TD 2-3 – Contraintes : égalités, inégalités

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\left((x_1-1)^2 + x_2^2\right) \\ x \in \mathbb{R}^2 \\ -x_1 + \beta x_2^2 = 0 \end{cases}$$

paramétré par β dans $\mathbb{R}$.

1.1. Représenter graphiquement la contrainte et les lignes de niveau associées au critère.

1.2. Déterminer la nature (minimum/maximum, local/global) des points critiques suivant la valeur de β.

▷ **Exercice 2.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

2.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

2.2. Caractériser la solution.

2.3. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Montrer que $Az = b$ si et seulement si (x_1, x_2, x_3) est solution d'un problème d'optimisation quadratique à contraintes linéaires à préciser.

▷ **Exercice 3.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

avec a fixé dans $\mathbb{R}^n$.

3.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

3.2. Caractériser la solution.

▷ **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2x_3 \\ x \in \mathbb{R}^3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4.1. Le point $x = (1, 1, -1)$ est-il solution locale ? Globale ?

4.2. Donner l'ensemble des solutions locales, puis l'ensemble des solutions globales.

▷ **Exercice 5.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\|x - a\|^2 \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

avec $a = (1, \ldots, 1)$.

5.1. Montrer qu'on a existence et unicité.

5.2. Caractériser la solution.

▷ **Exercice 6.** Soit le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^n a_i/(1 + x_i) \\ x \in \mathbb{R}^n \\ \langle b\,,\, x\rangle = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

6.1. Montrer qu'on a existence et unicité et que la solution est caractérisée par la CN1.

6.2. Quel est le nombre maximal de contraintes actives à la solution ?

6.3. On prend $a = b = (1, \ldots, 1)$. Déterminer l'ensemble des contraintes actives et calculer la solution.