



# **Rapport sur la réalisation d'un modem de fréquence selon la recommandation V21 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT)**

ZHANI Reda , NAHI Mohammed

Département Sciences du Numérique - Première année  
2022-2023

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Modem de fréquence</b>	<b>3</b>
2.1	Construction du signal modulé en fréquence . . . . .	3
2.1.1	Génération du signal NRZ . . . . .	3
2.1.2	Génération du signal modulé en fréquence . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Démodulation par filtrage</b>	<b>8</b>
4.1	Synthèse du filtre passe-bas . . . . .	9
4.2	Synthèse du filtre passe-haut . . . . .	9
4.3	Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61 . . . . .	10
4.4	Modification de l'ordre des filtres . . . . .	11
4.5	Utilisation des fréquences de la recommandation V21 . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21</b>	<b>11</b>
5.1	Contexte de synchronisation idéale . . . . .	11
5.1.1	Principe de fonctionnement de ce récepteur . . . . .	12
5.1.2	Résultats obtenus . . . . .	13
5.2	Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse . . . . .	13
5.2.1	Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment	13
5.2.2	Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence	13
5.2.3	Résultats obtenus . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Résultats obtenus avec les fichiers fournis fichier.mat</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

## Table des figures

1	Signal modulé en fréquence . . . . .	3
2	Signal NRZ(300 bits par seconde) . . . . .	4
3	Signal NRZ(30 bits par seconde) . . . . .	4
4	Signal NRZ(3000 bits par seconde) . . . . .	5
5	Comparaison entre la DSP théorique et estimée . . . . .	5
6	signal modulé en fréquence $x(t)$ en fonction du temps . . . . .	6
7	la DSP estimée . . . . .	8
8	Démodulation par filtrage. . . . .	8
9	Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas. . . . .	9
10	Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut. . . . .	10
11	Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61. . . . .	10
12	Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 201. . . . .	11
13	Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale. . . . .	12
14	Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse. . . . .	13
15	Résultat obtenu avec les fichiers fournis fichier.mat . . . . .	14

# 1 Introduction

Un modem (acronyme pour modulateur/démodulateur) est utilisé, d'une part, pour transformer une information numérique à transmettre en un signal susceptible de se propager sur le support physique à traverser entre l'émetteur et le récepteur (modulation) et, d'autre part, pour retrouver, à partir du signal abimé par le lien physique de communication, l'information binaire transmise (démodulation).

L'objectif de ce projet était de réaliser un modem de fréquence selon la recommandation V21. Il s'agit d'un modem travaillant, avec pour support de communication la ligne téléphonique, à un débit maximal de 300 bits par seconde.

## 2 Modem de fréquence

### 2.1 Construction du signal modulé en fréquence

La première étape du projet consiste à réaliser la modulation de fréquence, i.e. transformer l'information binaire à transmettre en un signal modulé en fréquence (exemple sur la figure 1).

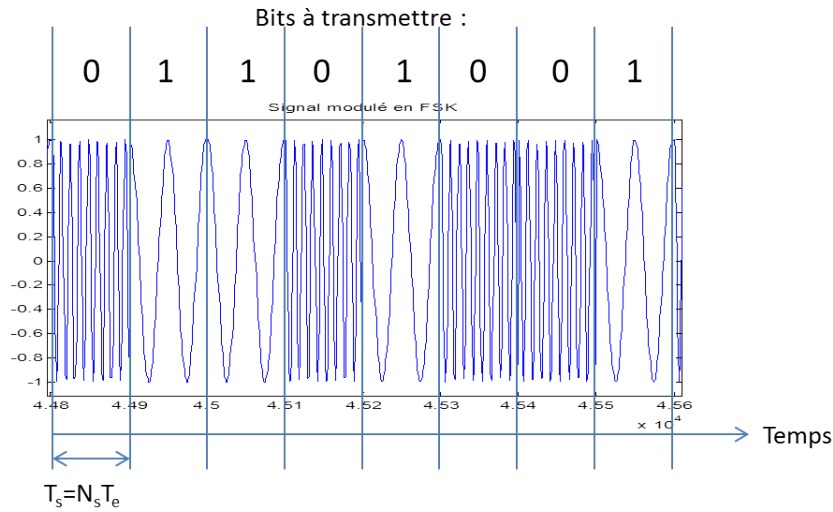


FIGURE 1 – Signal modulé en fréquence

Le signal modulé en fréquence  $x(t)$  est généré de la manière suivante :

$$x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \quad (1)$$

où  $NRZ(t)$  est un signal de type NRZ polaire formé à partir de la suite de bits à transmettre en codant les 0 et les 1 par des niveaux 0 et 1 de durée  $T_s$  secondes.  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur  $[0, 2\pi]$  qui peuvent être obtenues sous matlab en utilisant  $rand*2*pi$ .

#### 2.1.1 Génération du signal NRZ

- En utilisant la fonction *kron* de matlab avec un nombre d'échantillon  $N_s$  défini par  $N_s = T_s/T_e$  et en utilisant un débit de **300 bits par seconde**, on peut obtenir la figure suivante :

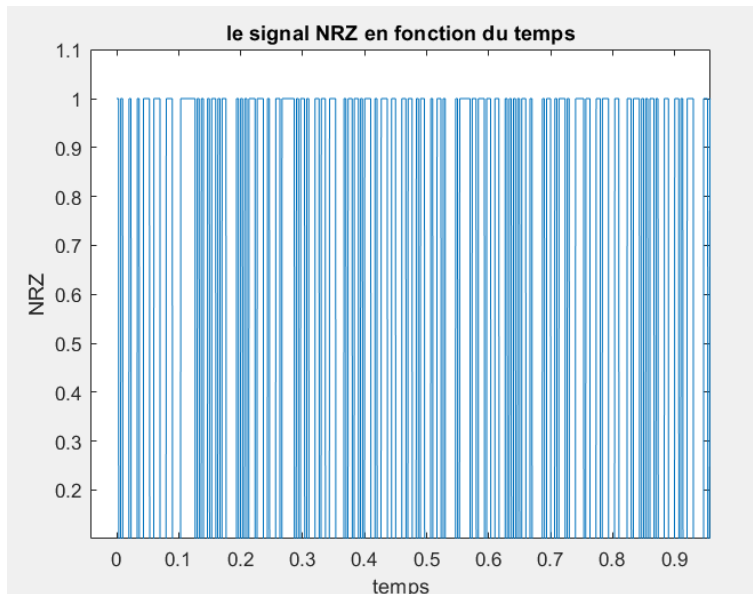


FIGURE 2 – Signal NRZ(300 bits par seconde)

- vérifier que le débit souhaité pour la transmission est le bon :

☐ Si on met le débit à **30 bits par seconde** on trouve la figure suivante :

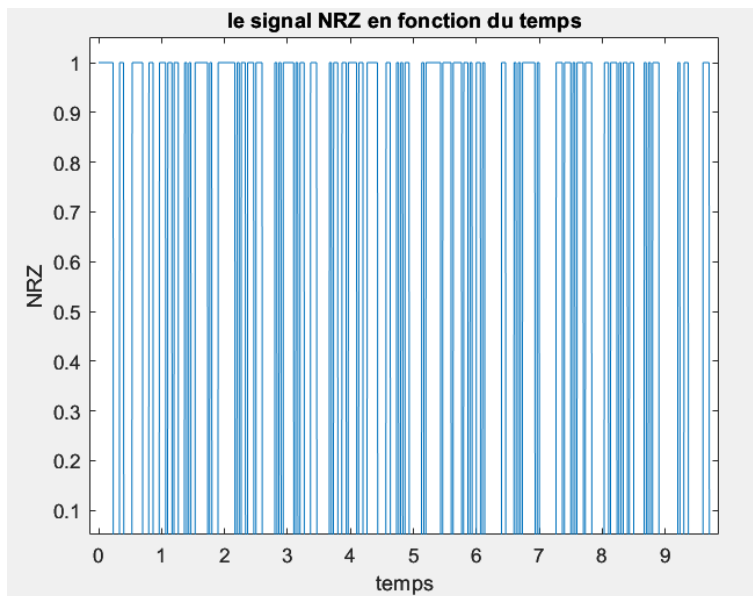


FIGURE 3 – Signal NRZ(30 bits par seconde)

Donc pour maximiser la capacité de transmission de données, le débit doit être aussi élevé que possible, car cela permet de transmettre plus de bits en un temps donné.

☐ Avec un débit de **3000 bits par seconde** on obtient la figure suivante :

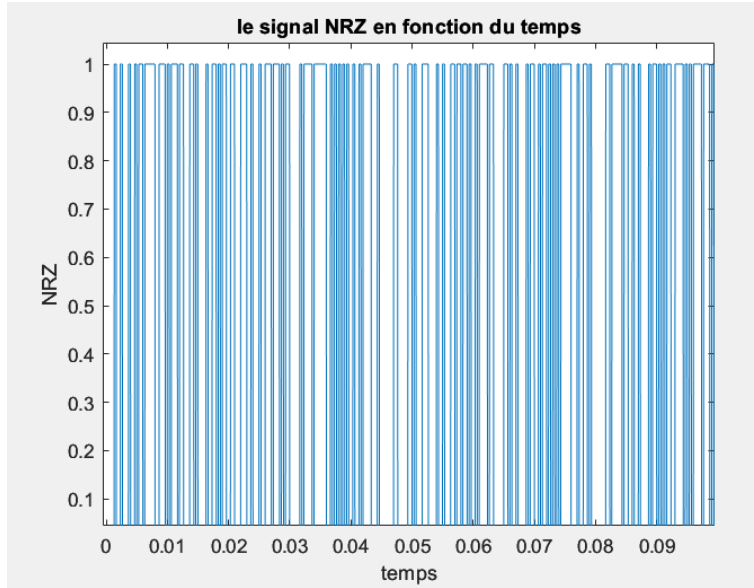


FIGURE 4 – Signal NRZ(3000 bits par seconde)

Cependant, il est important de noter que lorsque le débit augmente, il y a une augmentation de la probabilité d'erreur de transmission. La raison en est qu'à des débits plus élevés, les bits de données se chevauchent et se superposent, ce qui rend plus difficile la distinction entre les bits. cela peut entraîner une perte de données.

⇒ **Conclusion** : 300 bits par seconde est le débit le plus convenable pour transmission

- En utilisant le périodogramme de Welch ,on conclue d'après la figure suivante qu'il y a une petite différence entre la densité spectrale de puissance estimée  $DSP$  et la densité spectrale de puissance théorique  $Snrz$  avec :

$$S_{NRZ}(f) = \frac{1}{4}T_s \text{sinc}^2(\pi f T_s) + \frac{1}{4}\delta(f) \quad (2)$$

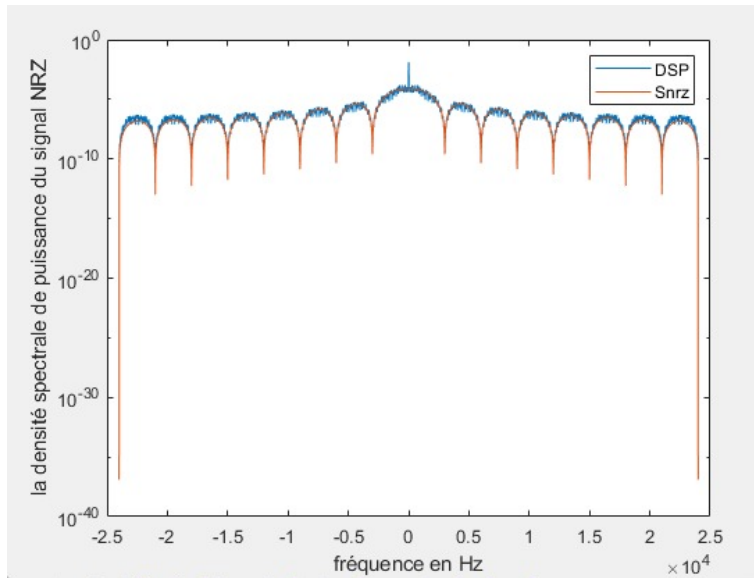


FIGURE 5 – Comparaison entre la DSP théorique et estimée

On peut dire que cette petite différence entre la densité spectrale de puissance théorique et la densité spectrale de puissance estimée est due à la quantité limitée d'échantillons disponibles et de l'erreur d'estimation.

### 2.1.2 Génération du signal modulé en fréquence

- On trace le signal modulé en fréquence  $x(t)$  défini par l'équation (1) et échantillonné à  $T_e$  on trouve la figure suivante :

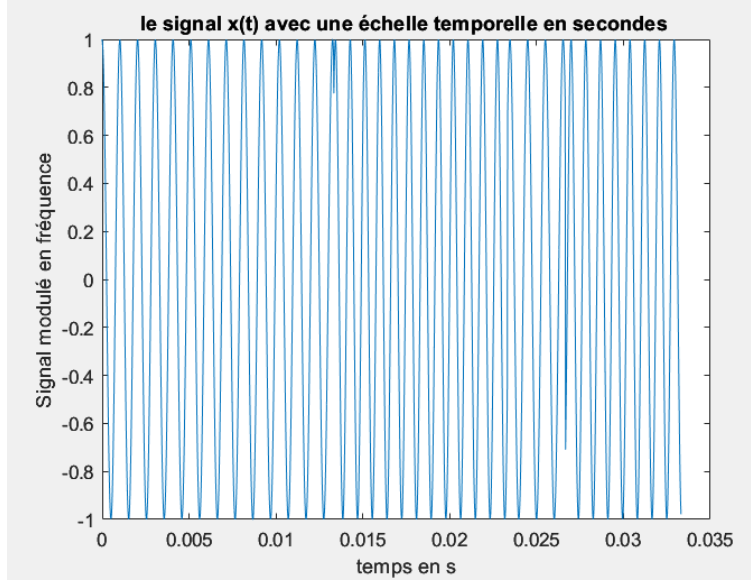


FIGURE 6 – signal modulé en fréquence  $x(t)$  en fonction du temps

- **Calcul théorique** de la densité spectrale de puissance du signal  $x(t)$  en fonction de celle du signal  $NRZ(t)$  :
  1. Pour calculer la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence  $x(t)$  en fonction de celle du signal  $NRZ(t)$  ( $SNRZ(f)$ ), nous devons utiliser la définition de la densité spectrale de puissance :

$$DSP_x(f) = TF(R_x(\tau)) \quad (3)$$

où  $R_x(\tau) = E(x(t).x(t - \tau))$  est la fonction d'autocorrelation de  $x(t)$ .

2. On calcule  $x(t).x(t - \tau)$  :

$$\text{On a } x(t) = (1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$$

$$\text{Donc } x(t).x(t - \tau) = [(1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) + NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)] \cdot [(1 - NRZ(t - \tau)) \times \cos(2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0) + NRZ(t - \tau) \times \cos(2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1)]$$

En développant les calculs on trouve :

$$x(t).x(t - \tau) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \text{ avec :}$$

$$X_1 = [(1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)] \times [(1 - NRZ(t - \tau)) \times \cos(2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0)]$$

$$X_2 = [NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)] \times [(1 - NRZ(t - \tau)) \times \cos(2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0)]$$

$$X_3 = [(1 - NRZ(t)) \times \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)] \times [NRZ(t - \tau) \times \cos(2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1)]$$

$$X_4 = [NRZ(t) \times \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)] \times [NRZ(t - \tau) \times \cos(2\pi F_1(t - \tau) + \phi_1)]$$

3. On calcule maintenant  $R_x(\tau)$  :

$$\text{On sait que } R_x(\tau) = E(x(t) \times x(t - \tau))$$

$$\text{Donc } R_x(\tau) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4)$$

On suppose que  $NRZ$ ,  $\phi_0$  et  $\phi_1$  sont indépendantes alors on aura :

$$E(X_1) = E((1 - NRZ(t)) \times (1 - NRZ(t - \tau))) \times E(\cos(2\pi F_0 t + \phi_0) \times \cos(2\pi F_0(t - \tau) + \phi_0))$$

$$\text{Donc } E(X_1) = E(1 - NRZ(t) - NRZ(t - \tau)) \times \frac{\cos(2\pi F_0 \tau)}{2} + R_{NRZ}(\tau) \times \frac{\cos(2\pi F_0 \tau)}{2}$$

$$E(X_2) = 0 \text{ Car } \phi_0 \text{ et } \phi_1 \text{ sont indépendantes et } E(\cos(2\pi F_0 t + \phi_0)) = 0$$

$$E(X_3) = 0$$

$$E(X_4) = R_{NRZ}(\tau) \times \frac{\cos(2\pi F_1 \tau)}{2}$$

4. On considère que  $E(NRZ(t)) = \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } E(1 - NRZ(t) - NRZ(t - \tau)) = 0$$

$$\text{D'où } E(X_1) = R_{NRZ}(\tau) \times \frac{\cos(2\pi F_0 \tau)}{2}$$

$$\text{Et donc } R_x(\tau) = R_{NRZ}(\tau) \times \frac{\cos(2\pi F_0 \tau)}{2} + R_{NRZ}(\tau) \times \frac{\cos(2\pi F_1 \tau)}{2}$$

5. On calcule maintenant  $DSP_x(f) = TF(R_x(\tau))$

$$\text{On trouve que : } DSP_x(f) = \frac{S_{NRZ}(f)}{4} * (\delta(f - f_1) + \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f + f_1))$$

ce qui est équivalent à :

$$DSP_x(f) = \frac{1}{4} \times (S_{NRZ}(f - f_1) + S_{NRZ}(f - f_0) + S_{NRZ}(f + f_0) + S_{NRZ}(f + f_1))$$

- En utilisant le périodogramme de Welch, on estime la densité spectrale de puissance du signal modulé en fréquence et on trouve la figure suivante :

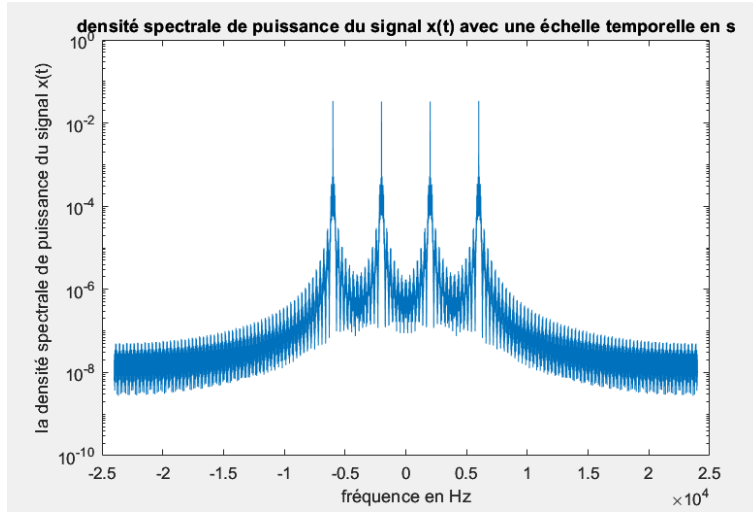


FIGURE 7 – la DSP estimée

Si on prend  $F_0 = 6000$  et  $F_1 = 2000$  On remarque 4 impulsions ce qui vérifie bien l'équation trouvé.

### 3 Canal de transmission à bruit additif, blanc et Gaussien

Nous allons considérer que le canal de propagation ajoute au signal émis un bruit que l'on suppose blanc et Gaussien et qui modélise les perturbations introduites.

La puissance du bruit Gaussien à ajouter devra être déduite du rapport signal sur bruit (SNR : Signal to Noise Ratio) souhaité pour la transmission donné en dB :

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_x}{P_b}$$

où  $P_x$  représente la puissance du signal modulé en fréquence et  $P_b$  la puissance du bruit ajouté.

⇒ On va étudier dans la suite l'évaluation du taux d'erreur binaire en fonction du rapport signale sur bruit.

### 4 Démodulation par filtrage

La figure 8 présente le récepteur implanté pour retrouver, à partir du signal modulé en fréquence bruité, le message binaire envoyé.

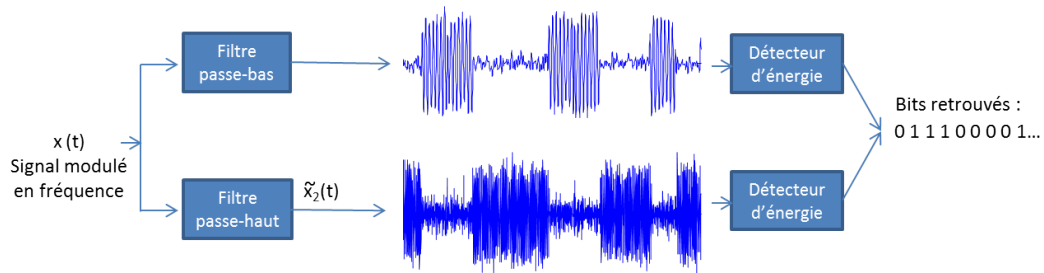


FIGURE 8 – Démodulation par filtrage.



Un filtre passe-bas permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_0 = 6000\text{Hz}$ , tandis qu'un filtre passe-haut permet de filtrer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_1 = 2000\text{Hz}$ . Une détection d'énergie réalisée tous les  $T_s$  secondes permet de récupérer, à partir des signaux filtrés, les bits 0 et 1 transmis.

$\Rightarrow$  On utilise dans la suite une fréquence de coupure  $f_c = \frac{F_0 + F_1}{2}$ .

## 4.1 Synthèse du filtre passe-bas

Un filtre passe-bas est un type de filtre utilisé pour atténuer les fréquences élevées d'un signal tout en laissant passer les fréquences basses. Dans notre projet, nous avons utilisé un filtre passe-bas à réponse impulsionnelle finie pour éliminer les morceaux de cosinus à la fréquence  $F_0 = 6000\text{Hz}$ .

En utilisant le filtre passe-bas réalisé lors du TP2 on obtient la figure suivante :

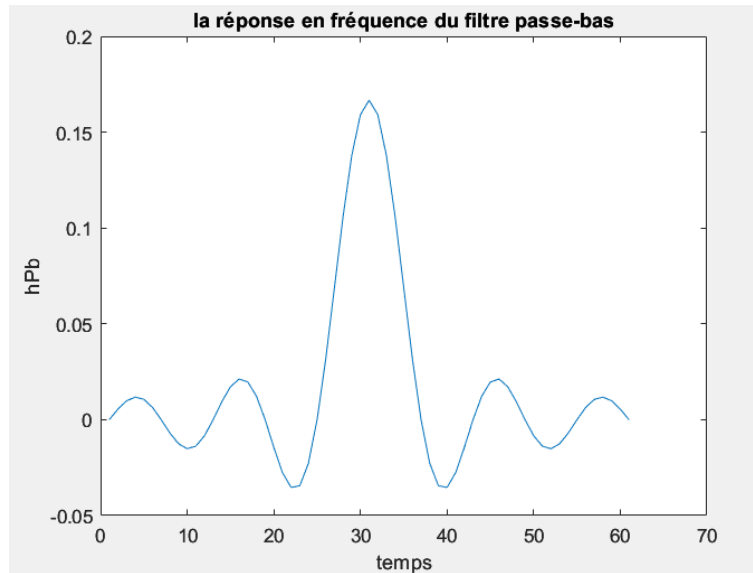


FIGURE 9 – Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas.

## 4.2 Synthèse du filtre passe-haut

Un filtre passe-haut est l'inverse d'un filtre passe-bas, il permet de laisser passer les fréquences élevées tout en atténuant les fréquences basses.

On suppose que ce filtre est idéal, donc la réponse en fréquence de ce filtre passe-haut est donnée par :  $H_{PH}(\tilde{f}) = 1 - H_{PB}(\tilde{f})$  où  $\tilde{f} = \frac{f}{f_c}$  la fréquence normalisée.

Ce qui nous permet d'obtenir la courbe de réponse impulsionnelle de ce filtre passe-haut.

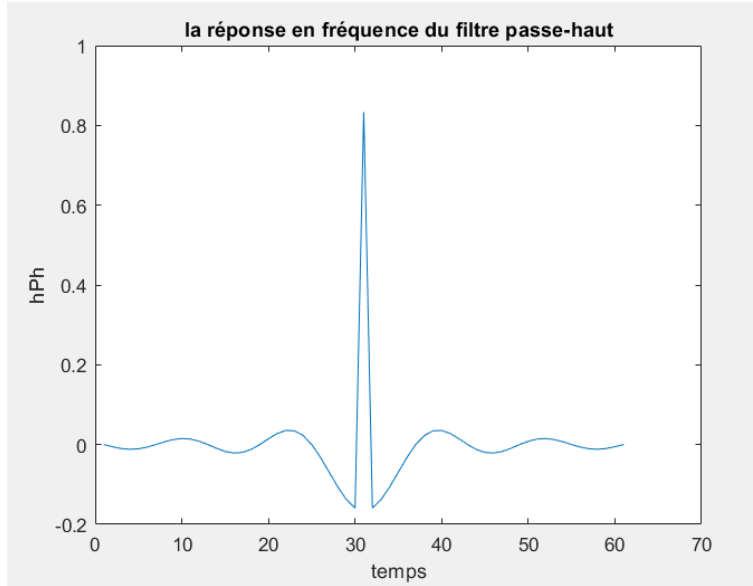


FIGURE 10 – Réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut.

### 4.3 Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61

Avec un ordre égalé à 61 et après filtrage avec un filtre passe-bas et un filtre passe-haut, on Comparera le signal filtré avec le signal bruité.

Comme le montre la figure suivante on remarque que le filtre passe-bas laisse passer les fréquences  $F_1 = 2000Hz$  tandis que le filtre passe-haut laisse passer les fréquences  $F_0 = 6000Hz$

On remarque aussi que le signal filtré avec un filtre passe-bas continue le signal filtré avec un filtre passe-haut et que la somme de ces deux forme le signal bruité, **mais avec un décalage de  $\frac{Ordre-1}{2} = 30$  points.**

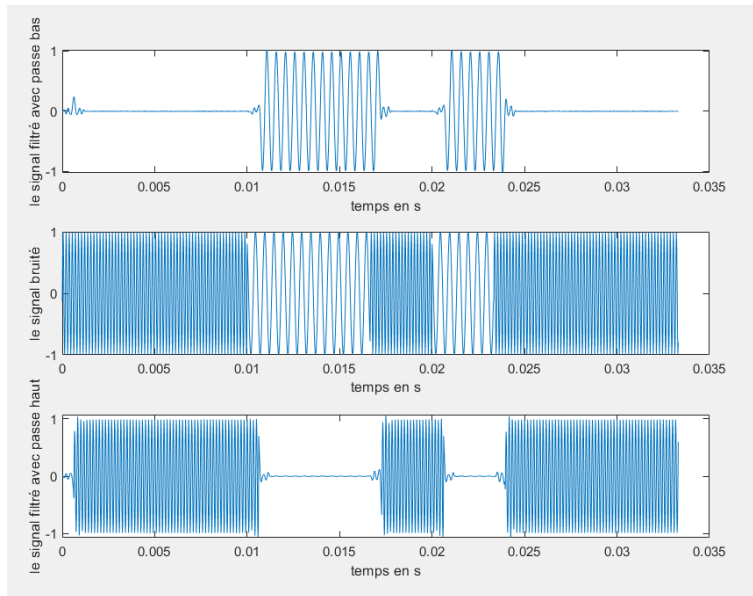


FIGURE 11 – Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 61.

Afin de retrouver les bits émis à partir des signaux filtrés, on va utiliser un détecteur d'énergie.

On trouve que le taux d'erreur binaire  $Teb$  obtenu qui est nombre de bits erronés sur nombre de bits transmis est **égale à 30 0** même si on modifie le rapport signal sur bruit.

#### 4.4 Modification de l'ordre des filtres

En modifiant l'ordre des filtres de 61 à 201 on remarque que le décalage augmente de 30 à  $\frac{Ordre-1}{2} = 100$  points.

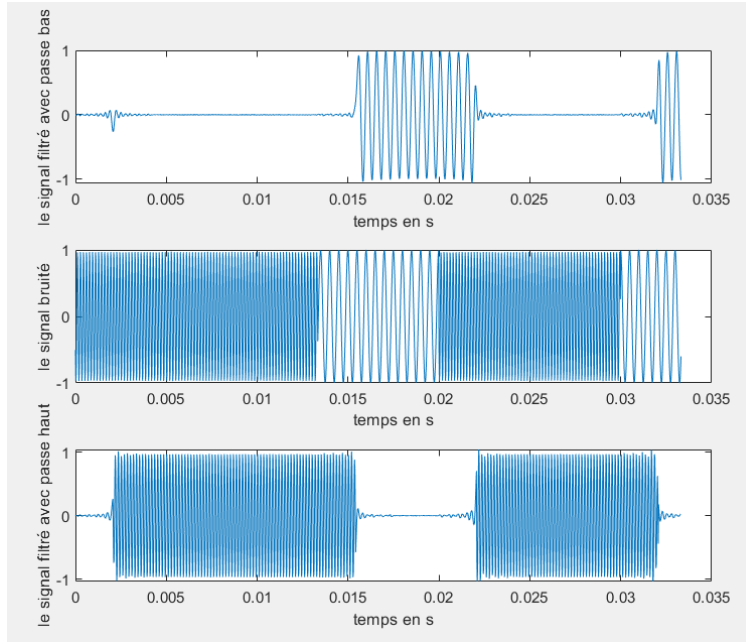


FIGURE 12 – Résultats obtenus avec un ordre des filtres de 201.

Cette augmentation de décalage produit un taux d'erreur binaire supérieure strictement à 0 et qui augmente en augmentant le rapport signal sur bruit.

⇒ **Solution** : En tenant compte de ce décalage on décale le signal filtré et n'ont considère donc que le signal de  $\frac{(Ordre-1)}{2} + 1$  jusqu'à la fin.

On trouve alors après cette solution un taux d'erreur binaire égal à 0.

#### 4.5 Utilisation des fréquences de la recommandation V21

Si on utilise les fréquences de la recommandation V21 qui sont :  $F_0 = 1180Hz$  et  $F_1 = 980Hz$  le taux d'erreur binaire n'est plus égal à 0.

### 5 Démodulateur de fréquence adapté à la norme V21

#### 5.1 Contexte de synchronisation idéale

La figure 13 présente le récepteur implanté afin de retrouver, dans un contexte de synchronisation idéale, le message binaire envoyé à partir du signal modulé en fréquence suivant la recommandation V21.

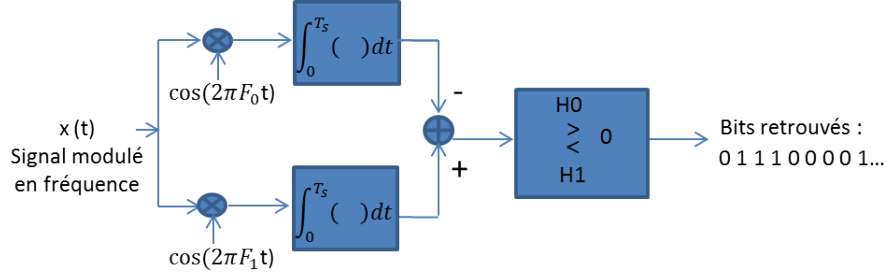


FIGURE 13 – Démodulation FSK. Synchronisation supposée idéale.

#### 5.1.1 Principe de fonctionnement de ce récepteur

- **Calcul de  $I_1 = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_1 t + \phi_1) \cos(2\pi F_0 t + \phi_0) dt$**

$$\text{On a } I_1 = \int_0^{T_s} \frac{1}{2} (\cos(2\pi(F_1 - F_0)t + \phi_1 - \phi_0) + \cos(2\pi(F_1 + F_0)t + \phi_1 + \phi_0)) dt$$

Donc :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi(F_1 - F_0)} (\sin(2\pi(F_1 - F_0)T_s + \phi_1 - \phi_0) - \sin(\phi_1 - \phi_0)) \\ + \frac{1}{4\pi(F_1 + F_0)} (\sin(2\pi(F_1 + F_0)T_s + \phi_1 + \phi_0) - \sin(\phi_1 + \phi_0))$$

- **Calcul de  $I_2 = \int_0^{T_s} \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)^2 dt$**

$$\text{On a } I_2 = \int_0^{T_s} \frac{1 + \cos(4\pi F_0 t + 2\phi_0)}{2} dt$$

Donc :

$$I_2 = \frac{T_s}{2} + \frac{1}{8\pi F_0} (\sin(4\pi F_0 T_s + 2\phi_0) - \sin(2\phi_0))$$

- **Simplification :**

En faisant une application numérique, on trouve que  $I_1 \simeq 5.522 \times 10^{-5}$  et que  $I_2 \simeq \frac{T_s}{2} \simeq 1.66 \times 10^{-3}$ .

On néglige donc  $I_1$  devant  $I_2$  et on prend  $I_2 = \frac{T_s}{2}$ .

- **Conclusion :**

D'après l'expression de  $x(t)$  donnée dans l'équation (1) on trouve que la sortie est égale à :

$$x_{\text{sortie}} = NRZ(t) \times \frac{T_s}{2} - (1 - NRZ(t)) \times \frac{T_s}{2}$$

$$\text{Donc si } NRZ = 0 \text{ alors } x_{\text{sortie}} = -\frac{T_s}{2}$$

$$\text{Et si } NRZ = 1 \text{ alors } x_{\text{sortie}} = +\frac{T_s}{2}$$

$\Rightarrow$  D'où Si  $x_{sortie}$  est positive alors  $NRZ = 1$  sinon  $NRZ = 0$

ce récepteur transforme donc le signal a un signal NRZ bipolaire.

### 5.1.2 Résultats obtenus

En utilisant ce récepteur on trouve  $Teb = 0$  dans le cas de sans bruit, ou pour un rapport signale sur bruit suffisamment élevé.

## 5.2 Gestion d'une erreur de synchronisation de phase porteuse

Le problème de la synchronisation entre l'émetteur et le récepteur est un problème important lorsque l'on réalise une transmission. Les deux doivent être parfaitement synchronisés en temps et en fréquence pour que le démodulateur implanté précédemment fonctionne, ce qui en pratique n'est bien entendu pas possible. Afin que le modem puisse continuer à fonctionner en présence d'une erreur de phase porteuse, celui-ci doit être modifié. La figure 14 présente un démodulateur permettant de s'affranchir de problèmes de synchronisation de phase entre les oscillateurs d'émission et de réception.

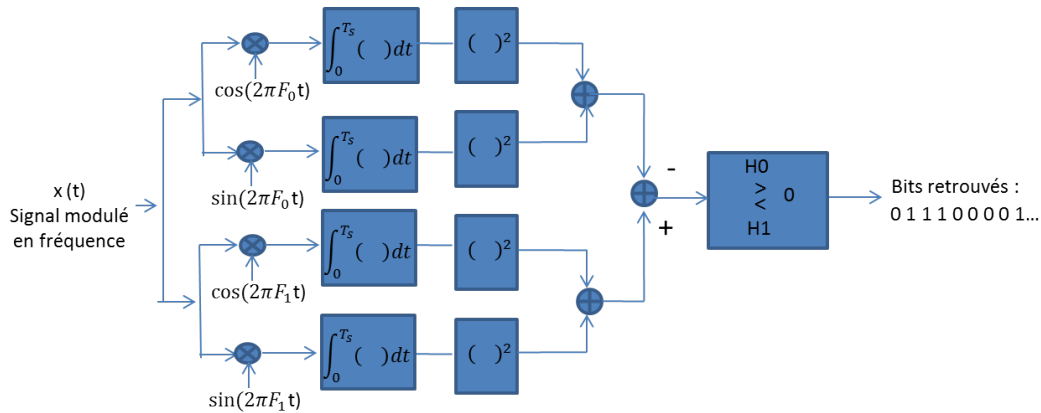


FIGURE 14 – Démodulation FSK - Gestion d'une erreur de phase porteuse.

### 5.2.1 Impact d'une erreur de phase porteuse sur le modem implanté précédemment

Si on introduit, dans le modem implanté précédemment, une erreur de phase porteuse, c'est-à-dire si on utilise en émission et en réception des cosinus de phases différentes. On trouve un taux d'erreur binaire égal à 0.47.

Donc le modem implanté ne fonctionne plus et ceci a cause de l'absence des simplifications faites qu'on ne peut pas les faire maintenant.

### 5.2.2 Principe de fonctionnement de cette nouvelle version du modem de fréquence

- cas 1 : Si  $NRZ = 0$  :  
Alors dans ce cas  $x(t) = \cos(2\pi F_0 t + \phi_0)$  et on aura :

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

On a :

$$I_1 = \int_0^{T_s} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) dt = \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(4\pi f_0 t + \theta_0 + \varphi_0) + \cos(\theta_0 - \varphi_0) dt$$

$$\text{Et donc } I_1 \simeq \frac{1}{2} \int_0^{T_s} \cos(\theta_0 - \varphi_0) dt$$

$$\text{D'où } I_1 = \frac{T_s}{2} \cos(\theta_0 - \varphi_0)$$

$$\text{Et on a } I_2 = \int_0^{T_s} \sin(2\pi f_0 t + \theta_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt$$

$$\text{De même on trouve } I_2 \simeq \frac{T_s}{2} \sin(\theta_0 - \varphi_0)$$

$$I_3 = \int_0^{T_s} \cos(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt \simeq 5.522 \times 10^{-5} : (\text{négligeable devant } T_s)$$

$$I_4 = \int_0^{T_s} \sin(2\pi f_1 t + \theta_1) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt \simeq 6.84 \times 10^{-6} : (\text{négligeable devant } T_s)$$

$$\text{Et alors on aura : } (I_3^2 + I_4^2) - (I_1^2 + I_2^2) \simeq -\frac{T_s^2}{4} < 0$$

- **Cas 2 : Si NRZ = 1**

Alors dans ce cas  $x(t) = \cos(2\pi F_1 t + \phi_1)$  et on aura d'une manière analogue :

$$(I_3^2 + I_4^2) - (I_1^2 + I_2^2) \simeq +\frac{T_s^2}{4} > 0$$

$\Rightarrow$  **D'où de même que dans la partie 5.1 Si  $x_{sortie}$  est positive alors NRZ = 1 sinon NRZ = 0**

ce récepteur transforme donc le signal a un signal NRZ bipolaire.

### 5.2.3 Résultats obtenus

le taux d'erreur binaire obtenu sans bruit, ou pour un rapport signal sur bruits suffisamment élevés est bien égal à 0.

## 6 Résultats obtenus avec les fichiers fournis fichieri.mat

Chaque fichier contient un signal à démoduler dans la variable signal, en utilisant notre démodulateur on obtient

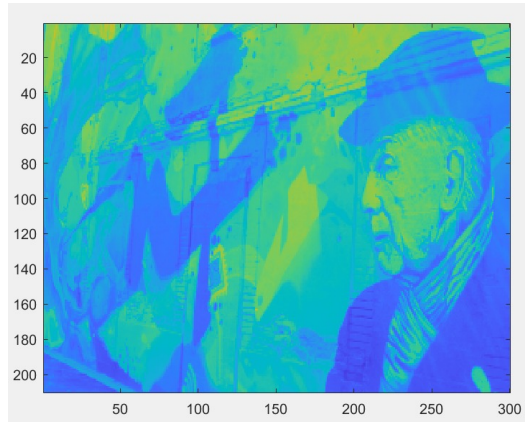


FIGURE 15 – Résultat obtenu avec les fichiers fournis fichieri.mat

## 7 Conclusion

En conclusion, ce projet de réalisation d'un modem de fréquence selon la recommandation V21 de l'Union Internationale des Télécommunications (UIT) a été un défi passionnant et passionnant à relever. Nous avons eu l'occasion de mettre en pratique les connaissances théoriques acquises en classe et de découvrir les nombreux défis liés à la conception et à la mise en uvre d'un modem de fréquence.

Au cours de ce projet, nous avons dû prendre en compte les différents facteurs qui peuvent affecter la qualité de transmission, tels que le bruit. Pour cela, nous avons dû choisir les composants appropriés, tels que les filtres et les modulateurs, et les configurer de manière à maximiser la qualité de transmission.

En somme, ce projet a été une expérience très enrichissante qui nous a permis de mettre en pratique nos connaissances théoriques et de découvrir les réalités de la mise en uvre d'un modem de fréquence. Nous espérons que ce projet sera utile pour les projets futurs et pour notre carrière professionnelle.