INTRODUCCION A LA TEORIA DE ERRORES DE MEDICIONES

La Física, como toda ciencia experimental, tiene como criterio de verdad la contrastación de sus teorías con los datos surgidos de mediciones. Así se dice que una ley, una hipótesis o un modelo, representan adecuadamente la realidad (fenómeno físico) si las consecuencias que de ellas se derivan se corresponden con los datos experimentales. Cualquier aseveración en Física la cual, o sus consecuencias lógicas, no sean verificables experimentalmente, carece de sentido.

Por otra parte el progreso de la Ciencia se debe en gran medida, a la observación de los fenómenos, reproducidos en forma de experimentos a fin de medir con más comodidad, y la formulación de nuevas hipótesis a partir de esa observación. Sin la actividad experimental que a la vez genera nuevas ideas y permite su verificación no habría real incremento en nuestro conocimiento del mundo que nos rodea. Esto demuestra la importancia, del proceso de medición, pero, antes de medir, se debe desarrollar la capacidad de observar.

Observar supone mirar con atención, descubrir las principales magnitudes físicas que están involucradas en el fenómeno, analizar su comportamiento en forma global y estudiar como medirlas. Puesto que toda conclusión a que se llegue a partir de la experimentación debe ser susceptible de verificación y además debe ser compatible con el resto del cuerpo de conocimiento, es imprescindible conocer el grado de confiabilidad de la medición efectuada. Como ejemplo basta recordar que Kepler dedicó diez años a tratar de verificar la teoría de su maestro Ticho Brahe sobre el movimiento del planeta Marte utilizando los datos experimentales que el mismo Brahe había recopilado. Finalmente no pudo reducir las discrepancias entre el modelo y los datos a menos de 2 minutos de arco. Pero Kepler sabía que Brahe no podía cometer errores de más de un minuto lo que lo obligó a reformular la teoría con su propio modelo de movimiento planetario. El ejemplo muestra cómo, para que la información sea intercambiable y reproducible, es necesario saber en que con condiciones se la obtuvo y cuál es su grado de confiabilidad. Analizar esto es el objetivo de lo que sigue.

MAGNITUDES Y CANTIDADES

Magnitud es todo aquello que puede ser medido: longitud, masa, tiempo, etc., son ejemplos de magnitudes. Si queremos definir una magnitud en particular, debemos recurrir a una definición operacional: "longitud es la magnitud que se mide con una regla, calibre, etc", "tiempo es lo que se mide con un reloj". LA OPERACION DE MEDIR DEFINE LA MAGNITUD.

La longitud de una mesa, la masa de un objeto, el tiempo que tarda un determinado móvil en recorrer una distancia son "*cantidades*" de las magnitudes longitud, masa y tiempo.

EL PROCESO DE MEDICION

El proceso de medición es una operación física experimental que consiste en comparar una cantidad de una magnitud con otra cantidad arbitrariamente determinada unidad.

En ella intervienen necesariamente tres sistemas:

- El sistema OBJETO que se desee medir.
- El sistema de MEDICION (instrumento/s de medida).
- El sistema de COMPARACION (unidades).

Entre estos sistemas se realizan dos operaciones: la primera es la que relaciona el instrumento con la unidad adoptada, operación que se denomina "calibración", y la segunda es la que relaciona el instrumento ya calibrado y el objeto: la "medición" propiamente dicha.
Obviamente, estas operaciones son efectuadas por el hombre: operador u observador.

El resultado de cualquier proceso de medición es un número que se llama *valor medido*, valor o medida de la magnitud en cuestión y representa el número de veces que contiene la unidad, un símbolo que representa la unidad, y un error que indica la exactitud con que conocemos el valor medido. Todo proceso de medición tiene asociado, inevitablemente un *error*. No hay mediciones reales con error nulo. Decimos que hay concordancia entre las predicciones teóricas de una hipótesis, modelo o teoría y los resultados de una medición cuando ambos valores coinciden, dentro de un rango definido por el error de medición. De hecho ocurre que, al mejorar las técnicas de medición de alguna magnitud y consecuentemente al disminuir el error con el que se la conoce, se descubre que una hipótesis o modelo que se tenía por satisfactorio, deja de serlo y es necesario elaborar una nueva teoría para explicar el fenómeno.

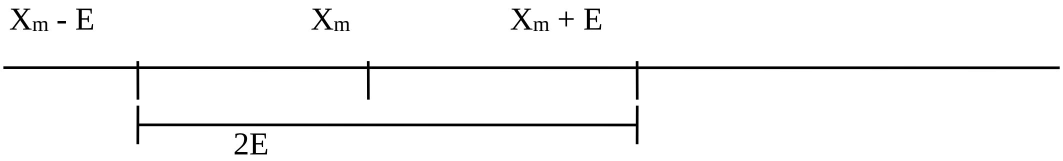
Medir significa entonces, conocer el valor de una magnitud y conocer también el error con que se la mide. El resultado de una medición se expresa:

$$X = (X_m \pm E) \quad [\,U\,] \qquad (1)$$

donde:
X : valor de la magnitud que se desea conocer.
X_m: valor medido (producto del proceso de medición).
E : error (que en adelante designaremos como error absoluto).
U : unidad utilizada

El concepto de error en mediciones es sinónimo de incerteza. El error “E” define alrededor del valor medido, un intervalo de incerteza igual al doble del error de tal manera que la expresión (1) significa:

EL VALOR TEORICO DE LA MAGNITUD QUE SE PRETENDE CONOCER SE ENCUENTRA SEGURAMENTE, EN EL INTERVALO 2E CENTRADO EN EL X_m.



Posteriormente veremos que el "seguramente" se debe reemplazar por: "con una probabilidad p". Dicho de otra manera, existe una determinada probabilidad de que el valor teórico de la magnitud que estamos midiendo se encuentre en el intervalo de incerteza. De aquí en más utilizaremos indistintamente los términos "error" e "incerteza" de una medición ya que, a pesar de que la segunda expresión es más adecuada, en la bibliografía aparecen de esa manera.

En efecto, "error" da la idea de un término correctivo que puede ser subsanado, mientras que "incerteza" es nuestra incapacidad de fijar el valor exacto de la magnitud medida.

CLASIFICACION DE LOS ERRORES

Atendiendo a su naturaleza, los errores pueden clasificarse en:

- **Errores groseros o fallas:**

Son aquellos que provienen de una equivocación del operador. Por ej.: contar mal el número de oscilaciones de un péndulo, leer un valor en la escala y anotar el resultado invirtiendo los dígitos, no hacer coincidir el cero de la regla con el extremo del objeto que se quiere medir, etc. Todos ellos se pueden evitar poniendo cuidado y repitiendo las mediciones o los cálculos.

- **Errores sistemáticos:**

Son aquellos inherentes al procedimiento mismo de medición y por lo mismo son errores previsibles. Generalmente pueden ser debidamente acotados.

No es posible establecer un criterio general, sino que se debe analizar cada caso en particular para ponerlos de manifiesto. Por ejemplo: un instrumento descalibrado repetirá, si se mide varias veces en las mismas condiciones, el mismo error con el mismo signo y es posible eliminarlo contrastando (calibrando) el instrumento con un patrón.

- **Errores accidentales, aleatorios o casuales:**

Aún habiendo eliminado los errores groseros y los sistemáticos, es un hecho que cuando se efectúan mediciones repetidas con instrumentos y métodos de gran exactitud, se obtienen resultados que, en general, son distintos. Estos errores provienen de múltiples factores inapreciables y su magnitud y signo son imposibles de predecir. Es decir que estas perturbaciones provienen de fuentes de error independientes, imposibles de detectar, que dan lugar a desviaciones pequeñas, positivas y negativas. Este tipo de errores requiere de un tratamiento estadístico, que se verá más adelante, de manera de acotarlos ya que no se los puede eliminar.

Por supuesto la división entre errores sistemáticos y casuales no es tajante y debe ser sometida a revisión crítica permanente. Un perfeccionamiento en el proceso de medición puede poner de manifiesto la existencia de nuevos errores sistemáticos que anteriormente se incluían entre los accidentales. En cuanto a los errores groseros, cabe aclarar que algunos autores no los consideran dentro de la clasificación.

ORIGEN DE LOS ERRORES

La causa de las incertezas, independientemente de su naturaleza, puede estar en cualquiera de los sistemas que intervienen en el proceso de medición.

- **Errores debidos al observador:**

Cada observador tiene una forma personal de apreciar los fenómenos y, en particular, de efectuar las lecturas de los instrumentos. Esta modalidad da origen a errores de tipo sistemático. Por ejemplo, un observador que mide varias veces el período de un péndulo puede tener una tendencia a disparar el cronómetro antes (o después) de que el mismo pase por el punto de referencia. Si no existe esta tendencia y la reacción en disparar y detener el cronómetro se compensan quedarán los errores de tipo aleatorio que siempre están presentes.

- **Errores propios del instrumento:**

Dependen del tipo de instrumento empleado, principio de funcionamiento, calidad etc. En este punto es conveniente hacer una referencia al proceso de "calibración" del instrumento.

Calibrar significa comparar el valor medido por el instrumento X_m con el valor verdadero X_v de la magnitud medida. Esto permite, más allá de los ajustes que puedan hacerse, establecer el error propio e irreducible del instrumento.

$$E_i = X_m - X_v$$

Sin embargo la anterior no pasa de ser una definición ya que el valor de X_v es inalcanzable porque todo proceso de medición del mismo contiene incertezas a lo que se agregan razones físicas que escapan al nivel de este curso (principio de incertidumbre). Es más, X_v de hecho no existe.

A falta de éste, el mejor valor alcanzable con la técnica disponible (instrumento más refinado, técnica de medida más depurada etc.) se denomina: valor verdadero convencional X_{vc} y para todo propósito se asume que su incerteza es despreciable.

La calibración se efectúa entonces contrastando el valor medido por el instrumento con el valor verdadero convencional para obtener el error propio del instrumento.

$$E_i = X_{vc} - X_m$$

El valor de X_{vc} se obtiene generalmente mediante instrumentos denominados "patrón" y esta calibración debe efectuarse periódicamente. El error instrumental estará entonces exactamente determinado, con lo que no constituye una incerteza sino que se entiende como una corrección que se adiciona (o resta) de las lecturas. Así por ejemplo, contrastando la lectura de una balanza con el valor de las pesas patrón colocadas en el platillo se puede determinar la desviación (en más o en menos) y si no puede ajustarse mecánicamente, agregar o quitar ésta de las pesadas a efectuar. Quedará no obstante la incerteza propia de la lectura es decir la "apreciación" del instrumento.

Ejemplos de errores propios del instrumento:

- Una defectuosa construcción de la escala o un corrimiento permanente de la misma. Se puede eliminar calibrando el instrumento.
- Construcción deficiente o desgaste por el uso, descalibrado por golpes, calentamiento o uso inadecuado. Son los más difíciles de detectar por lo que es conveniente hacer periódicas comparaciones con instrumentos de exactitud comprobada (patrones).
- Limitaciones propias del sistema de lectura: grosor de las líneas de la escala, grosor de la aguja, separación entre líneas, incertezas internas, etc.

- **Errores debido al modelo físico elegido o a aproximaciones en las teorías físicas:**

Si queremos determinar la aceleración de la gravedad "g" con un péndulo, despejando "g" de la expresión del período:

$$T = 2 (L/g)^{1/2}$$

que es válida para un péndulo ideal (masa puntual e hilo de masa despreciable) introducimos errores sistemáticos porque en realidad estamos usando un péndulo físico (masa con dimensiones finitas). Estos errores se pueden minimizar en la medida en que las condiciones de la experiencia se acerquen más al modelo propuesto.

- **Errores causados por el propio acto de observación:**

Cualquier proceso de medición introduce modificaciones al sistema original, es decir hay una interferencia del observador que introduce error. Por ej. al medir la temperatura de un líquido con un termómetro, la temperatura a la que se encuentra éste último modifica la del líquido; si se mide una resistencia con voltímetro y amperímetro, se introduce un error que varía según el circuito empleado, etc.

- **Errores producidos por condiciones externas al proceso:**

Por ejemplo, el empuje del aire al pesar un cuerpo de distinto volumen al de las pesas en una balanza de platillos; en las determinaciones calorimétricas, el calor absorbido por el calorímetro, termómetro, agitador, etc. Todos estos errores pueden ser evaluados y acotar la incerteza global que producen.

APRECIACION Y ESTIMACION

Apreciación de un instrumento es la menor división de la escala de ese instrumento. Una regla, cuya menor división es un milímetro, se dice de apreciación 1 mm. Un cronómetro cuya apreciación es 0,2 s. tiene sus divisiones más pequeñas de un ancho equivalente a la quinta parte de un segundo. La balanza digital cuyo último dígito corresponde a la milésima de gramo es de apreciación 10^{-3} gr.

Estimación de una lectura es el menor intervalo que un observador puede determinar, interpolando mentalmente entre dos líneas sucesivas de la escala, o sea, fraccionando mentalmente la apreciación del instrumento. Que se pueda estimar en una lectura, es decir, que se pueda obtener un valor medido con mayor exactitud que la que da la apreciación del instrumento, depende de múltiples factores: la distancia entre líneas, el grosor de las mismas, el grosor de la aguja (si es un instrumento de aguja), etc. Por ejemplo, no puede estimarse si se está utilizando un instrumento digital.

La experiencia demuestra que un observador experimentado puede estimar un décimo de división en un instrumento de aguja si la separación entre los trazos es de 2 mm, el grosor de la aguja es de 0,2 mm, el espesor de los trazos de 0,2 mm y en buenas condiciones de iluminación.

CALIDAD DE UNA MEDICION - EXACTITUD - ERROR RELATIVO

Una medida será tanto más exacta cuanto menor sea el intervalo de incerteza asociado a la misma, es decir, cuanto menor sea el error absoluto. Por ejemplo: se mide el diámetro de una barra cilíndrica con un calibre y luego con una regla milimetrada obteniéndose respectivamente:

$$\Phi_1 = (75{,}54 \pm 0{,}02) \text{ mm}$$

$$\Phi_2 = (75{,}5 \pm 0{,}5) \text{ mm}$$

la primera medición es más exacta. Si se ha medido la misma magnitud (como en el ejemplo) usando dos instrumentos distintos, la "comparación" del error absoluto nos indica cuál es la de mayor calidad. Pero si se quieren comparar dos medidas de una dada magnitud pero de distinta especie, como por ejemplo diámetro y altura de un cilindro (ambas de la misma magnitud: longitud) debemos recurrir a otra magnitud para poder calificarlas. Definimos entonces, como **error relativo** a la relación entre el error absoluto y el valor medido:

$$e = E / X_m$$

y **error relativo porcentual**

$$e\% = e \,.\, 100 = (E / X_m).100$$

Ejemplo 1: Con una regla milimetrada se mide la longitud de una barra cilíndrica y su diámetro con un calibre, obteniéndose:

$L = (697{,}0 \pm 0{,}5)$ mm

$\Phi = (15{,}34 \pm 0{,}02)$ mm

$e_L\% = 0{,}07$ %

$e\% = 0{,}13$ %

La medición del largo es de mejor calidad aunque menos exacta que la del diámetro (observar que su error absoluto es mayor).

MEDICIONES DIRECTAS E INDIRECTAS

Se denomina *medición directa* la lectura de cierta cantidad de una magnitud física mediante un instrumento. La medición de una longitud con una regla, la masa de un cuerpo con una balanza, una corriente eléctrica con un amperímetro, un intervalo de tiempo con un cronómetro, etc., son ejemplos de mediciones directas.

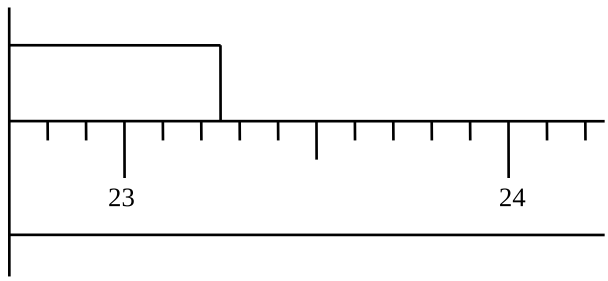
Una *medición indirecta* es aquella que se obtiene mediante la utilización de una relación matemática que la vincula con otras magnitudes que pueden ser medidas directamente. Por ejemplo, la densidad de un sólido homogéneo obtenida como cociente entre la masa y el volumen del mismo; la velocidad media de un móvil dividiendo la distancia recorrida por el tiempo empleado; el volumen de un cuerpo regular en base a sus dimensiones lineales; etc.

ERRORES EN UNA SOLA MEDICION DIRECTA

Comenzaremos con el caso más elemental, en el que se busca determinar el valor de una magnitud y su incerteza, o sea su error absoluto, haciendo una sola lectura.

¿Con qué criterio se establece la incerteza? No existe una receta para establecer el valor del error; es necesario un análisis detallado del método y del instrumento utilizado. Distintos autores fijan criterios diferentes para acotar el error en una única medición directa. El nuestro será analizar en detalle cada situación concreta.

Supongamos que queremos medir la longitud de una varilla con una regla metálica de apreciación 1 mm. Hacemos coincidir un extremo de la varilla con la división cero de la regla y observamos la ubicación del otro extremo de la misma:



Afirmamos entonces que la longitud medida es mayor que 232 mm y menor que 233 mm.

$$232 \text{ mm} < L_m < 233 \text{ mm}$$

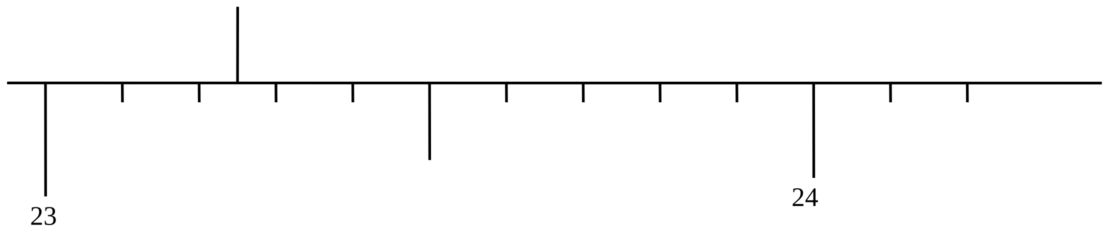
y expresamos la medición como:

$$L = (232{,}5 \pm 0{,}5) \text{ mm}$$

en este caso vemos que:

- Estamos estimando media división.
- El intervalo de incerteza coincide con la apreciación del instrumento
- El error es E=0,5mm.

Supongamos ahora que recurrimos a una lupa para efectuar la lectura y observamos:



podemos afirmar que 232,3 mm < L_m < 232,5 mm; indicamos:

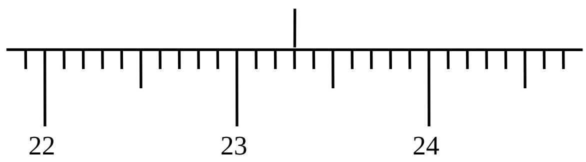
$$L = (232{,}4 \pm 0{,}1) \text{ mm}$$

en este caso:

- Estamos estimando 1/10 de división
- El intervalo de incerteza es de 0,2 mm
- El error es de 0,1 mm.

Es conveniente insistir en que la estimación depende de múltiples factores. Si el grosor de las líneas fuera mayor, sería más difícil una estimación de 1/10 de división.

Veamos otra situación: el extremo de la varilla coincide con una de las divisiones de la regla, por lo que no es necesario interpolar.



Un observador puede afirmar:

$$232{,}9 \text{ mm} < L_m < 233{,}1 \text{ mm} \quad \text{ó} \quad L = (233{,}0 \pm 0.1) \text{ mm}$$

Si la calidad del instrumento fuera inferior, por ejemplo con líneas no definidas claramente o demasiado gruesas, leeríamos:

$$232{,}8 \text{ mm} < L_m < 233{,}2 \text{ mm} \quad \text{ó} \quad L = (233{,}0 \pm 0{,}2) \text{ mm}$$

OBSERVACIONES:

a) Para la matemática 12,0 = 12. Para las mediciones 12,0 ≠ 12. Cuando escribimos 12,0 estamos indicando que podemos medir hasta la décima pero su valor es nulo (doce unidades, cero décimas); cuando escribimos 12 estamos indicando que no podemos medir hasta la décima.

b) Hay simple coincidencia entre la última cifra significativa del error y la del valor medido. Si escribimos L = (232,45 ± 0,5) mm, al indicar el valor medido decimos que podemos medir a la centésima y sin embargo no la indicamos en el error. Esto no tiene sentido. De igual modo si escribiéramos L = (232 ± 0,5) mm al indicar el valor medido sin decimales, estamos diciendo que no podemos medir a la décima y sin embargo la indicamos en el error.

c) Adoptaremos como criterio que el error se expresa con, a lo sumo, dos cifras significativas, por ejemplo: 12; 1,5; 0,05; 0,035; etc. No tiene sentido hacerlo con más: 12,5; 1,45; 0,03547; etc. ¿Por qué? Volvamos al concepto de error: "determina un intervalo de incerteza centrado en el valor medido" y tomemos el primer caso. La primera cifra significativa (1) nos da un ancho del intervalo del orden de diez unidades, la segunda (2) le agrega dos unidades, y la tercera (5) aumenta el intervalo de incerteza en cinco décimas (cinco centésimas de la primera cifra significativa), lo que es despreciable frente a las 10 unidades.

Lo analizado en este ejemplo vale para cualquier tipo de lectura sobre una escala graduada (por ejemplo: instrumentos de aguja). Supongamos ahora que queremos medir el período de un péndulo con un cronómetro digital de apreciación 0,01 s.

Disparamos manualmente el mismo cuando el péndulo pasa por un punto de referencia y lo detenemos cuando ha completado una oscilación. El cronómetro nos indica 2,86 s. ¿Cómo expresamos el resultado?. En primer lugar, en todo instrumento digital, el último dígito (por lo menos) es dudoso, entonces podríamos indicar:

$$T = (2{,}68 \pm 0{,}01)\ \text{s.}$$

pero de este modo estamos haciendo referencia solamente al error instrumental (debido al instrumento) y en este caso interviene también el operador. La demora del operador al disparar y detener el cronómetro es superior a la centésima de segundo y depende de su práctica. Debemos, por lo tanto, aumentar la cota de error por lo menos hasta la décima (o dos décimas si el operador no tiene mucha práctica. Es decir, indicar por ejemplo:

$$T = (2{,}7 \pm 0{,}2)\ \text{s.}$$

Si el disparo del cronómetro se hiciera sin intervención humana, con un fotodiodo que no introduce incerteza apreciable, entonces sí indicaríamos hasta la centésima de segundo.

Como conclusión podemos decir que no tiene sentido utilizar un instrumento de mucha exactitud (de muy alta calidad) con un método más rudimentario. En un caso como el del ejemplo, el valor obtenido por el método de mayor exactitud puede servir de valor patrón (valor verdadero convencional) del otro.

Es común indicar el valor del error igual al de la apreciación del instrumento (y por lo tanto el intervalo de incerteza como el doble de la apreciación). Sin embargo, en algunos casos es aceptable tomar como intervalo de incerteza la apreciación del instrumento cuando a criterio del observador esta consideración sea aceptable, o bien deba aumentarse cuando el observador no confíe en la capacidad de definición del instrumento.

De lo dicho surge la importancia del buen criterio del operador para dar a sus resultados el grado de confiabilidad más adecuado.

ERRORES EN UNA UNICA MEDICION INDIRECTA

Existen magnitudes que no pueden ser medidas en forma directa, es decir mediante una lectura en un instrumento y que requieren ser calculadas mediante una relación conocida midiendo otras magnitudes. Por ejemplo, determinar la superficie o el volumen de un cuerpo regular, determinar la densidad como el cociente entre la masa y el volumen, etc.

En general, si la magnitud Z se debe determinar midiendo las variables X, Y, U,.. mediante la relación: $Z = f(X,Y,U,..)$ y cada medición directa está afectada por un error: E_X, E_Y, E_{U},.. ¿Qué incerteza acompaña al valor medido de Z? Dicho de otra manera: ¿cómo se propagan los errores de las variables medidas directamente a aquella medida indirectamente?.

Nos introduciremos en el tema con algunos ejemplos sencillos para luego establecer una forma general aplicable a un caso cualquiera. Supongamos que queremos conocer el valor de la superficie de una placa rectangular de lados X e Y, ($S = X.Y$), habiéndose medido:

$$X = X_m \pm E_X$$
$$Y = Y_m \pm E_Y$$

será entonces:

$$S = X.Y = (X_m \pm E_X).(Y_m \pm E_Y) = X_m.Y_m \pm (X_m.E_Y + Y_m.E_X + E_X.E_Y)$$

llamando: $S_m = X_m.Y_m$ y despreciando el producto $E_X.E_Y$ por ser muy pequeño frente a los demás valores, nos queda:

$$E_S = X_m.E_Y + Y_m.E_X$$

y si dividimos por el valor medido, de manera de hallar el error relativo:

$$e_s = \frac{E_s}{S_m} = \frac{X_m.E_y}{X_m.Y_m} + \frac{Y_m \cdot E_x}{X_m \cdot Y_m} = e_x + e_y$$

En el caso en que la magnitud medida indirectamente sea producto de otras medidas directamente, su error relativo es la suma de los errores relativos de estas últimas.

Caso particular: si se trata de un cuadrado,

$$S = X^2 \qquad E_S = 2.X_m.E_X \qquad \text{y} \qquad e_S = 2.e_X$$

Ejercicio: demostrar que para un prisma rectangular, de lados X,Y,Z, el error en el volumen (V = X.Y.Z) es:

$$E_V = X_m.Y_m.E_Z + X_m.Z_m.E_Y + Y_m.Z_m.E_X$$

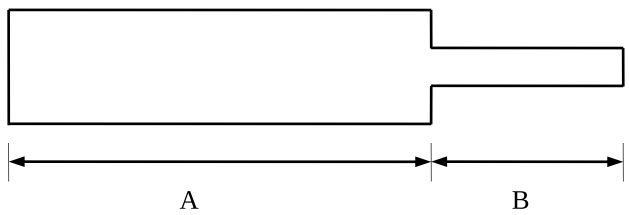
y

$$e_V = e_X + e_Y + e_Z$$

y en el caso particular para el cubo ($V = X^3$):

$$e_V = 3.e_X$$

Supongamos ahora que queremos medir la longitud de una pieza como la de la figura con un calibre y que el alcance (valor máximo que se puede medir con ese instrumento) no nos da para hacerlo directamente.



Medimos A y B de manera que:

$$L = A + B$$

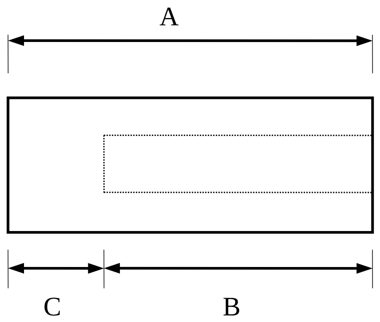
$$L = (A_m \pm E_A) + (B_m \pm E_B) = A_m + B_m \pm (E_A + E_B)$$

$$L_m = A_m + B_m \quad ; \quad E_L = E_A + E_B$$

Cuando la magnitud medida indirectamente es suma de otras, su error absoluto es la suma de los errores absolutos de las mediciones directas de éstas.

Un recurso interesante para reducir el error de apreciación aprovechando lo anterior lo ilustra este ejemplo: se debe medir el período de un péndulo con un cronómetro disparado a mano (apreciación 0,1s - 0,2 s). Si en lugar de medir un período medimos el tiempo de diez oscilaciones y lo dividimos por diez, obtendremos una medición indirecta con una incerteza diez veces menor que la apreciación ya que, al ser los períodos idénticos también lo es su incerteza. Esto puede efectuarse en otras situaciones análogas (pesadas de cuerpos iguales etc.) siempre y cuando se pueda asegurar igual incerteza en cada medición.

Supongamos que se debe determinar, en una pieza cilíndrica con un orificio, el valor del espesor C:



$$C = A - B$$

$$C = (A \pm E_A) - (B \pm E_B) = A_m - B_m \pm (E_A + E_B)$$

Como en el caso de la suma. La diferencia es un caso particular de la suma.

En todos los casos, hemos sumado los términos correspondientes al error tomando el signo positivo, es decir, hemos considerado el intervalo de incerteza poniéndonos en el caso más desfavorable. De otra manera podríamos obtener error nulo en la medición indirecta partiendo de mediciones directas afectadas por error.

Veamos una forma general para la propagación de errores en el caso de una sola medición. Sea:

$$Z = f\,(X,Y,U,...)$$

si desarrollamos Z en serie de Taylor:

$$Z = f\,(X_0, Y_0, U_0,.) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_0 (X-X_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_0 (Y-Y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_0 (U-U_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} . \left.\frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right|_0 (X-X_0)^2 + \frac{1}{2} . \left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}\right|_0 (Y-Y_0)^2 + \frac{1}{2} . \left.\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\right|_0 (U-U_0)^2$$

Si asignamos a X_0, Y_0, U_0, ... el valor medido de cada magnitud: X_m, Y_m, U_m,.. y asimilamos el incremento de las variables al error:

$$\Delta X = (X-X_0) = (X-X_m) = E_X$$

$$\Delta Y = (Y-Y_0) = (Y-Y_m) = E_Y$$

$$\Delta U = (U-U_0) = (U-U_m) = E_U \quad \text{etc.}$$

despreciando los términos de orden superior, tenemos:

$$Z = f(X_m, Y_m, U_m, ...) + \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_m,Y_m,U_m,..} . E_X + \left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_m,Y_m,U_m,...} . E_Y + \left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{X_m,Y_m,U_m,..} . E_U + ..$$

siendo $Z_m = f(X_m, Y_m, U_m, ...)$.

La suma de los términos siguientes representa la incerteza en la medición indirecta y todos los términos deben tomarse en valor absoluto al igual que el error porque si los consideramos con su signo, como las derivadas pueden ser positivas o negativas, se podría obtener incerteza nula en la magnitud medida indirectamente lo que es imposible ya que cada medición directa está afectada por un error.

Al sumar los términos en valor absoluto sumamos incertezas, es decir nos ponemos en la situación más desfavorable. (tenemos mayor seguridad de que el valor de la medición estará dentro del intervalo de incerteza).

$$E_Z = \left|\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_m,Y_m,U_m,..}\right| . E_X + \left|\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_m,Y_m,U_m,...}\right| . E_Y + \left|\left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{X_m,Y_m,U_m,..}\right| . E_U + ...$$

Ejercicio: Haciendo uso de esta ecuación, verificar los casos particulares de suma, resta y producto vistos anteriormente y de la misma manera, la división, potenciación y radicación como casos particulares de la multiplicación.

Nota: La expresión correcta sería:

$$E_x^2 = \left[\left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{X_m,\, Y_m,\, U_m,...} . E_x\right]^2 + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X_m,\, Y_m,\, U_m,...} . E_Y\right]^2 + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial U}\right|_{X_m,\, Y_m,\, U_m,...} . E_U\right]^2 + ...$$

Sin embargo, a los efectos de cálculos sencillos, la expresión anterior conduce a los mismos resultados y es de más fácil aplicación.