Calcul scientifique.

Recherche de couples propres

1 Localisation des valeurs propres

Théorème d'Hadamard-Gerchgörin

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les valeurs propres de A ont des images dans le plan complexe

Corollaire

Convergence de la puissance itérée :

$x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $A \in S_n(\mathbb{R})$ Soit $(v_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ base de vecteurs propres de A associée à $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$

$\exists (c_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$

- $y_1 = A x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{A v_i}_{= \lambda_i v_i} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i$

$x_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|}$

$\exists \alpha_1 > 0$ tq $x_1 = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i$

- À l'étape p : $\exists \alpha_p > 0$ tq $x_p = \alpha_p \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^p v_i$

$x_p = \alpha_p \lambda_1^p \left(c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \underbrace{\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^p}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0} v_i \right)$ car $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ $\forall i \geq 2$

- $x_{2p} = \alpha_{2p} \lambda_1^{2p} \left(c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2p} v_i \right)$

or $\|x_{2p}\| = 1$

d'où $\alpha_{2p} \lambda_1^{2p} \underbrace{\| c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2p} v_i \|}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0} = 1$

d'où $\exists \lim_{p \to +\infty} \alpha_{2p} \lambda_1^{2p}$

d'où $x_{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{c_1 v_1}{\|c_1 v_1\|} := w_1$ vecteur propre de A associé à λ_1 et de norme 1

$\beta_{2p} = x_{2p}^T A x_{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} w_1^T \underbrace{A w_1}_{=\lambda_1 w_1} = \lambda_1$ car $\|w_1\| = 1$

• $x_{2p+1} = \alpha_{2p+1} \lambda_1^{2p+1} \underbrace{\left(c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2p+1} v_i \right)}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} c_1 v_1}$

$\|x_{2p+1}\| = 1 \iff \alpha_{2p+1} |\lambda_1|^{2p+1} \| c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2p+1} v_i \| = 1$

$\iff \alpha_{2p+1} \lambda_1^{2p} |\lambda_1| \| c_1 v_1 + \sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) v_i \| = 1$

d'où $\exists \lim_{p\to+\infty} \alpha_{2p+1} \lambda_1^{2p} = \frac{1}{|\lambda_1| \|c_1 v_1\|}$ et $x_{2p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \underbrace{\frac{\lambda_1}{|\lambda_1|}}_{=\text{signe}(\lambda_1)} \underbrace{\frac{c_1 v_1}{\|c_1 v_1\|}}_{=w_1}$

vecteur propre de A associé à λ_1, de norme 1

de plus $\beta_{2p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \underbrace{\text{signe}(\lambda_1)^2}_{=1} \underbrace{w_1^T A w_1}_{=\lambda_1}$

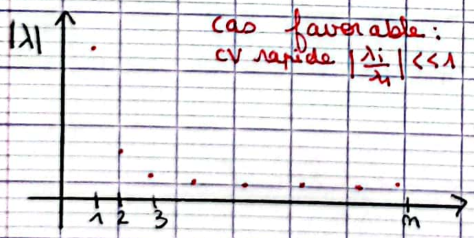
$\xrightarrow[p\to+\infty]{} \lambda_1$

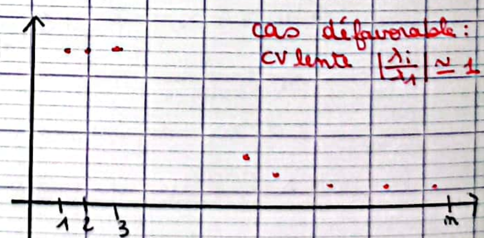
d'où $\beta_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \lambda_1$

$x_{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} w_1$

$x_{2p+1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \text{sign}(w_1)$ $\vec{v_p}$ de A associés à λ_1

Hyp : $c_1 \neq 0$ ⚠ pas un problème en pratique





Exercice :

2) Tant que

1) résoudre $A y_{i+1} = x_i$ $\qquad A \in S_m(\mathbb{R})$ inversible

2) $x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|}$

3) $\beta_{i+1} = x_{i+1}^T A x_{i+1}$

$i = i+1$

Stop si $|\beta_{i+1} - \beta_i| < \varepsilon |\beta_i|$

Sortie $\lambda = \beta_{i+1}$ $\quad w = x_{i+1}$

$\Rightarrow (x_{2p})$ et (x_{2p+1}) vont CV vers des vecteurs propres de A^{-1} associés à la plus grande valeur propre de A^{-1} en module

$\Rightarrow (x_{2p})$ et (x_{2p+1}) CV vers des $\vec{vp}$ de A associés à λ_m et (β_p) CV vers λ_m

$(\beta_{p+1} = x_{p+1}^T A x_{p+1})$

1) $\alpha \in \mathbb{R}$ non valeur propre de A $(\Leftrightarrow \det(A - \alpha I_m) \neq 0)$

$\Rightarrow A - \alpha I_m$ inversible

Soit λ valeur propre de A

Soit $u \in \mathbb{R}^m$

$$u \ \vec{vp} \text{ de A associé à } \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ Au = \lambda u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ (A - \alpha I_m) u = (\lambda - \alpha) u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ u = (\lambda - \alpha)(A - \alpha I_m)^{-1} u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ (A - \alpha I_m)^{-1} u = \frac{1}{\lambda - \alpha} u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow u \ \vec{vp} \text{ de } (A - \alpha I_m)^{-1} \text{ associé à } \mu$$

3) 1^e cas: Si α v_p de A alors $A - \alpha I_m$ non inversible $\Rightarrow$ solveurs de systèmes linéaires l'indiquera!

2^e cas: $\det(A - \alpha I_m) \neq 0$

Formellement:

(1) $y_{i+1} = (A - \alpha I_m)^{-1} x_i$ $\Rightarrow (x_{2p})$ et (x_{2p+1}) CV vers $\vec{vp}$ de $(A - \alpha I_m)^{-1}$ associés à la plus grande vp de $(A - \alpha I_m)^{-1}$ en module

$\Rightarrow (x_{2p})$ et (x_{2p+1}) CV vers des $\vec{vp}$ de A par 1) associé à λ_{i_0} tq $|\alpha - \lambda_{i_0}| = \min_{i \in [1,n]} |\alpha - \lambda_i|$ et (β_p) CV vers λ_{i_0} $(\beta_{p+1} = x_{p+1}^T x_{p+1})$

Algorithme de Jacobini:

Rotation de Givens:

$\Theta \ [i, j, \alpha]$

$\forall (p,q) \in [1,n]^2$

$$\Theta_{pq} = \begin{cases} \cos\alpha := c & \text{si } p = q \quad p \in [i,j] \\ 1 & \text{si } p = q \quad p \notin [i,j] \\ \sin\alpha := s & \text{si } p = i \quad q = j \\ -s & \text{si } p = j \quad q = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$[\Theta x]_r = \sum_{l=1}^{m} \Theta_{rl} x_l = \begin{cases} x_r & \text{si } r \notin [i,j] \\ c x_i + s x_j & \text{si } r = i \\ -s x_i + c x_j & \text{si } r = j \end{cases}$$

$\Rightarrow$ On ne modifie pas les composantes $r \notin [i,j]$ et on applique une rotation d'angle α au vecteur $\begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$[\Theta^T A \Theta]_{pq} = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} \Theta_{sp} \Theta_{rq} A_{sr}$$

Méthodes de factorisation

① Factoriser $A = A_1 A_2 \dots A_k$ $\Rightarrow$ calcul en place

② Résoudre séquentiellement les systèmes $\left.\begin{matrix} A_1 y_1 = b \\ A_2 y_2 = y_1 \\ A_k x = y_{k-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ structures simples pour A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^{(1)} = A$$

Etape 1 : $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1$ $\qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1$

$T_{ij}(\lambda) A : L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $T_{ij}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & (0) \\ \dots \lambda & & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$

$$A^{(2)} = T_{31}\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) T_{21}\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right) A^{(1)}$$

Etape 2 : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} L_2$ $\qquad \overset{U}{\overset{\shortparallel}{A^{(3)}}} = T_{32}\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}\right) A^{(2)}$

Bilan : $U = \underbrace{T_{32}\left(-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}}\right) T_{31}\left(-\frac{a_{31}^{(1)}}{a_{11}}\right) T_{21}\left(-\frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right)}_{L^{-1}} A$

Cas Général : $A^{(k+1)} = \prod_{j=k+1}^{m} T_{jk}\left(\frac{-a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\right) A^{(k)}$. On pose $L^{(k)} = \prod_{j=k+1}^{m} T_{jk}\left(\frac{-a_{jk}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}\right)$

$$L^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \ddots 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -l_{k+1,k} \\ -l_{m,k} \end{matrix}$$

Au bout de $m-1$ étapes, $U = L^{(m-1)} \dots L^{(1)} A \Rightarrow A = [L^{(1)}]^{-1} \dots [L^{(m-1)}]^{-1} U$

or $[L^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \ddots 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} l_{k+1,k} \\ l_{m,k} \end{matrix}$ $\qquad [T_{jk}(-l_{jk})]^{-1} = T_{jk}(l_{jk})$ $\qquad [L^{(1)}]^{-1} \dots [L^{(m-1)}]^{-1} I_m$

diapo 16

Théorème 1 : $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ has an LU factoriza° (L : unit lower triangular, U : upper triangular) if $\det(A(1:k, 1:k)) \neq 0$ $\forall k \in \{1, m-1\}$. If the LU factoriza° exists, then it is unique and $\det(A) = u_{11} \dots u_{mm}$

Théorème 2 : For each nonsingular matrix A, there exists a permutation matrix P such that PA possesses an LU factoriza° $PA = LU$.

Definition 1: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ is strictly diagonally dominant iff $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{m} |a_{ij}| \ \forall i = 1 \dots m$

Théorème 3: If A^T is strictly diagonally dominant then A is non-singular and A has an LU factorizaᵒ and $l_{ij} \leq 1$

Exercice 1:

$$PA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$$

(column widths r and $m-r$)

PA admet factorisaᵒ LU $\Rightarrow A_{11}$ inversible

$S = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1})A_{12} \in \mathcal{M}_{m-r}(\mathbb{R})$

1) 1ᵉ étape:

$$L^{(1)}PA = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ | & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Après r étapes $L^{(r)} L^{(r-1)} \dots L^{(1)} PA = \begin{bmatrix} U_{11} & (*) U_{12} \\ (0) & (*) B \end{bmatrix}$

$$PA = \underbrace{[L^{(r)}]^{-1} \dots [L^{(1)}]^{-1}}_{\begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{21} & I_{m-r} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ (0) & B \end{bmatrix} \Rightarrow PA = \begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{21} & I_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

L_{11} rang inf inversible

d'où
$$\begin{cases} A_{11} = L_{11} U_{11} & (1) \\ A_{12} = L_{21} U_{11} & (2) \\ A_{21} = L_{11} U_{12} & (3) \\ A_{22} = L_{21} U_{12} + B & (4) \end{cases}$$

(1) $\Rightarrow U_{11}$ inversible

Par (4) : $B = A_{22} - L_{21} U_{12}$ $\Rightarrow B = A_{22} - A_{21} \underbrace{U_{11}^{-1} L_{11}^{-1}}_{(L_{11}U_{11})^{-1} = A_{11}^{-1} \text{ par (1)}} A_{12} \Rightarrow B = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} = S$

Par (2): $L_{21} = A_{21} U_{11}^{-1}$

Par (3): $U_{12} = L_{11}^{-1} A_{12}$ car L_{11} inversible

2) P matrice de permutation $\Rightarrow \det P \in \{-1, 1\}$

$\det(A) = (\det P)^2 \det A = \det P \det PA = \det P \det L_{11} \det U_{11} \det S$ car matrices triangulaires par blocs

$= \det P \det(\underbrace{L_{11} U_{11}}_{A_{11}}) \det S = \det P \det A_{11} \det S$

3) Algorithmes hybrides: on dispose d'un algo spécifique à la résolution systèmes depuis S

on cherche à résoudre $Ax = b \Leftrightarrow$ résoudre $PAx = Pb$

$$\begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{12} & I_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r \\ \updownarrow m-r \end{matrix}$$

Etape 1: résolution de $\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}$

(1.1) Résoudre $L_{11} y_1 = \tilde{b}_1$ $\Rightarrow$ Système triangulaire inférieur de taille r

(1.2) $y_2 = \tilde{b}_2 - L_{21} y_1$ $\Rightarrow$ produit matrice-vecteur clop clop

Etape 2 : Resoudre $\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

(2.1) Resoudre $Sx_2 = y_2$ $\Rightarrow$ algo specifique à S

(2.2) Resoudre $U_{11}x_1 = y_1 - U_{12}x_2$ $\Rightarrow$ Système triangulaire supérieur de taille $m-r$ + un produit matrice-vecteur

Exercice 2 : Caractérisa° de Ker A quand A non inversible

$$PA = \begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{21} & I_r \end{bmatrix} \begin{array}{c} \overset{m-r}{\longleftrightarrow}\ \overset{r}{\longleftrightarrow} \\ \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow m-r \\ \updownarrow r \end{array} \quad \text{avec } \det U_{11} \neq 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}^m$

$x \in \operatorname{Ker} A \iff x \in \operatorname{Ker} PA$ car P inversible

$\iff PAx = 0$

$\iff \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & I_r \end{bmatrix}}_{\text{inversible car } L_{11} \text{ triangulaire inf à diagonale}} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$

$\iff U_{11}x_1 + U_{12}x_2 = 0$ avec $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow m-r \\ \updownarrow r \end{array}$

$\iff x_1 = -U_{11}^{-1}U_{12}x_2$ car $\det U_{11} \neq 0$

$\iff x = \begin{bmatrix} -U_{11}^{-1}U_{12} \\ I_r \end{bmatrix} x_2$

$\iff x \in \operatorname{Im} \underbrace{\begin{bmatrix} -U_{11}^{-1}U_{12} \\ I_r \end{bmatrix}}_{\overleftrightarrow{\ r\ }} \begin{array}{l} \updownarrow m-r \\ \updownarrow r \end{array}$

or $\operatorname{rg}\left(\begin{bmatrix} -U_{11}^{-1}U_{12} \\ I_r \end{bmatrix}\right) = r \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} A = r$

et une base de Ker A est formé par les colonnes de $\begin{bmatrix} -U_{11}^{-1}U_{12} \\ I_r \end{bmatrix} \Rightarrow$ r systèmes linéaires triangulaire supérieur de taille $m-r$

Récap:

A inversible $\quad PA = \boxed{L}\ \boxed{U}$ $\rightarrow$ triangle issu de l'élimina°

pivots utilisés (signe) $\leftarrow$ triang. inf. diag. de 1 ; $\rightarrow$ triang. sup

Rappels : $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$ $\qquad \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Exercice 3 :

$A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ inversible $\qquad P_A A = L_A U_A$

1) Résolution de $A^2 x = b$

- Facto LU : $\sum_{k=1}^{m-1} 2(m-k)^2 = 2 \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \simeq \frac{2}{3} m^3$

Stratégie (1.1) :

① Calcul de $B = A^2$: $\simeq 2m^3$ flops

② Facto LU de $P_B B$: $P_B B = L_B U_B$: $\simeq \frac{2}{3} m^3$ flops

③ Résolution de $L_B U_B x = P_B b$: $\simeq 2m^2$ flops (2 systèmes triangulaires)

$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{kj} \quad \forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2$

Bilan : $\simeq \frac{8}{3} m^3$ flops

Remarque : $\underbrace{\underbrace{(AA)}_{\simeq 2m^3 \text{ flops}} x}_{\simeq 2m^2 \text{ flops}} = \overbrace{A\underbrace{(Ax)}_{\simeq 2m^2 \text{ flops}}}^{\simeq 2m^2 \text{ flops}}$ ⚠ Pas le m̂ coût de calcul !

Stratégie (1.2) :

① Facto LU de $P_A A$: $P_A A = L_A U_A$: $\simeq \frac{2}{3} m^3$ flops

② Résolution de $A^2 x = L \iff$ Resoudre $\underbrace{(P_A A)}_{= L_A U_A} \underbrace{(Ax)}_{:= y} = P_A L$

(2.1) Résolution de $L_A U_A y = P_A b$: $\simeq 2m^2$ flops car 2 systèmes triangulaires

(2.2) Résolution de $Ax = y \iff$ résolu° de $\underbrace{P_A A}_{L_A U_A} x = P_A y$

$\simeq 2m^2$ flops car 2 systèmes triangulaires

Bilan : $\simeq \frac{2}{3} m^3 + 4m^2$ flops $\simeq \frac{2}{3} m^3$ flops

2) Résolution de $Ax = b$

① Calcul de A^{-1}

② $x = A^{-1} b$

$A A^{-1} = I_m$

Soit $(e_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ base canonique de $\mathbb{R}^m \Rightarrow m$ systèmes de type $Ax_i = e_i$ avec

x_i i-ème colonne de A^{-1}

(1.1) Facto LU de PA : $\simeq \frac{2}{3} m^3$ flops

Resolution des systèmes : $2m^2 \times m$ flops

Modification de la facto LU $\simeq 2m^3$ flops pour l'inversion

Second problème : Résolution de $Ax_i = e_i$: $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^m$ avec $\tilde{x}_i = x_i + \varepsilon_i$

$\Rightarrow \tilde{A}^{-1} = A^{-1} + \underbrace{[\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m]}_{:= E}$

$\frac{\|\tilde{A}^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} = \|E\|$ peut être élevés $\Rightarrow \tilde{x} = \tilde{A}^{-1} b \neq L_A U_A x = P_A b$

Pivot partiel : exemple

$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad L_A^\varepsilon U_A^\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \underbrace{1-\frac{1}{\varepsilon}}_{\simeq -1/\varepsilon \text{ (hyp)}} \end{bmatrix}$

hyp : $\varepsilon \ll 1$

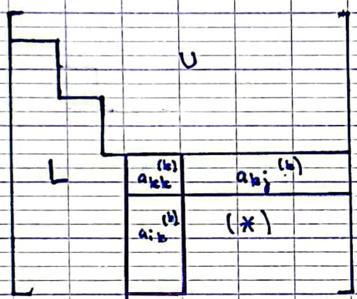
$L_A^\varepsilon U_A^\varepsilon \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{bmatrix}$

$L_A U_A \simeq \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ permutation des lignes : $P_A A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ $\quad L_A U_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \underbrace{1-\varepsilon}_{\simeq 1} \end{bmatrix}$ avec $\varepsilon \ll$

$L_A U_A \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon+1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$

$L_A^\varepsilon U_A^\varepsilon \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & -1/\varepsilon \end{bmatrix}$



- trouver $i_0 \in [\![k,n]\!] \,/\, |a_{i_0,k}^{(k)}| = \max_{i \in [\![k,n]\!]} |a_{i,k}^{(k)}|$
- permutation de lignes k et i_0

étape k : $A^{(k+1)} = L^{(k)} P^{(k)} A^{(k)}$

Remarque : pivot partiel et thm 2

$U = A^{(n)} = L^{(n-1)} P^{(n-1)} L^{(n-2)} \underset{P^{(n-1)T}P^{(n-1)} = I_n}{\wedge} P^{(n-2)} \dots L^{(1)} P^{(1)} A$

$= L^{(n-1)} \left[P^{(n-1)} L^{(n-2)} P^{(n-1)T} \right] P^{(n-1)} P^{(n-2)} L^{(n-3)} \underset{(P^{(n-2)})^T (P^{(n-1)})^T P^{(n-1)} P^{(n-2)}}{\wedge} P^{(n-3)} \dots A$

$= L^{(n-1)} \tilde{L}^{(n-2)} \dots L^{(1)} \underbrace{P^{(n-1)} P^{(n-2)} \dots P^{(1)}}_{:= P} A$ $\quad$ avec $\tilde{L}^{(k)} = P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} L^{(k)} P^{(k+1)T} \dots P^{(n-1)T}$

or $L^{(k)} = I_n - m_k e_k^T$ $\quad$ avec $e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \leftarrow k$ $\quad m_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\ell_{k+1,k} \\ \vdots \\ -\ell_{n,k} \end{bmatrix} \leftarrow k+1$

$\tilde{L}^{(k)} = P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} (I_n - m_k e_k^T) P^{(k+1)T} \dots P^{(n-1)T}$

$= P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} P^{(k+1)T} \dots P^{(n-1)T} - (P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} m_k)(P^{(n-1)} P^{(k+1)} e_k)^T$

$= I_n - (P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} m_k)$

car permuta° de la ligne $k+r$ et $i_0 \in [\![k+r,n]\!]$ $\quad$ or $P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} e_k = e_k$

$\tilde{m}_k := P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} m_k = P^{(n-1)} \dots \underbrace{P^{(k+1)} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \leftarrow k+1 \text{ car } P^{(k+1)} \text{ : permuta° ligne } k+1 \text{ et } i_0 \in [\![k+1,n]\!]} \leftarrow k+1$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \leftarrow k+1$ $\quad$ permuta° $k+2$ et $i_0 \in [\![k+2,n]\!]$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \leftarrow k+1$

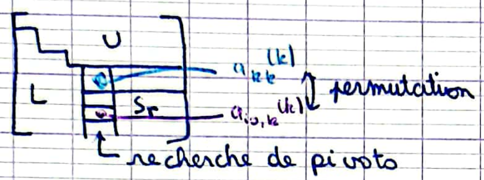
$$\tilde{L}^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & & & (0) \\ (0) & \ddots & \vdots & \\ & & (0) & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{même structure que } L^{(k)}$$

$$L = [\tilde{L}^{(1)}]^{-1} \dots [\tilde{L}^{(m-1)}]^{-1} [L^{(m-1)}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 4: "rank-revealing algorithm"

Structure cible : $\begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{21} & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & S_r \end{bmatrix}$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]$ $|S_{ij}| \leq \varepsilon \|A\|$

1)



étape k:

1e cas: $|a_{i_0,k}^{(k)}| > \varepsilon \|A\|$ avec $|a_{i_0,k}^{(k)}| = \max_{i \in [\![k,m]\!]} |a_{i,k}^{(k)}|$

① permutation des lignes i_0 et k

② élimination $A^{(k+1)} = L^{(k)} P^{(k)} A^{(k)}$

2e cas: $\forall i \in [\![k,m]\!]$ $|a_{ik}| \leq \varepsilon \|A\|$

• Soit $|a_{i_0,j_0}^{(k)}| = \max_{\substack{i \in [\![k,m]\!] \\ j \in [\![k,m]\!]}} |a_{ij}^{(k)}|$

a) $|a_{i_0,j_0}^{(k)}| > \varepsilon \|A\|$

① Permutation des lignes i_0 et k et des colonnes j_0 et k

② Elimination : $A^{(k+1)} = L^{(k)} \underbrace{P^{(k)}}_{\text{permutaᵒ lignes}} A^{(k)} \underbrace{Q^{(k)}}_{\text{permutaᵒ colonnes}}$

b) $|a_{i_0,j_0}^{(k)}| \leq \varepsilon \|A\| \Rightarrow \forall (i,j) \in [\![k,m]\!]^2$ $|a_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon \|A\|$

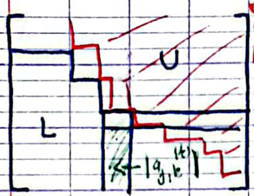
$\Rightarrow |S_{ij}| \leq \varepsilon \|A\|$

En sortie prématurée : $PAQ = \begin{bmatrix} L_{11} & (0) \\ L_{21} & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ (0) & S \end{bmatrix}$ avec $|S_{ij}| \leq \varepsilon \|A\|$ $\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2$

Factorisaᵒ LDL^T: A symétrique

$A = LU$

$A = A^T \Rightarrow \underbrace{U}_{\text{triang sup}} \underbrace{[L^T]^{-1}}_{\text{triang sup}} = \underbrace{L^{-1}}_{\text{triang inf}} \underbrace{U^T}_{\text{triang inf}} := D$ avec D diagonale

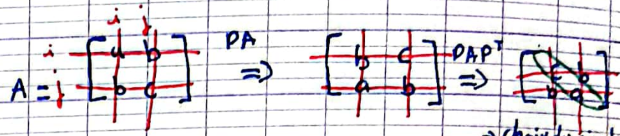


① Calcul de $L_{i,k}$ avec $i \in [\![k+1, n]\!] \Rightarrow A(k+1:n, k)$ ⚠ arracher $A[k+1,n]$

② Elim $A[k+1:n; k+1:n] = A[k+1:n, k+1:n] - L[k+1:n, k] * U[k, k+1:n]$

Stabilité numérique : pivot + symétrie

$PAP^T = LDL^T$



⇒ choix du pivot sur la diagonale

⚠ $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & (*) \\ (*) & \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ avec $|\varepsilon_1| \ll 1$ et $|\varepsilon_2| \ll 1$?

Méthodes itératives

Méthodes de relaxation : $A = M - N$ avec M inversible "splitting"

Méthodes de gradient : $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^T A x - b^T x := f(x)$

↳ $A \in S_n(\mathbb{R})$ déf > 0

$\nabla f(x) = Ax - b \Rightarrow \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow Ax = b$

→ Méthodes de relaxation :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)}] \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - a_{21} x_1^{(k)} - a_{23} x_3^{(k)}] \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} [b_3 - a_{31} x_1^{(k)} - a_{32} x_2^{(k)}] \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

En dimension n : méthode de Jacobi

for i = 1 : n

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

end

avec la convention $\sum_{j=1}^{0} a_{ij} x_j^{(k)} = 0$, $\sum_{j=n+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = 0$

Matriciellement : $\underbrace{D}_{:=M} x^{(k+1)} = b + \underbrace{(E+F)}_{:=N} x^{(k)}$ ⇒ Système diagonal

Méthode de Gauss-Seidel

for i = 1

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right]$$

end

Matriciellement : $\underbrace{(D-E)}_{:=M} x^{(k+1)} = b + \underbrace{F}_{:=N} x^{(k)}$ ⇒ système triangulaire inf.

$A = M - N$ avec M inversible ($a_{ii} \neq 0 \ \forall i \in [\![1, n]\!]$)

CNS de convergence : $\lim_{p\to+\infty} (M^{-1}.N)^p = 0 \iff \rho(M^{-1}.N) < 1$

Exercice 1 : $A = M - N$ avec M inversible et les couples propres de $M^{-1}N$ sont réels

Hyp : $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ $\quad x^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} x^*$

Soit $(\lambda, u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ couple propre de $M^{-1}N$: $M^{-1}NU = \lambda U$ avec $U \neq 0$

Soit $x^{(0)} = x^* + U \Rightarrow \varepsilon^{(0)} = U$

$\forall p \in \mathbb{N}$ $\quad \varepsilon^{(p)} = (M^{-1}N)^p \varepsilon^{(0)} = \lambda^p U$

or $\varepsilon^{(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $U \neq 0 \Rightarrow \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 \Rightarrow |\lambda| < 1$

Idée de construction de M et N :

Itération de Richardson : $x^{(k+1)} = x^{(k)} + r^{(k)} = x^{(k)} + (b - Ax^{(k)})$

$\Rightarrow$ Méthode de relaxation avec $M = I_m$ et $N = I_m - A$

CNS de convergence : $\rho(I_m - A) < 1$

Précondi^{ot} : $CAx = Cb$ avec C inversible

Richardson au système préconditionné :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + (Cb - CAx^{(k)}) = x^{(k)} + C(b - Ax^{(k)}) = x^{(k)} + Cr^{(k)} = x^{(k)} + M^{-1}r^{(k)} \quad \text{avec } \begin{cases} M = C^{-1} \\ \text{et} \\ N = C^{-1} - A \end{cases}$$

Choix de M : 1) facilité de résolu$^°$ de systèmes depuis $M \Rightarrow$ structure

2) précondi^{ot} de A $\quad M^{-1}A \simeq I_m$

→ Méthodes de Gradient

$$\min_{x\in\mathbb{R}^m} f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \quad \text{avec } A \in S_m(\mathbb{R}) \text{ déf} > 0 \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}^m \begin{cases} \nabla f(x) = Ax - b \\ \nabla^2 f(x) = A \end{cases}$$

Principe : $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k d_k$ avec d_k direc$^°$ de descente $d_k^T \nabla f(x_k) < 0$

steepest descent : $d_k = -\nabla f(x_k)$

α_k solu$^°$ de $\min_{\alpha>0} \phi_k(\alpha)$ $\quad$ avec $\phi_k(\alpha) = f(x^{(k)} + \alpha d_k)$

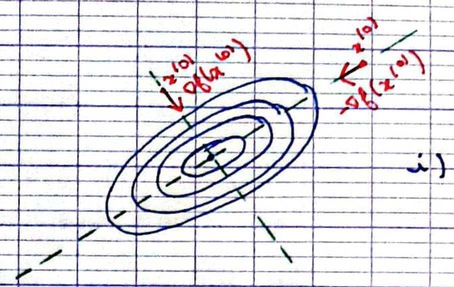
$\phi_k'(\alpha) = \nabla f(x^{(k)} + \alpha d_k)^T d_k$

$\phi_k''(\alpha) = \underbrace{d_k^T \underbrace{\nabla^2 f(x^{(k)} + \alpha d_k)}_{= A} d_k}_{> 0 \text{ si } d_k \neq 0}$

On a $\phi_k'(\alpha_k) = 0 \iff [A(x^{(k)} + \alpha_k r_k) - b]^T r^{(k)} = 0 \iff [-r_k + \alpha_k A r_k]^T r_k = 0$

$\iff \alpha_k = \dfrac{\|r_k\|_2^2}{\|r_k\|_A^2}$ avec $\|r_k\|_A^2 = r_k^T A r_k$

$d_k = r_k$ $\qquad x^{(k+1)} = x^{(k)} + \underbrace{\frac{\|r_k\|^2}{\|r_k\|_A^2}}_{=\alpha_k} r_k$



Cas particulier:

i) U $\vec{vp}$ de A $\qquad x^{(0)} = x^* + \beta U$

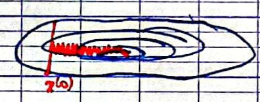
ii) Toutes les v.p. de A sont égales : $A = \alpha PP^T = \alpha I_m$

$K_2(A) = 1$

Vitesse de CV:

$K_2(A)$ petit

CV plutôt rapide



$K_2(A)$ grand

$\Rightarrow$ bcp itéra°

$\Rightarrow$ Ne plus suivre $-\nabla f(x_k)$

Gradients conjugués:

- $(\mathbb{R}^m, \langle\rangle_2)$: $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle_2 - \langle b, x\rangle_2$ $\qquad K_2(A) = ?$

$\nabla f(x) = Ax - b \qquad \nabla^2 f(x) = A$

- $(\mathbb{R}^m, \langle\rangle_A)$ avec $\langle x, y\rangle_A = x^T A y$ ps car A sym déf >0

$f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_A^2 - \underbrace{\langle A^{-1}b, x\rangle_A}_{b^T \underbrace{(A^{-1})^T A}_{I_m} x}$ car A sym

$\nabla f(x) = x - A^{-1}b$

$\nabla^2 f(x) = I_m \qquad K_{\|\cdot\|_A}(A) = 1$

Exercice 2:

$A = [U_1 \dots U_m]$

$(d_i) \in \mathbb{R}^m$ base A orthogonale de $\mathbb{R}^m$: GS appliqué à $(U_i)_{i \in [0, m-1]}$

$Ax^* = b$

1) $x^* = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i d_i$ $\qquad$ avec $\alpha_i = f(A, b, (d_j)_{j \in [0, m-1]})$ $\qquad \langle x, y\rangle_2 = (x, y) = x^T y$

$\forall i \in [0, m-1]$ $\langle x^*, d_i\rangle_A = (x^*, Ad_i) := x^T(Ad_i) := \langle x, Ad_i\rangle_2$

$= \langle \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j d_j, d_i\rangle_A$

$= \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j \underbrace{\langle d_j, d_i\rangle_A}_{\begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle d_i, Ad_i\rangle & \text{sinon}\end{cases}}$

$= \alpha_i \, \|d_i\|_A^2 = \alpha_i \underbrace{(d_i, Ad_i)}_{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \dfrac{(x^*, Ad_i)}{(d_i, Ad_i)} = \dfrac{(A^T x^*, d_i)}{(d_i, Ad_i)}$

or $A^T = A$ car A symétrique $\Rightarrow \alpha_i = \dfrac{(\overbrace{Ax^*}^{b}, d_i)}{(d_i, Ad_i)} = \dfrac{(b, d_i)}{(d_i, Ad_i)}$

$\Rightarrow x^* = \sum_{i=0}^{m-1} \dfrac{(b, d_i)}{(d_i, Ad_i)} d_i$

2) $y \in \mathbb{R}^m \qquad y = \sum_{j=0}^{m-1} \beta_j d_j \qquad \beta_j = \dfrac{(Ay, d_j)}{(d_j, Ad_j)}$ cf 1)

$\Rightarrow y = \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{(Ay, d_j)}{(d_j, Ad_j)} d_j$

d'où : $x^* - y = \sum_{i=0}^{m-1} \dfrac{(b - Ay, d_i)}{(d_i, Ad_i)} d_i \Rightarrow x^* = y + \sum_{i=0}^{m-1} \dfrac{(d_i, b - Ay)}{(d_i, Ad_i)} d_i$

3) $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, $x^{(p+1)} = x^{(p)} + \alpha_p d_p$ avec $\alpha_p = \dfrac{(d_p, b - Ax^{(p)})}{(d_p, Ad_p)} = \dfrac{(d_p, r^{(p)})}{(d_p, Ad_p)}$ avec $r^{(p)} = b - Ax^{(p)}$

1) $x^{(p)} = f(x^{(0)}) = x^{(p-1)} + \alpha_{p-1} d_{p-1} = \dots = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j d_j$

2) $(d_p, Ax^{(p)}) = (d_p, Ax^{(0)}) + \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j \underbrace{(d_p, Ad_j)}_{\underbrace{\langle d_p, d_j \rangle_A}_{=0}} = (d_p, Ax^{(0)})$

4) $x^{(m)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j d_j$ par 3.1)

$= x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{(d_j, b - Ax^{(j)})}{(d_j, Ad_j)} d_j$

or $\forall j \in [\![0, m-1]\!] \quad (d_j, b - Ax^{(j)}) = (d_j, b - Ax^{(0)})$ par 3.2)

$\Rightarrow x^{(m)} = x^{(0)} + \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{(d_j, b - Ax^{(0)})}{(d_j, Ad_j)} d_j = x^*$ par 2) avec $y = x^{(0)}$

Quelques propriétés

Propriété 0 : $p = 1, 2, 3 \dots$, (d_p)

Propriété 1 :

Propriété 2 :

Propriété 3 :

Moindres carrés linéaires

min $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ avec $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ tq $rg(A) = n$

$x^* = A^+ b = (A^TA)^{-1} A^T b$ avec A^+ pseudo-inverse de A

$\Rightarrow$ résolution de $(A^TA)x^* = A^T b$ (éq. normales) avec $A^TA \in S_n(\mathbb{R})$ déf. pos. $\Rightarrow$ Cholesky, LL^T

$A = U\Sigma V^T$ SVD de A $\quad A^TA = V\Sigma^T \Sigma V^T = V[\Sigma_n\ 0]\begin{bmatrix}\Sigma_n \\ 0\end{bmatrix}V^T = V\Sigma_n^2 V^T$ avec $\Sigma_n^2 = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n^2\end{bmatrix}$

$K_2(A^TA) = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_n^2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_n}\right)^2 \overset{?}{\gg} 1 \Rightarrow$ numériquement difficile

Factorisation QR: $A = QR$ avec $Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ $\quad R = \begin{bmatrix} (\nabla) \\ (0) \end{bmatrix}$

Exercice 1: $Q \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tq $Q^TQ = I_n$

$P_X = QQ^T$ avec $X = \mathrm{Vect}(q_1, \dots, q_n)$ $\quad Q = [q_1, \dots, q_n]$

$*$ P_X est la matrice représentative d'une projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,P_X$ $/\!/^{\perp}$ à $\mathrm{Ker}\,P_X$:

$P_X^2 = P_X P_X = Q\underbrace{Q^TQ}_{= I_n \text{ car } (q_i) \text{ famille orthonormée}}Q^T = QQ^T = P_X \Rightarrow P_X$ est associée à un projecteur $P_X^T = P_X$

$\Rightarrow P_X$ projec° ortho sur $\mathrm{Im}\,P_X$ $/\!/^{\perp}$ $\mathrm{Ker}\,P_X$

Rem: P projection symétrique $\Rightarrow$ projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\,P$ $/\!/^{\perp}$ $\mathrm{Ker}\,P$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathrm{Im}\,P}_{?} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\,P$

Soit $y \in X$: $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i$ avec $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^n$ $\quad X = \mathrm{Vect}(q_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$

$P_X y = QQ^Ty = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Q\underbrace{Q^T q_i}_{\begin{bmatrix} q_1^T q_i \\ \vdots \\ q_n^T q_i \end{bmatrix} = e_i}$ $\quad Q = [q_1 \dots q_n]$ $\quad Q^T = \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix}$

$= e_i$ avec (e_i) base canonique de $\mathbb{R}^n$

Or $Q^TQ = I_n \Rightarrow q_j^T q_i = \delta_{ij}$ $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

$P_X y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{Qe_i}_{= q_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i = y \Rightarrow y \in \mathrm{Im}\,P_X$ et a $\forall y \in X$

$\Rightarrow X \subset \mathrm{Im}\,P_X$

• or $\dim X = n$ car (q_i) famille orthonormée $\Rightarrow$ libre

$rg\,P_X = rg(QQ^T) \leq \min(rg(Q), \underbrace{rg(Q^T)}_{= rg(Q)}) \leq rg(Q) = n$ car (q_i) orthonormée

$\Rightarrow rg(P_X) = \dim X$ avec X sev de $\mathbb{R}^m$

$\mathrm{Im}\,P_X$ —

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,P_X = X$

Rem: $AA^+ = V_1V_1^T$ avec $V_1V_1^T = I_n \Rightarrow$ projection ortho. sur $\mathrm{vect}(v_1, \dots, v_r) = \mathrm{Im}\,A$

idem $A^+A = \Pi_{\mathrm{Ker}\,A^{\perp}} = V_1V_1^T$

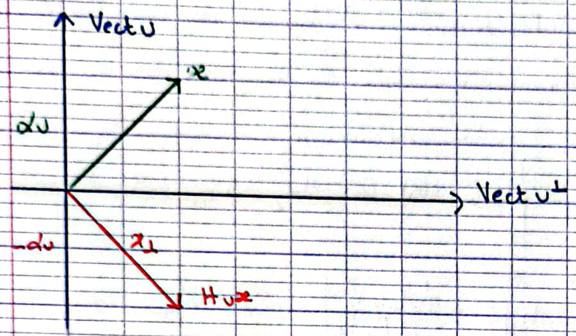
Preuve Propo° 2: $H_u\,u = \left(I - \frac{2uu^T}{\|u\|_2^2}\right)u = u - 2\frac{u^Tu}{u^Tu}\,u = -u$

• $H_u x = x \iff x - \frac{2u}{\|u\|^2} u^T x = x$

$\iff \frac{uu^T}{\|u\|^2} x = 0$

$\iff u^T x = 0$ car $u \neq 0$

$\iff x \perp u$



$\mathbb{R}^m = \text{Vect}\,u \oplus \text{Vect}\,u^\perp$

$x = \alpha u + x_\perp$ avec $x_\perp \in \text{Vect}\,u^\perp$

span(q_i) = "Vf" Vect(q_i)

mise à jour de rg 1
↳ ± 1 matrice de rg 1

Prop : E Euclidien

$\forall (a,b) \in E^2_{a \neq b}$ $\|a\| = \|b\| > 0$

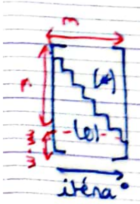
$\exists !\ \Delta_{a,b}$ reflexion de E tq $\Delta_{a,b}(a) = b$

$\forall x \in E \quad \Delta_{a,b}(x) = x - \frac{\langle b-a, x\rangle}{\|b-a\|^2}(b-a)$

Theorem 2 :

Let $A = \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ be a full rank matrix → rg = + petite dim

Then, there



Exercice 2 : (preuve th 2)

$A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ de rang plein

1) Mq $\exists H_1 \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ $\exists \alpha_1 \neq 0$ tq $H_1 A e_1 = \alpha_1 e_1$

• $Ae_1 \neq 0$ car A de rang plein $\iff$ aucune colonne nulle

Par prop 3, $\exists u_1 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\exists \sigma_1 \neq 0$ tq $H_{u_1} A e_1 = -\sigma_1 e_1$

En posant $H_1 = H_{u_1} \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$, $\alpha_1 = -\sigma_1 \neq 0$ $\Rightarrow H_1 A e_1 = \alpha_1 e_1$

• De plus $H_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$

1e colonne de A_1 nulle : Supposons $H_1 A e_2 = \beta e_1 \underset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} e_1 = \frac{1}{\beta} H_1 A e_2 = \frac{1}{\alpha_1} H_1 A e_1$

$\Rightarrow \frac{1}{\beta} H_1 A e_2 = \frac{1}{\alpha_1} H_1 A e_1$

$\Rightarrow A e_2 = \frac{\beta}{\alpha_1} A e_1$ car H_1 inversible

impossible car A de rang plein

De même, $\forall i \in [\![2, m]\!]$ $H_1 A e_i \neq \beta e_1 \Rightarrow$ toutes les colonnes de A_1 forment une famille libre

d'où $A_1 e_1 \neq 0$ avec e_1 premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{m-1}$

Par prop 3 : $\exists u_2 \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\exists \sigma_2 \neq 0$ tq $H_{u_2} A_1 e_1 = -\sigma_2 e_1$

En posant $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & H_{u_2} \\ 0 & \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ car $H_{u_2} \in \mathcal{O}_{m-1}(\mathbb{R})$

$\alpha_2 = -\sigma_2$

De plus, $H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & H_{u_2} A_1 \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & * \\ \vdots & 0 & \boxed{A_2} & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$ $A_2 \in \mathcal{M}_{m-2}(\mathbb{R})$

De plus les colonnes de A_2 forment une famille libre (idem A_1)

Supposons $\exists H_1, \ldots, H_p$ orthogonales

$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non nuls avec $p \in [\![1, m-2]\!]$ tq $H_p \ldots H_1 A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & & (*) & \\ & & \ddots & & \\ & & & \alpha_p & * \cdots * \\ 0 & (0) & & 0 & \boxed{A_p} \end{bmatrix} \\ \underbrace{\quad}_{p} \quad \underbrace{\quad\quad}_{m-p} \end{array}$

avec $A_p \in \mathcal{M}_{m-p}(\mathbb{R})$ tq colonnes de A_p ~~sont~~ libre

La première colonne de A_p est non nulle par hyp.

$\exists v_{p+1} \in \mathbb{R}^{m-p}$ $\exists \sigma_{p+1} \neq 0$ tq $H_{v_{p+1}} A_p e_1 = -\sigma_{p+1} e_1$ avec e_1 premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{m-p}$

On pose $\alpha_{p+1} = -\sigma_{p+1} \neq 0$

$H_{p+1} = \begin{bmatrix} I_p & (0) \\ (0) & H_{v_{p+1}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow p \\ \updownarrow m-p \end{matrix} \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ car $H_{v_{p+1}} \in \mathcal{O}_{m-p}(\mathbb{R})$

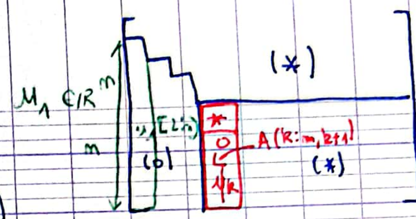
$\quad\quad\quad\quad\ \underset{p}{\leftrightarrow} \quad \underset{m-p}{\leftrightarrow}$

On a $H_{p+1} H_p \ldots H_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & \alpha_p & * & \cdots & * \\ & & & \alpha_{p+1} & * & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{p+1} & \end{bmatrix}$ avec $A_{p+1} \in \mathcal{M}_{m-p-1}(\mathbb{R})$ dont les colonnes forment une famille libre (idem A_1, A_2)

Apres $m-1$ étapes

$\underbrace{H_{m-1} \cdots H_1}_{Q^T \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})} A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \alpha_{m-1} & \\ 0 & \cdots & 0 & (*) \end{bmatrix} := R$

$H_m H_{m-1} \ldots H_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \alpha_{m-1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \end{bmatrix}$ $\alpha_m > 0$



"out of memory"

Algo :

$A(k:m, k+1:m) = \underbrace{(I_{m-k+1} - \beta v v^T)}_{\text{"out of memory"}} A(k:m, k+1:m)$

$\Rightarrow$ boucle sur j $\quad A(k:m, j) = A(k:m, j) - \beta (v^T A(k:m, j))\, v$

structure Hessemberg superieur $\begin{bmatrix} * & & * \\ * & \ddots & (\dots) \\ (0) & \ddots & * \end{bmatrix}$ $\quad QRQ^T \to [\diagdown]$
$(n-1)$ rotation de givens

<u>Retour aux moindres carrés linéaires</u>

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ tq } rg(A) = n,\ b \in \mathbb{R}^m$$

<u>Facto QR de A</u> : $A = QR = [Q_1\ Q_2] \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1 R_1$ (forme réduite)

$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \frac{1}{2} \|QRx - b\|_2^2 = \frac{1}{2} \|Rx - Q^T b\|_2^2$ car $Q \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} R_1 x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1^T b \\ Q_2^T b \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\underbrace{R_1 x - Q_1^T b}_{\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\underbrace{Q_2^T b}_{\in \mathcal{M}_{m-n}(\mathbb{R})}\|_2^2$$

De plus $R_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triang. sup. inversible

Le minimum est atteint en x^* solution de $R_1 x = Q_1^T b \Rightarrow$ système triang. sup.

Résidu optimal $\quad f(x^*) = \frac{1}{2} \|Q_2^T b\|_2^2 = \frac{1}{2} \|Ax^* - b\|_2^2$

$\downarrow$

$\rho(x^*) = \|Ax^* - b\| = \|Q_2^T b\|_2$