



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

**Ingeniería Mecatrónica**

**Automática y Máquinas Eléctricas**

**Proyecto Global Integrador:**

**Control de Accionamiento de CA con Motor  
Sincrónico de Imanes Permanentes**

**Alumnos:**

Lage Tejo, Joaquín

Olguín, Nahuel

**Legajo:**

11495

12297

**Profesor:**

Ing. Gabriel L. Julián

**2 0 2 2**

## Índice

<b>1.</b>	<b>Resumen .....</b>	<b>3</b>
<b>2.</b>	<b>Introducción .....</b>	<b>3</b>
<b>3.</b>	<b>Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto” .....</b>	<b>4</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo referido al eje del motor .....</b>	<b>6</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelo dinámico del sistema físico completo .....</b>	<b>7</b>
3.2.A	Modelo global no línea (NL) .....	7
3.2.A	Modelo global No Lineal (NL) .....	12
3.2.B	Linealización jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV) .....	14
3.2.C	Linealización por Realimentación NL: Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente .....	15
3.2.D	Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV .....	21
3.2.E	Funciones de Transferencia para el modelo LTI .....	22
<b>3.3</b>	<b>Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado .....</b>	<b>22</b>
<b>3.4</b>	<b>Análisis de Observabilidad completa de estado de modelo LTI equivalente aumentado .....</b>	<b>24</b>
<b>3.5</b>	<b>Análisis de Controlabilidad completa de estado modelo LTI equivalente aumentado .....</b>	<b>25</b>
<b>3.6</b>	<b>Respuesta dinámica en el dominio temporal .....</b>	<b>26</b>
<b>4.</b>	<b>Diseño, Análisis y Simulación con Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial) .....</b>	<b>34</b>
<b>4.1</b>	<b>Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque) .....</b>	<b>34</b>
4.1.A	Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada .....	34
4.1.B	Diseño de lazos de control de corrientes .....	35
4.1.C	Incorporación de consigna de torque .....	37
<b>4.2</b>	<b>Controlador externo de movimientos (posición / velocidad): .....</b>	<b>38</b>
<b>4.3</b>	<b>Observador de estado de orden reducido: .....</b>	<b>41</b>
<b>4.4</b>	<b>Simulación en tiempo continuo con modelo completo No Lineal .....</b>	<b>42</b>
4.4.A	Seguimiento de consignas de movimiento: .....	44
4.4.B	Rechazo a perturbaciones: .....	47
<b>5.</b>	<b>Verificación de desempeño y mejoras .....</b>	<b>48</b>
<b>5.1</b>	<b>Especificaciones de operación (valores límites): .....</b>	<b>48</b>
<b>5.2</b>	<b>Mejoras del observador de estado: .....</b>	<b>50</b>
<b>5.3</b>	<b>Comportamiento térmico: .....</b>	<b>52</b>
<b>5.4</b>	<b>Sensores y acondicionadores de señal No Ideales: .....</b>	<b>53</b>
<b>5.5</b>	<b>Modulador trifásico de tensión No Ideal: .....</b>	<b>58</b>
<b>6.</b>	<b>Conclusiones .....</b>	<b>60</b>
<b>7.</b>	<b>Referencias .....</b>	<b>60</b>

## 1. Resumen

En este trabajo se realiza el modelado, simulación, diseño y análisis de desempeño de un sistema de control automático de posición y movimiento para el accionamiento de una articulación de un robot SCARA, a través de un motor síncrono de corriente alterna trifásico con una caja reductora como actuador final. Se implementa un análisis inicial a lazo abierto para evaluar el modelo propuesto. Luego se aplica un sistema de control adecuado, y se estudian las respuestas no ideales de los elementos del sistema aplicando modelos de las degradaciones a encontrar en una situación real. Se da solución a dichos errores, empleando consignas adecuadas que sean realizables por el sistema, así como implementando algoritmos adecuados para mejorar su desempeño. Se obtuvo un sistema de control robusto y con un buen seguimiento de las consignas de posición provistas por el usuario, pero se remarca la importancia de la correcta selección de los elementos a emplear, así como los algoritmos a desarrollar para una eventual implementación real.

## 2. Introducción

El objetivo de este trabajo es integrar los conocimientos y competencias de la asignatura Automática y Máquinas Eléctricas en el control de 1 eje (desacoplado) para articulación “hombro” de un robot SCARA, referido a una base inercial (1 grado de libertad rotacional de eje vertical, con parámetros equivalentes variables según sea la posición angular instantánea de la articulación “codo”). Dicho accionamiento va a realizarse con una máquina eléctrica de corriente alterna trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes alimentada por un inversor trifásico desde una fuente de corriente continua ideal, un reductor de velocidad planetario, un sensor de posición en el eje del motor, tres sensores de corriente instantánea en la salida del inversor y un sensor de temperatura en el bobinado del estator.

Dado que el resto de articulaciones del robot afectarán a ciertos parámetros de la articulación que realmente interesa controlar; se anotarán dichos parámetros como un valor nominal seguidos de una tolerancia que expresa el rango posible de variación. De esta manera, se evitan los problemas asociados a la dinámica no lineal que introduce el resto de articulaciones.

En la primera parte de este trabajo, se abordará el estudio del sistema dividiendo el mismo en tres subsistemas (mecánico, electromecánico y térmico); y se crearán modelos que describan correctamente su comportamiento. Una vez desarrollados, se desarrollará una simulación dinámica de cada inciso analizado, a lazo abierto. Primero se definen los modelos matemáticos equivalentes de los distintos subsistemas, posterior a esta etapa se trabaja sobre dos modelos equivalentes LTI y LPV. Se finaliza con un análisis de estabilidad, controlabilidad y observabilidad del mismo.

Por último, se diseñará, analizará y simulará un sistema de control de movimiento en cascada con modulador de torque equivalente, capaz de manipular el sistema para realizar las operaciones que se le solicite en forma óptima y precisa, verificando que los valores de trabajo se encuentren dentro de los valores permitidos mediante la realización de una simulación.

### 3. Modelado, Análisis y Simulación dinámica del sistema físico a “Lazo Abierto”

#### Carga mecánica

La carga mecánica consiste en 1 eje (descentralizado) para articulación “hombro” de Robot SCARA, referido a base inercial (1 grado de libertad rotacional de eje vertical, con parámetros equivalentes variables según sea el estado instantáneo de posición y velocidad angular de la articulación “codo”).

No es parte de este trabajo modelar la dinámica No Lineal acoplada del robot. Por lo tanto, se consideran la dinámica de carga “vista” desde el eje de la articulación “hombro” (Figura 1 Figura 1:), como aproximación, asumiendo la variación de parámetros equivalentes (Ec.1).

Partimos del modelo simplificado equivalente (con parámetros variables), referido al eje de salida del tren de transmisión, considerando la coordenada articular del eje de la articulación “hombro”  $q_1(t) = \theta_l(t)$ :

$$J_l \cdot \dot{\omega}_l(t) = T_q(t) - b_l \cdot \omega_l(t) - T_l(t) \quad (\text{Ec.1})$$

$$\dot{\theta}_l(t) = \omega_l(t) \leftrightarrow \theta_l(t) = \int_0^t \omega_l(\xi) \cdot d\xi + \theta_l(0) \quad (\text{Ec.2})$$

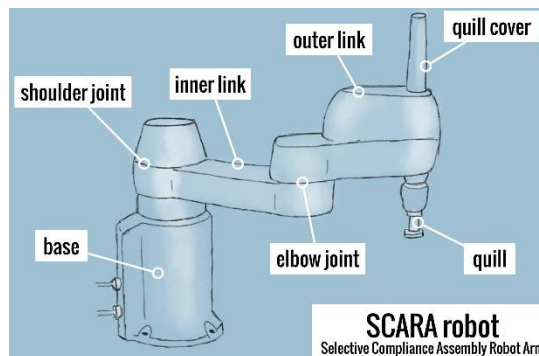


Figura 1: Representación de ejemplo del Robot SCARA a controlar

Donde:

- $\theta_l$  es la posición angular del hombro del Robot SCARA
- $\omega_l$  es la velocidad angular del hombro del Robot SCARA
- $T_q$  es el torque de salida del tren de transmisión

Parámetros equivalentes variables (valor nominal  $\pm$  variación máx.):

- Momento de inercia:  $J_l \approx (0.2520 \pm 0.1260) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Amortiguamiento viscoso:  $b_l \approx (0 \pm 0.0630) \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad/s}}$

Especificaciones de operación (variable de perturbación, valor límite requerido):

- Torque de carga (considerado entrada escalón)  $T_l \approx (0 \pm 6.28) \text{ N} \cdot \text{m}$

#### Tren de Transmisión

Se considera una caja reductora reversible con sistema de engranajes planetarios (Figura 2), asumiendo acoplamiento rígido (sin elasticidad torsional y sin juego, holgura o “backlash”); momento de inercia equivalente y pérdidas de energía por fricción interna, reflejados al eje de entrada y considerados junto con el motor.

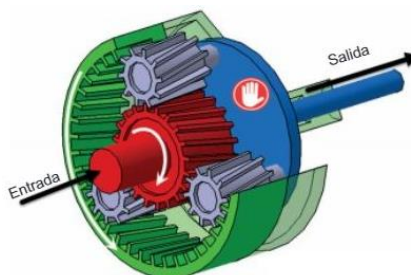


Figura 2: Sistema ejemplo de caja reductora de engranajes planetarios

Al considerar acoplamiento rígido podemos realizar una simplificación o compactación del subsistema mecánico completo, ya que no se tiene en cuenta la deformación elástica que se produce en los engranajes cuando se transmite el torque. Es decir, que podemos considerar la carga mecánica y el motor eléctrico como una unidad, obteniendo así un subsistema mecánico completo de un grado de libertad “1 g.d.l.”.

Obtenemos las siguientes relaciones del modelo equivalente (rígido) del tren de transmisión:

$$\omega_l(t) = \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec.3})$$

$$T_q(t) = r \cdot T_d(t) \quad (\text{Ec.4})$$

Donde:

- $\omega_m$  es la velocidad angular del eje del motor
- $T_d$  es el torque de entrada al tren de transmisión

Parámetro constante:

- Relación de reducción total:  $r = 314.3008 : 1$

Especificaciones de operación (valores límites):

- Velocidad nominal (salida):  $n_{l\text{ nom}} = 21 \text{ rpm}$  ( $\omega_{l\text{ nom}} = 2.2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ )
- Torque nominal (salida):  $Tq\text{ nom} = 7.26 \text{ N.m}$
- Torque pico (salida):  $Tq\text{ max} = 29.42 \text{ N.m}$

### Máquina Eléctrica

Se considera una máquina eléctrica de CA trifásica sincrónica con excitación por imanes permanentes (PMSM) y estator conectado en estrella (simétrica y equilibrada) accesible en bornes de fases abc, con centro de estrella (punto “neutro”) flotante no accesible.

El subsistema mecánico del motor consiste en el rotor referido al estator estacionario y su modelo equivalente es el siguiente:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - T_d(t) \quad (\text{Ec.5})$$

Donde:

- $T_m(t)$  es el Torque electromagnético

Parámetros (valores nominales medidos):

- Momento de inercia (motor y caja):  $J_m \approx 3.1 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^2$
- Amortiguamiento viscoso (motor y caja):  $b_m \approx 1.5 \times 10^{-5} \text{ N.m rad/s}$

### Sensores de realimentación

El sistema cuenta con los siguientes dispositivos físicos y sus canales de medición y acondicionamiento:

- 1 sensor de posición angular (codificador incremental o “encoder”) montado en el eje de motor, asumiendo proceso de “homing” y decodificación idealizados  $\rightarrow$  variable medida:  $\theta_m(t)$ , posición angular absoluta “rectificada” (al girar más de una revolución);
- 3 sensores de corriente instantánea de fase, montados en salida trifásica del inversor hacia bornes del estator  $\rightarrow$  variables medidas: “ $i_{abc}(t)$ ”.
- 1 sensor de temperatura (ej. RTD) en bobinado de estator  $\rightarrow$  variable medida: “ $T_s(t)$ ”, para monitoreo de calentamiento

Asumimos inicialmente todos los sensores con respuesta ideal  $G(s) \equiv 1$  (filtro “pasatodo”, ganancia unitaria y ancho de banda “infinito”). Más adelante evaluaremos que pasara al limitar ancho de banda.

### 3.1 Modelo matemático equivalente del subsistema mecánico completo referido al eje del motor

Vamos a obtener el modelo matemático equivalente de un grado de libertad correspondiente al subsistema mecánico completo. El sistema mecánico incluye la carga (Ec.1 y Ec.2), la transmisión rígida (Ec.3 y Ec.4) y el subsistema mecánico del motor (Ec.5).

#### Subsistema mecánico completo

Sustituimos “ $T_q(t)$ ” de la Ec.4 y “ $\omega_l(t)$ ” de la Ec.3 en la ecuación Ec.1:

$$J_l \cdot \frac{1}{r} \cdot \dot{\omega}_m(t) = r \cdot T_d(t) - b_l \cdot \frac{1}{r} \cdot \omega_m(t) - T_l(t) \quad (\text{Ec.6})$$

$$T_d(t) = J_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \dot{\omega}_m(t) + \frac{b_l}{r^2} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (\text{Ec.7})$$

Sustituimos  $T_d(t)$  de la Ec.7 en la Ec.5:

$$J_m \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m(t) - b_m \cdot \omega_m(t) - J_l \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \dot{\omega}_m(t) - \frac{b_l}{r^2} \cdot \omega_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \quad (\text{Ec.8})$$

$$\left( J_m + J_l \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cdot \dot{\omega}_m(t) = - \left( b_m + \frac{b_l}{r^2} \right) \cdot \omega_m(t) + \left( T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right) \quad (\text{Ec.9})$$

- Momento de inercia equivalente:  $J_{eq} = J_m + J_l \cdot \frac{1}{r^2}$
- Amortiguamiento viscosos equivalente:  $b_{eq} = b_m + \frac{b_l}{r^2}$

Tenemos la ecuación que modela al sistema mecánico equivalente (Ec.6). S, seguimos trabajando:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = -b_{eq} \cdot \omega_m(t) + \left( T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right)$$

$$\dot{\omega}_m(t) = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left( T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right)$$

Planteamos las ecuaciones de estado del subsistema mecánico simplificado referido al eje del motor:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left( T_m(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right) \\ y(t) = \theta_m(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.10})$$

Forma matricial, así como la representación en espacio de estados:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_m(t) \\ T_l(t) \end{bmatrix} \\ y(t) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec.11})$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) = C \cdot X(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.12})$$

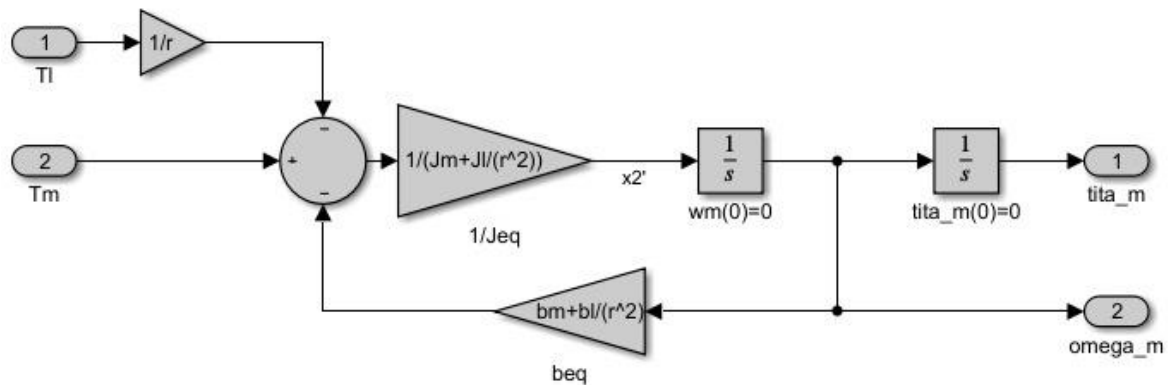


Figura 3: Diagrama de bloques del Subsistema mecánico

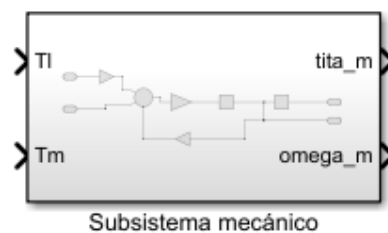


Figura 4: Bloque compacto del subsistema mecánico

### 3.2 Modelo dinámico del sistema físico completo

Procedemos a obtener el modelo dinámico del sistema físico completo, incorporando los subsistemas electromagnético y térmico acoplados de la máquina eléctrica al subsistema mecánico completo obtenido anteriormente.

#### 3.2.A Modelo global no línea (NL)

Obtenemos el modelo no lineal (NL), para " $i_{ds}^r(t) \neq 0$ " (caso general). Vamos a obtener las ecuaciones vectoriales NL de estado y de salida (con estado inicial genérico, en coordenadas virtuales qd0) y realizaremos el diagrama de bloques de estado (forma desagregada o escalar) incorporar las Transformaciones de Park virtuales.

##### Subsistema electromagnético

Sabemos que la velocidad angular del rotor  $\omega_m$  es la velocidad de sincronismo, es decir que es la velocidad a la que gira el campo magnético rotante. Esta velocidad depende de la cantidad de pares de polos magnéticos ( $P_p = 3$  pares en nuestro caso) y de las frecuencias de las señales eléctricas aplicadas en el estator " $\omega_r$ ", a través de la siguiente relación

$$\omega_r(t) = P_p \cdot \omega_m(t) \rightarrow \theta_r(t) = P_p \cdot \theta_m(t)$$

Donde: " $\theta_r(t)$ " es el ángulo de fase de la señal eléctrica "a"

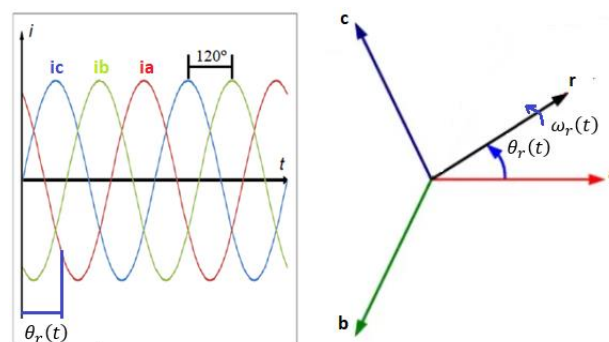


Figura 5: Sistema de referencia "abc"

Para obtener el modelo del sistema electromagnético se usa la transformación de Park que convierte el sistema estacionario 'abc' del sistema trifásico a otro sistema de referencia ortogonal con coordenadas virtuales 'dq0' que gira a la frecuencia de las señales eléctricas " $\omega_r(t) = 2\pi \cdot f$ ". El objetivo de la transformación consiste en convertir los valores trifásicos 'abc' variables sinusoidalmente en el tiempo, a valores constantes 'dq0' en régimen permanente (componentes longitudinales, transversales y perpendiculares al rotor del motor) (Figura 6).

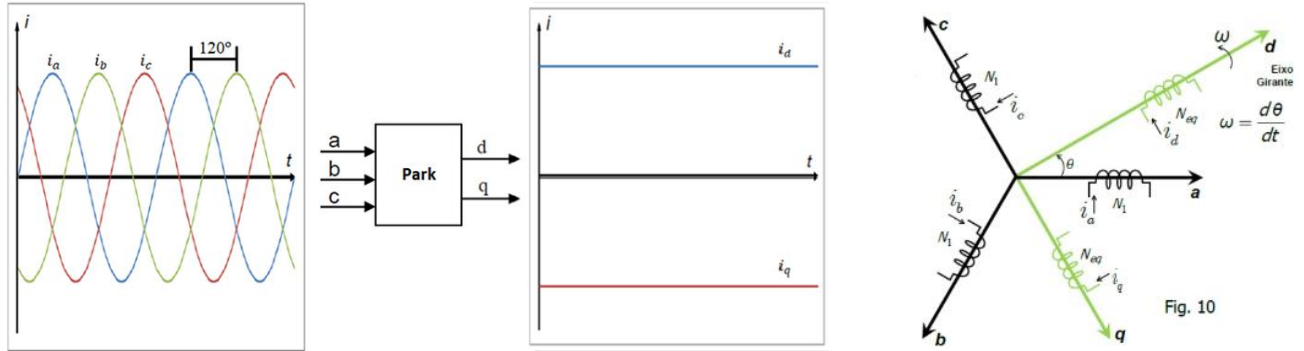


Figura 6: (izq.) Representación de la transformación de Park corrientes de fase, y su nueva representación en  $i_d$  e  $i_q$ . (der) Representación de los ejes longitudinal  $d$ , transversal  $q$  y perpendicular a ambos  $0$ .

El vector con las componentes del nuevo sistema de referencia de coordenadas virtuales 'dq0' se obtiene multiplicando el vector de coordenadas trifásicas 'abc' por la matriz de transformación (Ec.13). Donde  $f(t)$  puede representar: tensión  $v(t)$ , corriente  $i(t)$ , flujo concatenado  $\lambda(t)$ , etc.

$$\begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \cos \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sin \theta_r(t) & \sin \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.13})$$

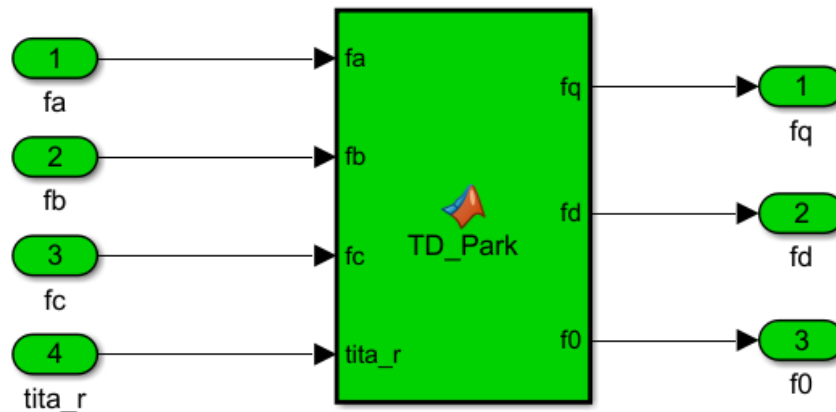


Figura 7: Bloque de la transformación directa de Park

El código en MATLAB que representa la transformación de Park es el siguiente:

```
function [fq,fd,f0] = T_Park(fa,fb,fc,tita_r)
fs=[fa;fb;fc];
TD=(2/3)*[cos(tita_r) cos(tita_r-2*pi/3) cos(tita_r+2*pi/3)
sin(tita_r) sin(tita_r-2*pi/3) sin(tita_r+2*pi/3)
0.5 0.5 0.5];
fqd0=TD*fs;
fq=fqd0(1);
fd=fqd0(2);
f0=fqd0(3);
```

Figura 8: Código para realizar la transformación directa de Park



La transformación inversa es de forma:

$$\begin{bmatrix} f_{as}(t) \\ f_{bs}(t) \\ f_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{qs}^r(t) \\ f_{ds}^r(t) \\ f_{0s}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.14})$$

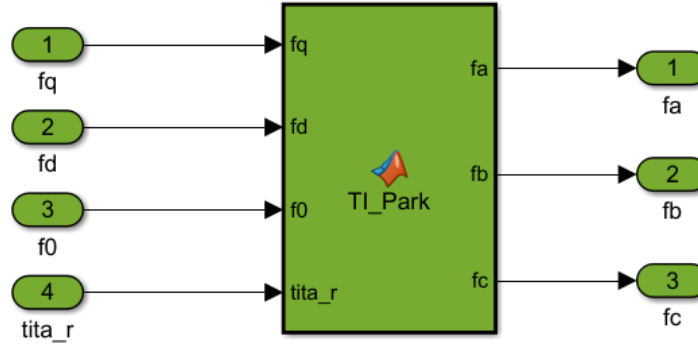


Figura 9: Bloque de la transformación inversa de Park

```
function [fa,fb,fc] = TI_Park(fq,fd,f0,tita_r)
fqd0=[fq;fd;f0];
TI=[cos(tita_r) sin(tita_r) 1
    cos(tita_r-2*pi/3) sin(tita_r-2*pi/3) 1
    cos(tita_r+2*pi/3) sin(tita_r+2*pi/3) 1];
fs=TI*fqd0;
fa=fs(1);
fb=fs(2);
fc=fs(3);
```

Figura 10: Código para realizar la transformación inversa de Park

El modelo del subsistema eléctrico está dado por el balance de tensiones eléctricas equivalentes de estator (referido a coordenadas qd0 fijas en rotor):

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + L_q \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \omega_r(t) \\ v_{ds}^r(t) = R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_d \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} - L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot \omega_r(t) \\ v_{0s}(t) = R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + L_{ls} \frac{di_{0s}(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec.15})$$

Donde los parámetros son (valores nominales medidos):

- $v$  es la tensión eléctrica del estator. El subíndice indica los bornes entre los que se aplica esta diferencia de potencial.
- $i$  es la corriente eléctrica del estator. El subíndice indica la rama en la que se establece esta corriente.
- $\lambda_m^r$  el flujo magnético concatenado por las espiras del bobinado del estator:

$$\lambda_m^r \approx 0.01546 \text{ Wb} - t, \text{ ó } \left( \frac{\text{V}}{\text{rad/s}} \right)$$

- $L_q$  Inductancia de estator (eje en cuadratura):  $L_q \approx 5.8 \text{ mH}$
- $L_d$  Inductancia de estator (eje directo):  $L_d \approx 6.6 \text{ mH}$
- $L_{ls}$  Inductancia de dispersión de estator:  $L_{ls} \approx 0.8 \text{ mH}$
- $R_s$  el valor de la resistencia del devanado del estator, la cual aumenta con la temperatura del estator  $T_s$ :

$$R_s(t) = R_{sREF} \cdot \left( 1 + \alpha_{Cu} \cdot (T_s^\circ(t) - T_{sREF}^\circ) \right)$$

A continuación se muestran dos resistencias de estator  $R_{sREF}$  para dos temperaturas de referencias  $T_{sREF}^\circ$

$$R_{sREF} \approx 1.02 \Omega (@40^\circ \text{C}) \rightarrow 1.32 \Omega (@115^\circ \text{C})$$

- $\alpha$  es el Coeficiente de aumento de  $R_s$  con  $T_s^\circ(t)$ :  $\alpha_{Cu} = 3.9 \times 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

A continuación, se muestran las especificaciones de operación, en bornes de fases “abc” de estator (valores límite):

- Velocidad nominal rotor:  $n_{m\ nom} = 6600\ rpm\ (\omega_{m\ nom} = 691.15 \frac{rad}{s})$
- Tensión nominal de línea:  $V_{sl\ nom} = 24\ V_{ca\ rms}\ (V_{sf\ nom} = \frac{V_{sl\ nom}}{\sqrt{3}})$
- Corriente nominal:  $I_{s\ nom} = 0.4\ A_{ca\ rms}$
- Corriente máxima:  $I_{s\ nom} = 2.0\ A_{ca\ rms}$

Despejamos las derivadas de las corrientes (Ec.15) y sustituimos  $\omega_r(t)$ :

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [-R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [-R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{ds}^r(t)] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_s} [-R_s(t) \cdot i_{0s}(t) + v_{0s}(t)] \end{cases} \quad (Ec.16)$$

Esta última expresión (Ec.16) constituye el modelo del subsistema electromagnético del motor.

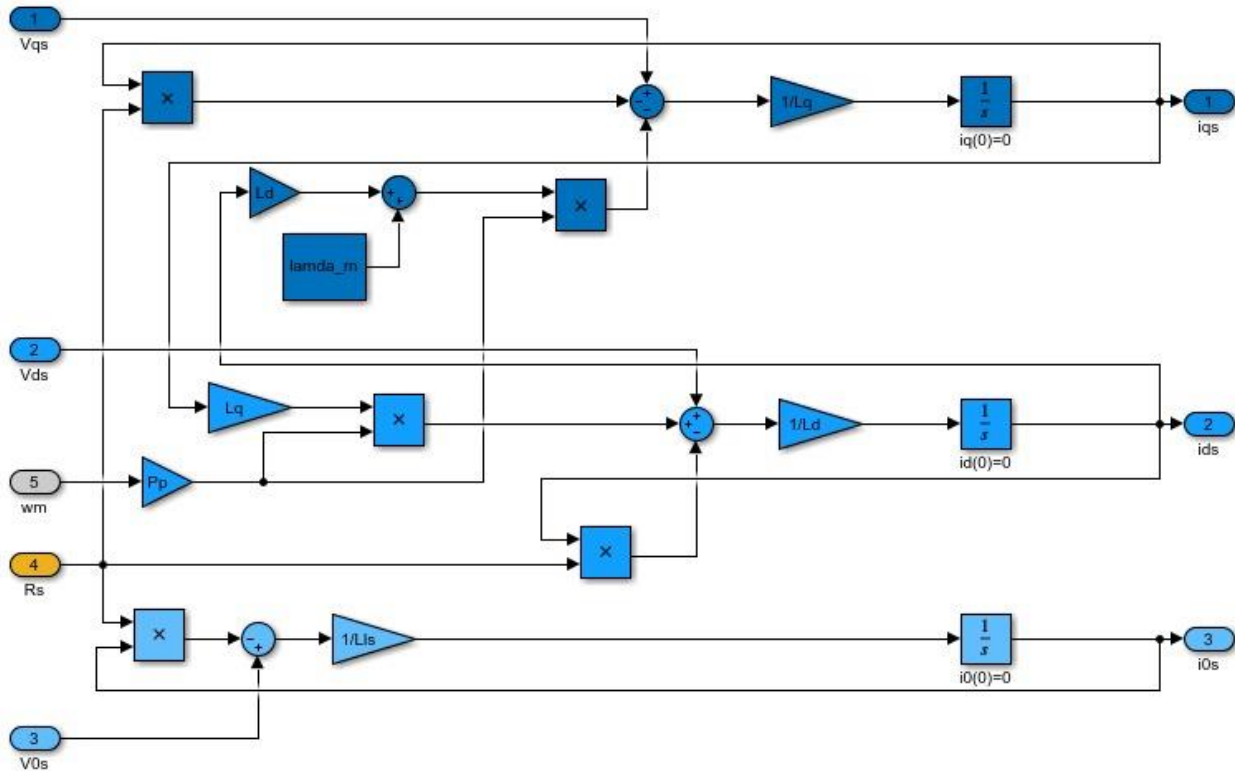


Figura 11: Diagrama de bloques del subsistema electromagnético

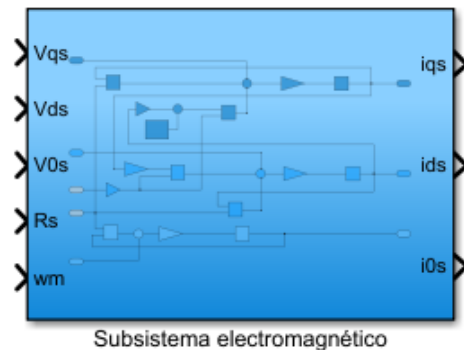


Figura 12: Bloque compacto del subsistema electromagnético

### Subsistema térmico

Solo se consideran pérdidas eléctricas resistivas por efecto Joule (calor) en bobinado de estator, despreciando pérdidas magnéticas en el núcleo; transferencia de calor por conducción y convección natural, sin ventilación forzada. La potencia de pérdidas calóricas está dada por:

$$P_{s\ perd}(t) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}(t)) \quad (\text{Ec.17})$$

Por otro lado, el balance térmico en el bobinado del estator es:

$$P_{s\ perd}(t) = C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \quad (\text{Ec.18})$$

Donde los parámetros son (valores nominales medidos):

- Capacitancia térmica de estator:  $C_{ts} \approx 0.818 \frac{\text{W}}{^\circ\text{C/s}}$
- Resistencia térmica en la frontera estator-ambiente:  $R_{ts-amb} \approx 146.7 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}$

Especificaciones de operación (valores límite):

- Temperatura máxima de bobinado del estator:  $T_{s\ max}^\circ = 115^\circ\text{C}$
- Rango de Temperatura ambiente de Operación:  $-15^\circ\text{C} \leq T_{amb}^\circ \leq 40^\circ\text{C}$

Como las dos ecuaciones anteriores son equivalentes:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}(t)) &= C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} &= \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^2(t) + i_{ds}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \right] \end{aligned} \quad (\text{Ec.19})$$

Esta última expresión (Ec.19) constituye el modelo del subsistema térmico del motor.

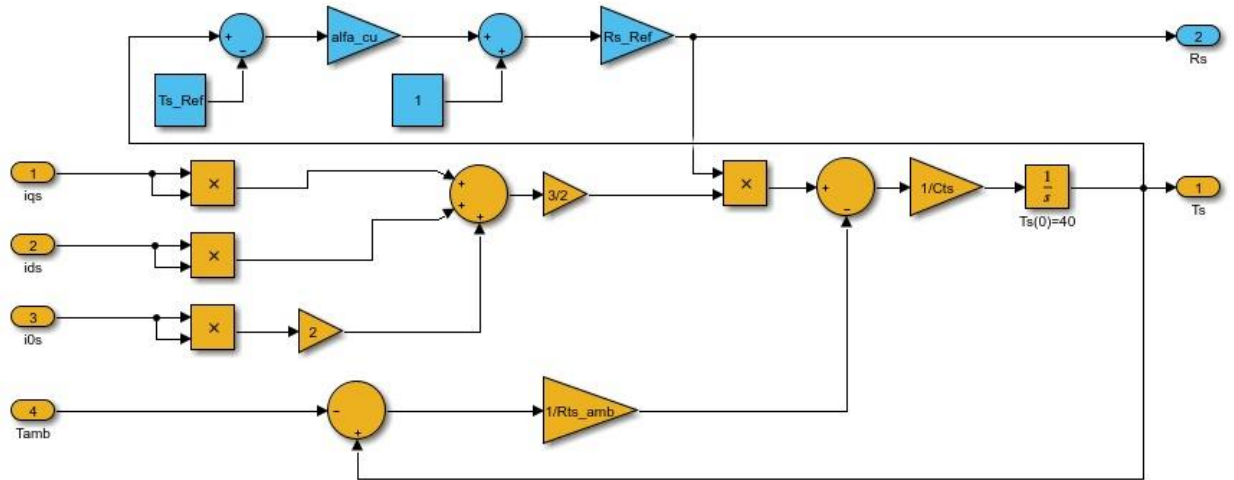


Figura 13: Diagrama de bloques del subsistema térmico

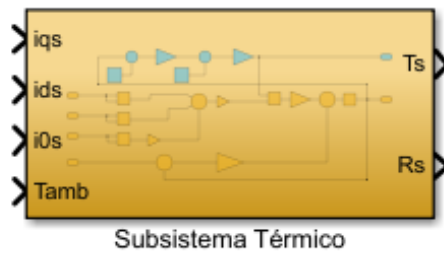


Figura 14: Bloque compacto del subsistema térmico

### 3.2.A Modelo global No Lineal (NL)

Habiendo modelado satisfactoriamente los tres subsistemas que lo componen, pueden combinarse ahora en el modelo completo de sistema motor sobre el que se quiere trabajar. Para ello, debe tenerse en cuenta en primer lugar la expresión del torque electromagnético, que permite relacionar los subsistemas mecánico y eléctrico:

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (\text{Ec.20})$$

Lo incorporamos a la ecuación del subsistema mecánico (Ec.10):

$$\dot{\omega}_m(t) = -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} \cdot \omega_m(t) + \frac{1}{J_{eq}} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - \frac{1}{r} \cdot T_l(t) \right)$$

$$\dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right]$$

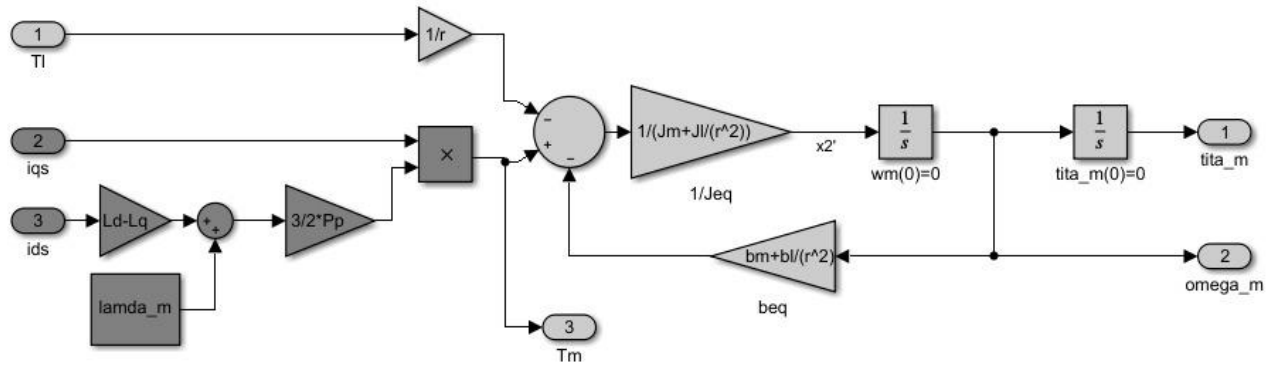


Figura 15: Diagrama de bloques del subsistema mecánico

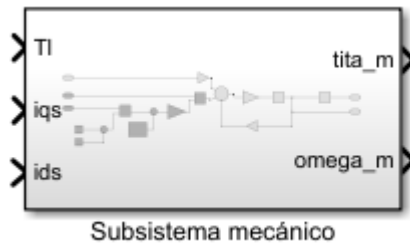


Figura 16: Bloque compacto del subsistema mecánico

Juntando todos los modelos de los subsistemas obtenemos el modelo que representa al sistema por completo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right] \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} \cdot [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{di_{0s}(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} \cdot [v_{0s}(t) - R_s(t) \cdot i_{0s}(t)] \\ \frac{dT_s^o(t)}{dt} = \frac{1}{c_{ts}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^r{}^2(t) + i_{ds}^r{}^2(t) + 2 \cdot i_{0s}{}^2(t)) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^o(t) - T_{amb}(t)) \right] \end{array} \right. \quad (\text{Ec.21})$$

Definimos como:

- Las variables de estado a la posición  $\theta_m(t)$  y a la velocidad  $\omega_m(t)$  en el eje del motor, a las corrientes virtuales equivalentes de estator " $i_{qdos}^r(t)$ " y la temperatura de estator  $T_s^o(t)$ . Siendo el vector de estado  $x(t)$  y la condición inicial  $x(t_0)$ :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix} ; \quad x(t0) = \begin{bmatrix} \theta_m(t0) \\ \omega_m(t0) \\ i_{qs}^r(t0) \\ i_{ds}^r(t0) \\ i_{0s}(t0) \\ T_s^\circ(t0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{m0} \\ \omega_{m0} \\ i_{qs0}^r \\ i_{ds0}^r \\ i_{0s0} \\ T_{s0}^\circ \end{bmatrix}$$

- Como variable de entrada manipulada al sistema trifásico de tensiones virtuales equivalentes “ $v_{qd0s}^r(t)$ ” y como entradas de perturbación al torque externo de carga mecánica aplicado en la articulación “hombro” del Robot  $T_l(t)$ , y a la temperatura ambiente  $T_{amb}^\circ(t)$ . Siendo los vectores de entrada  $u(t)$  y perturbación  $d(t)$ :

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{0s}(t) \end{bmatrix} \quad d(t) = \begin{bmatrix} T_l(t) \\ T_{amb}^\circ(t) \end{bmatrix}$$

- Como variables de salida medidas (para realimentación) a la posición angular del eje del motor  $\theta_m(t)$ , las corrientes virtuales equivalentes de estator “ $i_{qd0s}^r(t)$ ” y la temperatura de estator  $T_s^\circ(t)$ . Siendo el vector de salida  $y(t)$ :

$$y(t) = \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \\ i_{ds}^r(t) \\ i_{0s}(t) \\ T_s^\circ(t) \end{bmatrix}$$

Consideramos el estado inicial y excitaciones consistentes, tomando el estado de equilibrio detenido sin tensión ni carga:

$$\theta_{m0} \neq 0 \text{ (caso gral)}; \quad \omega_{m0} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}; \quad i_{qd0s0}^r = 0 \text{ A}; \quad T_{s0}^\circ = T_{amb \text{ max}}^\circ = 40^\circ\text{C}$$

Se observa que este modelo no puede ser representado matricialmente, ya que se trata de un sistema no lineal que no admite la representación de una matriz. Por último, sí es posible realizar una representación en diagrama de bloques de cada subsistema, como se muestra a continuación:

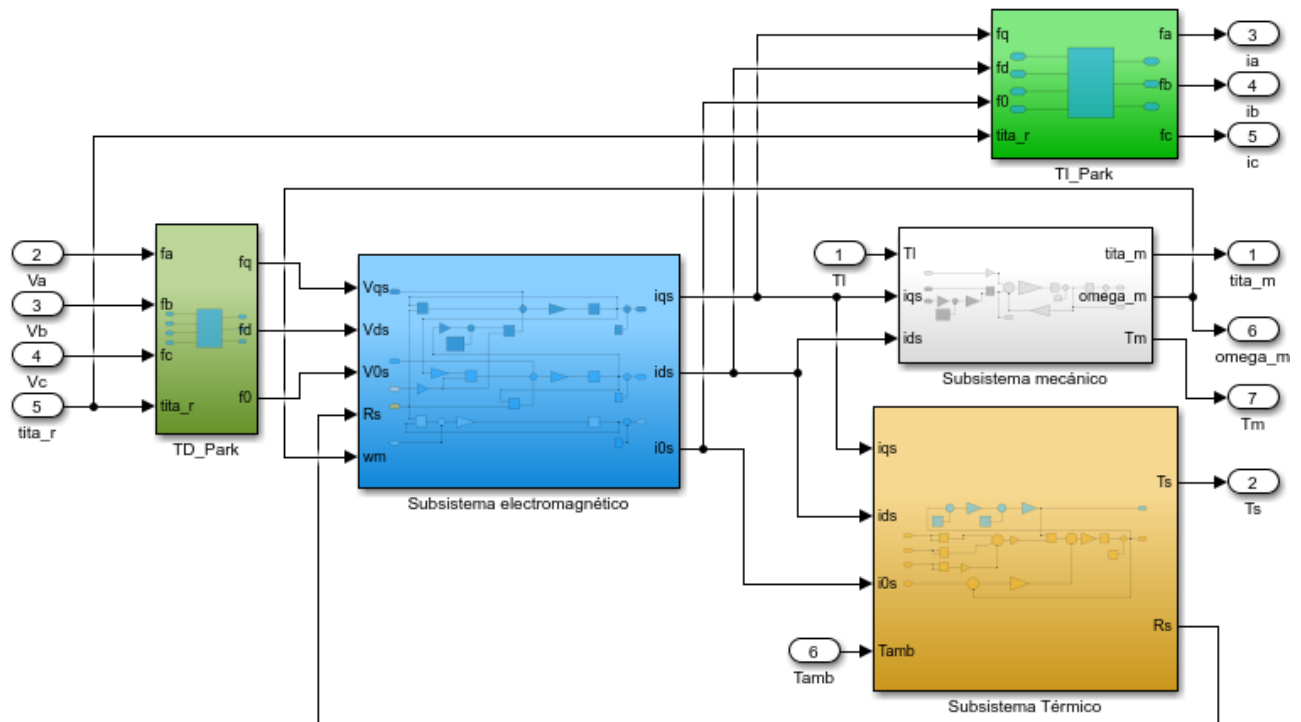


Figura 17: Diagrama de bloques del sistema. Se pueden ver los bloques compactos de cada subsistema correspondiente

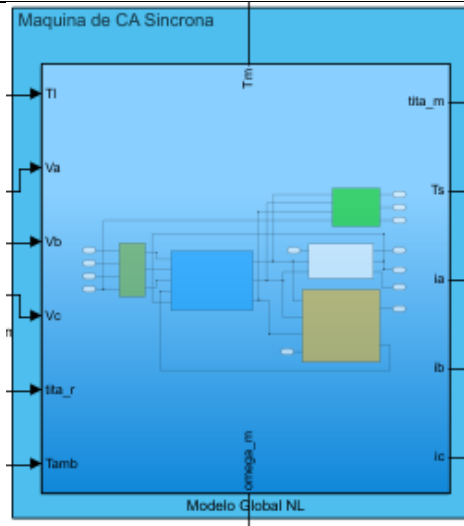


Figura 18: Bloque de la máquina síncrona para el modelo No Lineal

### 3.2.B Linealización jacobiana: Modelo global linealizado con parámetros variables (LPV)

Procedemos a obtener el modelo global linealizado con parámetros variables (LPV), para  $i_{ds}^r(t) \neq 0$  (caso general), a partir de modelo no lineal (NL) mediante aproximación con serie de Taylor truncada de 1° orden en punto genérico de operación.

Vemos que el sistema dinámico no-lineal obtenido anteriormente se puede representar en forma genérica por un conjunto de ecuaciones diferenciales en donde  $f$  es una función que representa la dinámica del sistema en términos de las variables de estado  $x$  y las entradas  $u$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)); & x(t_0) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.22})$$

En los sistemas no lineales los puntos de equilibrio son todos aquellos en donde la variación de energía se ha disipado completamente (equilibrio dinámico). Es decir, los puntos de equilibrio son todos aquellos en donde las derivadas de las variables de estado son nulas.

$$\text{Equilibrios:} \quad \dot{x}(t) = 0 = f(x(t), u(t))$$

A todos los pares valores de  $x(t)$  e  $u(t)$  que satisfacen la igualdad se lo denomina puntos de operación  $\{X_0, U_0\}$ . Los puntos de operación pueden ser constantes  $\{X_0, U_0\}$  o presentar variaciones relativamente lentas en el tiempo (cuasi-estacionarios)  $\{X_0(t), U_0(t)\}$ .

Consideramos pequeñas variaciones locales alrededor de los puntos de operación:

$$\begin{cases} x(t) = X_0(t) + \Delta x(t) \\ u(t) = U_0(t) + \Delta u(t) \\ y(t) = Y_0(t) + \Delta y(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.23})$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales del sistema dinámico NL genérico nos queda:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{X}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)); \\ X_0(0) + \Delta x(0) = x_0 \rightarrow X_0(0) = x_0, \Delta x(0) = 0 \\ Y_0(t) + \Delta y(t) = C \cdot (X_0(t) + \Delta x(t)) \rightarrow Y_0(t) = C \cdot X_0(t); \Delta y(t) = C \cdot \Delta x(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.24})$$

Realizamos una expansión en serie de Taylor truncada a 1° orden (despreciando términos orden superior):

$$f(X_0(t) + \Delta x(t), U_0(t) + \Delta u(t)) \approx f(X_0(t), U_0(t)) + \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_0(t) \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \bigg|_0(t) \cdot \Delta u(t)$$

Sustituyendo esta expresión en la Ec.24, se observa que puede separarse el modelo del sistema en dos partes:

1. Una parte no lineal, que representa el espacio de operación global NL (cuasi-estacionario):

$$\dot{X}_0(t) = f(X_0(t), U_0(t)) \approx 0/cte; \quad X_0(0) = x_0 \quad (\text{Ec.25})$$

2. Una parte lineal dinámica, que representa las pequeñas variaciones alrededor de puntos de Operación (Modelo dinámico lineal LPV):

$$\Delta \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \big|_0(t) \cdot \Delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u} \big|_0(t) \cdot \Delta u(t); \quad \Delta x(0) = 0 \quad (\text{Ec.26})$$

Para el sistema particular correspondiente a este informe, los modelos son los siguientes, espacio de operación global NL (cuasi-estacionario), formando el Sistema de Ecuaciones Algebraico No Lineal que se ve a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_{m0} = \omega_{m0} = cte \\ \dot{\omega}_{m0} = \frac{1}{J_{eq}} \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r] \cdot i_{qs0}^r - b_{eq} \cdot \omega_{m0} - \frac{T_{l0}}{r} \right] = 0 \\ i_{qs0}^r = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs0}^r - R_s(t) \cdot i_{qs0}^r - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r] \cdot P_p \cdot \omega_{m0}] = 0 \\ i_{ds0}^r = \frac{1}{L_d} [v_{ds0}^r - R_s(t) \cdot i_{ds0}^r + L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p \cdot \omega_{m0}] = 0 \\ i_{0s0} = \frac{1}{L_{ls}} [v_{0s0} - R_s(t) \cdot i_{0s0}] = 0 \\ T_{s0}^{\circ} = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs0}^r)^2 + i_{ds0}^r{}^2 + 2 \cdot i_{0s0}^2 \right] - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_{s0}^{\circ} - T_{amb0}^{\circ}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{Ec.27})$$

Modelo dinámico LPV (pequeñas variaciones locales), formando el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineal con Parámetros Variables siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \dot{\theta}_m(t) = \Delta \omega_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left[ \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \{ [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) \} - b_{eq} \cdot \Delta \omega_m(t) - \frac{\Delta T_{l0}}{r} \right] \\ \Delta i_{qs}^r(t) = \frac{1}{L_q} \cdot [\Delta v_{qs}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r] \cdot P_p \cdot \Delta \omega_m(t) - L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \cdot \Delta i_{ds}^r(t)] \\ \Delta i_{ds}^r(t) = \frac{1}{L_d} [\Delta v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p \cdot \Delta \omega_m(t) + L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0} \cdot \Delta i_{qs}^r(t)] \\ \Delta i_{0s}(t) = \frac{1}{L_{ls}} [\Delta v_{0s}(t) - R_s(t) \cdot \Delta i_{0s}(t)] \\ \Delta T_s^{\circ}(t) = \frac{1}{C_{ts}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (2 \cdot i_{qs0}^r \cdot \Delta i_{qs}^r(t) + 2 \cdot i_{ds0}^r \cdot \Delta i_{ds}^r(t) + 4 \cdot i_{0s0} \cdot \Delta i_{0s}(t)) \right] - \frac{1}{R_{ts-amb}} (\Delta T_s^{\circ}(t) - \Delta T_{amb}^{\circ}(t)) \end{array} \right. \quad (\text{Ec.28})$$

Expresamos las Ec.27 y Ec.28 en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}_m(t) \\ \Delta \dot{\omega}_m(t) \\ \Delta i_{qs0}^r \\ \Delta i_{ds0}^r \\ \Delta i_{0s0} \\ \Delta T_{s0}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{eq} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds0}^r)}{J_{eq}} & \frac{3}{2} \cdot \frac{P_p \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{qs0}^r}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds0}^r) \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s(t)}{L_q} & -\frac{(L_d \cdot P_p \cdot \omega_{m0})}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_q \cdot i_{qs0}^r \cdot P_p}{L_d} & \frac{L_q \cdot P_p \cdot \omega_{m0}}{L_d} & -\frac{R_s(t)}{L_d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_s(t)}{L_{ls}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{qs0}^r & \frac{3 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{ds0}^r & \frac{6 \cdot R_s(t)}{C_{ts}} \cdot i_{0s0} & -\frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_m(t) \\ \Delta \omega_m(t) \\ \Delta i_{qs}^r(t) \\ \Delta i_{ds}^r(t) \\ \Delta i_{0s}(t) \\ \Delta T_s^{\circ}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r \cdot J_{eq}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_d} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_{ls}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_{ts} \cdot R_{ts-amb}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_l(t) \\ \Delta v_{qs}^r(t) \\ \Delta v_{ds}^r(t) \\ \Delta v_{0s}(t) \\ \Delta T_{amb}^{\circ}(t) \end{bmatrix}$$

### 3.2.C Linealización por Realimentación NL: Modelo simplificado lineal invariante (LTI) equivalente

Se busca obtener un modelo simplificado lineal invariante equivalente. Para poder linealizar nuestro modelo global no lineal obtenido anteriormente, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. Aplicamos la estrategia de “Control Vectorial con campo orientado” que consiste en desacoplar los canales de flujo magnético y torque, forzando corriente nula en eje d " $i_{ds}^r(t) = 0$ " mediante el controlador (se debe aplicar una “Restricción o Ley de Control NL” sobre la variable manipulada virtual  $v_{qdos}^r(t)$  o, su equivalente por transformada de Park, sobre " $v_{abcs}(t)$ ").
2. Para desacoplar el subsistema térmico consideramos que debido a las despreciables variaciones en  $R_s$  en el rango de temperaturas de trabajo, la temperatura no producirá ninguna variación importante en el resto del sistema.

3. Como el estator tiene una conexión estrella trifilar con neutro flotante, mediante la ley de Kirchhoff aplicada a un sistema simétrico y equilibrado:

$$i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t) = 0 \quad (\text{Ec.29})$$

Aplicamos la transformación de Park:

$$i_{0s}(t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (i_{as}(t) + i_{bs}(t) + i_{cs}(t)) = 0 \quad (\text{Ec.30})$$

$$\frac{di_{0s}(t)}{dt} = 0 \rightarrow v_{0s}(t) = 0 \quad (\text{Ec.31})$$

Aplicando las consideraciones mencionadas a nuestro sistema global no lineal, obtenemos las ecuaciones del modelo simplificado lineal invariante equivalente (LTI) en el tiempo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left( \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \end{cases} \quad (\text{Ec.32})$$

Vemos que el sistema se asemeja al modelo de una máquina de corriente continua con escobillas. Las ecuaciones vectoriales/matriciales LTI de estado y de salida (con estado inicial genérico), nos quedan:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) \\ \dot{i}_{qs}^r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^r}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{\lambda_m^r \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \cdot v_{qs}^r(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_{eq} \cdot r} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot T_l(t) \\ \vec{y} = [1 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta_m(t) \\ \omega_m(t) \\ i_{qs}^r(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{Ec.33})$$

Al no poseer productos entre variables de estado y considerar a  $R_s$  como una constante, logramos que las matrices de coeficientes no varían en el tiempo por lo que obtuvimos un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI).

Al momento de realizar el diagrama de bloques de estado, tenemos en cuenta el subsistema térmico, el cual es el modelo lineal representado por la ecuación obtenida del balance térmico del estator visto anteriormente:

$$\begin{aligned} P_{s \text{ perd}}(t) &= C_{ts} \cdot \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} + \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \\ \frac{dT_s^\circ(t)}{dt} &= \frac{1}{C_{ts}} \left( P_{s \text{ perd}}(t) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \right) \end{aligned} \quad (\text{Ec.34})$$

A partir de la ecuación anterior de potencia vemos que:

$$P_{s \text{ perd}}(t) = \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot i_{qs}^r{}^2(t)$$

Obtenemos:

$$\frac{dT_s^\circ(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left( \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot i_{qs}^r{}^2(t) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^\circ(t) - T_{amb}^\circ(t)) \right) \quad (\text{Ec.35})$$



Sistema completo LTI

$$\begin{bmatrix} v_{as}(t) \\ v_{bs}(t) \\ v_{cs}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r(t) & \sin \theta_r(t) & 1 \\ \cos \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & \sin \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{qs}^r(t) \\ v_{ds}^r(t) \\ v_{os}^r(t) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.37})$$

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos \theta_r(t) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \theta_r(t) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{bs}(t) = \cos \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \\ v_{cs}(t) = \cos \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) + \sin \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{ds}^r(t) + v_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.38})$$

Sustituimos los valores de  $v_{ds}^r(t)$  y  $v_{0s}^r(t)$  ya conocidos, y teniendo la Ec.36:

$$\begin{cases} v_{as}(t) = \cos \theta_r(t) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin \theta_r(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \\ v_{bs}(t) = \cos \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin \left( \theta_r(t) - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \\ v_{cs}(t) = \cos \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot v_{qs}^r(t) - \sin \left( \theta_r(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.39})$$

De esta forma determinamos la Restricción o Ley de Control mínima que es necesario aplicar para lograr el desacoplamiento de canales de flujo magnético y torque. Es decir, la realimentación necesaria en la entrada para cumplir con las restricciones propuestas.

Implementamos, en el modelo global NL completo, la Ley de control mínima (desacoplamiento y Linealización por realimentación directa no lineal de estado parcial) mediante un controlador parcial; incorporando el inversor (modulador de tensión trifásico equivalente), las Transformaciones de Park y los sensores de realimentación ideal de variables de estado:

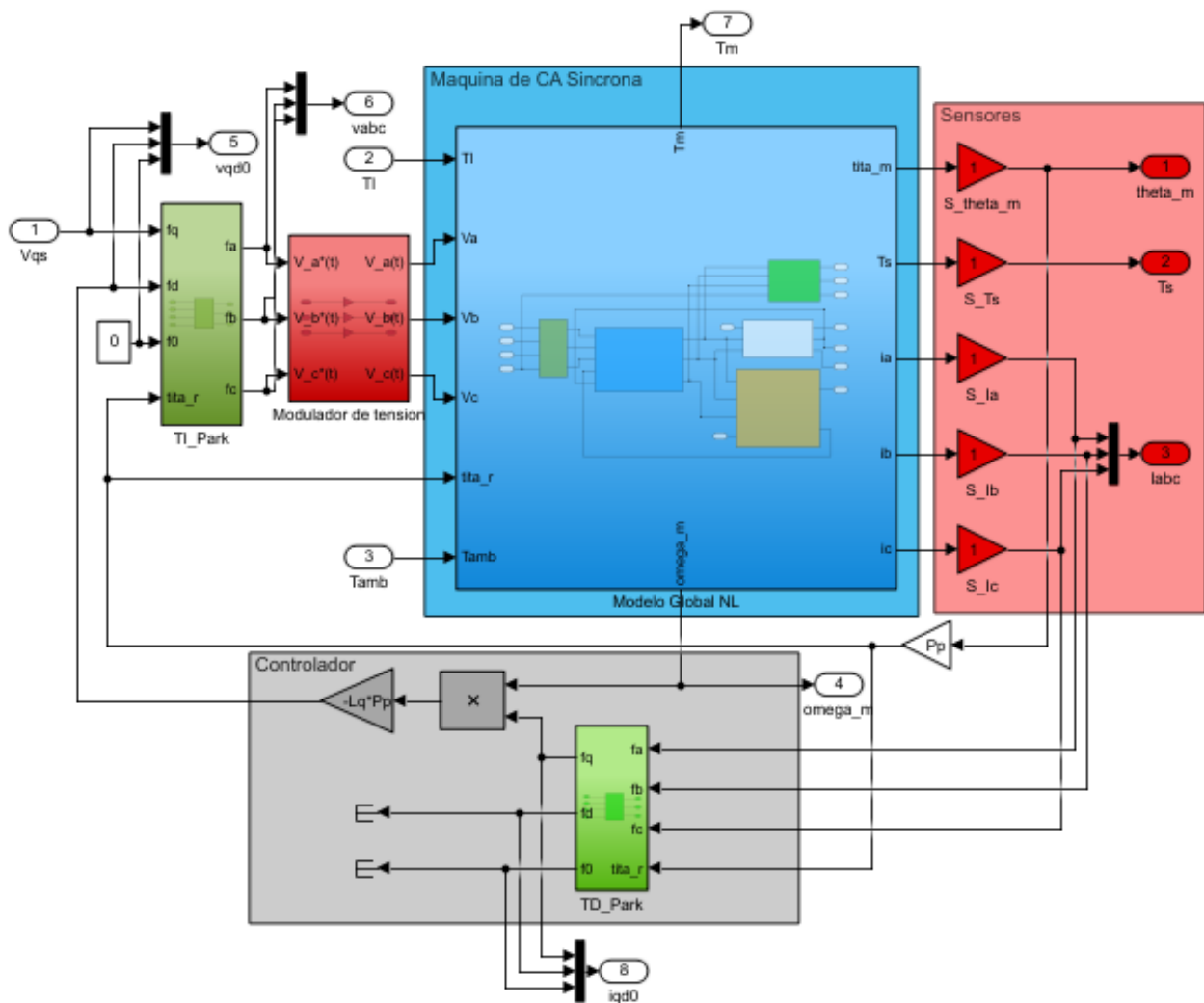


Figura 21: Diagrama de bloques del sistema linealizado por realimentación parcial de estados mediante un controlador externo

### Dinámica residual

Si aplicamos nuestra ley de control mínima en la expresión (Ec.36) para “ $v_{ds}^r(t)$ ” de la ecuación de estado, llegamos a la siguiente EDO que modela el comportamiento de la corriente “ $i_{ds}^r(t)$ ”:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [-R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)]$$

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} + \frac{R_s(t)}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) = 0$$

Si resolvemos esta ecuación nos queda un modelo de dinámica residual equivalente para dinámica residual equivalente para “ $i_{ds}^r(t)$ ”:

$$i_{ds}^r(t) = i_{ds}^r(0) \cdot e^{-\frac{R_s(t)}{L_d} \cdot t}$$

Vemos que la corriente decae exponencialmente. El error de la dinámica residual es debido a un valor inicial de la corriente distinta de cero “ $i_{ds}^r(0) \neq 0$ ”, lo cual genera un acoplamiento en el eje q, y produce un comportamiento no lineal del sistema que desaparecerá al cabo de un tiempo, afectando a la respuesta natural del sistema pero no así en régimen forzado

$$v_{qs}^r(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec.40})$$

Se puede implementar una Restricción o Ley de Control complementaria mínima en el eje q para eliminar completamente este acoplamiento residual NL aún en régimen natural y obtener un modelo equivalente completamente lineal, independiente del estado inicial de “ $i_{ds}^r(0)$ ”. Implementamos una ley de control que permita deshacernos del término que produce el acoplamiento (marcado en **negrita** en Ec.40):

$$v_{qs}^r(t) + \cancel{L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)} = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} + R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) + \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + \cancel{L_d \cdot i_{ds}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)} \quad (\text{Ec.41})$$

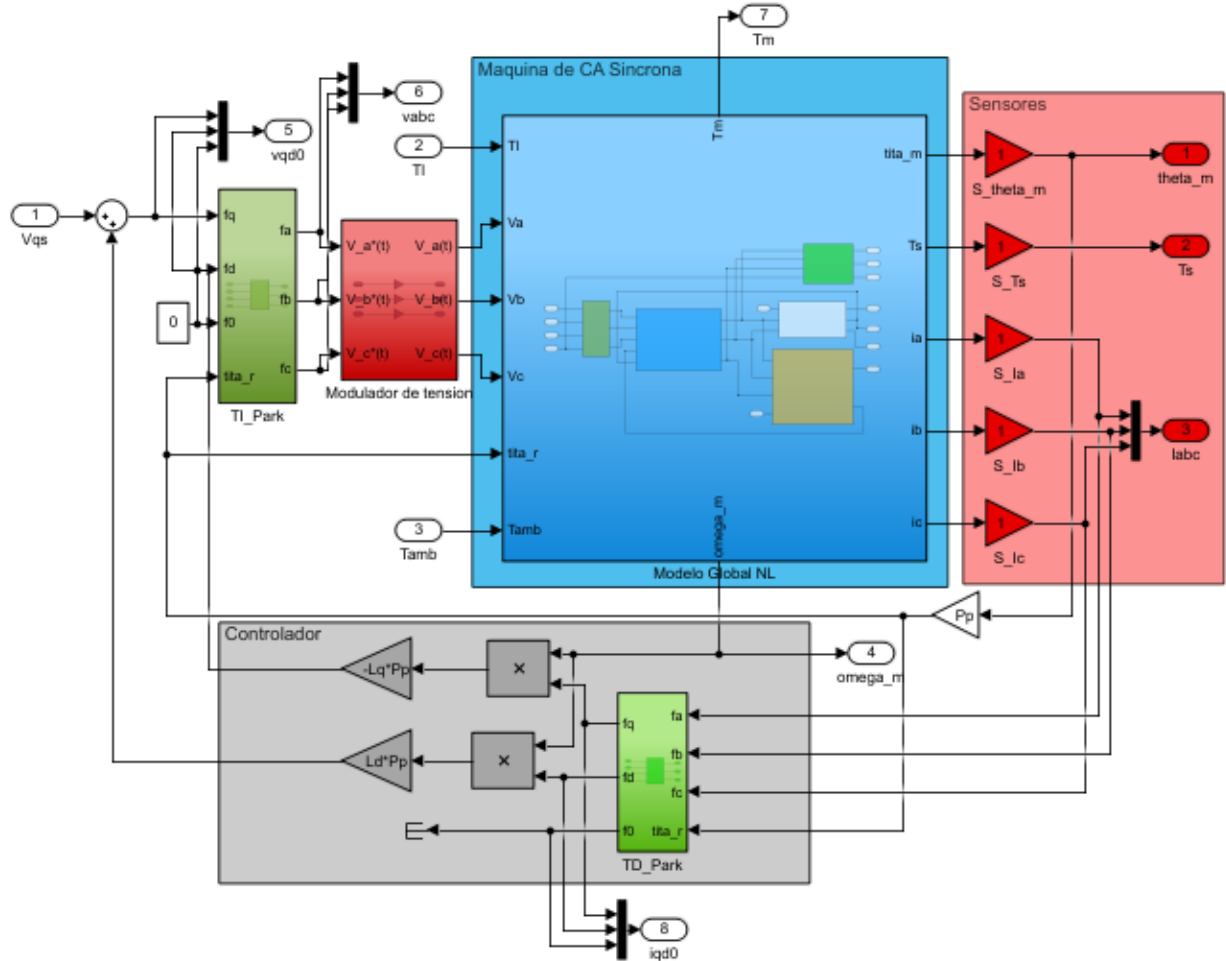


Figura 22: Diagrama de bloques del sistema linealizado mediante realimentación parcial de estados por un controlador externo con Ley de control en eje q y eje de (Modelo global NL con ley de control NL)

Incorporamos la dinámica residual al modelo LTI equivalente, despreciando el acoplamiento residual NL con el eje q ya que este desaparece de forma exponencial a lo largo del tiempo ya que el sistema es de primer orden. Tenemos las ecuaciones de estado del nuevo modelo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{1}{J_{eq}} \left( \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^r \cdot i_{qs}^r(t) - b_{eq} \cdot \omega_m(t) - \frac{T_l(t)}{r} \right) \\ \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - \lambda_m^r \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] \\ \frac{dT_s^r(t)}{dt} = \frac{1}{C_{ts}} \left( \frac{3}{2} \cdot R_s(t) \cdot (i_{qs}^r(t)^2 + i_{ds}^r(t)^2) - \frac{1}{R_{ts-amb}} (T_s^r(t) - T_{amb}^r(t)) \right) \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = -\frac{R_s(t)}{L_d} \cdot i_{ds}^r(t) \end{array} \right. \quad (Ec.42)$$

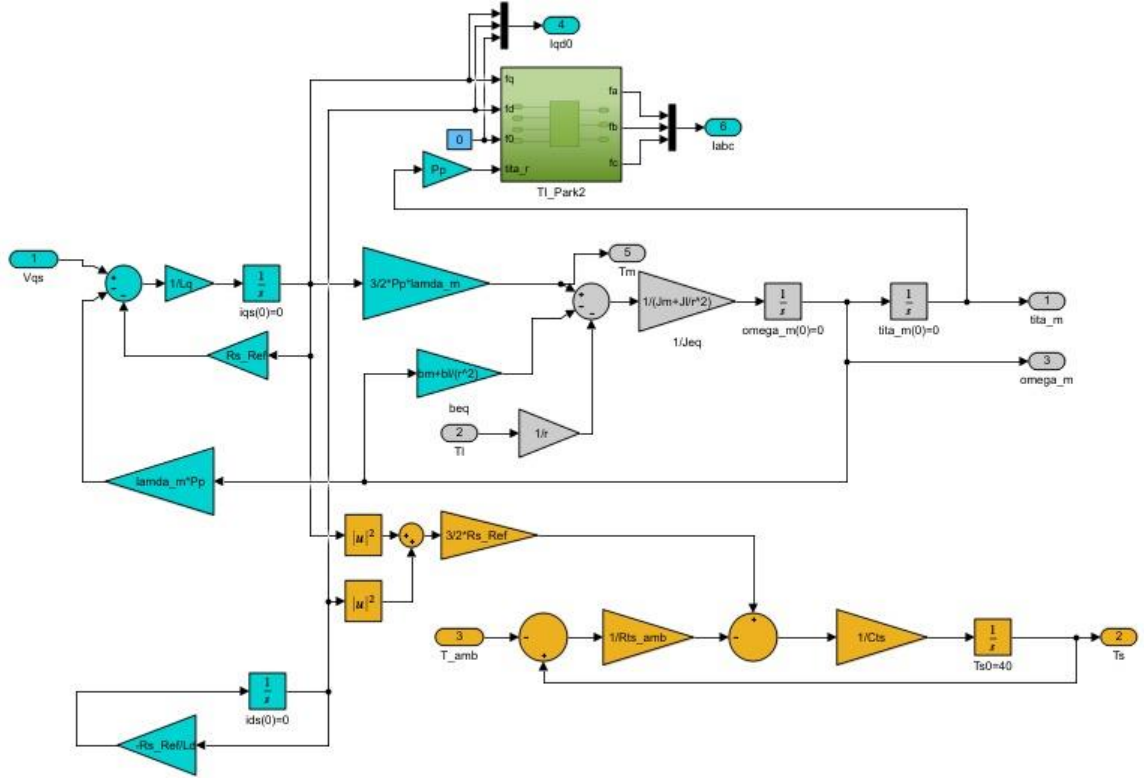


Figura 23: Diagrama de bloques del modelo LTI equivalente aumentado

### 3.2.D Comparación modelo dinámico LTI equivalente aumentado vs modelo dinámico global LPV

El modelo dinámico global LPV para el caso general “ $i_{ds}^r \neq 0$ ” representa mejor al sistema real, ya que representa mejor sus no linealidades. Además, al tratarse de un caso general podemos obtener un espacio de puntos de operación que presentan muchas alternativas para lograr un mismo efecto.

El modelo dinámico LTI donde se impuso la especificación “ $i_{ds}^r = 0$ ”, presenta como mayor ventaja un modelo con mucha mayor simplicidad en comparación el anterior. Sin embargo, al realizar esta simplificación, el espacio de puntos de operación se reduce drásticamente para lograr un determinado efecto.

Ahora procederemos a analizar el comportamiento del sistema frente a cambios en la variable “ $i_{ds}^r$ ” (considerando el estado estacionario, es decir  $\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = 0$ ). Al primer análisis lo realizamos con respecto al par electromagnético (Ec.20):

$$T_m(t) = \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t)$$

Sabemos que para motores de polos salientes  $L_d > L_q$ , entonces cuando  $i_{ds}^r(t)$  toma valores más positivos, el campo magnético principal se refuerza aumentando el torque en el motor. Mientras que si toma valores más negativos el campo se debilita y disminuye el torque en el motor.

Ahora analizamos que pasa con la velocidad, a partir del modelo del subsistema eléctrico:

$$\frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [v_{ds}^r(t) - R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t)] = 0$$

$$\omega_m(t) = \frac{-v_{ds}^r(t) + R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)}{L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p}$$

Vemos que ocurre lo contrario al torque en el motor, cuando  $i_{ds}^r(t)$  toma valores positivos el campo magnético se refuerza y la velocidad del motor disminuye (ya que el término positivo  $R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t)$  se opone al término negativo  $-v_{ds}^r(t)$ ). Mientras que si toma valores negativos el campo se debilita y la velocidad del motor aumenta.

Cuando  $i_{ds}^r(t) = 0$ , el flujo concatenado está afectado únicamente por los imanes permanentes, y el motor alcanza un estado de equilibrio dinámico entre el par motor y su velocidad.

### 3.2.E Funciones de Transferencia para el modelo LTI

Procedemos a obtener la función de transferencia del modelo simplificado equivalente obtenido anteriormente. Para ello es necesario aplicar la transformada de Laplace:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{\dot{f}(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$

Aplicando la transformada (con condiciones iniciales nulas) a nuestro modelo nos queda:

$$\begin{cases} s \cdot \Theta_m(s) = \Omega_m(s) \\ s \cdot \Omega_m(s) = \frac{1}{J_{eq}} \left( \frac{3}{2} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{r'} \cdot I_{qs}^r(s) - b_{eq} \cdot \Omega_m(s) - \frac{T_l(s)}{r} \right) \\ s \cdot I_{qs}^r(s) = \frac{1}{L_q} \cdot [V_{qs}^r(s) - R_s \cdot I_{qs}^r(s) - \lambda_m^{r'} \cdot P_p \cdot \Omega_m(s)] \end{cases} \quad (\text{Ec.43})$$

Sustituyendo las variables correspondientes, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Theta_m(s) = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m^{r'} V_{qs}^r(s) - \frac{1}{r} (s L_q + R_s) T_l(s)}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + R_s J_{eq}) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r'2}) s} \quad (\text{Ec.44})$$

A partir de esta expresión podemos obtener la función de transferencia para las dos entradas  $v_{qs}^r(t)$  y  $T_l(t)$ :

$$G_{v_{qs}^r}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{V_{qs}^r(s)} = \frac{\frac{3}{2} P_p \lambda_m^{r'}}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + R_s J_{eq}) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r'2}) s} \quad (\text{Ec.45})$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\Theta_m(s)}{T_l(s)} = \frac{-\frac{1}{r} (s L_q + R_s)}{J_{eq} L_q s^3 + (L_q b_{eq} + R_s J_{eq}) s^2 + (R_s b_{eq} + \frac{3}{2} P_p^2 \lambda_m^{r'2}) s} \quad (\text{Ec.46})$$

### 3.3 Análisis de Estabilidad a lazo abierto para el modelo LTI equivalente aumentado

Vamos a determinar los polos y ceros del sistema, a partir del polinomio característico obtenido de las funciones de transferencia (Ec.44, Ec.45 y Ec.46):

$$(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^3 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s^2 + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r'2}) \cdot s = 0 \quad (\text{Ec.47})$$

$$s \cdot [(J_{eq} \cdot L_q) \cdot s^2 + (L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \cdot s + (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r'2})] = 0 \quad (\text{Ec.48})$$

Los tres valores que satisfacen la igualdad anterior son cero y las raíces de la ecuación cuadrática:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_{2,3} = \frac{-(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq}) \pm \sqrt{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})^2 - 4 \cdot (J_{eq} \cdot L_q) \cdot (R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{r'2})}}{2 \cdot (J_{eq} \cdot L_q)} \end{cases} \quad (\text{Ec.49})$$

Recordando los valores de los parámetros:

$$J_{eq} = 5.65 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$b_{eq} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad/s}$$

$$L_q = 5.8 \text{ mH} = 5.8 \times 10^{-3} \text{ H}$$

$$P_p = 3$$

$$\lambda_m^{r'} \approx 0.01546 \text{ Wb}$$

Para una temperatura de  $R_s \approx 1.02 \, \Omega$  (@40 °C) los polos son:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -89.26 + 301.57i \\ s_3 = -89.26 - 301.57i \end{cases} \quad (\text{Ec.50})$$

Para una temperatura de  $R_s \approx 1.32 \, \Omega$  (@115 °C) los polos son:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -115.12 + 292.91i \\ s_3 = -115.12 - 292.91i \end{cases} \quad (\text{Ec.51})$$

Vemos que solamente la perturbación  $T_l(t)$  introduce un cero en el sistema:

$$z \cdot L_q + R_s = 0$$

$$R_s \approx 1.02 \, \Omega \text{ (@40 °C): } z = -\frac{R_s}{L_q} = -175,86 \quad ; \quad R_s \approx 1.32 \, \Omega \text{ (@115 °C): } z = -\frac{R_s}{L_q} = -227,58$$

A continuación, se puede ver una gráfica representando la variación de los polos en el plano polar a medida que disminuye el valor de  $R_s$ , proporcional a la temperatura del bobinado:

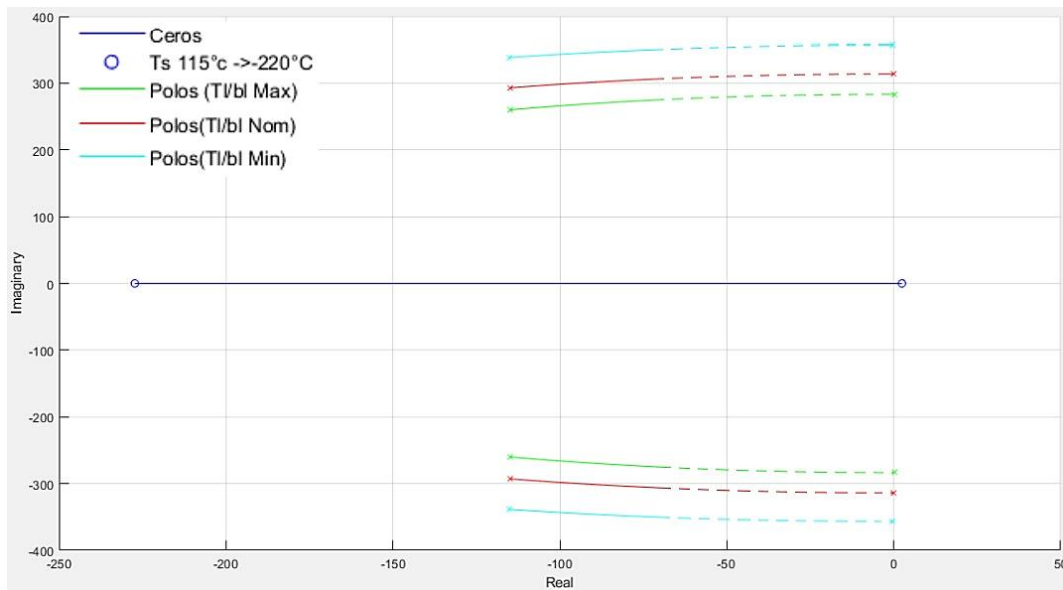


Figura 24: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto para barrido del parámetro  $R_s$

La línea de trazo en la Figura 24: Diagrama de polos y ceros a lazo abierto para barrido del parámetro  $R_s$  representa el rango de operación (-15°C a 115°C), la línea punteada son temperaturas por debajo de -15°C hasta llegar a -220°C (dónde los polos quedan sobre el eje imaginario), para hacer un análisis teórico de la influencia de la temperatura en la estabilidad del sistema. Se puede ver como la resistencia  $R_s$  tiene un efecto amortiguador en la respuesta del sistema, volviéndolo más estable a medida que la temperatura aumenta.

Puede obtenerse el valor de la frecuencia natural del sistema ( $\omega_n$ ) y del amortiguamiento relativo del sistema ( $\xi$ ) si se compara la ecuación característica con la forma estándar de un sistema de segundo orden:

$$s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0 \quad (\text{Ec.52})$$

$$s^2 + \frac{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{(J_{eq} \cdot L_q)} \cdot s + \frac{(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)}{(J_{eq} \cdot L_q)} = 0 \quad (\text{Ec.53})$$

Entonces nos queda:

$$\omega_n^2 = \frac{(R_s \cdot b_{eq} + \frac{3}{2} \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m'^2)}{(J_{eq} \cdot L_q)} \quad (\text{Ec.54})$$

$$2 \cdot \xi \cdot \omega_n = \frac{(L_q \cdot b_{eq} + R_s \cdot J_{eq})}{(J_{eq} \cdot L_q)} \quad (\text{Ec.55})$$

Los resultados para  $R_s \approx 1.02 \Omega$  (@40 °C) son:

$$\omega_n = 314.50 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \xi = 0.28$$

Los resultados para  $R_s \approx 1.32 \Omega$  (@115 °C) son:

$$\omega_n = 314.72 \frac{\text{rad}}{\text{seg}} \quad \xi = 0.36$$

De esta forma vemos que se trata de un sistema subamortiguado a ambas temperaturas ya que el amortiguamiento relativo del sistema es menor que la unidad en ambos casos ( $\xi < 1$ ).

De forma análoga a la Figura 24, podemos ver la variación de frecuencias y relaciones de amortiguamiento para el barrido de valores de  $R_s$ :

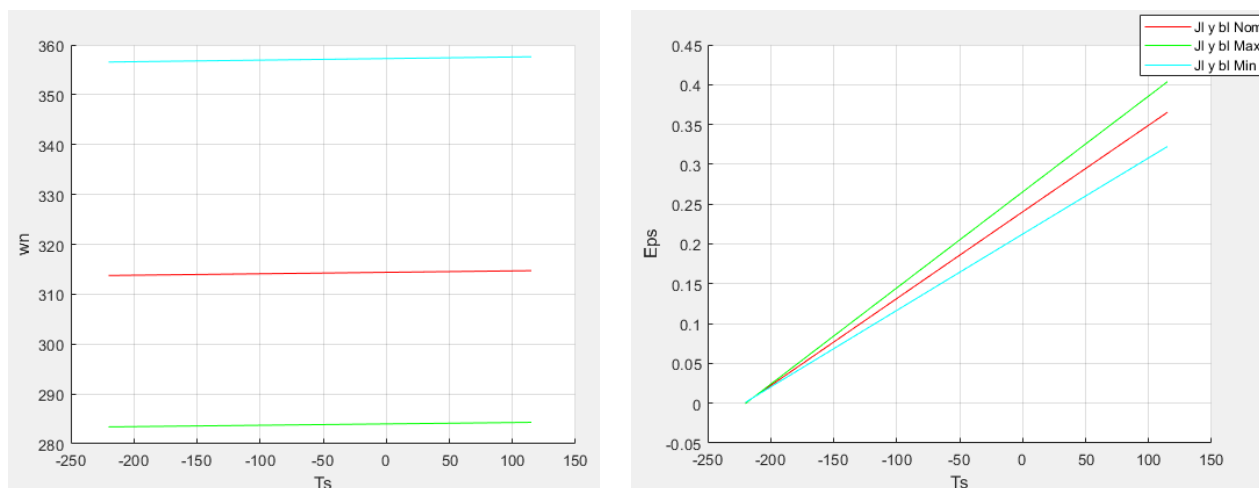


Figura 25: Variación de frecuencias naturales (izquierda) y relaciones de amortiguamiento (derecha) para el barrido de  $R_s$

Por definición de estabilidad, un sistema LTI es estable si para toda excitación acotada  $u(t)$  en  $t > t_0$ , todas las variables de estado  $x_i(t)$  toman valores también acotados. Además, tras la desaparición de la excitación  $u(t) = 0$ , el espacio de estados tiende a regresar a su estado original  $x_0$ .

Se verifica que el sistema es estable si y sólo si todos los polos del sistema poseen parte real negativa (los polos son iguales a los auto valores de su matriz A de sistema). Puede verificarse que esta condición se cumple, por lo tanto, podemos decir que nuestro sistema es estable.

### 3.4 Análisis de Observabilidad completa de estado de modelo LTI equivalente aumentado

Procedemos a realizar un análisis de la Observabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde la salida medida " $\theta_m(t)$ ".

Un sistema LTI se considera observable si desde cualquier estado inicial " $x_0$ ", puede determinarse el valor del estado " $x$ " mediante la observación de la salida " $y(t)$ " del sistema durante un período de tiempo finito.

El criterio de observabilidad en el espacio de estado consiste en verificar que la matriz de observabilidad, de orden n, tenga también rango n. Esto es, afirmar que los vectores que componen la matriz mencionada, sean linealmente independientes.

Para un sistema genérico el criterio sería el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) = C \cdot X(t) \end{cases}$$

El sistema LTI de orden " $n$ " será observable si el rango de la matriz de observabilidad " $O$ " es también " $n$ ".

$$\text{Rango de } O = \text{Rango de } \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} = n$$



Para nuestro caso particular se trata de un sistema de orden tres “n=3”, donde las matrices A y C son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{\lambda_m^{lr} \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0]$$

La matriz de observabilidad será:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} \quad O = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.56})$$

Se observa que la matriz de observabilidad “O” es de orden tres por lo que podemos afirmar que el sistema LTI equivalente simplificado es observable desde la salida “ $\theta_m(t)$ ”.

Sin embargo, se debe aclarar que el sistema LTI aumentado con sistemas autónomos desacoplados, no permite observar los estados  $i_{ds}^r(t)$  y  $T_s^\circ(t)$  desde la salida “ $\theta_m(t)$ ”. Por lo que decimos que el sistema LTI aumentado es parcialmente observable desde la posición como salida.

Ahora vamos a medir la velocidad  $\omega_m(t)$  con un tacogenerador, en lugar de medir la posición con encoder y reevaluar la observabilidad del sistema.

Como vamos a medir a la salida la velocidad  $\omega_m(t)$ , ahora la matriz “C” tendrá la forma:

$$C = [0 \ 1 \ 0]$$

La matriz de observabilidad ahora será:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & \frac{b_{eq}^2}{J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{lr2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}^2} - \frac{3 \cdot R_s \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.57})$$

En la que no se cumplen los criterios de observabilidad (ya que tenemos una columna completa de ceros, el rango de la matriz no es tres, sino que es dos), denotando así que el uso de taco generador no satisface los criterios de observabilidad.

Esto se debe a que conociendo la velocidad del sistema no podemos obtener la posición del mismo sin conocer la condición inicial de posición. Por otro lado, conociendo la posición, si derivamos podemos obtener la velocidad. En conclusión, el sistema sí es observable si solo medimos la posición “ $\theta_m(t)$ ”, pero no es observable si solo medimos la velocidad  $\omega_m(t)$ .

### 3.5 Análisis de Controlabilidad completa de estado modelo LTI equivalente aumentado

Realizamos el análisis de Controlabilidad completa de estado para el modelo LTI equivalente aumentado desde entrada manipulada “ $v_{qs}^r(t)$ ”, sin considerar la perturbación de la carga mecánica.

Un sistema LTI es controlable si se puede transferir desde cualquier estado inicial  $x_0$  a cualquier otro estado  $x$ , mediante un vector de control  $u(t)$  no restringido, en un intervalo de tiempo finito.

El criterio de controlabilidad completa de estado consiste en verificar que la matriz de controlabilidad, de orden n, tenga también orden n. Esto es, afirmar que los vectores que componen la matriz mencionada, sean linealmente independientes.

Para un sistema genérico el criterio sería el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot U(t) \\ Y(t) = C \cdot X(t) \end{cases}$$

El sistema LTI de orden “n” será controlable si el rango de la matriz de controlabilidad “C” es también de orden “n”

$$\text{Rango de } \mathbb{C} = \text{Rango de } [B \ A \cdot B \ \dots \ A^{n-1} \cdot B] = n$$

Para nuestro caso particular se trata de un sistema de orden tres “n=3”, donde las matrices A y B son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b_{eq}}{J_{eq}} & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}} \\ 0 & -\frac{\lambda_m^{lr} \cdot P_p}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_q} \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad será:

$$\mathbb{C} = [B \quad A \cdot B \quad A^2 \cdot B] \quad (\text{Ec.63})$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} \\ 0 & \frac{3 \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q} & -\frac{3 \cdot b_{eq} \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq}^2 \cdot L_q} - \frac{3 \cdot R_s \cdot P_p \cdot \lambda_m^{lr}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} \\ \frac{1}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q^2} & \frac{R_s^2}{L_q^3} - \frac{3 \cdot P_p^2 \cdot \lambda_m^{lr^2}}{2 \cdot J_{eq} \cdot L_q^2} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.59})$$

Se observa que la matriz de controlabilidad “C” es de orden tres por lo que podemos afirmar que el sistema LTI equivalente simplificado es controlable desde la entrada “ $v_{qs}^r(t)$ ”.

Sin embargo, desde la entrada “ $v_{qs}^r(t)$ ” no se puede realizar el control de la salida de los estados  $i_{ds}^r(t)$  y  $T_s^\circ(t)$  correspondientes al sistema LTI equivalente aumentado, por lo que para realizar su control se hace necesario implementar entradas de control adicionales.

### 3.6 Respuesta dinámica en el dominio temporal

Simulación dinámica en el dominio del tiempo, comparando el modelo NL completo desacoplado con Ley de control NL vs LTI equivalente aumentado.

Obtenemos la respuesta del estado interno (posición, velocidad, corrientes y temperatura del estator) con  $v_{ds}^r(t)$  forzada. En la entrada generamos un pulso de tensión de estator en eje q, superpuesto con un doble pulso de torque de carga y con una temperatura ambiente de 40°C:

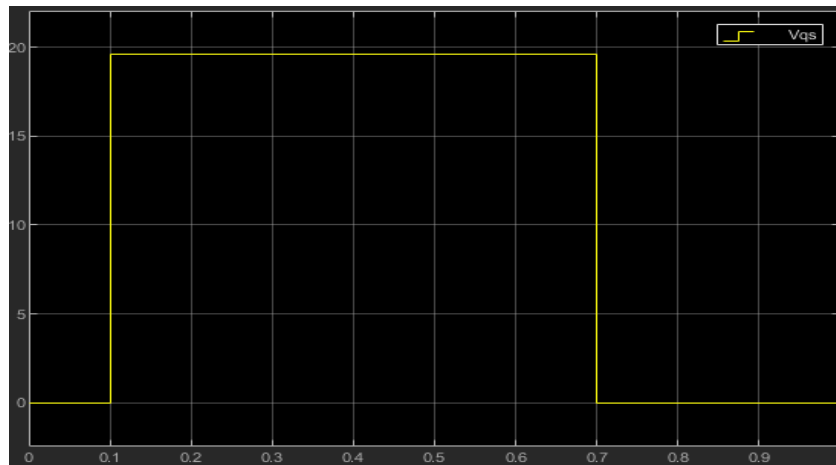


Figura 26: Pulso de tensión en estator en Vq

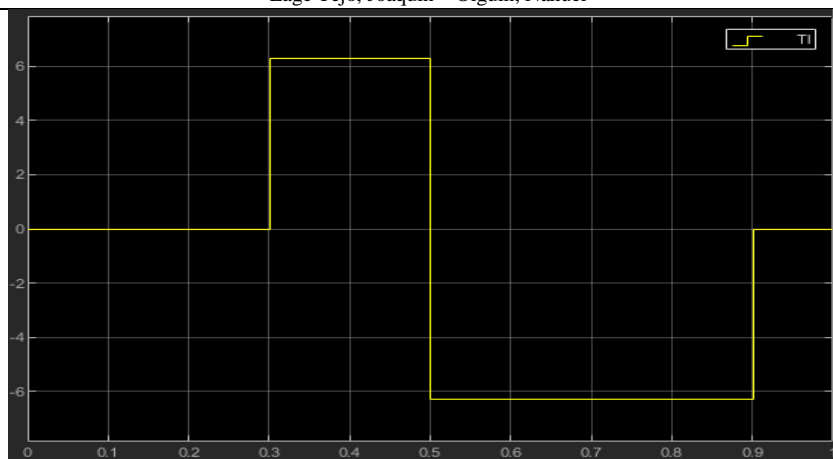


Figura 27: Doble perturbación de torque de carga  $T_l$

Primero observamos el comportamiento de la posición, velocidad y torque magnético:

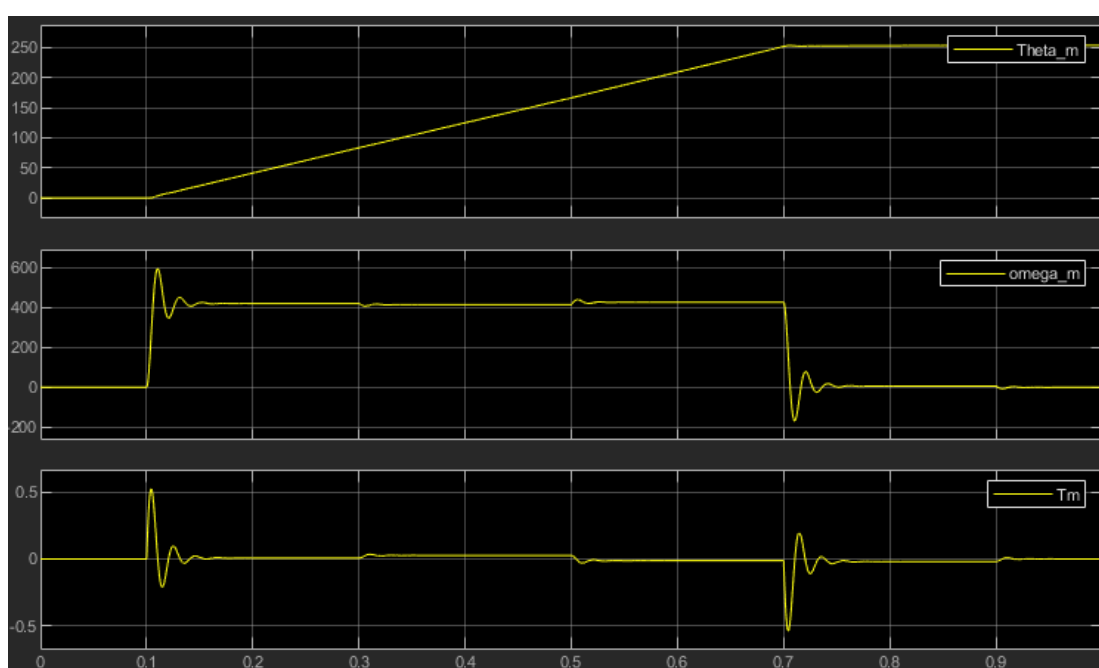


Figura 28: Posición (arriba), velocidad (medio), torque motor (abajo) para la simulación planteada

A los 0.1s se establece una tensión de 19.596V (Figura 26) y puede verse como la velocidad del rotor (Figura 28) oscila hasta alcanzar una velocidad de equilibrio correspondiente a dicho valor. Luego pueden verse 2 entradas de torque de carga (Figura 27) que perturban al sistema en 0.3s y 0.5s, las cuales modifican la velocidad de equilibrio del sistema (observar que cuando se aplica un torque de carga positivo la velocidad disminuye y el torque magnético aumenta). Posteriormente, se desenergizan las bobinas del estator, aplicando tensión de 0V, y se observa que el sistema se detiene una vez cesado el torque de carga.

Observamos la temperatura del estator, con temperatura inicial en el estator de 40°C:

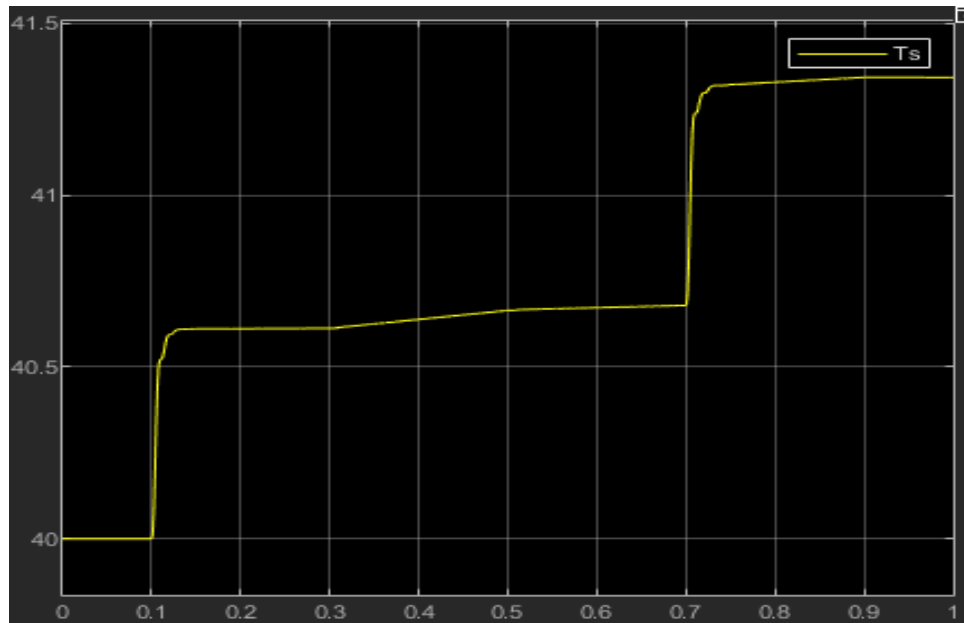


Figura 29: Temperatura en los bobinados del estator

Graficamos las tensiones y corrientes en ambas coordenadas “abc” y “dq0”:

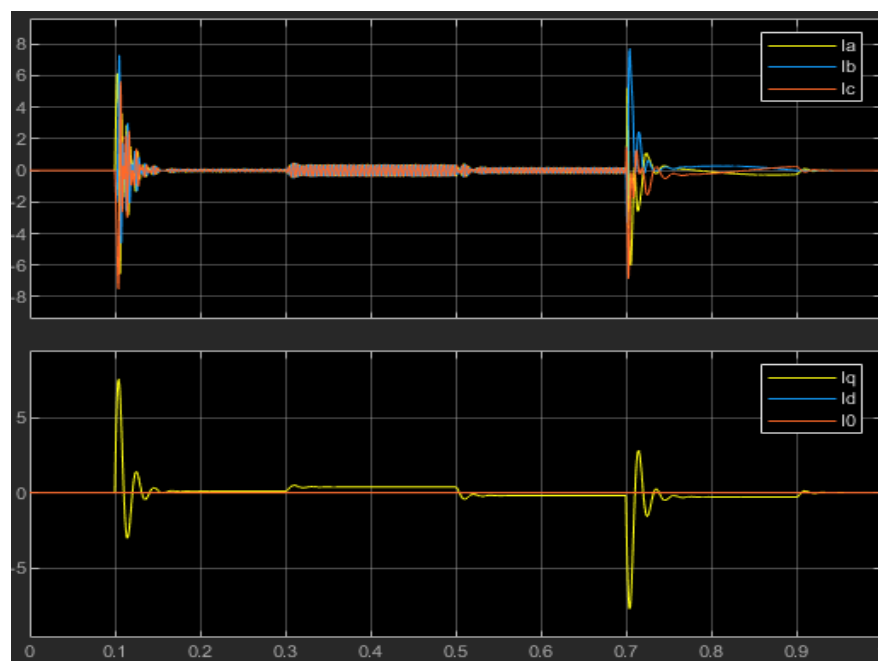


Figura 30: Gráficas de corrientes en coordenadas “abc” (arriba) y “dq0” (abajo)

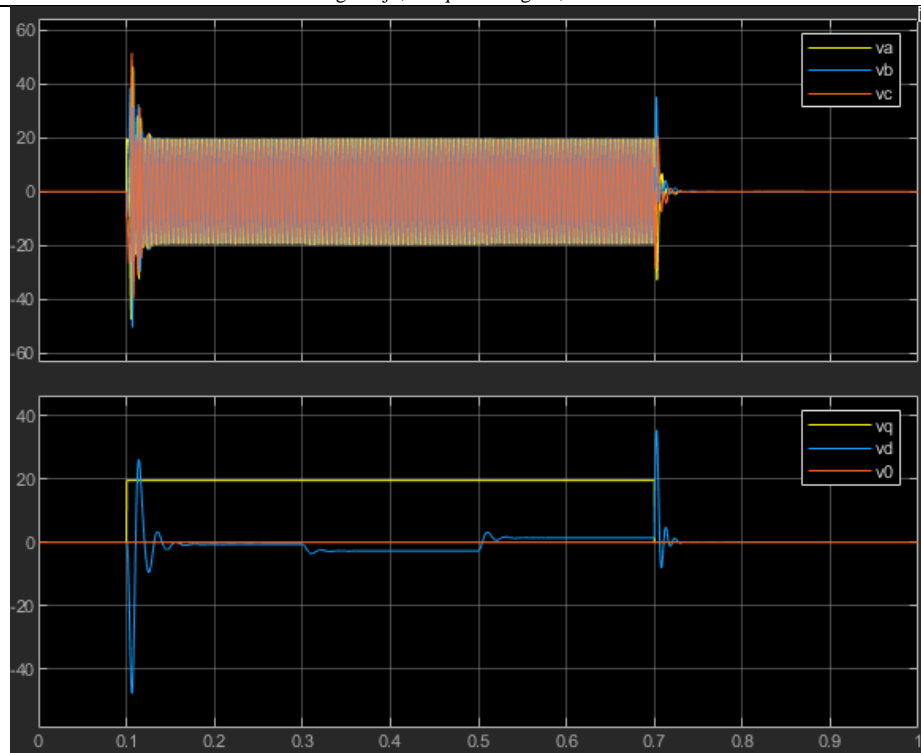


Figura 31: Gráficas de tensiones en coordenadas “abc” (arriba) y “dq0” (abajo)

La diferencia entre el sistema NL completo desacoplado con ley de control y el sistema LTI equivalente aumentado se debe a que el sistema LTI no considera las variaciones de  $R_s(t)$  con la temperatura, considerándola como una constante “ $R_s = R_{sREF} \approx 1.02 \Omega$  (@40 °C)”. Por lo tanto para el sistema NL, cuando la temperatura del estator se menor a  $T_s < 40^\circ\text{C}$  la resistencia “ $R_s < 1.02 \Omega$ ” será menor que la de referencia a 40°C, generando así una mayor corriente en el sistema (Figura 32) y sus efectos consecuentes (el efecto contrario se produce cuando  $T_s > 40^\circ\text{C}$ ).



Figura 32: Comparación de corrientes para modelos NL(amarillo) y LTI (verde)

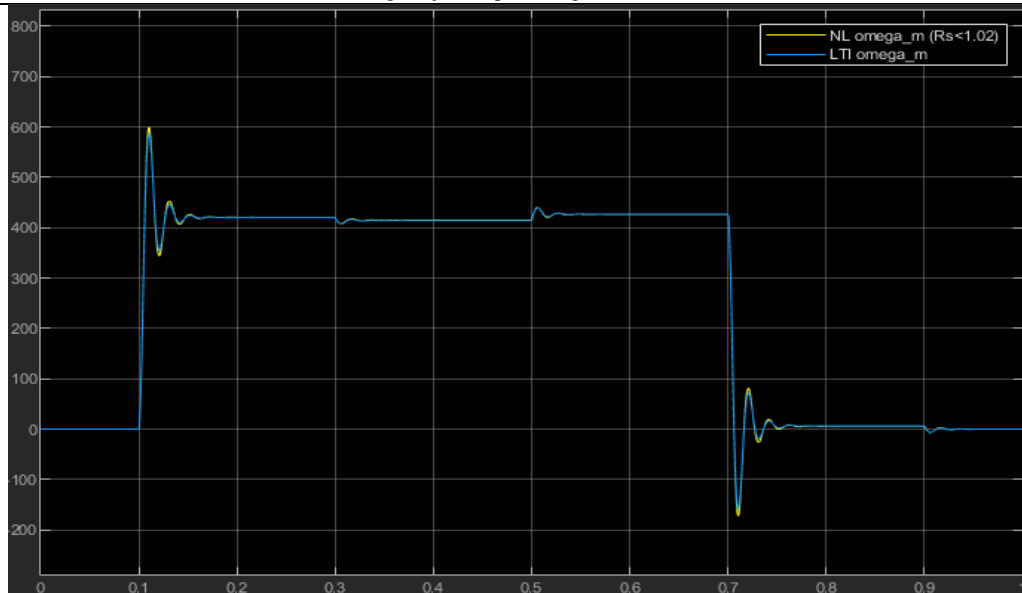


Figura 33: Comparación de velocidades para modelos NL(amarillo) y LTI (azul)

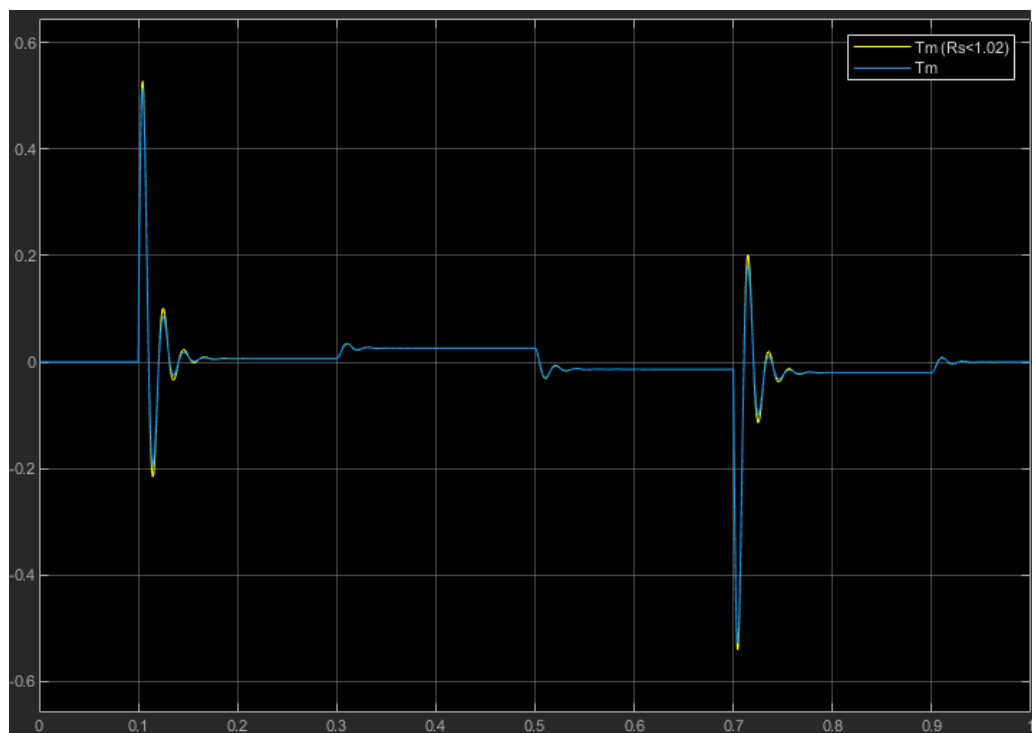


Figura 34: Comparación de torque motor para modelos NL (amarillo) y LTI (azul)

A partir de estas conclusiones los siguientes análisis se realizarán con temperaturas en el estator “Ts” cercanas a 40°C para que no se presenten diferencias considerables entre el sistema NL completamente desacoplado y el sistema LTI equivalente aumentado.

Observamos las curvas paramétricas torque vs velocidad (Figura 35) para cada instante de tiempo, evaluando los cuadrantes de operación. El eje “x” representa la velocidad  $\omega_m(t)$  y el eje “y” representa el torque magnético  $T_m(t)$ .

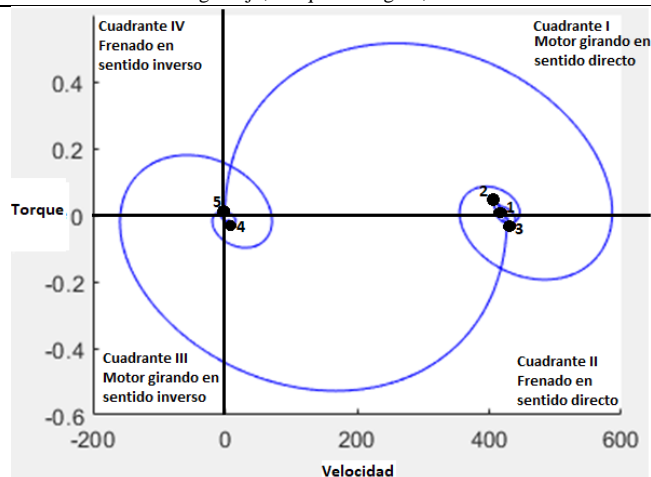


Figura 35: Curvas paramétricas de Torque vs Velocidad

Vemos que cuando se aplica la tensión se alcanza el (punto 1), cuando aplicamos el torque de carga positivo la velocidad disminuye y el torque aumenta (punto 2), cuando aplicamos el torque de carga negativo la velocidad aumenta y el torque disminuye (punto 3). Cuando se deja de aplicar la tensión y se mantiene el torque de carga negativo se mantiene una leve velocidad y un torque considerable (punto 4). Finalmente, el torque de carga se quita y el sistema queda estático, es decir sin velocidad ni torque magnético (punto 5).

#### Determinación de velocidad y corriente final de establecimiento

Vamos a determinar la velocidad y corriente final de establecimiento luego de cada transitorio, tiempos de crecimiento (10% al 90% de intervalo entre valores inicial y final), tiempo de establecimiento ( $\pm 1\%$ ) y sobre picos.

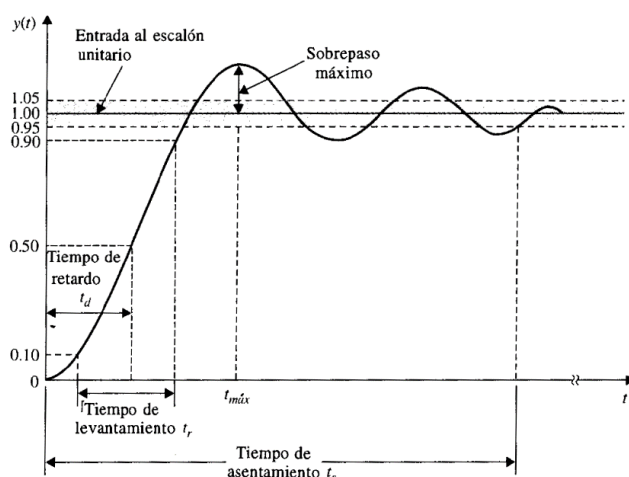


Figura 36: Respuesta típica de un sistema de control frente a una entrada escalón unitario

	$\omega_m(t)$				
Tiempo de aplicación de la perturbación	0,1s	0,3s	0,5s	0,7s	0,9s
Valor final de establecimiento (rad/s)	419.8	415.1	425.9	6.14	0
Tiempo de crecimiento (ms)	3.87	1.46	1.49	3.83	1.45
Tiempo de establecimiento (ms)	180.8	379	578	802	983
Sobrepico (rad/s)	160.4	6.24	12.97	162.60	6.05

Tabla 1: Estudio de las velocidades obtenidas en la simulación

	$i_{qs}^r(t)$				
Tiempo de aplicación de la perturbación	0,1s	0,3s	0,5s	0,7s	0,9s
Valor final de establecimiento (A)	0.087	0.374	-0,196	-0.285	0
Tiempo de crecimiento (ms)	0.052	4.55	4.76	0.058	4.32
Tiempo de establecimiento (ms)	180	380	578	805	971
Sobrepico (A)	7.32	0.115	0.222	0.475	0.106

Tabla 2: Estudio de las corrientes obtenidas en la simulación

En cuanto a las acciones externas, vemos que las variaciones de tensión presentan mayor influencia sobre la velocidad y las variaciones del torque de carga presentan mayor influencia sobre la corriente/torque motor en estado estacionario.

Por otro lado, ambas tienen un comportamiento transitorio similar frente a las consignas de tensión y torque de carga, esto se debe a que sus funciones de transferencia poseen los mismos polos.

#### Comportamiento del sistema para $i_{ds}^r(0) = \pm 0.5A$ vs $i_{ds}^r(0) = 0A$ :

A continuación, se observa el comportamiento transitorio de corrientes  $i_{ds}^r(t)$  para ambos modelos, “Global NL con ley de control NL” y “LTI equivalente aumentado”, frente a valores iniciales de corriente  $i_{ds}^r(0) = \pm 0.5A$  :

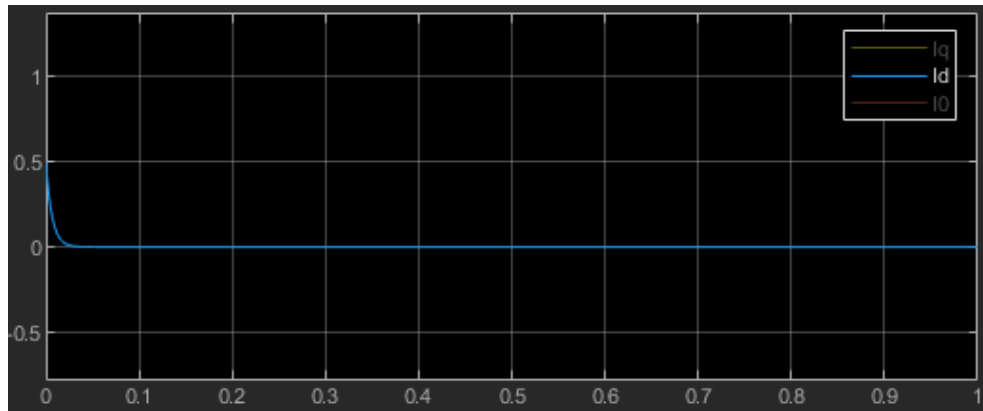


Figura 37: Corriente  $i_{ds}^r(t)$  para  $i_{ds}^r(0) = 0.5A$

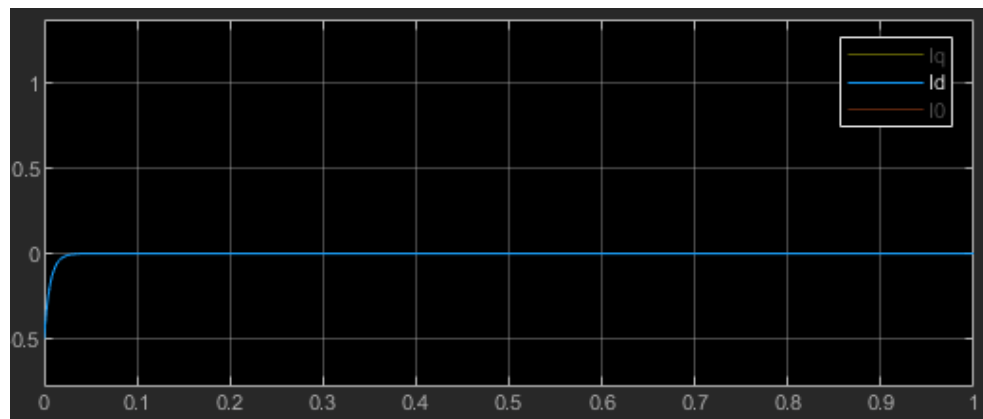


Figura 38: Corriente  $i_{ds}^r(t)$  para  $i_{ds}^r(0) = -0.5A$

No hay efectos apreciables en la evolución de los estados en la planta, ya que ambos transitorios presentan comportamientos casi idénticos para ambos modelos (NL completo desacoplado con Ley de Control NL vs LTI equivalente aumentado), lo cual confirma la efectividad del desacople realizado entre ejes de corriente qd0 con ley de control.



### Consigna de tensión en eje “d”

Vamos agregar luego una consigna de tensión en eje d,  $V_{qs\_nom}/10 = \pm 1.9596 V_{cc}$  en  $t=0$ , sumada a la restricción o ley de control NL.

Se observa que para una tensión  $V_d(t)=1,9695V$  se comprueba el efecto de debilitamiento de campo (Field weakening), mientras que para  $V_d(t)= -1,9695V$  comprueba el efecto de reforzamiento de campo (Field forcing) respecto al sistema estándar con  $V_d(t)=0$  para el cual obtenemos los siguientes resultados de las curvas de velocidad (Figura 39) y torque (Figura 40).

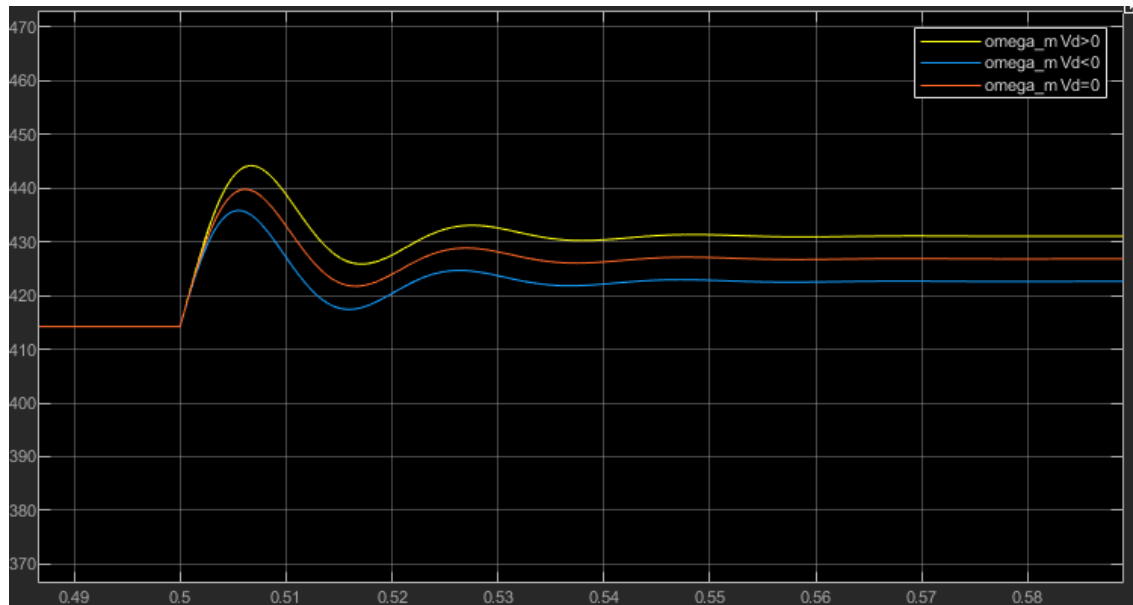


Figura 39: Velocidad angular para  $V_{ds}^r(t) = 1.9695 V$  ,  $V_{ds}^r(t) = -1.9695 V$  ,  $V_{ds}^r(t) = 0V$

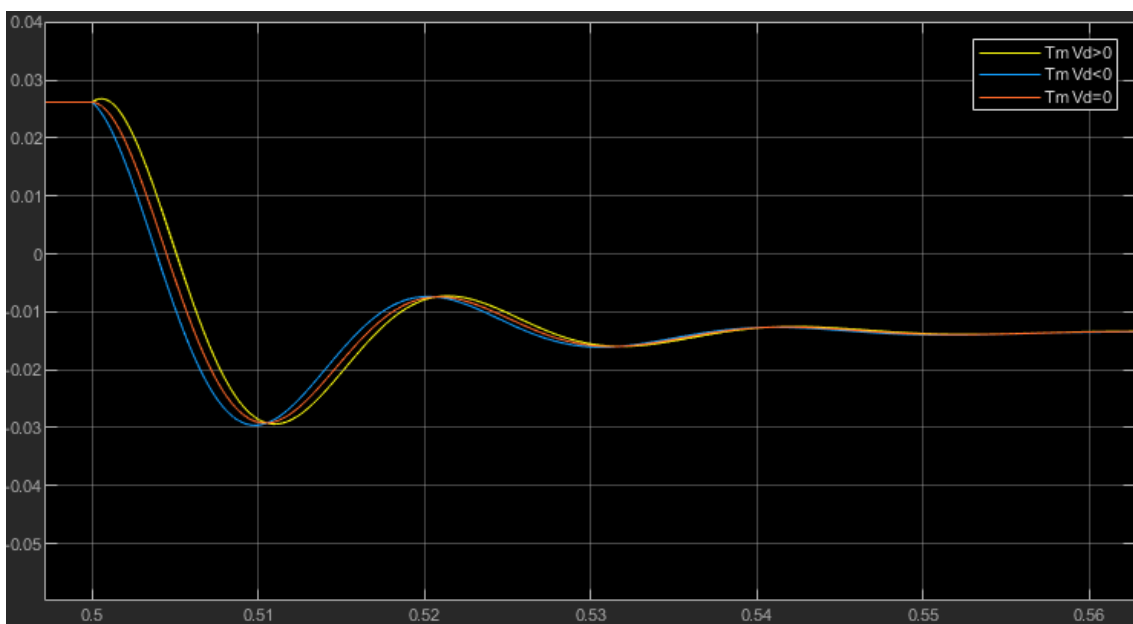


Figura 40: Torque motor para  $V_{ds}^r(t) = 1.9695 V$  ,  $V_{ds}^r(t) = -1.9695 V$  ,  $V_{ds}^r(t) = 0V$

Como se puede observar en las ecuaciones del subsistema eléctrico (Sección 3.2.D, pág. 21), un debilitamiento del campo magnético estático provoca un incremento en la velocidad angular del eje, mientras que un reforzamiento de campo provoca velocidades angulares inferiores en el eje. El efecto opuesto se produce sobre el torque motor.

## 4. Diseño, Análisis y Simulación con Controlador de Movimiento en Cascada con Modulador de Torque equivalente (Control Vectorial)

En esta parte del proyecto presentamos una estrategia de control a lazo cerrado denominada control en cascada. Consiste en implementar dos lazos de control, uno interno y otro externo. El primero es un lazo rápido de control de corriente y torque y el segundo es un lazo de movimiento. Se propone este tipo de controlador en contraposición al control por realimentación completa de estado.

El controlador posee varias partes: un modulador de torque, que transforma las consignas de torque en consignas de tensión; un modulador de tensión, que transforma las consignas (señales) de tensión en tensiones efectivas en los bornes de la máquina; un controlador de movimiento PID que recibe un perfil de posición o velocidad y genera las correspondientes consignas de torque; y un observador de estado de orden reducido. El modulador de torque se obtendría al compensar las realimentaciones naturales del modelo físico y plantear un lazo interno de corriente.

### 4.1 Modulador de Torque equivalente (Controlador interno vectorial de corriente/torque)

En esta sección se implementará un modulador de torque sobre el sistema, que permita controlar el sistema mediante el uso de consignas de torque como parámetro de entrada, que provenga del lazo externo de control y poder obtener a la salida tres señales de tensión.

#### 4.1.A Desacople de las realimentaciones de estado hacia la entrada

Para ello se incorporará en primer lugar un modulador de tensión que transforme la variable física de tensión  $v_{abc}(t)$  en el valor virtual  $v_{abc}^*(t)$  que se requiere y que servirá como consigna de tensión deseada. En este caso particular, se considerará que el modulador de tensión presenta ganancia unitaria, permitiendo considerar:

$$v_{abc}(t) \approx v_{abc}^*(t)$$

Podemos definir una consigna de tensión  $v_{qds}^{r*}(t)$  que nos permita realizar el desacople de las variables de estado, al realimentar el sistema. El objetivo es obtener la  $v_{qds}^{r*}(t)$  a la salida del proceso.

Se toma el modelo del subsistema electromagnético para ver las realimentaciones a desacoplar (Ec.16):

$$\begin{cases} \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_q} \cdot [-R_s(t) \cdot i_{qs}^r(t) - [\lambda_m^r + L_d \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{qs}^r(t)] \\ \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_d} [-R_s(t) \cdot i_{ds}^r(t) + L_q \cdot i_{qs}^r(t) \cdot P_p \cdot \omega_m(t) + v_{ds}^r(t)] \\ \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = \frac{1}{L_{ls}} [-R_s(t) \cdot i_{0s}^r(t) + v_{0s}^r(t)] \end{cases}$$

Vemos entonces las realimentaciones a incorporar al sistema:

$$\begin{cases} v_{qs}^r(t) = v_{qs}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{qs}^r(t) + P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^{r*}(t) + \lambda_m^r(t)] \\ v_{ds}^r(t) = v_{ds}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{ds}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_d \cdot i_{qs}^{r*}(t) \\ v_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) + R_s \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.60})$$

Realizando estas compensaciones, tenemos acceso directo a manipular el torque electromagnético, sin los efectos de las realimentaciones físicas, ni las caídas de tensión en los bobinados. La ecuación Ec.60 posee productos de variables de estado y por ello son no linealidades. Al sustraer estos términos de las ecuaciones dinámicas y agregarlos al control, estamos realizando una técnica llamada linealización por realimentación (feedback linearization). Esto se puede realizar siempre que el modelo del sistema físico sea suficientemente bueno, así como las salidas de los sensores; que el controlador pueda calcular los términos no lineales lo suficientemente rápido y que la acción resultante no cause la saturación del actuador (situación observada en apartado Modulador de Tensión Trifásica No Ideal, pág. 58).

Reemplazando los valores de tensión de entrada  $v_{qds}^{r*}(t)$  en la ecuación del subsistema electromagnético (Ec.16), podemos ver la proporcionalidad de la corriente respecto a la consigna de entrada  $v_{qds}^{r*}(t)$ :

$$\begin{cases} v_{qs}^{r*}(t) = L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \\ v_{ds}^{r*}(t) = L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \\ v_{0s}^{r*}(t) = L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \end{cases} \quad (\text{Ec.61})$$

Esto se puede ver en el siguiente modelo, dónde se consideran los efectos de la variación de la resistencia estatórica  $R_s$  por la influencia de la temperatura  $T_s^\circ(t)$ . Con ello, nuestro controlador se acerca más al comportamiento físico de la máquina en funcionamiento.

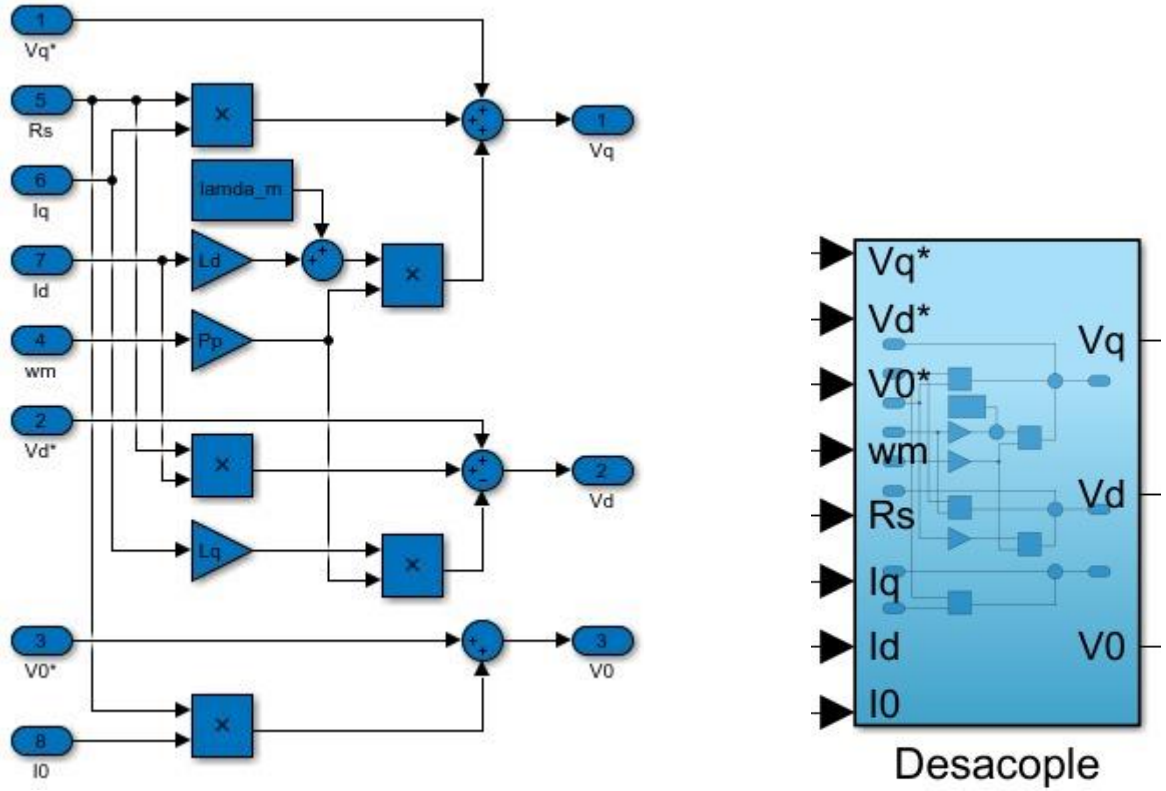


Figura 41: Diagrama de bloques de la Realimentación y desacople de variable ( $i_{zq}$ ) y su bloque compacto (der.)

#### 4.1.B Diseño de lazos de control de corrientes

Buscamos realizar el control de la variable  $v_{qdos}^{r*}(t)$ , para lo cual debemos realimentar el sistema con un lazo de corriente. Podemos observar la relación entre la tensión y la variación de corriente, de la misma ecuación empleada anteriormente (subsistema electromagnético, Ec.16):

$$\begin{cases} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} = v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^{r*}(t) + \lambda_m^r(t)] \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} = v_{ds}^r(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^{r*}(t) \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} = v_{0s}^r(t) - R_s \cdot i_{0s}^r(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.62})$$

De las ecuaciones obtenidas en la sección anterior y reemplazando en Ec.62, desacoplamos las variables para observar mejor la relación entre  $v_{qdos}^{r*}(t)$  y la variación de corriente:

$$\begin{cases} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^r(t) - R_s \cdot i_{qs}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot [L_d \cdot i_{ds}^{r*}(t) + \lambda_m^r(t)] = v_{qs}^{r*}(t) \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \approx v_{ds}^r(t) - R_s \cdot i_{ds}^r(t) - P_p \cdot \omega_m(t) \cdot L_q \cdot i_{qs}^{r*}(t) = v_{ds}^{r*}(t) \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \approx v_{0s}^r(t) - R_s \cdot i_{0s}^r(t) = v_{0s}^{r*}(t) \end{cases} \quad (\text{Ec.63})$$

Vemos que ahora la consigna de tensión es función de la corriente del sistema. Podemos controlarla usando una consigna de corriente proporcional. Entonces, se modela  $v_{qdos}^{r*}(t)$  como el error proporcional entre la consigna de corriente  $i_{qdos}^{r*}(t)$  y la corriente real del sistema. Con una ley de control proporcional, se obtiene el modelo:

$$\begin{cases} L_q \cdot \frac{di_{qs}^r(t)}{dt} \approx v_{qs}^{r*}(t) = (i_{qs}^{r*}(t) - i_{qs}^r(t)) \cdot R'_q \\ L_d \cdot \frac{di_{ds}^r(t)}{dt} \approx v_{ds}^{r*}(t) = (i_{ds}^{r*}(t) - i_{ds}^r(t)) \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot \frac{di_{0s}^r(t)}{dt} \approx v_{0s}^{r*}(t) = (i_{0s}^{r*}(t) - i_{0s}^r(t)) \cdot R'_0 \end{cases} \quad (\text{Ec.64})$$

Se necesita obtener el valor de  $R_{qdo}$  óptimo, para lo cual se analiza la función de transferencia del modulador:

$$\begin{cases} L_q \cdot s \cdot I_{qs}^r(s) \approx (I_{qs}^{r*}(s) - I_{qs}^r(s)) \cdot R'_q \\ L_d \cdot s \cdot I_{ds}^r(s) \approx (I_{ds}^{r*}(s) - I_{ds}^r(s)) \cdot R'_d \\ L_{ls} \cdot s \cdot I_{0s}^r(s) \approx (I_{0s}^{r*}(s) - I_{0s}^r(s)) \cdot R'_0 \end{cases} \quad (\text{Ec.65})$$

$$\begin{cases} G_{iqs}(s) = \frac{I_{qs}^r(s)}{I_{qs}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_q}{R'_q} \cdot s + 1} \\ G_{ids}(s) = \frac{I_{ds}^r(s)}{I_{ds}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_d}{R'_d} \cdot s + 1} \\ G_{i0s}(s) = \frac{I_{0s}^r(s)}{I_{0s}^{r*}(s)} = \frac{1}{\frac{L_{ls}}{R'_0} \cdot s + 1} \end{cases} \quad (\text{Ec.66})$$

Se puede ver que la función de transferencia contiene un solo polo y ningún cero. De ello se ve que el modulador no produce inestabilidades en el sistema. Además, es la forma típica de un filtro pasa bajos:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

Con  $\tau$  como la inversa de la frecuencia de corte del filtro. Se ve que  $\tau = \frac{L}{R'} = -\frac{1}{p}$ , por lo tanto este lazo de control debe tener un ancho de banda suficientemente amplio (comparado con el control externo) para tener un buen desempeño.

Para determinar la respuesta a lazo cerrado, elegiremos las ganancias del regulador de corriente R. Podría pensarse inicialmente que el mejor desempeño se obtiene con polos lo más negativos posibles. No obstante, mirando del modelo obtenido al aplicar la ley de control proporcional (Ec.64), se observa que un ancho de banda demasiado grande exige esfuerzos de control también muy grandes.

Se decide ubicar los polos en  $p = -5000 \text{ rad/s}$ , por lo que las ganancias serán  $R = -p \cdot L$ :

$$R'_q = 5000 \cdot L_q = 29 \Omega$$

$$R'_d = 5000 \cdot L_d = 33 \Omega$$

$$R'_0 = 5000 \cdot L_{ls} = 4 \Omega$$

$$BW = |p| = 2\pi \cdot f_c \rightarrow f_c = 796 \text{ Hz}$$

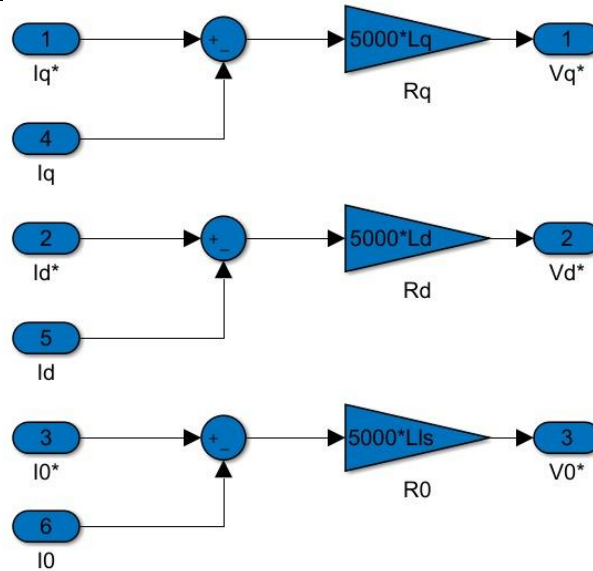


Figura 42: Diagrama de bloques del modulador de corriente

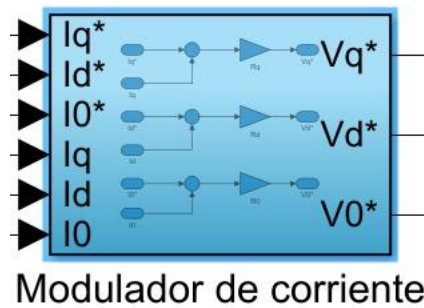


Figura 43: Bloque compacto del modulador de corriente

Incorporando el modulador de corriente corremos el polo anterior hacia la izquierda, alejándolo aún más del origen, logrando así una mayor velocidad de respuesta. Esto se debe a que, al incluir los lazos de control proporcional de la corriente  $i_{qds}^r(t)$ , la dinámica del error converge más rápidamente a la consigna de entrada.

#### 4.1.C Incorporación de consigna de torque

Al igual que en la sección anterior, se realiza una realimentación del sistema para controlarlo mediante consignas de torque  $T_m^*(t)$ . Esa consigna sigue el modelo:

$$T_m^*(t) = T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t) \quad (\text{Ec.67})$$

Con ello, es posible desacoplar el término  $\omega_m(t) \cdot b_{eq}$ . Además, es necesario el modelado de la consigna  $T_m^{*'}(t)$ , observando la relación entre el torque y la corriente, en la ecuación del par electromagnético (Ec.20), y se plantea el siguiente modelo para el modulador de torque:

$$T_m^*(t) \approx \frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)] \cdot i_{qs}^r(t) \quad (\text{Ec.68})$$

Despejando la misma se obtiene:

$$i_{qs}^r(t) = \frac{T_m^{*'}(t) + b_{eq} \cdot \omega_m(t)}{\frac{3}{2} \cdot P_p [\lambda_m^r + (L_d - L_q) \cdot i_{ds}^r(t)]} \quad (\text{Ec.69})$$

Llegamos entonces al modulador de torque a implementar:

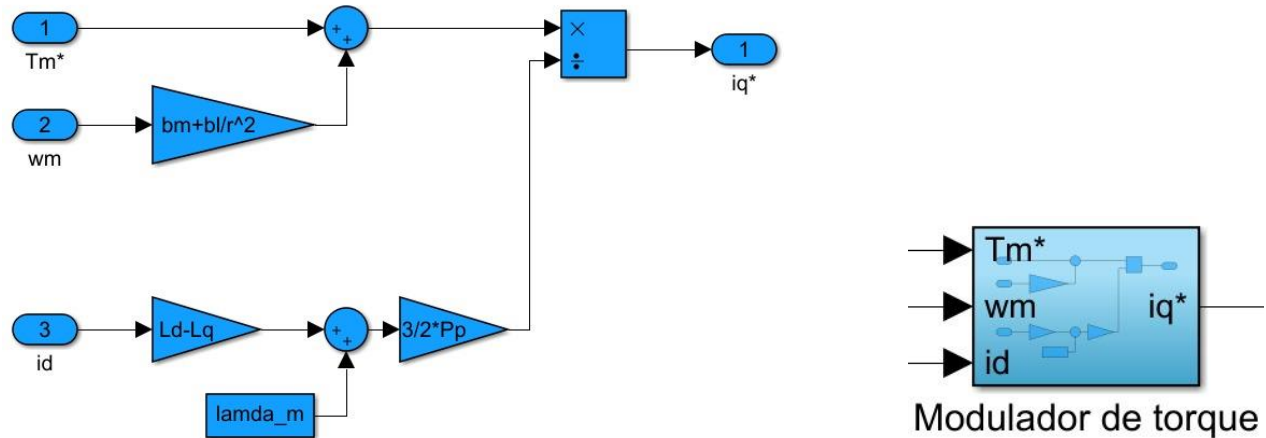


Figura 44: Bloque compacto del modulador de torque

Figura 45: Diagrama de bloques del modulador de torque

De la ecuación obtenida, vemos que considerar la estrategia  $i_{ds}^*(t) = 0$ , genera el desacople entre los ejes virtuales  $q_{d0}$  y anula el efecto de reforzamiento y debilitamiento de campo. Por ello, el torque electromagnético depende únicamente del flujo magnético generado por los imanes permanentes de la máquina.

Por otro lado, introducir corrientes  $i_{ds}^*(t) \neq 0$  genera los siguientes efectos a partir de la Figura 39:

- Con  $i_{ds}^*(t) > 0A$  se produce reforzamiento de campo: se visualiza un leve incremento en el torque electromagnético erogado por el motor.
- Con  $i_{ds}^*(t) < 0A$  se produce debilitamiento de campo: se visualiza un leve decremento en el torque electromagnético erogado por el motor.

## 4.2 Controlador externo de movimientos (posición / velocidad):

Con el fin de mejorar la dinámica del sistema y corregir los errores de estado estacionario producidos por cargas perturbadoras, se implementa un controlador que reciba consignas de velocidad y posición, y defina el torque necesario para tal acción. Será diseñado utilizando el método de sintonía serie con acción integral para el PID, con  $n = 2,5$  y  $\omega = 800 \frac{rad}{s}$ , con valores nominales de inercia y amortiguamiento a temperatura ambiente.

Se optó por utilizar como variable de entrada, solo la velocidad angular del motor. Esto se realizó para evitar incluir acciones derivativas en el controlador, lo que podría resultar en errores numéricos debido a su acción como filtro pasa alto. Es decir, es más conveniente para evitar inestabilidades, integrar la consigna de velocidad que derivar la consigna de posición. De esta forma, el modelo emplea dos bloques integrales que actúan como filtros pasa bajos y eliminan el ruido proveniente del error de posición y velocidad, ya que por naturaleza son de alta frecuencia.

Se ve el modelo del controlador propuesto:

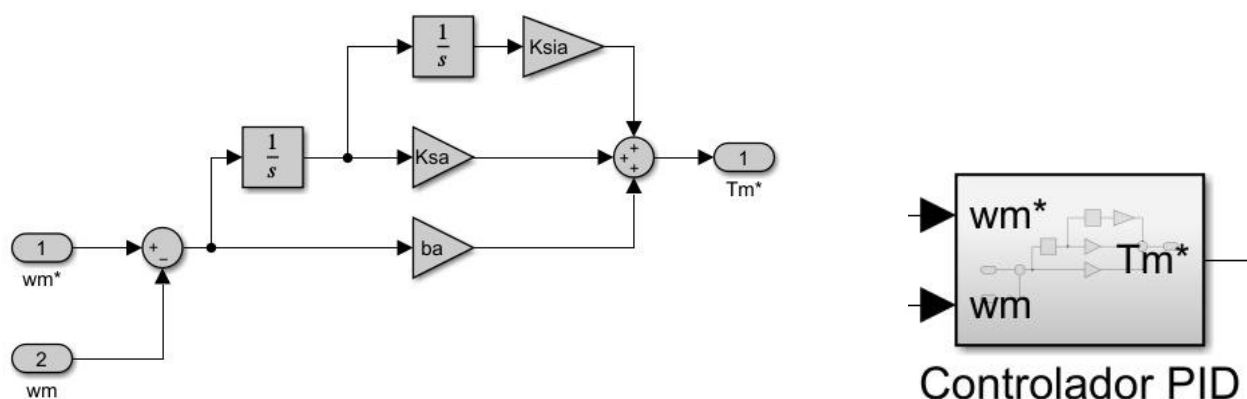


Figura 46: Diagrama de bloques del controlador PID (izquierda) y bloque compacto del mismo (derecha)

La salida del controlador será la consigna de torque que ingresará al modular de torque de la sección anterior, por lo tanto, modelando el sistema en el dominio de Laplace se tiene:

$$T_m^*(s) = e_\omega(s) \cdot b_a + e_\theta(s) \cdot K_{sa} + K_{sia} \frac{e_\theta(s)}{s} \quad (\text{Ec.70})$$

Donde las variables  $e_\theta(s)$  y  $e_\omega(s)$  representan los errores entre las consignas de posición y velocidad angular, y el valor medido, respectivamente:

$$\begin{aligned} e_\theta(s) &= \theta^*(s) - \theta(s) \\ e_\omega(s) &= e_\theta(s) \cdot s \end{aligned} \quad (\text{Ec.71})$$

Por otro lado, la relación entre el torque y la variación de velocidad del motor en el modelo del subsistema mecánico, teniendo en cuenta el desacople de  $-b_{eq} \cdot \omega_m(t)$  de la sección anterior, se ve que:

$$J_{eq} \cdot \dot{\omega}_m(t) = T_m^*(t) - \frac{T_l(t)}{r}$$

Aplicando la transformada de Laplace y reemplazando en la ecuación del controlador, se tiene:

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \theta(s) = T_m^*(s) - \frac{T_l(s)}{r} \quad (\text{Ec.72})$$

$$J_{eq} \cdot s^2 \cdot \theta(s) = s \cdot [\theta^*(s) - \theta(s)] \cdot b_a + [\theta^*(s) - \theta(s)] \cdot K_{sa} + K_{sia} \frac{[\theta^*(s) - \theta(s)]}{s} - \frac{T_l(s)}{r} \quad (\text{Ec.73})$$

Si despejamos de esta ecuación la posición medida, podemos observar dos funciones de transferencia del controlador, una entre consigna y salida, otra entre perturbación y salida:

$$\theta(s) = \frac{b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \cdot \theta^*(s) - \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} * \frac{T_l(s)}{r} \quad (\text{Ec.74})$$

$$G_{\theta^*}(s) = \frac{\theta(s)}{\theta^*(s)} = \frac{b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \quad (\text{Ec.75})$$

$$G_{T_l}(s) = \frac{\theta(s)}{\frac{T_l(s)}{r}} = - \frac{s}{J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia}} \quad (\text{Ec.76})$$

Si analizamos las funciones de transferencia en régimen estacionario para una entrada escalón unitario:

- Si  $K_{sia} \neq 0 \rightarrow G_{\theta^*}(s) = 1$  y  $G_{T_l}(s) = 0$  (rechazo total a perturbaciones)
- Si  $K_{sia} = 0 \rightarrow G_{\theta^*}(s) = 1$  y  $G_{T_l}(s) = -1/K_{sa}$  (sin rechazo a perturbaciones)

Con esto se observa cómo la acción integral es capaz de corregir el error en estado estacionario producto de las perturbaciones en el torque de carga.

Ahora se deben encontrar los valores óptimos de las ganancias del controlador, utilizando el método de sintonía serie con  $n=2.5$ . Se tiene:

$$\omega_{vel} = \frac{b_a}{J_{eq}} \quad \omega_{pos} = \frac{K_{sa}}{b_a} \quad \omega_{int} = \frac{K_{sia}}{K_{sa}}$$

Sabiendo que:

$$\omega_{vel} = n \cdot \omega_{pos} \quad \omega_{vel} = \frac{1}{n} \cdot \omega_{pos}$$

Tenemos finalmente, con  $\omega$  como frecuencia que se impone a los polos y representa el ancho de banda del controlador,  $\omega = 800 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ;  $n = 2.5$ ;  $J_{eq} = 5.65 \cdot 10^{-6} \text{ N.m}$ :

$$b_a = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos} = 0.0113 \frac{\text{N.m}}{\text{rad/s}}$$

$$K_{sa} = J_{eq} \cdot n \cdot \omega_{pos}^2 = 9.04 \frac{\text{N.m}}{\text{rad}}$$

$$K_{sia} = J_{eq} \cdot \omega_{pos}^3 = 2892.8 \frac{\text{N.m}}{\text{rad.s}}$$

Con estos datos podemos obtener el polinomio característico del controlador:

$$p(s) = J_{eq} \cdot s^3 + b_a \cdot s^2 + K_{sa} \cdot s + K_{sia} = J_{eq} \cdot (s + \omega_{pos}) \cdot (s^2 + (n-1) \cdot \omega_{pos} \cdot s + \omega_{pos}^2) \quad (Ec.77)$$

Comparando esto con la forma normalizada del polinomio de 3er grado factorizado en 2 términos (Ec.52):

$$(s + \omega_n) \cdot (s^2 + 2 \cdot s \cdot \xi \cdot \omega_n + \omega_n^2)$$

Sabiendo que la distancia radial al origen es la misma para los 3 polos, lo que representa un filtro de Butterworth de tercer orden; vemos que, para valores nominales de  $J_{eq}$ :

$$\xi = \frac{n-1}{2} = 0.75 \quad s_1 = -800 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -600 \pm 529.15 i \frac{rad}{s}$$

Para valores máximos de  $J_{eq}$ :

$$s_1 = -613.65 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -508.87 \pm 649.33 i \frac{rad}{s}$$

Para valores mínimos de  $J_{eq}$ :

$$s_1 = -1500 \frac{rad}{s} \quad s_{2,3} = -542.2 \pm 383.6 i \frac{rad}{s}$$

Se observan los polos del sistema con el controlador, con el regulador de corriente, y los polos de la planta original:

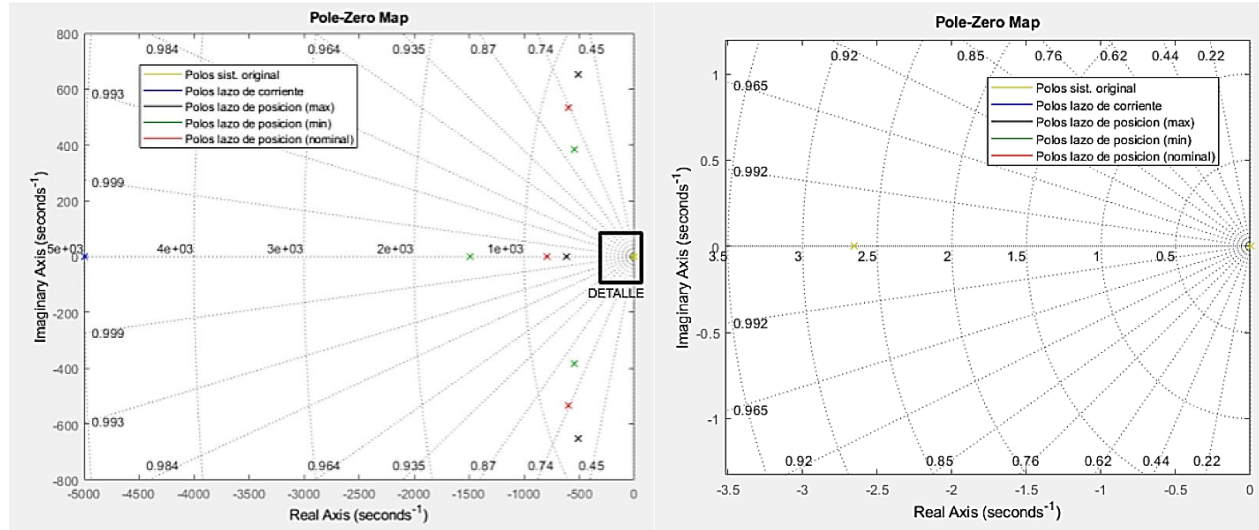


Figura 47: Diagrama de polos del sistema original, el lazo de corriente, y el control con valores nominales, máximos y mínimos (izquierda) y detalle de los polos originales del sistema (derecha)

Como se asumen los valores nominales para el cálculo de las ganancias del controlador, los valores de  $b_a$ ,  $K_{sa}$  y  $K_{sia}$  son los mismos para todos los grupos de polos. Se pueden apreciar la diferencia en los mismos al variar entre los valores máximos y mínimos de la inercia equivalente, pero siempre se encuentran del lado negativo del plano complejo, lo que mejora la estabilidad del sistema respecto a los polos originales del sistema, aún en condiciones de máxima inercia.

### Entrada de referencia o set-point

Finalmente, se añade la posibilidad de ingresar el control de posición mediante una entrada de referencia o set-point de posición de coordenadas articulares del brazo robótico. Esto es de interés ya que muchas veces es más fácil emplear los algoritmos de Cinemática Directa e Inversa para el control del brazo, a través del uso de sus coordenadas articulares. Esto se ve en el siguiente modelo:

$$q_1^*(t) \equiv \frac{1}{r} * \theta^*(t) \quad (Ec.78)$$



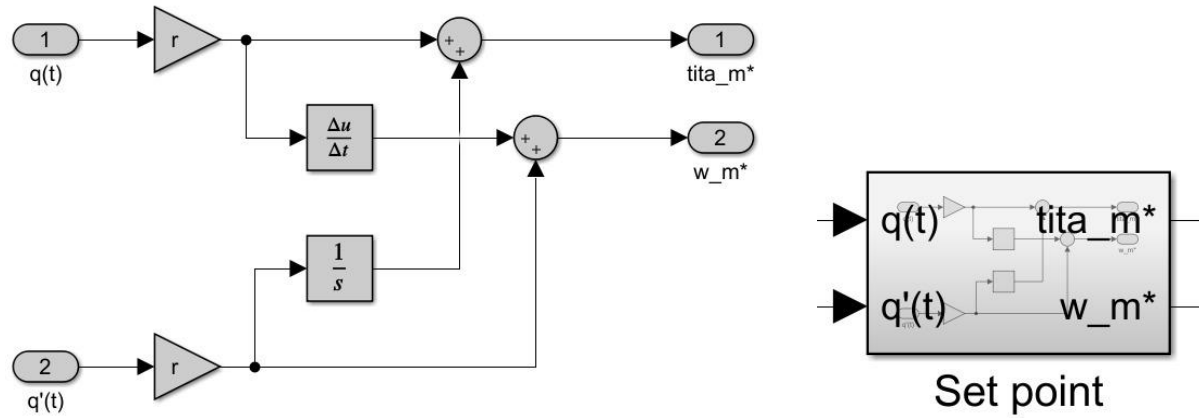


Figura 48: Diagrama de bloques del set-point (izquierda) y bloque compacto del mismo (derecha)

### 4.3 Observador de estado de orden reducido:

Un observador de estado es un sistema que estima el estado interno de un sistema a partir de las mediciones de la entrada y la salida. Realizaremos un observador de estado reducido para poder realimentar la velocidad angular del motor, ya que no se cuenta con un sensor de velocidad, sino únicamente con un encoder, el cual mide la posición del eje. Así mismo, el sistema no es observable desde la velocidad del motor, por lo que resulta necesario estimar su valor.

Se incorpora al observador únicamente el subsistema mecánico, ya que se cuenta con sensores de corriente, con su realimentación física de efectos viscosos desacoplada. Consideramos que el modulador de torque tiene un ancho de banda grande y ganancia unitaria. La entrada del observador sería la consigna de torque  $T_m^{**}$ , la cual se toma a la salida del controlador de movimiento PID.

El modelo del sistema es el siguiente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) \end{cases}; \quad x(t_0) = x_0$$

El observador de estado se modela como uno de Luenberger, que es un estimador de estado para sistemas dinámicos lineales. Plantea generar un “clon” del sistema original, al cual sí se le puede medir el estado interno; y se le agrega un término adicional de corrección. Con ello, el observador reproduce la entrada ya la salida del sistema y corrige la ecuación dinámica con un término proporcional al error entre la salida del sistema real y la salida estimada. Esto se ve a continuación en el modelo propuesto:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = A \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot (y(t) - \tilde{y}(t)) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases}; \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (\text{Ec.79})$$

Donde la matriz  $K_e$  es la matriz que contiene los parámetros de ajuste del observador, definida por la forma:

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{e\theta} \\ K_{e\omega} \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.80})$$

Asumiendo un funcionamiento ideal, las matrices de sistema ambos modelos coinciden, así como las de entrada y salida. Reemplazando y acomodando las ecuaciones, se puede representar el modelo del observador con la forma:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot C \cdot x(t) \\ \tilde{y}(t) = C \cdot \tilde{x}(t) \end{cases}; \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (\text{Ec.81})$$

Se deben obtener los parámetros de ajuste del observador, para lo cual buscamos el polinomio característico del sistema, sabiendo que la dinámica del sistema está dada por los auto valores a lazo cerrado de  $A' = [A - K_e \cdot C]$ :

$$A' = [A - K_e \cdot C] = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 \\ -K_{e\omega} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.82})$$

$$|s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 \\ K_{e\omega} & s \end{vmatrix} = s^2 + s \cdot K_{e\theta} + K_{e\omega} \quad (\text{Ec.83})$$

Planteamos un polinomio de segundo orden con polos reales e iguales en  $s_{1,2} = -3200 \text{ rad/s}$ , para que interfiera poco con el controlador de estado y asegurarnos un comportamiento rápido del observador. Se tiene entonces:

$$(s^2 + 3200)^2 = s^2 + s \cdot 6400 + 3200^2 \quad (\text{Ec.84})$$

Por comparación de términos semejantes, obtenemos:

$$\begin{cases} K_{e\theta} = 6.4 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ K_{e\omega} = 1.024 \cdot 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

A continuación, se ve el diagrama del observador resultante:

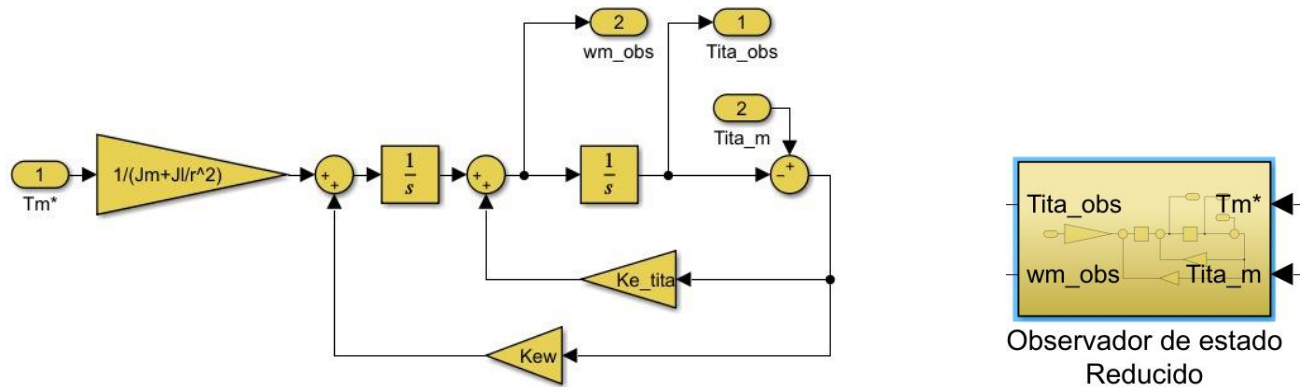


Figura 49: Diagrama de bloques del observador de orden reducido (izquierda) y bloque compacto del mismo (derecha)

Finalmente, queremos analizar el error cometido al introducir el observador de estado. Este viene dado por la ecuación:

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad ; \quad e(t_0) = x_0 \quad (\text{Ec.85})$$

La dinámica del error, comparando los vectores de estado de la planta y el observador, está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - [A - K_e \cdot C] \cdot \tilde{x}(t) + B \cdot u(t) + K_e \cdot C \cdot x(t) \\ \dot{e}(t) &= [A - K_e \cdot C] \cdot e(t) - B_d \cdot d(t) = [A - K_e \cdot C] \cdot [x(t) - \tilde{x}(t)] - B_d \cdot d(t) \end{aligned} \quad (\text{Ec.86})$$

#### 4.4 Simulación en tiempo continuo con modelo completo No Lineal

Para realizar una simulación del sistema en tiempo continuo, realizamos una integración de todos los bloques presentados anteriormente. El modelo de Simulink obtenido se observa en la siguiente imagen. Entre los bloques empleados podemos distinguir aquellos que son parte de la planta: el subsistema electromagnético, el subsistema mecánico y el subsistema térmico. También vemos los bloques que son parte del control: controlador de movimiento PID, modulador de torque y el observador de estado reducido. La interfaz entre la planta y el control está dada por los elementos sensores, representados con ganancias unitarias y por el elemento actuador, que en nuestro caso es el modulador de tensión, el cual toma las consignas de tensión y las convierte en tensiones en los bornes de la máquina. En este caso, dicho modulador es representado por ganancias unitarias.

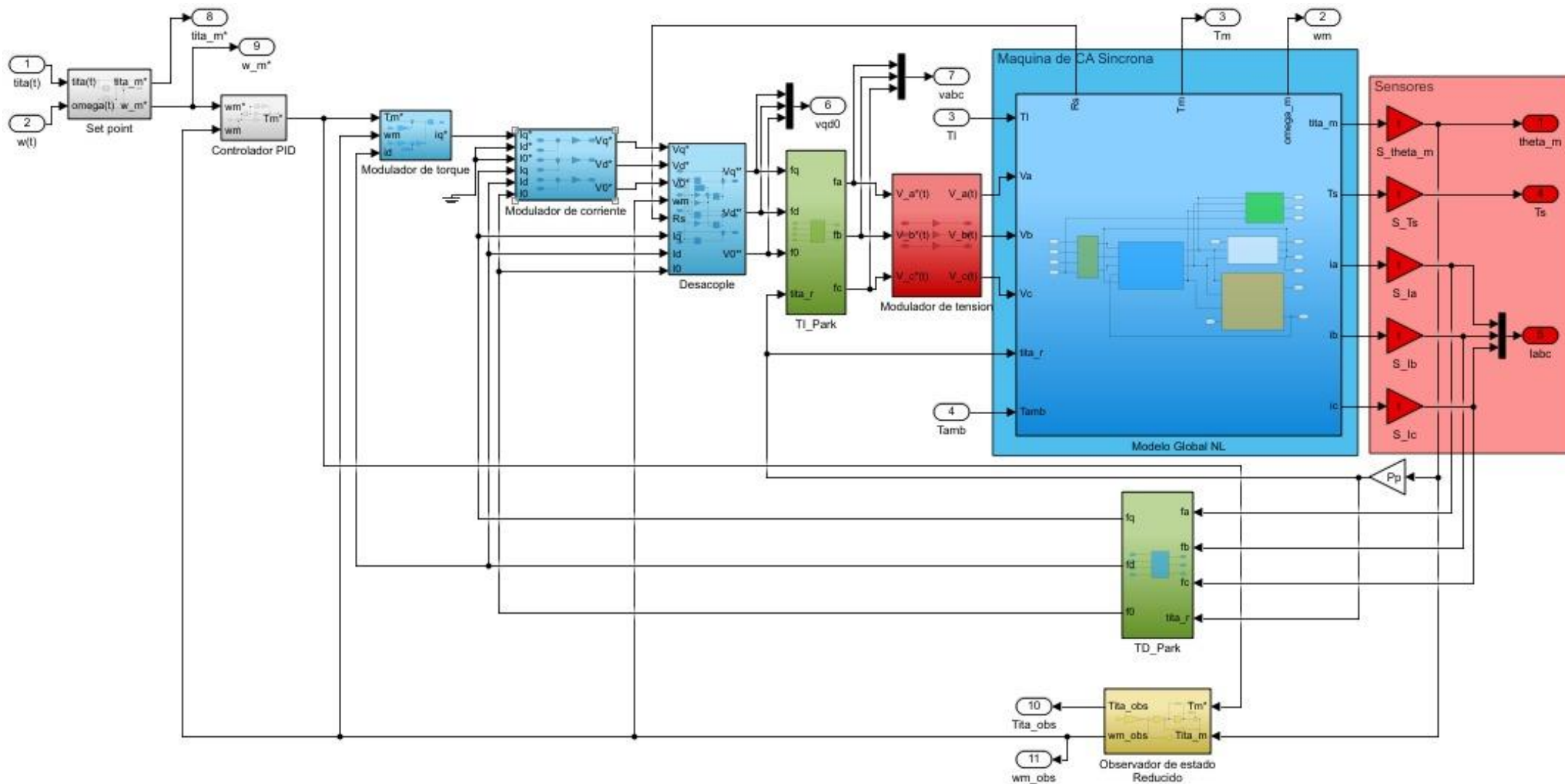


Figura 50: Diagrama de bloques del sistema completo

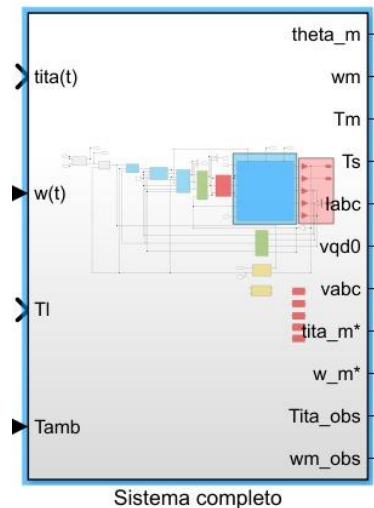


Figura 51: Bloque compacto del sistema completo

También se hacen observables bloques que realizan la transformación de Park, tanto directa como inversa, para pasar de coordenadas “abc” a “dq0” y viceversa, respectivamente.

#### 4.4.A Seguimiento de consignas de movimiento:

La entrada del sistema es un perfil de posición  $q^*(t)$  de la posición articular del hombro del robot. Estas consignas se transforman a consignas de posición del eje del motor  $\theta^*(t)$  mediante la relación de reducción  $r$ . Como se planteó anteriormente, la consigna que ingresa al controlador externo de movimiento es de velocidad y no de posición, ya que se producen errores en la derivación numérica de la consigna de posición.

Se plantea una revolución completa de la articulación, ida y vuelta, con rampas de 5 segundos. Es decir,  $q1(0) = 0[\text{rad}]$ ,  $q1(5) = 2 * \pi[\text{rad}]$ ,  $q1(10) = 2 * \pi[\text{rad}]$  y  $q1(15) = 0[\text{rad}]$ .

Esto se puede observar en la siguiente figura:

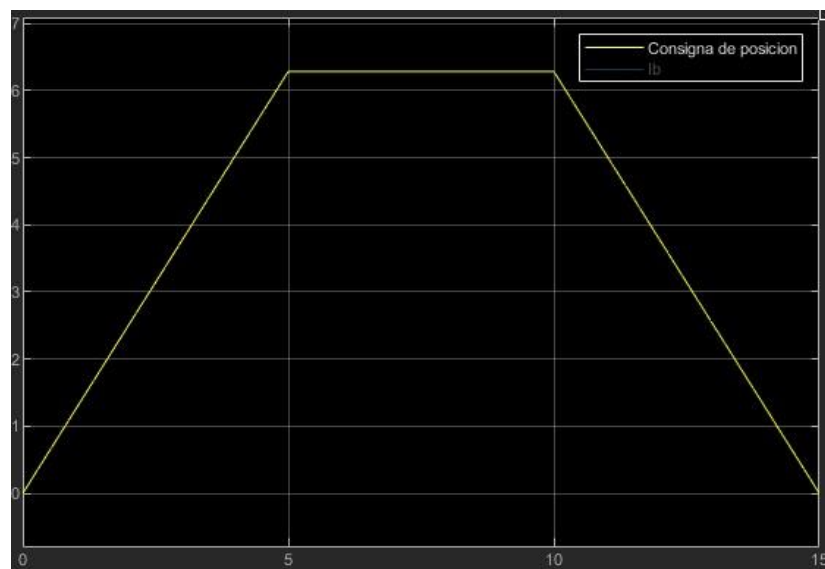


Figura 52: Consigna trapezoidal de posición

Se muestra la respuesta tanto medida como la estimada por el observador, y acercamientos en los transitorios.

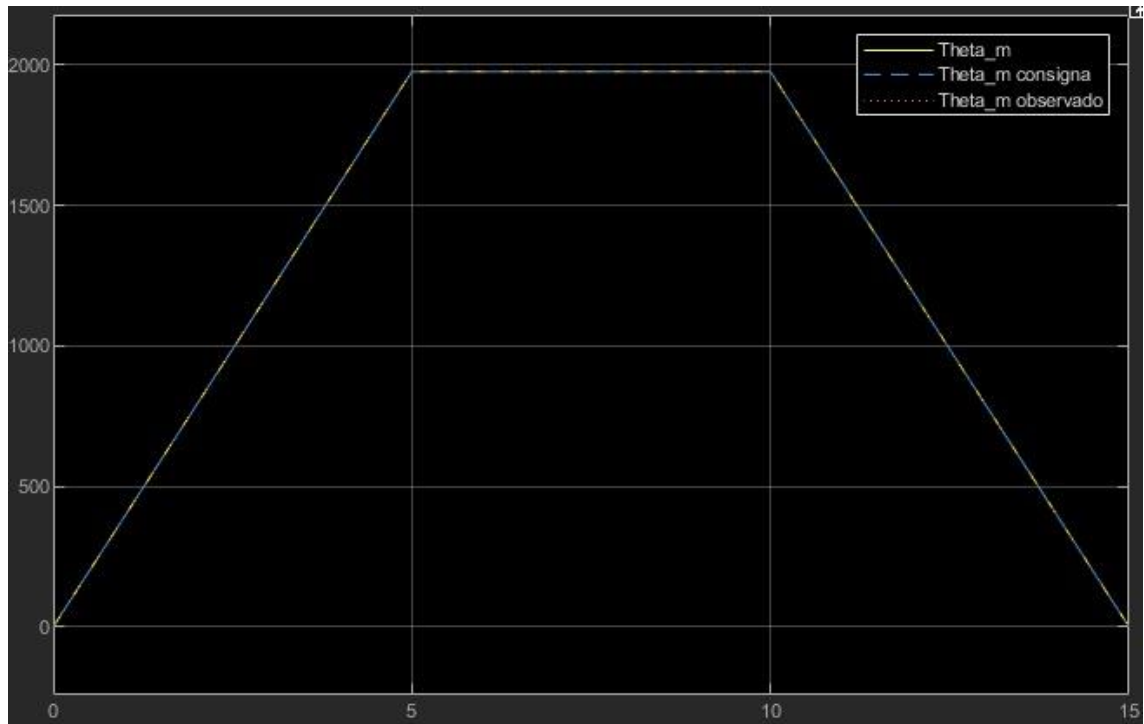


Figura 53: Posición angular medida, consigna, y observada

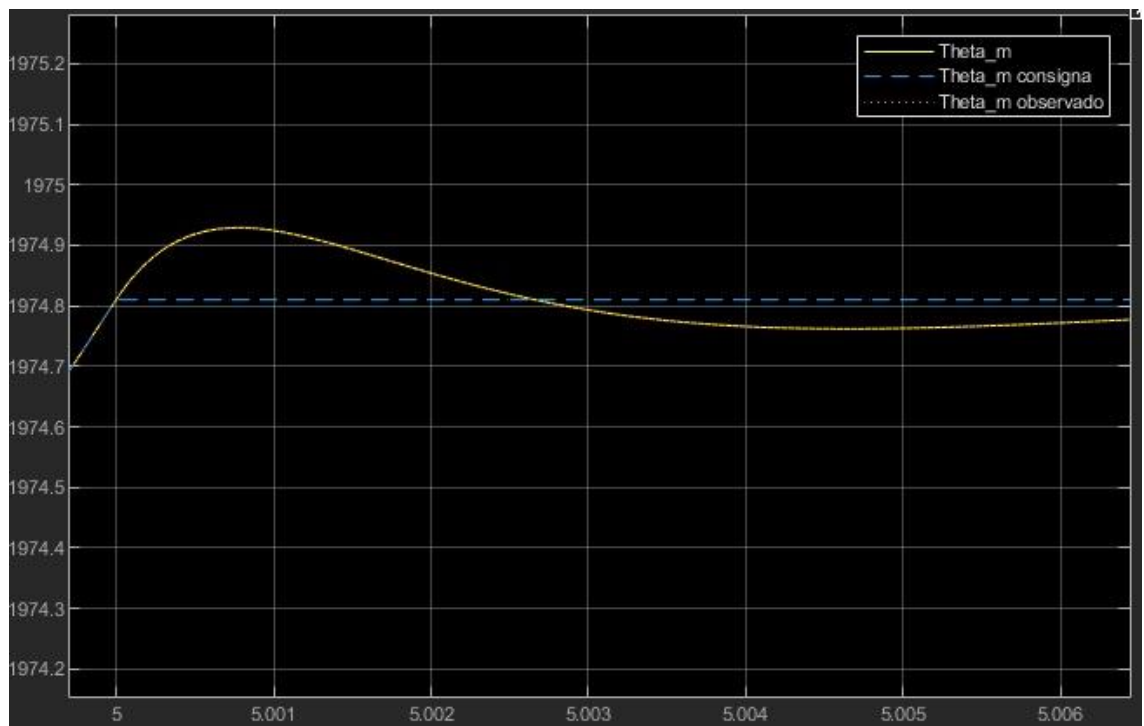


Figura 54: Detalle alrededor de 5s para la Figura 53

Se observa que la consigna de posición se cumple satisfactoriamente, más allá de los errores transitorios.

Por otro lado, el comportamiento en velocidad se puede observar en la siguiente imagen (Figura 55). El perfil trapezoidal de posición genera que en velocidad se exijan perfiles rectangulares, lo que implica una consigna de cambio inmediato de velocidad.



Figura 55: Velocidad medida, consigna y observada para la consigna de posición empleada

Ese cambio inmediato implica que se está dando una consigna de aceleración impulsiva. Las consecuencias de dar estas consignas tan estrictas se ven en las gráficas siguientes, de tensión (Figura 58), torque (Figura 56) y corrientes (Figura 57) necesarios para cumplir con la consigna.

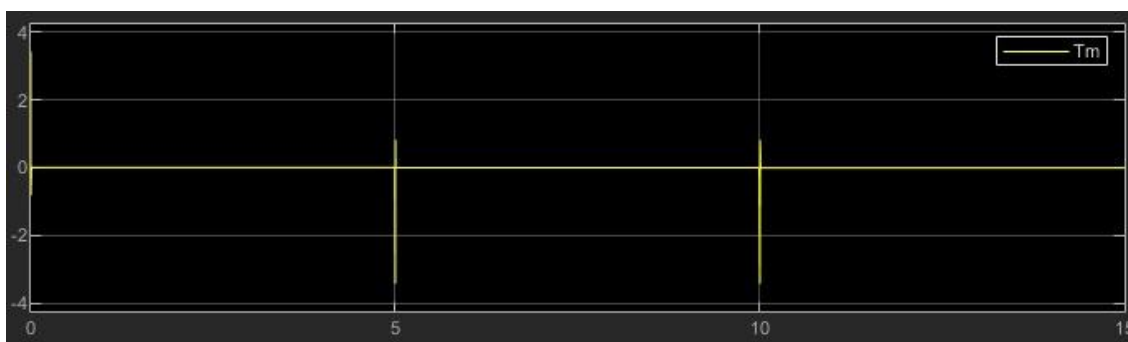


Figura 56: Torque motor necesario para cumplir con las velocidades consigna



Figura 57: Corrientes en coordenadas "abc" necesarias para cumplir con la consigna

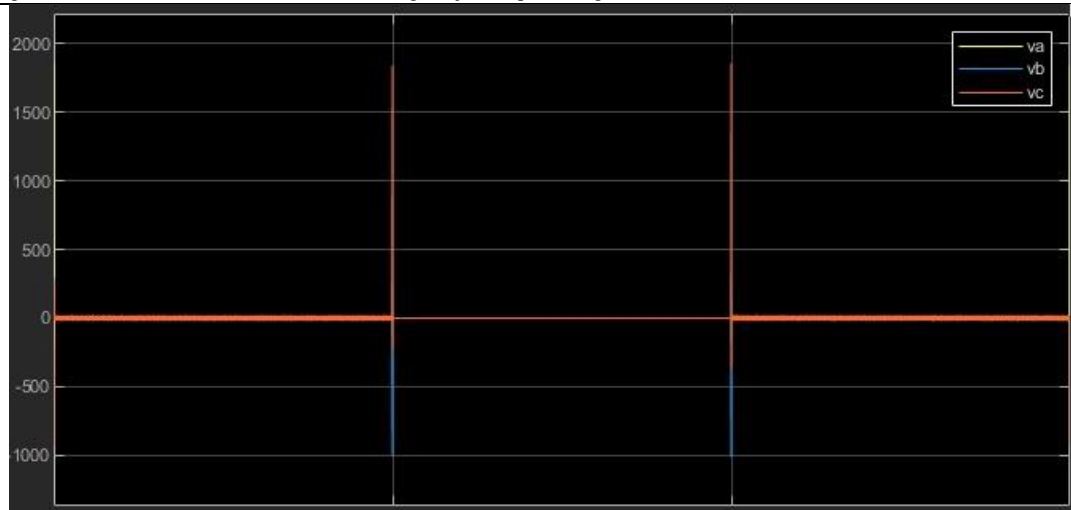


Figura 58: Tensiones en coordenadas “abc” necesarias para cumplir con la consigna

La consigna se planteó para un modulador de tensión ideal sin límites, por lo que los valores de tensiones y corrientes superan los máximos nominales. En la práctica (empleado en la última sección del presente trabajo), el modulador de tensión llegaría a la saturación y no podría entregar tensiones tan elevadas como las que se ven en la figura.

Se concluye que se están dando consignas demasiado exigentes y que el sistema no puede cumplir, ya que obliga a adoptar perfiles cuadrados de velocidad e impulsos de aceleración de gran magnitud, que solo se pueden lograr mediante la aplicación de altos valores de tensión, torque y corriente. Por ello, se debe realizar alguna mejora para evitarlo.

#### 4.4.B Rechazo a perturbaciones:

En este apartado, se evalúa el desempeño del sistema frente a perturbaciones de carga. Para ello se aplica una entrada escalón en  $t = 6.5$  s con magnitud de  $T_l = 6.28$  Nm, y consigna de posición  $q^*(t) = 0$ . Esto generó un error de estado estacionario en la posición angular del motor. Dicho efecto se ve en las siguientes imágenes:

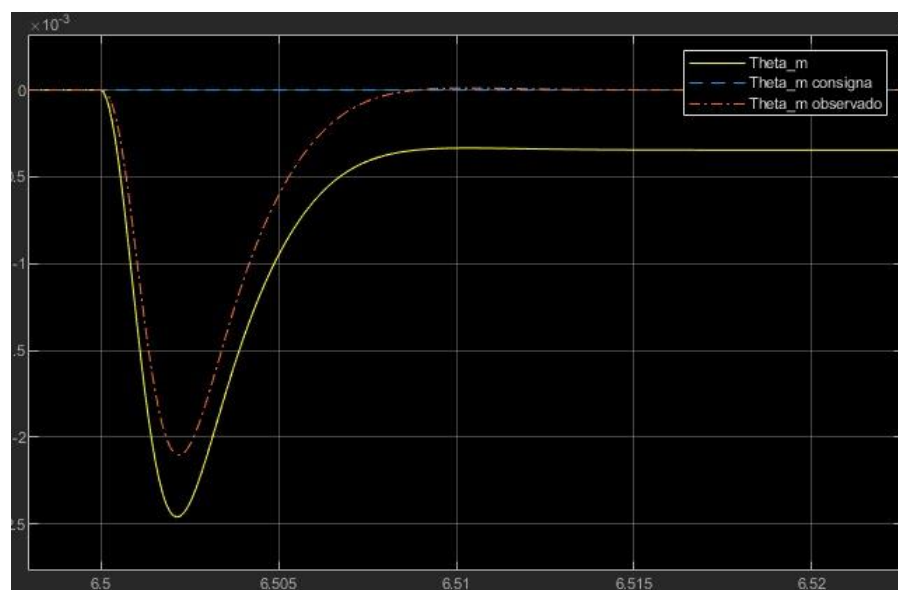


Figura 59: Respuesta en la posición a una perturbación de carga

El error es pequeño ya que la magnitud del torque de carga está afectada por la caja reductora.

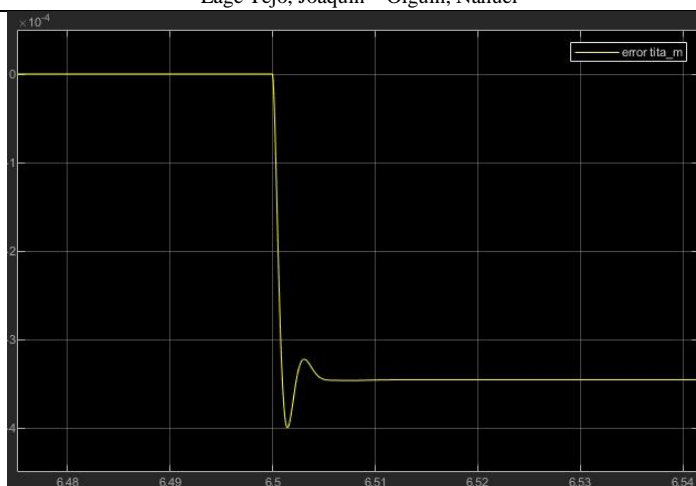


Figura 60: Gráfica del error de estado estacionario producido por la perturbación de carga

Dicho error se debe a que el observador de estado planteado solo actúa de forma PD (proporcional derivativa), y no es capaz de corregir dicho error de baja frecuencia. Esto implica que se debe mejorar el observador.

## 5. Verificación de desempeño y mejoras

### 5.1 Especificaciones de operación (valores límites):

De la simulación anterior y los valores límites dados por el fabricante e impuestos en el sistema, se genera la siguiente tabla comparativa:

	Especificación de Operación		Valores obtenidos en simulación	
	Régimen continuo	Valor máximo (pico)	Régimen continuo	Valor máximo (pico)
Velocidad angular	691.15 rad/s	-	395 rad/s	568 rad/s
Torque motor	0.023 N.m	0.094 N.m	0.00593 N.m	3.35 N.m
Corriente en el estator	0.4 A	2 A	0.062 A	49.9 A
Tensión en el estator	24 V	-	12.98 V	1839 V

Tabla 3: Comparación de valores simulados vs especificaciones de operación

Debido a que la consigna de posición de la simulación anterior superaba los valores límites de operación tanto de Torque como de Corriente en el bobinado del estator, se diseñó un perfil de posición, velocidad y aceleración del tipo trapezoidal. Con ello, evitamos los picos en corriente y torque debidos a cambios abruptos en la aceleración, principalmente.

Se utiliza una consigna de velocidad trapezoidal, a partir de la cual, luego de integrarla, se obtiene el siguiente perfil de posición:

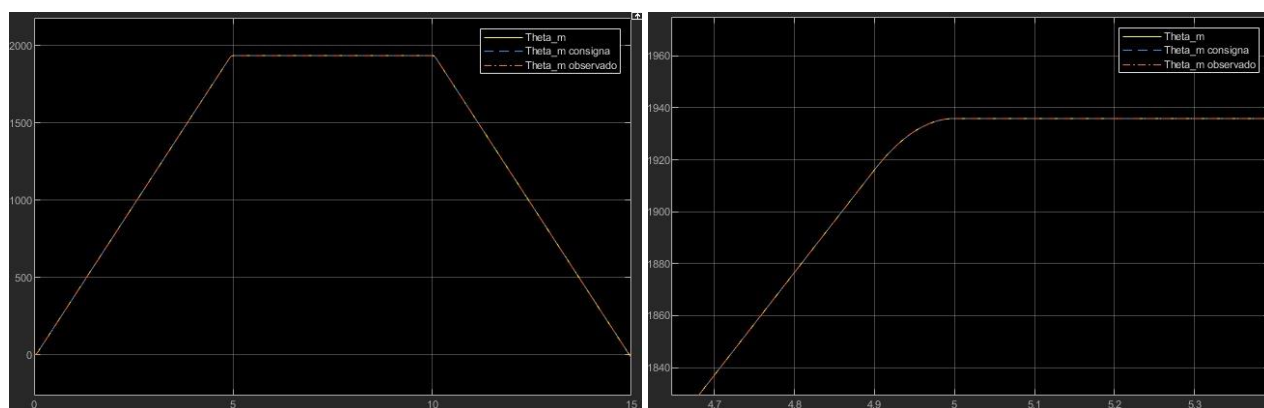


Figura 61: Perfil trapezoidal suavizado completo (izquierda) y detalle en 5s (derecha)



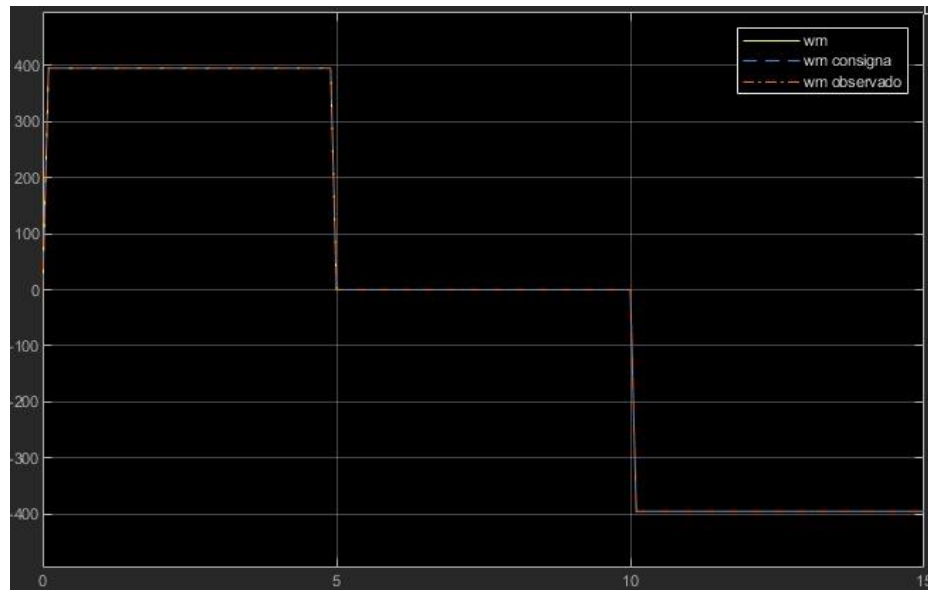


Figura 62: Perfil de velocidad obtenido para la nueva consigna

La utilización de este perfil asegura que el brazo realice el movimiento requerido dentro del tiempo estipulado, evitando el fenómeno de “jerk” y el sobrepaso de los valores límites. Vemos en la gráfica de velocidad que ya no existen picos en las zonas de cambio de pendiente.

Podemos observar los nuevos perfiles de Torque, Corrientes y Tensiones producidos por la consigna actual:

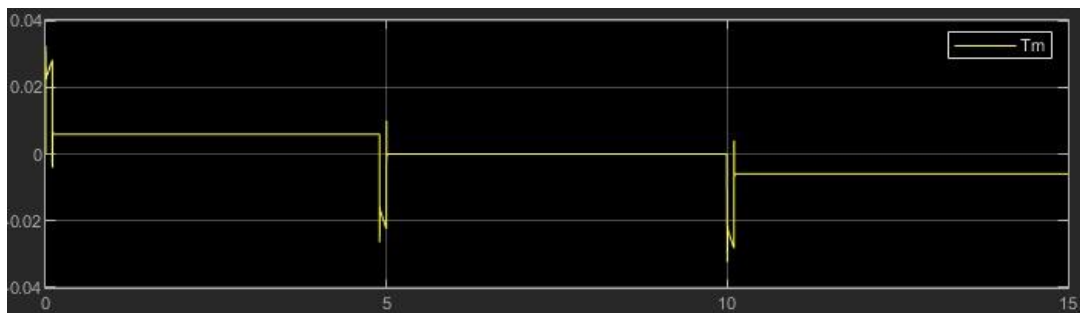


Figura 63: Torque motor para nueva consigna

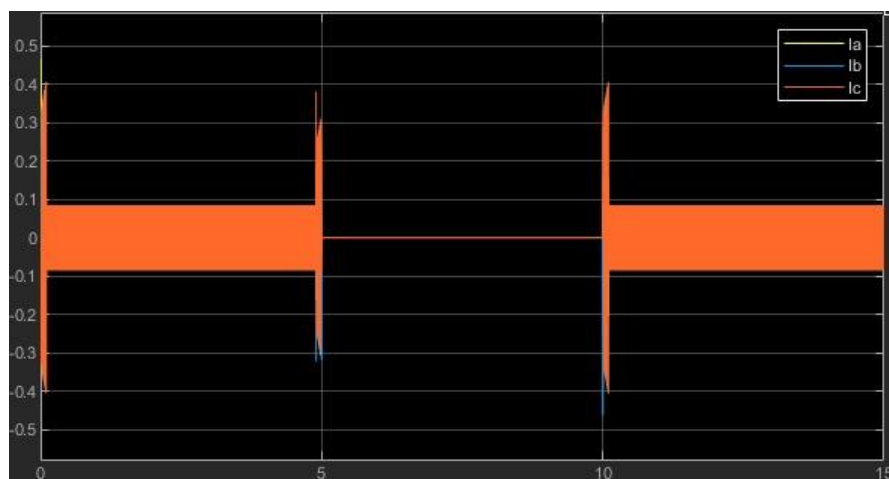


Figura 64: Corrientes en el bobinado estatórico para la nueva consigna

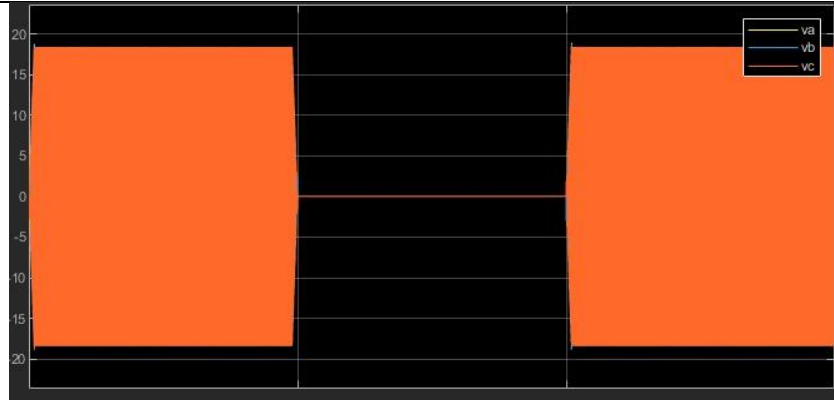


Figura 65: Tensiones en el bobina estático para la nueva consigna

Puede verse que, gracias a la consigna diseñada, las especificaciones de operación presentan valores muy inferiores a las nominales de diseño de la máquina, lo cual indica que la consigna es eficiente, pudiendo sortear el problema presentado.

El objetivo del presente trabajo no es la optimización ni la generación de perfiles de trayectoria por lo que la solución planteada, aunque válida, es solo una primera aproximación. El motor se desempeña con holgura dentro de los límites de operación por lo que se podrían exigir más las rampas de velocidad, por ejemplo.

## 5.2 Mejoras del observador de estado:

En las simulaciones anteriores se puede observar un error de estado estacionario debido a la aplicación de un torque de carga como perturbación del sistema, ya que este no converge asintóticamente al valor medido. Esto se debe a que el observador no realimenta la entrada de perturbación. Una opción podría ser realimentar (a través de un sensor) el torque, pero esto sería muy costoso y poco efectivo, ya que, con un sensor no muy preciso, el error persistiría. La solución propicia es agregar una acción integral al observador, resolviendo el problema a través del software sin necesidad de emplear más hardware dedicado.

El observador de orden reducido, es equivalente a un controlador proporcional derivativo. Para evitar caer en el cálculo de la derivada del error, y mantener el esquema base utilizado previamente, se le agrega una sección de acción integral a través de un nuevo estado que tiene en cuenta el tiempo que permanece la estimación de estado en un valor erróneo, dado por:

$$z(t) = \int (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) \cdot dt \quad (\text{Ec.87})$$

Por lo tanto, el modelo del observador redefinido es:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}}(t) = K_{e\theta} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \tilde{\omega}(t) \\ \dot{\tilde{\omega}}(t) = K_{e\omega} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) + \frac{T_m^*(t)}{J_{eq}} + z(t) \\ \dot{z}(t) = K_{ei} \cdot (\theta(t) - \tilde{\theta}(t)) \end{cases} \quad (\text{Ec.88})$$

Para obtener los valores de las ganancias del observador, debemos encontrar la ecuación característica, a través de los autovalores de la matriz a lazo cerrado  $A' = [A - K_e \cdot C]$ :

$$A' = [A - K_e \cdot C] = \begin{bmatrix} -K_{e\theta} & 1 & 0 \\ -K_{e\omega} & 0 & 1 \\ -K_{ei} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.89})$$

$$|s \cdot I - A'| = \begin{vmatrix} s + K_{e\theta} & -1 & 0 \\ K_{e\omega} & s & -1 \\ K_{ei} & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + s^2 \cdot K_{e\theta} + s \cdot K_{e\omega} + K_{ei} \quad (\text{Ec.90})$$

Planteamos un polinomio de tercer orden con polos reales e iguales en  $s_{1,2,3} = -3200 \text{ rad/s}$ :

$$(s + 3200)^3 = s^3 + 3 \cdot s^2 \cdot 3200 + 3 \cdot s \cdot 3200^2 + 3200^3$$

Por comparación de términos semejantes, obtenemos:

$$\begin{cases} K_{e\theta} = 9.6 \cdot 10^3 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ K_{e\omega} = 3.072 \cdot 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ K_{ei} = 3.2768 \cdot 10^{10} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{cases}$$

A continuación, se ve el diagrama del observador modificado resultante:

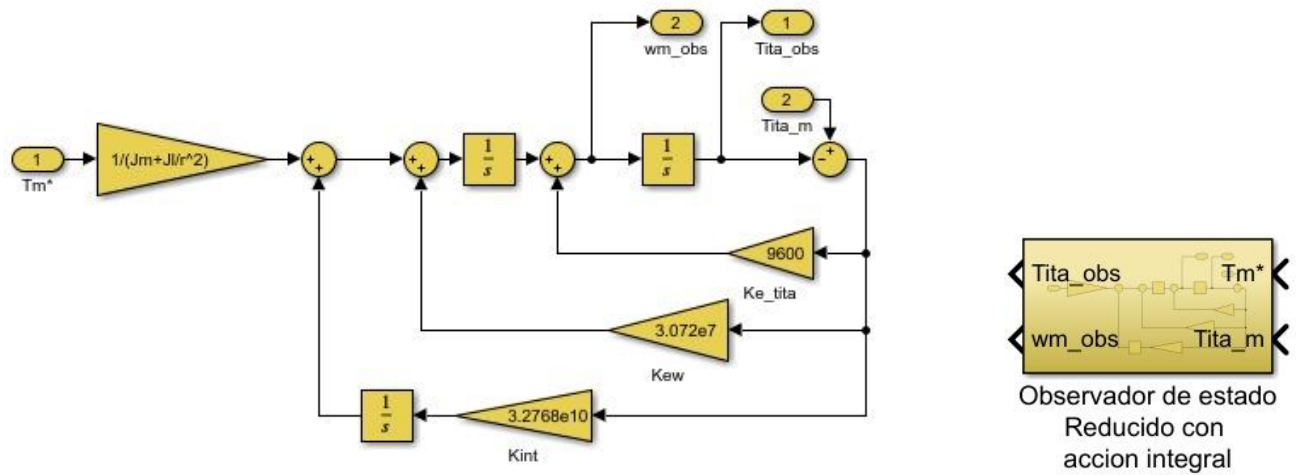


Figura 66: Diagrama de bloques del Observador de estado reducido con acción integral (izquierda) y su bloque compacto (derecha)

Se somete al sistema a la misma perturbación de torque de carga, y se ve que se ha eliminado el error en régimen permanente al incluir la acción integral:

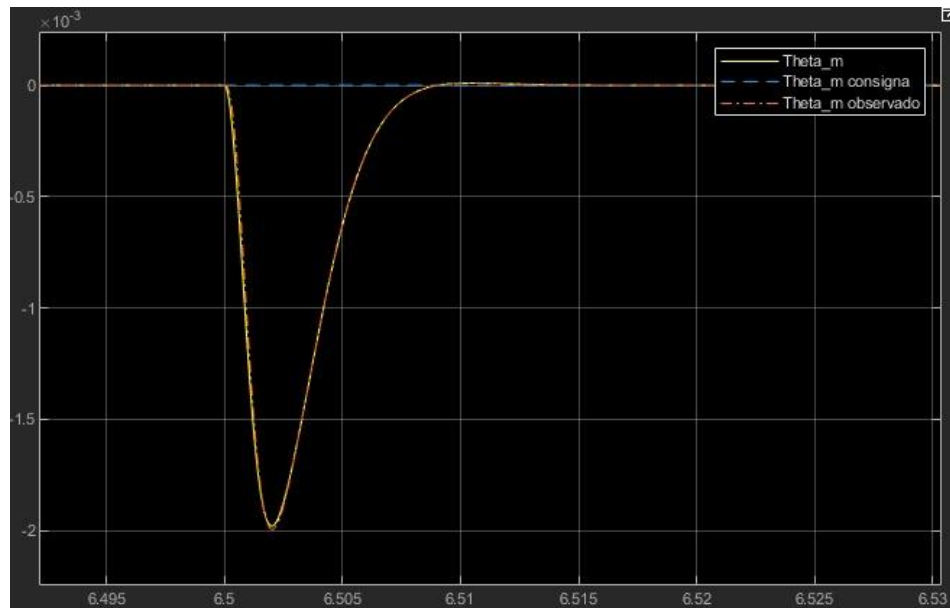


Figura 67: Perfil de posición para el nuevo observado. Se corrige el error de estado estacionario

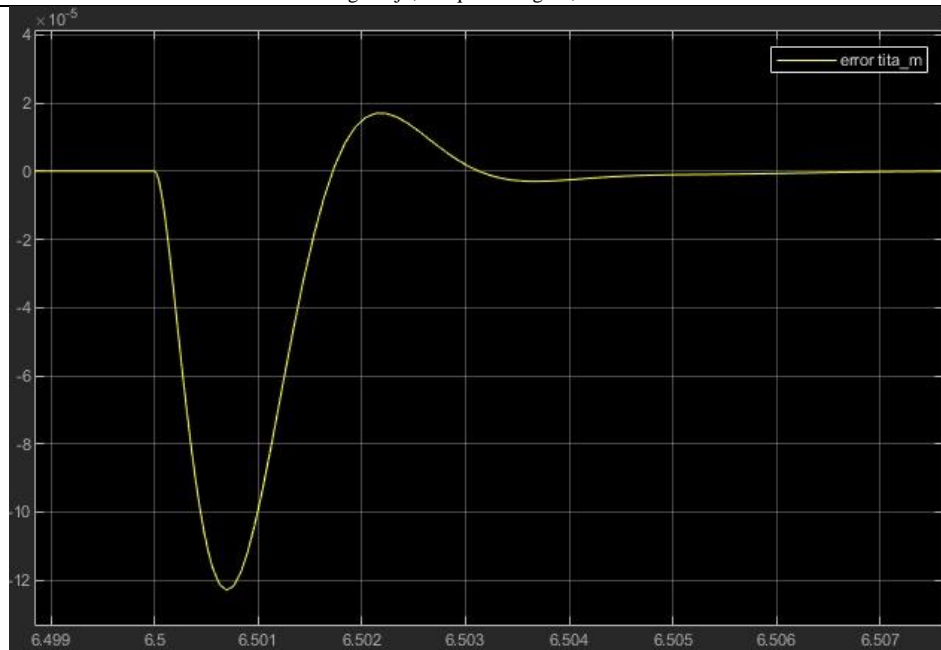


Figura 68: Error producido por el observador mejorado con acción integral. Se aproxima asintóticamente a 0

Con esto se concluye que incluir la acción integral en el observador, elimina el error de estado estacionario y mejora notablemente la estimación de las variables del sistema.

### 5.3 Comportamiento térmico:

En esta sección, se pone a prueba la evolución térmica de los devanados del motor durante una simulación cíclica de la consigna de operación anterior, aplicado 15 veces.

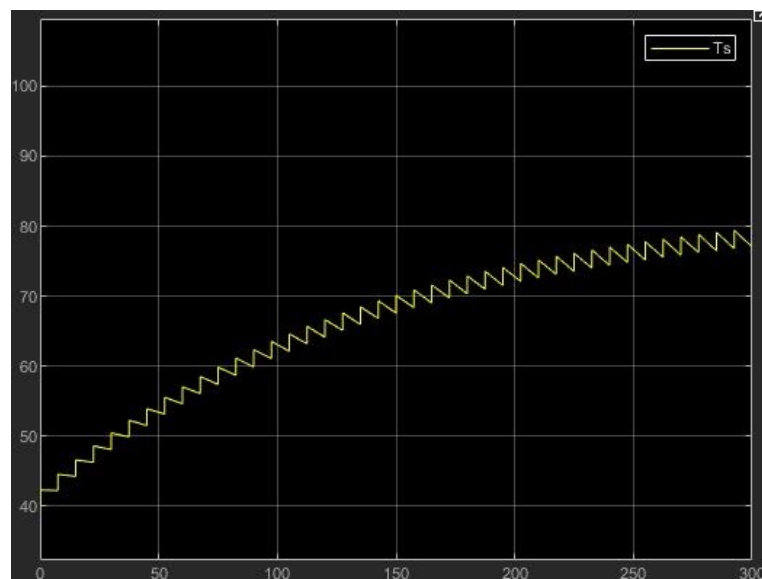


Figura 69: Temperatura en los devanados antes consigna cíclica

En la gráfica, se observa que la temperatura de los devanados aumenta, pero se estabiliza asintóticamente, por debajo de la temperatura límite ( $T^{\circ}_{\text{máx}} = 115^{\circ}\text{C}$ ). Con ello, se concluye que el motor no se encuentra exigido térmicamente.

Abajo se ve la misma consigna, pero aplicando la perturbación de carga de la sección anterior.

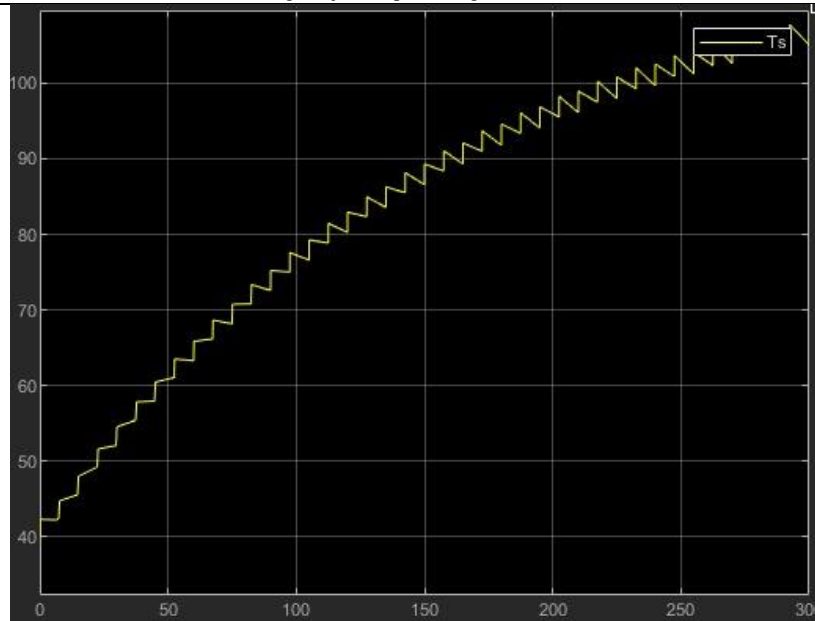


Figura 70: Temperatura con la misma consigna y perturbación de carga

En este caso se observa que la curva también es asintótica, pero a un valor cercano o mayor a su límite de operación. Esto implica que, en una situación real, debe considerarse este efecto al momento de someter a la máquina a trabajos pesados y repetitivos, sumados a posibles perturbaciones, con el fin de evitar sobrepasar su temperatura máxima.

#### 5.4 Sensores y acondicionadores de señal No Ideales:

En este apartado, se estudian los efectos de considerar la respuesta no ideal (ancho de banda limitado) de los elementos encargados de medir las corrientes en los devanados, la posición angular del motor, y la temperatura del mismo. Se siguen las siguientes especificaciones:

- Sensor de corriente: modelo LP en SS 2° orden,  $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$ ,  $\xi = 1$
- Sensor de posición angular  $\theta(t)$ : modelo LP en SS 2° orden,  $\omega_n = 2000 \frac{rad}{s}$ ,  $\xi = 1$
- Sensor de Temperatura: modelo LP en SS 1° orden,  $\tau = 20 s$

La función de transferencia para un filtro pasa-bajo de 2° orden es la siguiente:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \quad (\text{Ec.91})$$

Se puede demostrar que la función de transferencia de un modelo en espacio de estados se calcula con la ecuación:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} \cdot B + D \quad (\text{Ec.92})$$

Si tomamos como matriz de estados A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n \xi \end{bmatrix} \quad (\text{Ec.93})$$

Reemplazando Ec.93 en Ec.92 e igualando a Ec.91 tenemos:

$$G(s) = [c_1 \quad c_2] \cdot \left( \frac{1}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \cdot \begin{bmatrix} s + 2\omega_n \xi & 1 \\ \omega_n^2 & s \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + [d] = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \xi s + \omega_n^2} \quad (\text{Ec.94})$$

Se observa que, para mantener la igualdad, las matrices finales son del tipo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \omega_n^2 & -2\omega_n \xi \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = [0] \quad (\text{Ec.95})$$

De esta forma, los sensores de corriente de devanados y de posición angular, quedan definidos por:

$$A_{iabc} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \cdot 10^6 & -12000 \end{bmatrix}$$

$$B_{iabc} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{iabc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{iabc} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 \cdot 10^6 & -4000 \end{bmatrix}$$

$$B_{pos} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{pos} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{pos} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, la función de transferencia de un filtro pasa-bajo de 1° orden es:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau \cdot s}$$

Con ello, la representación en el espacio de estados del sensor de temperatura queda:

$$A_{T^\circ} = [-0.05]$$

$$B_{T^\circ} = [1]$$

$$C_{T^\circ} = [0.05]$$

$$D_{T^\circ} = [0]$$

El modelo en Simulink de los sensores degradados se puede ver a continuación:

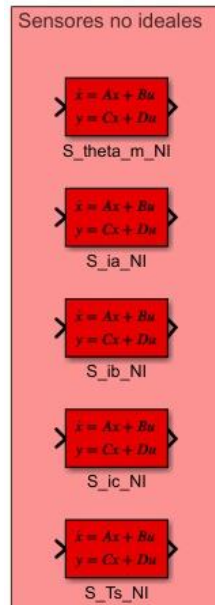


Figura 71: Diagrama de bloques de la degradación de sensores en su modelo en espacio de estados

Se muestran los gráficos para el caso de aplicar solo la degradación en el filtro de posición:

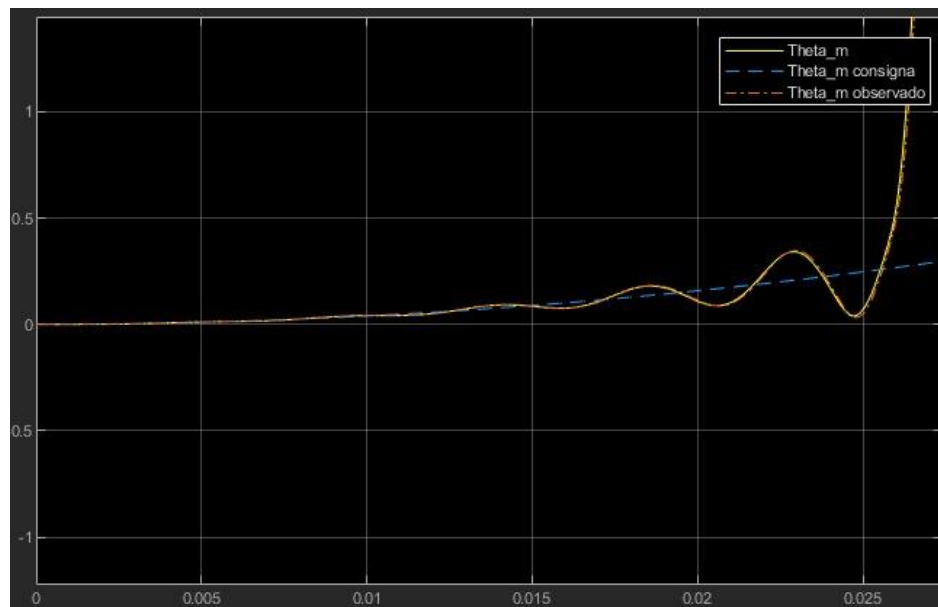


Figura 72: Detalle del perfil de posición para degradación de posición LP de 2° orden con  $\omega_n = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

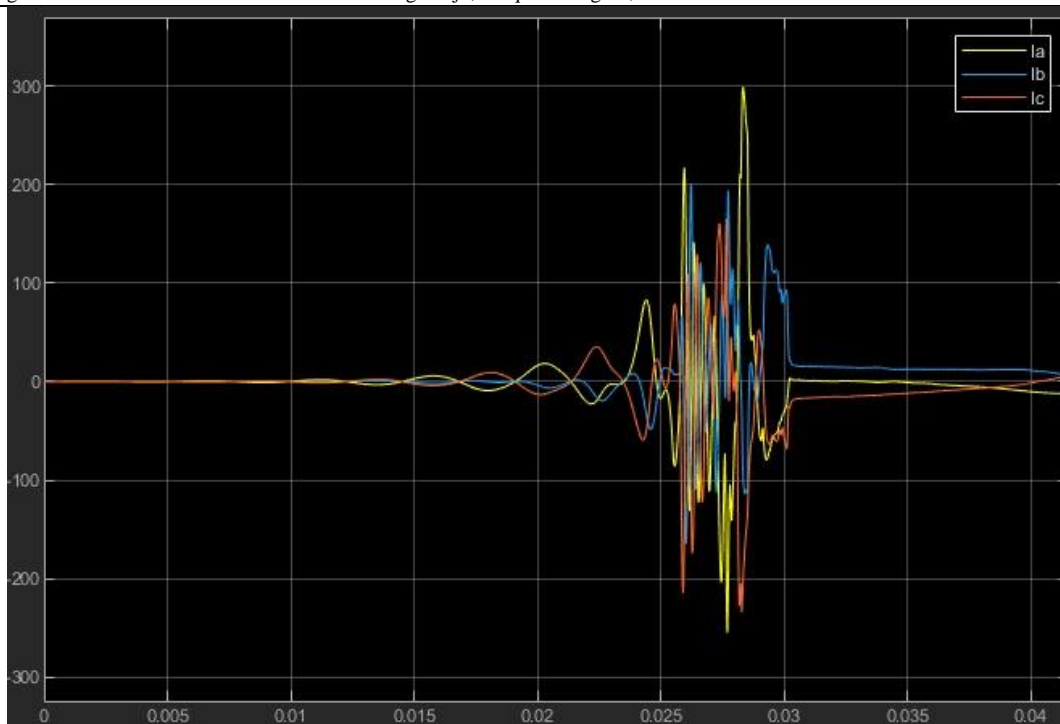


Figura 73: Detalle del perfil de Corrientes para degradación de posición LP de 2° orden con  $\omega_n = 2000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Lo que se puede observar en el gráfico de posición (Figura 72) es que la respuesta va atrasada y atenuada respecto a la consigna, esto genera que el controlador imponga grandes correcciones, notables en las corrientes (Figura 73) que se generan para corregir el error existente. Luego de empezar a oscilar como se lo ve en la Figura 72, el sistema se vuelve inestable y diverge completamente.

Luego de iterar con distintos valores para esta degradación, se encontró que utilizar una frecuencia circular de corte de 5000 rad/s genera una buena respuesta en el sistema, que es capaz de seguir la consigna implementada.

Habiendo fijado el valor del sensor de Posición, se degradan los sensores de corriente con su frecuencia circular de 6000 rad/s. Se obtienen las siguientes gráficas:

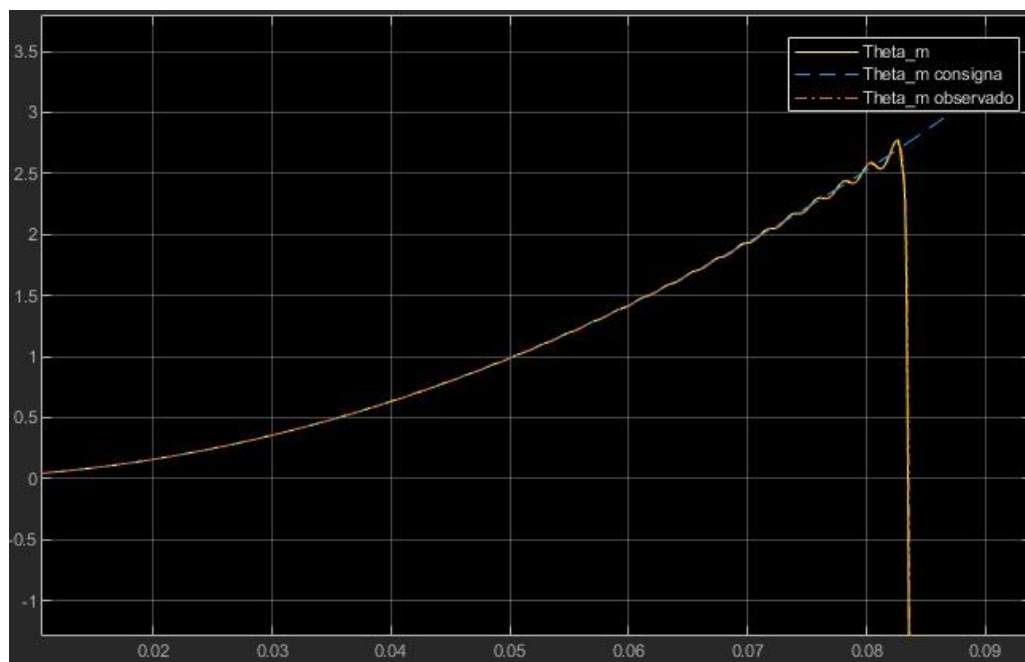


Figura 74: Detalle del perfil de posición para sensor posición con  $\omega_n = 5000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  y sensores de corriente con  $\omega_n = 6000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

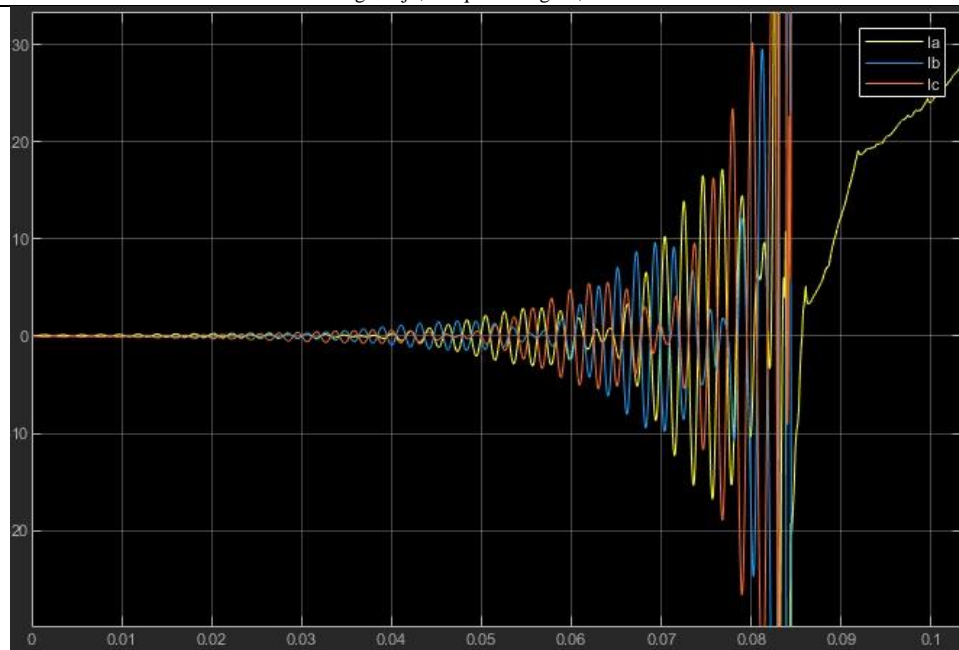


Figura 75: Detalle del perfil de Corrientes para sensor posición con  $\omega_n = 5000 \frac{rad}{s}$  y sensores de corriente con  $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$

Se puede observar que el efecto sobre el desempeño es el mismo que con el sensor de posición. La diferencia está en que los sensores de corriente generan que la inestabilidad se produzca en un tiempo mayor. Esto puede deberse a que poseen una frecuencia de corte mayor.

Al igual que con el sensor de posición, los de corriente se fijaron en una frecuencia circular de corte de 10000 rad/s, esta funciona correctamente en conjunto con la degradación previa.

Por último, el sensor de Temperatura de los devanados del estator se modela como un filtro pasa bajo de primer orden. Primero vemos la curva de temperatura sin la degradación de este sensor, pero si el de los anteriores:

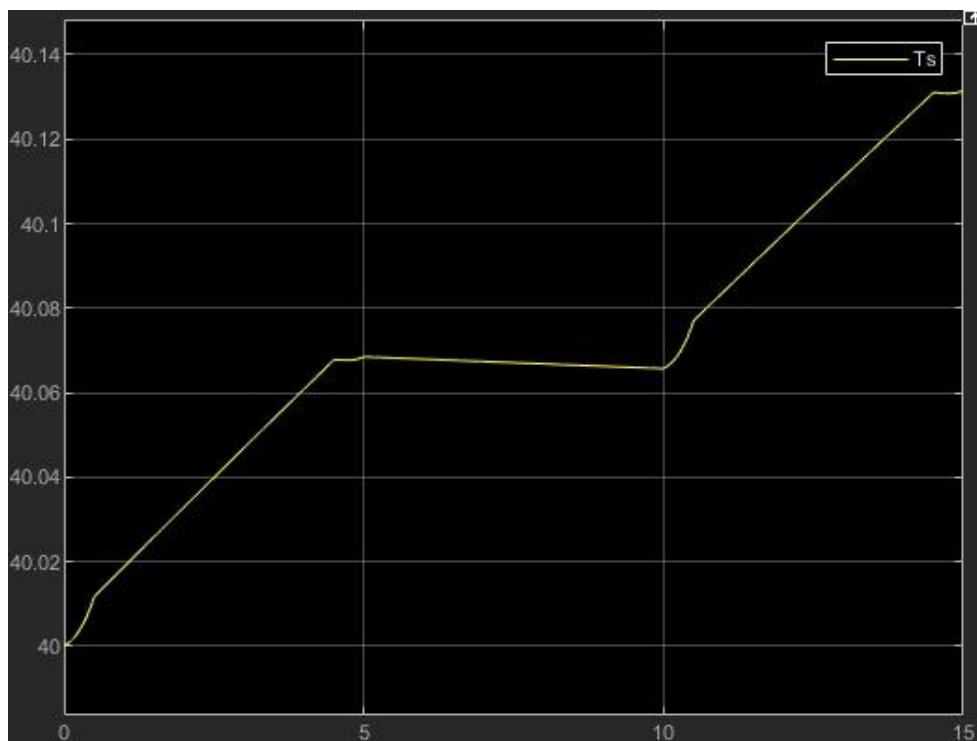


Figura 76: Perfil de Temperatura para sensor posición con  $\omega_n = 5000 \frac{rad}{s}$  y sensores de corriente con  $\omega_n = 10000 \frac{rad}{s}$



Ahora vemos la Temperatura con degradación aplicada en  $\tau = 20s$  (en la misma escala):

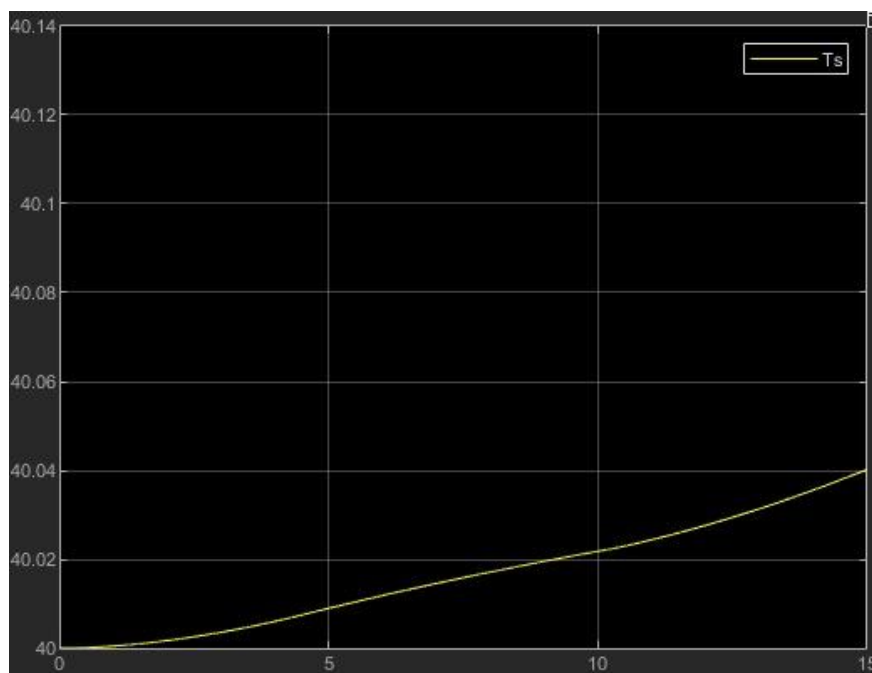


Figura 77: Perfil de Temperatura para sensor posición con  $\omega_n = 5000 \frac{rad}{s}$ , sensores de corriente con  $\omega_n = 10000 \frac{rad}{s}$  y sensor de temperatura con  $\tau = 20s$

Vemos nuevamente, una concordancia. El error es notable, ya que suaviza completamente toda variación de alta frecuencia, y retarda la señal respecto a la real. Lo interesante es que esto no afecta al desempeño de la máquina frente a la consigna dada, ya que es un parámetro intrínseco de la máquina y no influye (directamente, y por ello, no está realimentado en ningún modelo empleado) en las consignas de Torque, corriente, etc. Sí es importante considerarlo para proteger la máquina frente a temperaturas que podrían dañarla durante su funcionamiento.

Definimos el  $\tau = 1s$  y mostramos el perfil de temperatura obtenido:

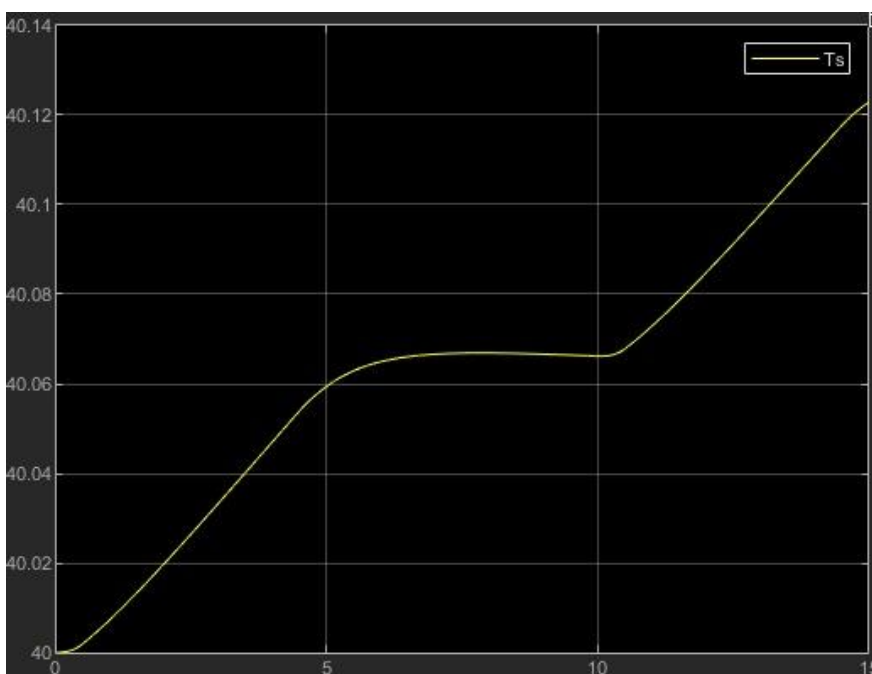


Figura 78: Perfil de Temperatura para sensor posición con  $\omega_n = 5000 \frac{rad}{s}$ , sensores de corriente con  $\omega_n = 10000 \frac{rad}{s}$  y sensor de temperatura con  $\tau = 1s$

## 5.5 Modulador trifásico de tensión No Ideal:

Como última aproximación a un modelo real, se plantea considerar las características del modulador de tensión trifásica, encargado de convertir las consignas de tensión del modulador de torque, en tensiones efectivas en los bobinados del estator de la máquina sincrónica, a través de un inversor (hardware real empleado para tal tarea).

El mismo se modela como un filtro pasa bajo (para representar su ancho de banda limitado) y se le agrega una saturación en tensión. En detalle:

- Saturación de tensión:  $V \leq \sqrt{2} \cdot \frac{V_{sl max}}{\sqrt{3}}$ ,  $V_{sl max} = 24 V_{ca rms}$
- Ancho de banda de tensión: modelo LP en SS 2° orden,  $\omega_n = 6000 \frac{rad}{s}$ ,  $\xi = 1$

El modelo en espacio de estados es análogo al desarrollado al degradar los sensores (Ec.95). Finalmente tenemos para el modulador trifásico degradado:

$$A_V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 36 \cdot 10^6 & -12000 \end{bmatrix} \quad B_V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_V = [0 \quad 1] \quad D_V = [0] \quad (Ec.96)$$

Se muestra el modelo en Simulink de dicha implementación:

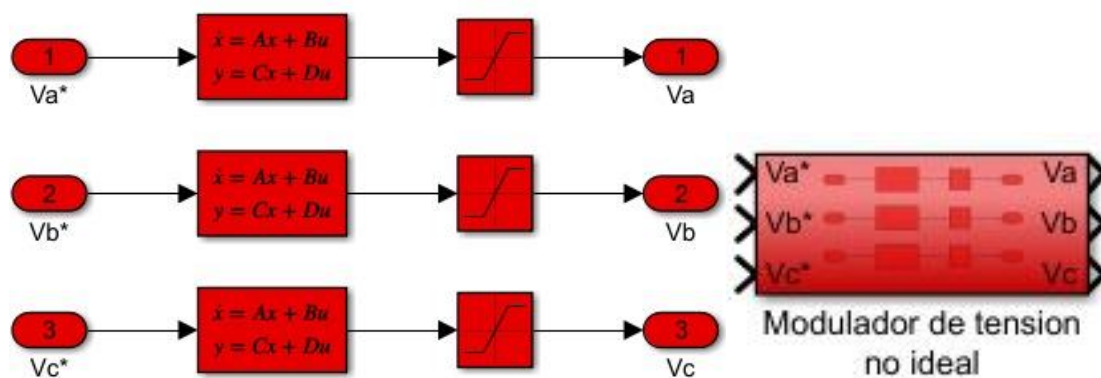


Figura 79: Diagrama de bloques del modulador trifásico de tensión con su modelo LP de 2° orden en espacio de estados y saturación (izquierda) y su bloque compacto (derecha)

En primer lugar, se estudia el efecto de la saturación en la respuesta del sistema. Se recuerda que se están aplicando las degradaciones de sensores definidas en la sección anterior.

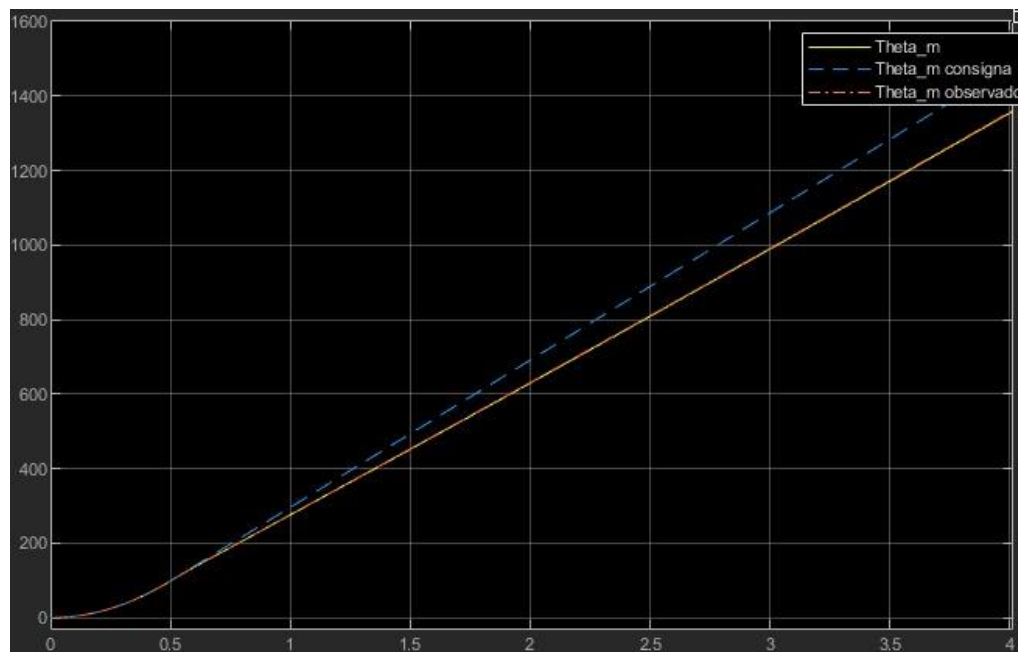


Figura 80: Perfil de posición con saturación en el modulador de tensión trifásico

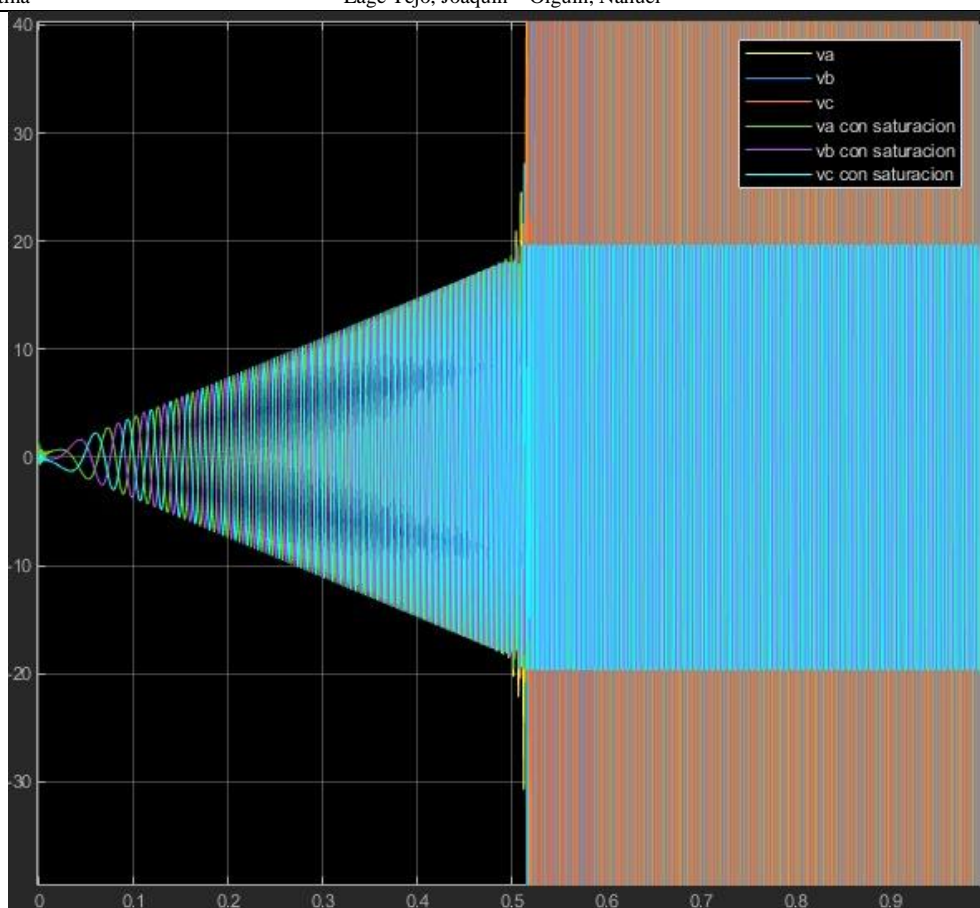


Figura 81: Perfil de tensiones comparando las consignas generadas por el controlador, y las producidas por el modulador saturado

Se puede observar que el efecto es generar un error creciente entre la consigna y la posición, instante a instante. Esto se explica recordando que el modulador de tensión trifásica es quién convierte las consignas de tensión en tensión efectiva en los bornes de la máquina trifásica. Por lo tanto, si esta salida está saturada, la máquina no recibe la tensión consigna necesaria, no es capaz de generar el torque que produciría la aceleración buscada para corregir la posición. Esto se ve más gráficamente mirando la pendiente en la evolución de la pendiente, frente a la de la consigna.

Por otro lado, se ve claramente en la Figura 81 como las tensiones llegan a su valor máximo y se establecen, mientras las consignas siguen creciendo continuamente (proporcionalmente al error que continúa creciendo).

Finalmente se aclara que el efecto del modelo de filtro pasa-bajo de segundo grado del modulador de tensión trifásico produce los mismos efectos que los estudiados en la sección de degradación de sensores, por lo tanto, no se repitió el análisis ni sus respectivas gráficas, ya que se extraen las mismas conclusiones y la solución a dicho problema es análoga.

Con el fin de resolver estas inestabilidades encontradas, se debería incorporar la dinámica de los sensores y el modulador de torque al modelo desarrollado, para estudiar su naturaleza y ajustar los controladores para tener una correcta respuesta del sistema completo considerando estos elementos no ideales.

## 6. Conclusiones

En el presente trabajo se diseñó, analizó y modeló exitosamente el control de la primera articulación de un robot SCARA, sirviendo de buena forma como método de aprendizaje englobando varios contenidos de la cátedra. Se logró desarrollar satisfactoriamente todas las etapas de un controlador para un motor síncrono de corriente alterna trifásica, obteniendo modelos suficientemente ciertos que cimentaron una buena simulación precisa y estable del comportamiento del sistema, considerando que se cumplan las hipótesis planteadas desde un principio.

A partir de las simulaciones obtenidas se puede apreciar que el sistema sigue correctamente las consignas de posición definidas. Se pudieron satisfacer las especificaciones de operación a partir de consignas con perfiles más suaves evitando de esta forma picos de corriente y tensión. La acción integral en el observador de estados permitió reducir el error de estimación en régimen permanente a cero.

Se destaca que la simulación es un factor importante del proyecto ya que permite visualizar de una manera más cercana a la realidad el funcionamiento del sistema. Se pueden variar todos los parámetros del sistema y estudiar su comportamiento, sin riesgos para el equipo real.

Al considerar el comportamiento no ideal de sensores y modular de tensión, se vio que se debe tener especial cuidado al momento de seleccionar los elementos a emplear durante el desarrollo físico, ya que una mala selección puede generar un mal desempeño, o hasta llevar al sistema a una desestabilización y eventual falla. A esto se suma la consideración de la temperatura tanto ambiente como propia del bobinado del estator. Una implementación a futuro es agregar la dinámica de los sensores y el modular de tensión, al modelo del sistema, para corregir las inestabilidades que estos causan.

Se logró desarrollar un modelo completo y altamente representativo de la realidad, y se evidencia la importancia de seleccionar correctamente el hardware a utilizar y el software que se incorporará al mismo. Así mismo, las consignas también tienen un papel importante, y no se deben olvidar las variables que no están directamente relacionadas con el desempeño, pero forman parte del sistema.

El desarrollo del proyecto ha englobado todos los temas desarrollados en la cátedra de Automática y Máquinas Eléctricas e integrado los mismos en una aplicación tangible, en una situación en la que es muy posible que se deba trabajar en un futuro.

## 7. Referencias

- [1] Ing. Gabriel Julián. “*Proyecto Global Integrador: Control de Accionamiento de CA con Motor Síncrono de Imanes Permanentes*”. 2021.
- [2] Ing. Gabriel Julián. “*Material de clases.*” 2020.
- [3] Katsuhiko Ogata. “*Ingeniería de control moderna*”. Pearson education. 2003.
- [4] Soporte MATAB: <https://la.mathworks.com/help/matlab/>
- [5] Soporte Simulink: <https://la.mathworks.com/help/simulink/>
- [6] Gene F. Franklin. “*Feedback Control of Dynamic Systems*”. 2015
- [7] R. Krishnan. “*Electric Motor Drives: Modeling, Analysis and Control*”. 2001.
- [8] R. Krishnan. “*Permanent Magnet Synchronous and Brushless DC Motor Drives*”. 2010.