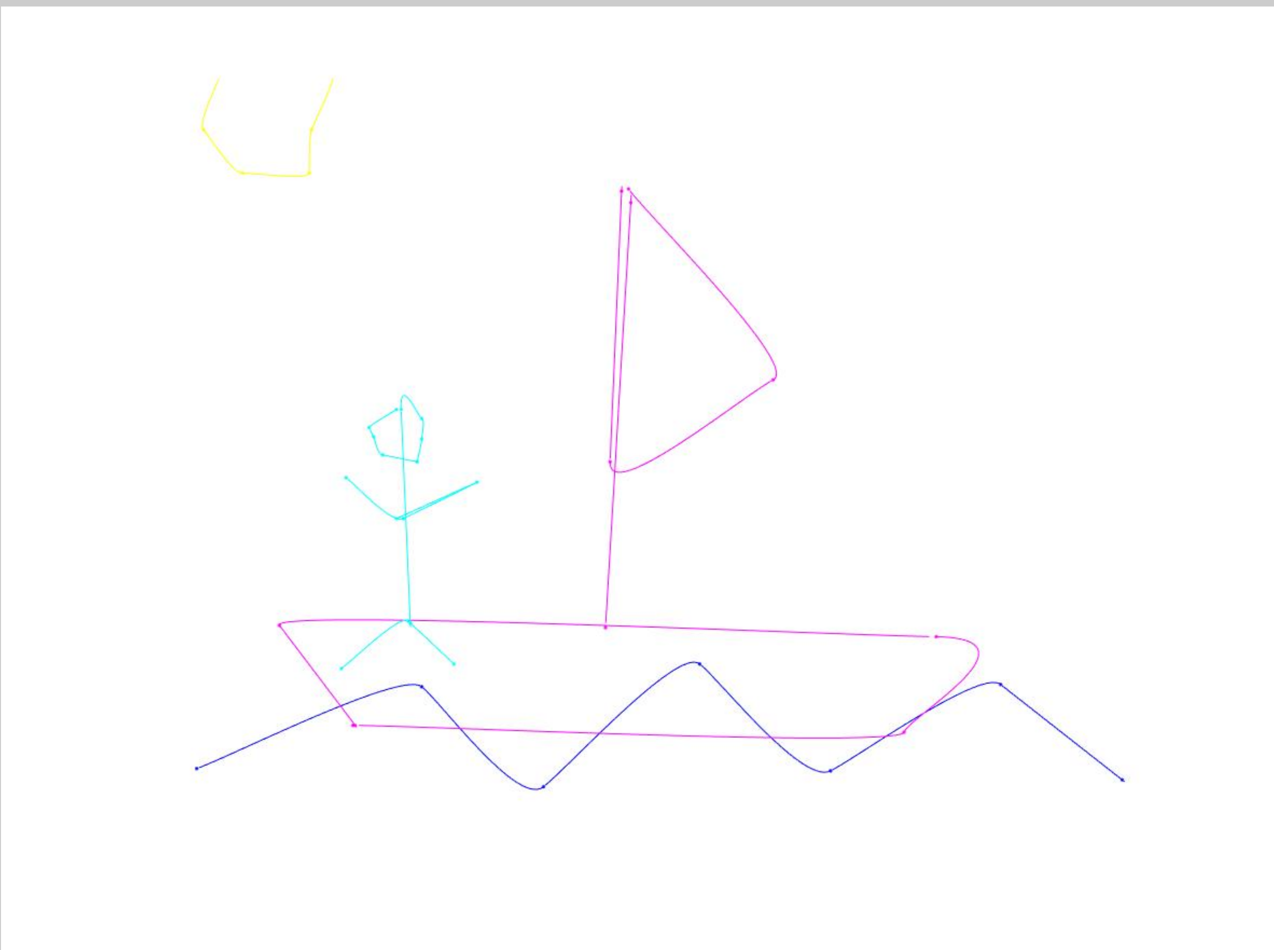


Encore une fois, on remarque un impact sur la courbure : plus la tangente en un point force la courbe à varier rapidement (grande norme par exemple), plus la norme de la courbe en ce point sera grande.

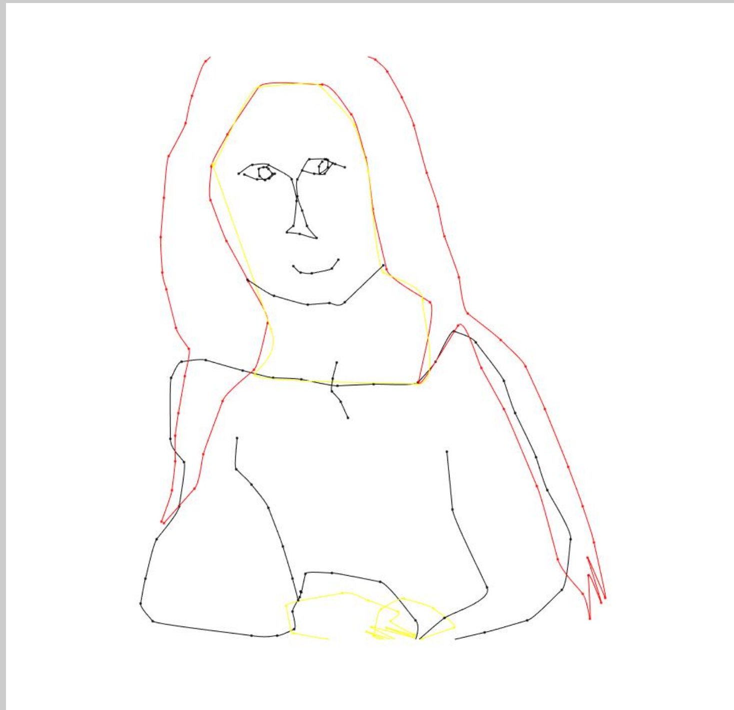
5.3) La principale raison pour laquelle la courbure est un bon indicateur est sa continuité (ou non). En effet, étant dépendante de la dérivée seconde de la courbe, on peut facilement vérifier si celle-ci est C^2 ou non.

Question 6.

Faisant preuve d'une grande originalité, nous décidons dans un premier temps de déssiner un modeste paysage maritime...



Disposant d'un peu de temps, l'artiste du groupe, j'ai nommé Antoine Ladrech s'est lancé sur les traces de *Leonard De Vinci*, avec cette incroyable représentation de *La Joconde*...



Saurez-vous retrouve l'originale ?