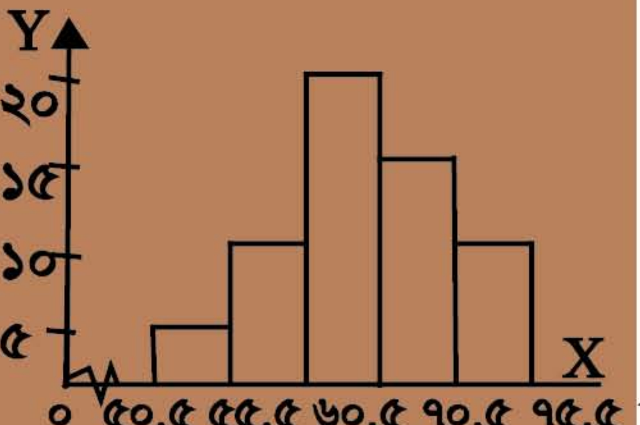
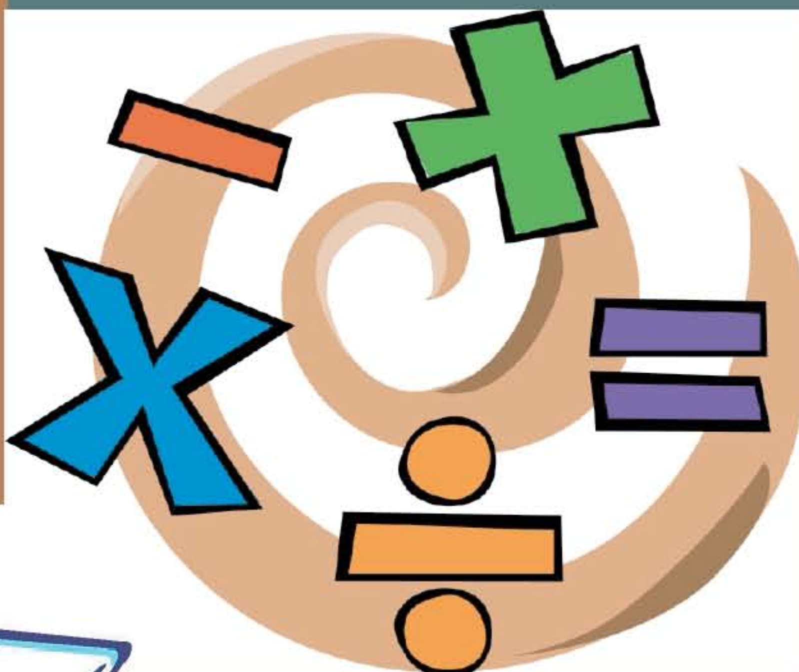
গণিত

নবম-দশম শ্রেণি





জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

সপ্তদশ অধ্যায়

পরিসংখ্যান (Statistics)

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির উন্নয়নের অগ্রযাত্রায় তথ্য ও উপাত্তের অবদানের ফলে পৃথিবী পরিণত হয়েছে বিশ্বগ্রামে। তথ্য ও উপাত্তের দ্রুত সঞ্চালন ও বিস্তারের জন্য সম্ভব হয়েছে বিশ্বায়নের। তাই উন্নয়নের ধারা অব্যাহত রাখা ও বিশ্বায়নে অংশগ্রহণ অবদান রাখতে হলে তথ্য ও উপাত্ত সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জন এ স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য অপরিহার্য। প্রাসঙ্গিকভাবে শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের চাহিদা মেটানোর লক্ষে ষষ্ঠ শ্রেণি থেকে তথ্য ও উপাত্তের আলোচনা করা হয়েছে এবং ধাপে ধাপে শ্রেণিভিত্তিক বিষয়বস্তুর বিন্যাস করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এ শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা, কেন্দ্রিয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি সম্বন্ধে জানবে ও শিখবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা–

- ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রিয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রিয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উপাত্তের উপস্থাপন : আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। আর উপাত্তসমূহের সারণিভুক্ত করা হলো উপাত্তের উপস্থাপন। আগের শ্রেণিতে আমরা উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বুঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতি পুনরালোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১। কোন এক শীত মৌসুমে শ্রীমঙ্গলের জানুয়ারি মাসের ৩১ দিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা (সেলসিয়াস) নিচে দেওয়া হলো। সর্বনিম্ন তাপমাত্রার (সেলসিয়াস) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

$14°, 14°, 14°, 13°, 12°, 13°, 10°, 10°, 11°, 12°, 11°, 10°, 9°, 8°, 9°,$

$11°, 10°, 10°, 8°, 9°, 7°, 6°, 6°, 6°, 6°, 7°, 8°, 9°, 9°, 8°, 7°$।

সমাধান : এখানে তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা ৬ এবং বড় সংখ্যা 14।

সুতরাং উপাত্তের পরিসর $= (14 - 6) + 1 = 9$।

এখন শ্রেণি ব্যবধান যদি ৩ নেওয়া হয় তবে শ্রেণি সংখ্যা হবে $\frac{9}{3}$ বা 3।

শ্রেণি ব্যবধান ৩ নিয়ে তিন শ্রেণিতে উপাত্তসমূহ বিন্যাস করলে গণসংখ্যা (ঘটন সংখ্যাও বলা হয়) নিবেশন সারণি হবে নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা
$6° - 8°$	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
$9° - 11°$	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
$12° - 14°$	~~IIII~~ II	7
		মোট 31।

কাজ : তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থীর দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর।

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা (*Cumulative Frequency*) **:**

উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ব্যবধান 3 ধরে শ্রেণিসংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি করা হয়েছে। উল্লেখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা 3। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো $6° - 8°$। এই শ্রেণির নিম্নসীমা $6°$ এবং উচ্চসীমা $8°$ সে.। এই শ্রেণির গণসংখ্যা 11।

দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 11 এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13 যোগ করে পাই 24। এই 24 হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে 11। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা 24 এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে $24 + 7 = 31$, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ 1 এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ :

তাপমাত্রা (সেলসিয়াসে)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$6^\circ - 8^\circ$	11	11
$9^\circ - 11^\circ$	13	$(11 + 13) = 24$
$12^\circ - 14^\circ$	7	$(24 + 7) = 31$

উদাহরণ ২। নিচে 40 জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষায় ইংরেজিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো (পূর্ণ নম্বর 100)। প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

70, 40, 35, 60, 55, 58, 45, 60, 65, 80, 70, 46, 50, 60, 65, 70, 58, 60, 48, 70, 36, 85, 60, 50, 46, 65, 55, 61, 72, 85, 90, 68, 65, 50, 40, 56, 60, 65, 46, 76|

সমাধান : উপাত্তের পরিধি = (সর্বোচ্চ মান – সর্বনিম্নমান) + 1

$= (90 - 35) + 1$

$= 55 + 1$

$= 56$

শ্রেণি ব্যবধান যদি 5 ধরা হয়, তবে শ্রেণি সংখ্যা $= \dfrac{56}{5}$

$= 11{\cdot}2$ বা 12

সুতরাং শ্রেণি ব্যবধান ৫ ধরে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হবে নিম্নরূপ :

প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
35 – 39	||	2	2	70 – 74	||||	4	4 + 31 = 35
40 – 44	||	2	2 + 2 = 4	75 – 79	|	1	1 + 35 = 36
45 – 49	卌	5	5 + 4 = 9	80 – 84	|	1	1 + 36 = 37
50 – 54	|||	3	3 + 9 = 12	85 – 89	||	2	2 + 37 + 39
55 – 59	卌	5	5 + 12 = 17	90 – 94	|	1	1 + 39 = 40
60 – 64	卌|||	8	8 + 17 = 25	95 – 99		0	0 + 40 = 40
65 – 69	卌|	6	6 + 25 = 31				

চলক : আমরা জানি সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। উপাত্তে ব্যবহৃত সংখ্যাসমূহ হলো চলক। যেমন,

উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা নির্দেশক সংখ্যাগুলো চলক। তদনুরূপ উদাহরণ ২ এ প্রাপ্ত নম্বরগুলো ব্যবহৃত উপাত্তের চলক।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক : পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদনুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যেসকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১–এ ব্যবহৃত তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সংশিষ্ট উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক হচ্ছে অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 8.5° ও 5.5° এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে 11.5° ও 8.5° ইত্যাদি।

কাজ : তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশণ ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

উপাত্তের লেখচিত্র : আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝার জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। ৮ম শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কিভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশণ ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ, পাইচিত্র ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা বহুভুজ (*Frequency Polygon*) : ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ এঁকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ৩। কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কিলোগ্রাম) গণসংখ্যা নিবেশণ হলো নিম্নরূপ:

ওজন (কেজি)	৪6 − 50	51 − 55	56 − 60	61 − 65	66 − 70
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	5	10	20	15	10

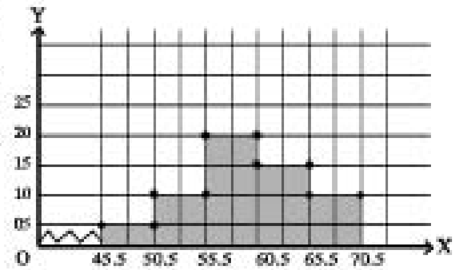
(ক) গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁক।

(খ) আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

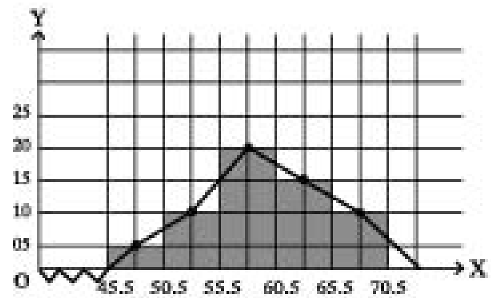
সমাধান : প্রদত্ত সারণিতে উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধান বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করা হলে প্রদত্ত সারণি হবে :

শ্রেণি ব্যবধান : ওজন (কেজি)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা	শ্রেণি মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
46 − 50	45·5 − 50·5	48	5
51 − 55	50·5 − 55·5	53	10
56 − 60	55·5 − 60·5	58	20
61 − 65	60·5 − 65·5	63	15
66 − 70	65·5 − 70·5	68	10

(ক) ছক কাগজের প্রতি ঘরকে এক একক ধরে x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা এবং y-অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নিয়ে আঁয়তলেখ আঁকা হয়েছে। x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা ৪৫·৫ থেকে আরম্ভ হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে ৪৫·৫ পর্যন্ত পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে ভাঙ্গা চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।



(খ) আয়তলেখ হতে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকার জন্য প্রাপ্ত আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়েছে (পাশের চিত্রে দেখানো হলো)। গণসংখ্যা বহুভুজ সুন্দর দেখানোর জন্য প্রথম ও শেষ আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করা হয়েছে।

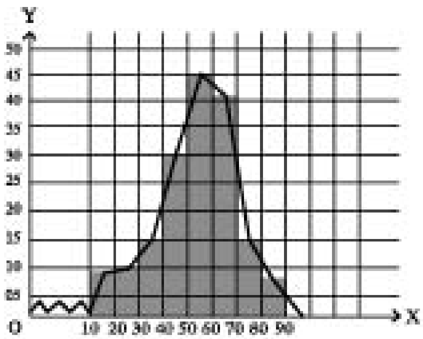


> **গণসংখ্যা বহুভুজ** : অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধানের বিপরীতে গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ।

উদাহরণ ৪। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির বহুভুজ অঙ্কন কর।

শ্রেণি ব্যবধান	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
মধ্যবিন্দু	15	25	35	45	55	65	75	85
গণসংখ্যা	8	10	15	30	45	41	15	7

সমাধান : x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের 5 একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশণের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু যা শ্রেণির মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করি। এখন চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তবিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তবিন্দুদ্বয়কে শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।



> **কাজ :** তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

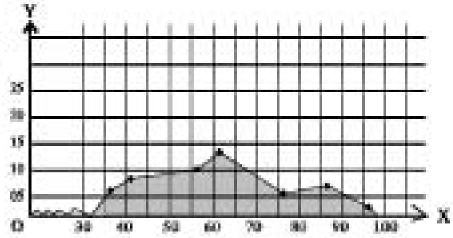
উদাহরণ ৫। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর বিজ্ঞান বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক (আয়তলেখ ব্যবহার না করে)।

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

সমাধান : এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক।

শ্রেণি ব্যবধান	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
মধ্যবিন্দু	$\frac{40+31}{2} = 35 \cdot 5$	45·5	55·5	65·5	75·5	85·5	95·5
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ২ ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দুর ১০ একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ১ ঘরকে গণসংখ্যার ১ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।



কাজ : ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশণ থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি.)	141–150	151–160	161–170	171–180	181–190
গণসংখ্যা	5	16	56	11	8

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা : কোনো উপাত্তের শ্রেণি বিন্যাসের পর শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা x-অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখচিত্র বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৬। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি হলো :

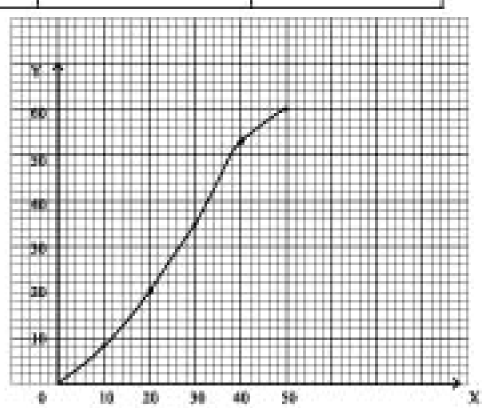
প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 − 10	11 − 20	21 − 30	31 − 40	41 − 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7

এই গণসংখ্যা নিবেশণের অজিভ রেখা আঁক।

সমাধান : প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশণের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 − 10	11 − 20	21 − 30	31 − 40	41 − 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	8	8 + 12 = 20	15 + 20 = 35	18 + 35 = 53	7 + 53 = 60

x–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি দুই ঘরকে শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমার একক এবং y–অক্ষ বরাবর ছক কাগজের এক ঘরকে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো



কাজ : কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির 50 ও তার চেয়ে বেশি নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের নম্বরের চেয়ে বেশি নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অজিত রেখা আঁক।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা : সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা ও এর পরিমাপ সম্বন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশণ সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রিয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো : (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় : আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৭। নিচে কোনো একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	25 − 34	35 − 44	45 − 54	55 − 64	65 − 74	75 − 84	85 − 94
গণসংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

সমাধান : এখানে শ্রেণি ব্যাপ্তি দেওয়া আছে বিধায় শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা জানা যায় না। এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির ঊর্ধ্বমান} + \text{শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান $x_i (i = 1.....,k)$ হয় তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$(f_i x_i)$
25 − 34	29·5	5	147·5
35 − 44	39·5	10	395·0
45 − 54	49·5	15	742·5
55 − 64	59·5	20	1190·0
65 − 74	69·5	30	2085·0
75 − 84	79·5	16	1272·0
85 − 94	89·5	4	358·0
	মোট	n = 100	6190·00

$$\text{নির্ণেয় গাণিতিক গড়} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{100}\times 6190$$
$$= 61{\cdot}9$$

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সহজ পদ্ধতি)

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ।

সহজ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ –

১। শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২। মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩। প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে তাকে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে ধাপ বিচ্যুতি $\mathrm{u} = \dfrac{\text{মধ্যমান} - \text{আনুমানিক গড়}}{\text{ব্যাপ্তি}}$ নির্ণয় করা

৪। ধাপ বিচ্যুতিকে সংশিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫। বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাঙ্খিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি : এ পদ্ধতিতে উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড় নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো :

$\bar{x} = a + \dfrac{\sum f_i u_i}{n} \times h$ যেখানে, $\bar{x}$ = নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, f_i = i-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, $u_i f_i$ = i তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি h = শ্রেণি ব্যাপ্তি

উদাহরণ ৮। কোন দ্রব্যের উৎপাদনে বিভিন্ন পর্যায়ে যে খরচসমূহ (শত টাকায়) হয় তা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় খরচ নির্ণয় কর।

উৎপাদন খরচ (শত টাকায়)	2–6	6–10	10–14	14–18	18–22	22–26	26–30	30–34
গণসংখ্যা	1	9	21	47	52	36	19	3

সমাধান : সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
$2-6$	4	1	-4	-4
$6-10$	8	9	-3	-27
$10-14$	12	21	-2	-42
$14-18$	16	47	-1	-47
$18-22$	$20 \leftarrow a$	52	0	0
$22-26$	24	36	1	36
$26-30$	28	19	2	38
$30-34$	32	3	3	9
মোট		188		-37

গড় $\bar{x} = a + \frac{\sum f_i u_i}{n} \times h$

$= 20 + \frac{-37}{188} \times 4$

$= 20 - \cdot 79$

$= 19 \cdot 21$

$\therefore$ উৎপাদনে আনুমানিক গড় খরচ 19 শত টাকা।

গুরুত্ব যুক্ত উপাত্তের গড় নির্ণয়

অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়।

যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ হয় এবং এদের গুরুত্ব যদি $w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n$ হয়, তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

উদাহরণ ৯। কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ের কয়েকটি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা নিচের সারণিতে উপস্থাপন করা হলো। উক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	গণিত	পরিসংখ্যান	ইংরেজি	বাংলা	প্রাণিবিদ্যা	রাষ্ট্রবিজ্ঞান
পাশের হার (শতকরায়)	70	80	50	90	60	85
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	80	120	100	225	135	300

সমাধান : এখানে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা দেওয়া আছে। পাশের হারের ভার হলো শিক্ষার্থীর সংখ্যা। যদি পাশের হারের চলক x এবং শিক্ষার্থীর সংখ্যা চলক w ধরা হয়, তবে গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ :

বিভাগের নাম	x_i	w_i	$x_i \ w_i$
গণিত	70	80	5600
পরিসংখ্যান	80	120	9600
ইংরেজি	50	100	5000
বাংলা	90	225	20250
প্রাণিবিদ্যা	60	135	8100
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300	25500
মোট		960	74050

$$\overline{x_w}=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{6}w_i}=\frac{74050}{960}=77\cdot14$$

পাশের গড় হার ৭৭·১৪

কাজ : তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি. পাশের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

মধ্যক

৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোন পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত সমান দুইভাগে ভাগ করে সেই মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক। আমরা আরও জেনেছি যে, যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা কহয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ১০। নিচের 51 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার (সে.মি.) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের গণসংখ্যা সারণি

উচ্চতা সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	22	38	46	51

এখানে n = 51 যা বিজোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যক = $\frac{51+1}{2}$ তম পদের মান

= 26 তম পদের মান = 165

নির্ণেয় মধ্যক 165 সে.মি.।

লক্ষ করি : 23 থেকে 38 তম পদের মান 165।

উদাহরণ ১১ : নিচের ৬০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর :

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1

সমাধান : মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো :

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	2	6	10	13	20	30	46	52	56	59	60

এখানে, $n = 60$ যা জোড় সংখ্যা।

$$\therefore \text{ মধ্যক } = \frac{\frac{60}{2} \text{ তম ও } \frac{60}{2}+1 \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{2}$$

$$= \frac{30 \text{ তম ও } 31 \text{ তম পদ দুইটির মানের সমষ্টি}}{2}$$

$$= \frac{70+80}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 75।

> **কাজ :** ১। তোমাদের শ্রেণির 49 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।
> ২। পূর্বের সমস্যা থেকে 9 জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে 40 জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়

যদি শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হয় n, তবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের $\frac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\frac{n}{2}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো মধ্যক $= L+\left(\frac{n}{2}-F_c\right)\times\frac{h}{f_m}$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১২।

সময় (সেকেন্ডে)	30−35	36−41	42−47	48−53	54−59	60−65
গণসংখ্যা	3	10	18	25	8	6

(ক) গণসংখ্যা সারণি বলতে কী বুঝ?

(খ) সারণি থেকে মধ্যক নির্ণয় কর।

(গ) উপাত্তের বহুভুজ অঙ্কন কর।

সমাধান :

(ক) প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে নির্দিষ্ট শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণের মাধ্যমে বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করাকে গণসংখ্যা সারণি বলে।

(খ) মধ্যক নির্ণয়ের জন্য গণসংখ্যা নিবেশন সারণি :

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$30-35$	3	3
$36-41$	10	13
$42-47$	18	31
$48-53$	25	56
$54-59$	8	64
$60-65$	6	70
	$n=70$	

এখানে, $n=70$ এবং $\frac{n}{2}=\frac{70}{2}$ বা 35।

অতএব, মধ্যক 35তম পদের মান। 35 তম পদের অবস্থান $48-53$ শ্রেণিতে। অতএব মধ্যক শ্রেণি $48-53$।

সুতরাং $L=48$, $F_c=31$, $f_m=25$ এবং $h=6$।

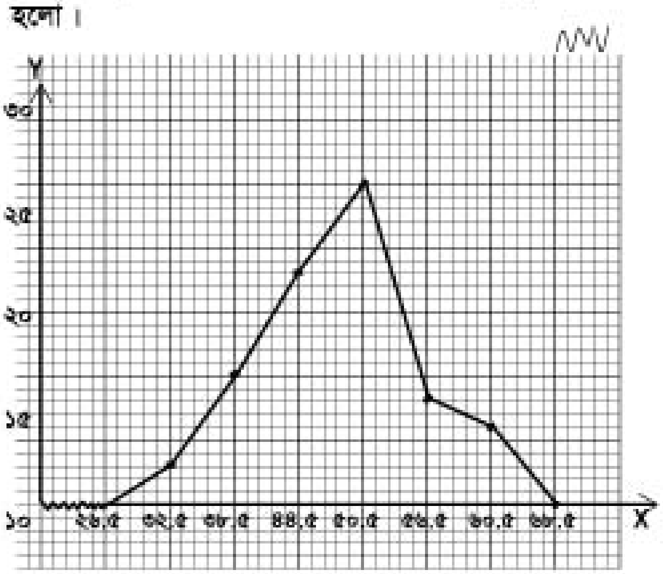
$$=48+(35-31)\times\frac{6}{25}=48+4\times\frac{6}{25}=48+0.96=48.96$$

নির্ণেয় মধ্যক 48.96

(গ) বহুভুজ অঙ্কনের জন্য সারণি :

শ্রেণি ব্যবধান	শ্রেণির মধ্যমান	গণসংখ্যা
$30-35$	32.5	3
$36-41$	38.5	10
$42-47$	44.5	18
$48-53$	50.5	25
$54-59$	56.5	8
$60-65$	62.5	6

প্রথম শ্রেণির পূর্বের শ্রেণির মধ্যমান 26.5 এবং শেষ শ্রেণির পরের শ্রেণির মধ্যমান 68.5। এবার x অক্ষ বরাবর শ্রেণির মধ্যমান সুবিধাজনক একক নিয়ে যেখানে ভাজ্য চিহ্নটি 0—26.5 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা প্রতি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।



কাজ : তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রচুরক

৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোন উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোন উপাত্তে যদি কোন সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তের কোন প্রচুরক নেই। এখানে সূত্র ব্যবহার করে কীভাবে শ্রেণিবিন্যাস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়

শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়ের সূত্র হলো :

প্রচুরক = $L+\dfrac{f_1}{f_1+f_2}\times h$ যেখানে L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান,

f_1 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা, f_2 = প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা–পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h = শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১৩। নিচের সারণিটি লক্ষ কর।

শ্রেণিব্যাপ্তি	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
গণসংখ্যা	4	6	8	12	9	7	4

(ক) কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী?

(খ) প্রদত্ত সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

(গ) উপাত্তের অজিভ রেখা অংকন কর।

সমাধান :

(ক) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে কোনো একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার এই প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে।

(খ) প্রচুরক নির্ণয়ের সারণি:

শ্রেণি	গণসংখ্যা
31–40	4
41–50	6
51–60	8
61–70	12
71–80	9
81–90	7
91–100	4

প্রচুরক $= L = \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

এখানে, গণসংখ্যা সর্বাধিক 12 আছে 61−70 শ্রেণিতে।

সুতরাং $L = 61$

$f_1 = 12 - 8 = 4$

$f_2 = 12 - 9 = 3$

$h = 10$

$\therefore$ প্রচুরক $= 61 + \dfrac{4}{4+3} \times 10 = 61 + \dfrac{4}{7} \times 10$

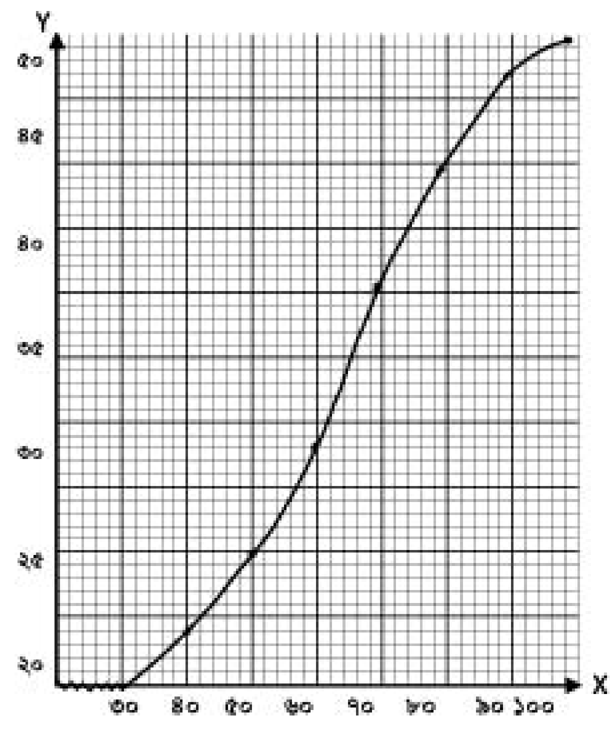
$= 61 + \dfrac{40}{7} = 61 + 5.7 = 66.7$

নির্ণেয় প্রচুরক 66.7

(গ) অজিভ রেখা অঙ্কনের জন্য সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
31−40	30−40	4	4
41−50	40−50	6	10
51−60	50−60	8	18
61−70	60−70	12	30
71−80	70−80	9	39
81−90	80−90	7	46
91−100	90−100	4	50

x অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিব্যাপ্তি সুবিধাজনক একক নিয়ে যেখানে (ভাঁজ) চিহ্নটি 0−30 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে শ্রেণির উর্ধ্বসীমা বরাবর বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি। অতপর: x অক্ষে 30 থেকে চিহ্নিত বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে যোগ করি। এটিই নির্ণেয় অজিভ রেখা।



উদাহরণ ১৪। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর :

শ্রেণি	গণসংখ্যা
41−50	25
51−60	20
61−70	15
71−80	8

সমাধান : এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক বার 25 আছে (41−50) শ্রেণিতে। সুতরাং, প্রচুরক এই শ্রেণিতে আছে। আমরা জানি,

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$$

এখানে, $L = 41$ [প্রথম শ্রেণিতে গণসংখ্যা বেশি হলে, পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য]

$f_1 = 25 - 0 = 25$

$f_2 = 25 - 20 = 5$

$$\therefore \text{ প্রচুরক} = 41 + \frac{25}{25+5} \times 10$$

$$= 41 + \frac{25}{30} \times 10 = 41 + 8.33$$

$$= 49.33$$

নির্ণেয় প্রচুরক 49.33

> শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রথম শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার আগের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়

উদাহরণ ১৫। নিচের গণসংখ্যা নিবেশণ সারণির প্রচুরক নির্ণয় কর :

শ্রেণি	গণসংখ্যা
11 − 20	4
21 − 30	16
31 − 40	20
41 − 50	25

সমাধান :

এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক বার 25 আছে (41−50) শ্রেণিতে। এই শ্রেণিতে প্রচুরক বিদ্যমান

আমরা জানি,

$$\text{প্রচুরক} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$$

এখানে, $L = 41$

$f_1 = 25 - 20 = 5$

$f_2 = 25 - 0$ [শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, পরবর্তী শ্রেণির ঘটন সংখ্যা শূন্য ধরা হয়]

$h = 10$

অতএব, প্রচুরক $= 41 + \frac{5}{25+5} \times 10$

$= 41 + \frac{5}{30} \times 10$

$= 41 + \frac{5}{3} = 41 + 1.67$

$= 42.67$

নির্ণেয় প্রচুরক 42.67 (প্রায়)।

অনুশীলনী ১৭

১। উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি ?

(ক) শ্রেণি সীমা (খ) শ্রেণির মধ্যবিন্দু (গ) শ্রেণি সংখ্যা (ঘ) শ্রেণির গণসংখ্যা

২। পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়

(ক) প্রচুরক (খ) কেন্দ্রিয় প্রবণতা (গ) গড় (ঘ) মধ্যক

৩।

তাপমাত্রা	6°–8°	8°–10°	10°–12°
গণসংখ্যা	5	9	4

সারণিতে-

(i) শ্রেণিব্যাপ্তি 3

(ii) মধ্যক শ্রেণি 8°–10°

(iii) তাপমাত্রা অবিচ্ছিন্ন চলক

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৪। আয়তলেখ অঙ্কন করতে দরকার–

(i) x অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিব্যাপ্তি

(ii) y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা

(iii) শ্রেণির মধ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৫। উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক–

(i) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ :

(ii) সবচেয়ে বেশী বার উপস্থাপিত মান

(iii) সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii

গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের 10 দিনের তাপমাত্রার (সেন্টিগ্রেড) পরিসংখ্যান হলো $10°, 9°, 8°, 6°, 11°, 12°, 7°, 13°, 14°, 5°$। এই পরিসংখ্যানের প্রেক্ষিতে (৬–৮) পর্যন্ত প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও ।

৬। উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি ?

(ক) 12° (খ) 5° (গ) 14° (ঘ) প্রচুরক নেই

৭। উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি ?

(ক) 8° (খ) 8.5° (গ) 9.5° (ঘ) 9°

৮। উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি ?

(ক) 9.5° (খ) 9° (গ) 8.5° (ঘ) 8°

৯। সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n , মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L , মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F_c , মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা f_m এবং শ্রেণি ব্যাপ্তি h ; এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র ?

(ক) $L+\left(\dfrac{n}{2}-F_c\right)\times\dfrac{h}{f_m}$ (খ) $L+\left(\dfrac{n}{2}-f_m\right)\times\dfrac{h}{F_m}$

(গ) $L-\left(\dfrac{n}{2}-F_c\right)\times\dfrac{h}{f_m}$ (ঘ) $L-\left(\dfrac{n}{2}-f_n\right)\times\dfrac{h}{F_m}$

১০। ১০ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁক।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

১১। নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	45	50	55	60	65	70
গণসংখ্যা	2	6	8	16	12	6

১২। কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ:

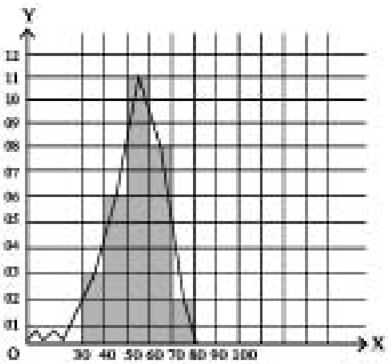
76, 65, 98, 79, 64 68, 56, 73, 83, 57
55, 92, 45, 77, 87 46, 32, 75, 89, 48
97, 88, 65, 73, 93 58, 41, 69, 63, 39
84, 56, 45, 73, 93 62, 67, 69, 65, 53
78, 64, 85, 53, 73 34, 75, 82, 67, 62

ক. প্রদত্ত তথ্যটির ধরণ কীরূপ? কোন নিবেষণে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে ?

খ. উপর্যুক্ত শ্রেণি ব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেষণ তৈরি কর।

গ. সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

১৩।



ক. উপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ. চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. 'খ'–অংশে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেষণটির মধ্যক নির্ণয় কর।

১৪। কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	45−49	50−54	55−59	60−64	65−69	70−74
গণসংখ্যা	4	8	10	20	12	6

(ক) মধ্যক নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।
(খ) প্রদত্ত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।
(গ) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন কর।

১৫। তাপমাত্রা পরিবর্তনশীল। বাংলাদেশের সাধারণত জানুয়ারি মাসের ১ম সপ্তাহের তাপমাত্রা কম এবং জুন মাসে ৪র্থ সপ্তাহে তাপমাত্রা বেশি থাকে। ৫২ সপ্তাহের তাপমাত্রা ডিগ্রী সেলসিয়াস এককে নিচরূপ:

35, 30, 27, 42, 20, 19, 27, 36, 39, 14, 15, 38, 37, 40, 40, 12, 10, 9, 7, 20, 21, 24, 33, 30, 29, 21, 19, 31, 28, 26, 32, 30, 22, 23, 24, 41, 26, 23, 25, 22, 17, 19, 21, 23, 8, 13, 23, 24, 20, 32, 11, 17

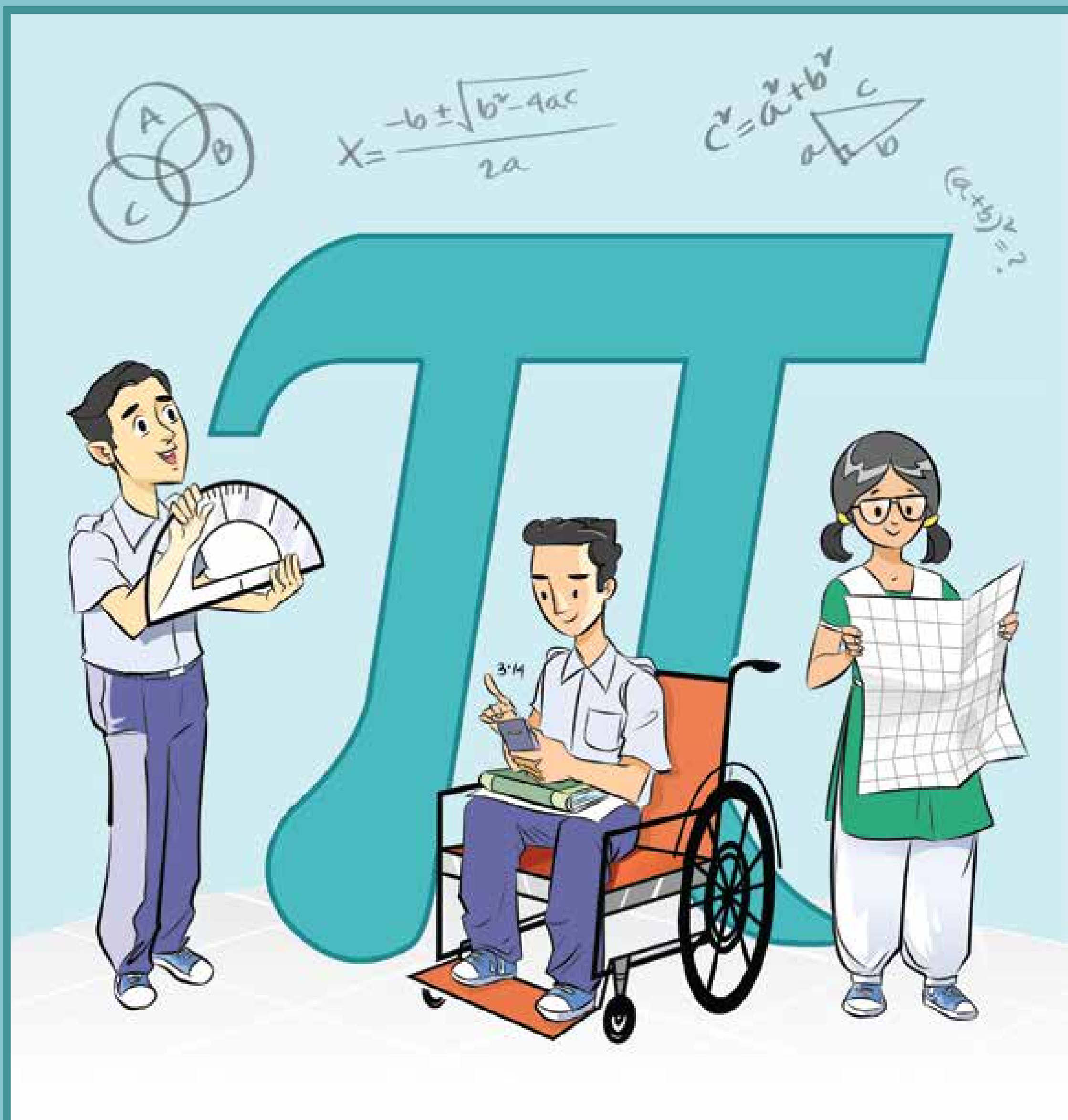
(ক) শ্রেণিব্যাপ্তি ৫ ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ণয় কর।

(খ) প্রদত্ত উপাত্তসমূহের সারণি আকারে প্রকাশ করে সারণি থেকে সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ তাপমাত্রার গড় নির্ণয় কর।

(গ) খ এর সারণি ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কনের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গণিত

নবম-দশম শ্রেণি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

অধ্যায় ১৭

পরিসংখ্যান (Statistics)

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির উন্নয়নের অগ্রযাত্রায় তথ্য ও উপাত্তের অবদানের ফলে পৃথিবী পরিণত হয়েছে বিশ্বগ্রামে। তথ্য ও উপাত্তের দ্রুত সঞ্চালন ও বিস্তারের জন্য সম্ভব হয়েছে বিশ্বায়নের। তাই উন্নয়নের ধারা অব্যাহত রাখা ও বিশ্বায়নে অংশগ্রহণ ও অবদান রাখতে হলে তথ্য ও উপাত্ত সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান অর্জন এ স্তরের শিক্ষার্থীদের জন্য অপরিহার্য। প্রাসঙ্গিকভাবে শিক্ষার্থীর জ্ঞান অর্জনের চাহিদা মেটানোর লক্ষে ৬ষ্ঠ শ্রেণি থেকে তথ্য ও উপাত্তের আলোচনা করা হয়েছে এবং ধাপে ধাপে শ্রেণিভিত্তিক বিষয়বস্তুর বিন্যাস করা হয়েছে। এরই ধারাবাহিকতায় এ শ্রেণিতে শিক্ষার্থীরা ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ, অজিভ রেখা, কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ইত্যাদি সম্বন্ধে জানবে ও শিখবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- ক্রমযোজিত গণসংখ্যা, গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখার সাহায্যে উপাত্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির প্রয়োজনীয়তা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির সাহায্যে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক নির্ণয় করতে পারবে।
- গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা লেখচিত্রের ব্যাখ্যা করতে পারবে।

উপাত্তের উপস্থাপন (Presentation of Data): আমরা জানি, গুণবাচক নয় এমন সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। অনুসন্ধানাধীন উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় না। প্রয়োজন হয় উপাত্তগুলো বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করা। আর উপাত্তসমূহ কীভাবে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করতে হয় তা আমরা আগে শিখেছি। আমরা জানি, কোনো উপাত্ত সারণিভুক্ত করতে হলে প্রথমে তার পরিসর নির্ধারণ করতে হয়। এরপর শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়। এখানে বুঝার সুবিধার্থে নিচের উদাহরণের মাধ্যমে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার পদ্ধতি পুনরালোচনা করা হলো।

উদাহরণ ১. কোনো এক শীত মৌসুমে শ্রীমঙ্গালে জানুয়ারি মাসের 31 দিনের সর্বনিম্ন তাপমাত্রা ডিগ্রী সেলসিয়াসে নিচে দেওয়া হলো। সর্বনিম্ন তাপমাত্রার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

$14^\circ, 14^\circ, 14^\circ, 13^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 11^\circ, 10^\circ, 9^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 11^\circ, 10^\circ, 10^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 7^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 6^\circ, 7^\circ, 8^\circ, 9^\circ, 9^\circ, 8^\circ, 7^\circ$

সমাধান: এখানে তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তের সবচেয়ে ছোট সংখ্যা 6 এবং বড় সংখ্যা 14।
সুতরাং উপাত্তের পরিসর $= (14 - 6) + 1 = 9$
এখন শ্রেণি ব্যবধান যদি 3 নেওয়া হয় তবে শ্রেণি সংখ্যা হবে $\frac{9}{3}$ বা 3।

শ্রেণি ব্যবধান 3 নিয়ে তিন শ্রেণিতে উপাত্তসমূহ বিন্যাস করলে গণসংখ্যা (ঘটন সংখ্যাও বলা হয়) নিবেশন সারণি হবে নিম্নরূপ:

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা ঘটন সংখ্যা
$6^\circ - 8^\circ$	$\cancel{\|\|\|\|}\ \cancel{\|\|\|\|}\ \|$	11
$9^\circ - 11^\circ$	$\cancel{\|\|\|\|}\ \cancel{\|\|\|\|}\ \|\|\|$	13
$12^\circ - 14^\circ$	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|\|$	7
	মোট	31

> **কাজ:** তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত সকল শিক্ষার্থীর দুইটি দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজনের (কেজিতে) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

ক্রমযোজিত সংখ্যা (Cumulative Frequency): উদাহরণ ১ এর শ্রেণি ব্যবধান 3 ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণ করে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা হয়েছে। উল্লেখিত উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা 3। প্রথম শ্রেণির সীমা হলো $6^\circ - 8^\circ$। এই শ্রেণির নিম্নসীমা 6° এবং উচ্চসীমা 8° সে. এবং গণসংখ্যা 11। একইভাবে দ্বিতীয় শ্রেণির সীমা $9^\circ - 11^\circ$ এবং গণসংখ্যা 13। এখন প্রথম শ্রেণির গণসংখ্যা 11 এর সাথে দ্বিতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা 13 যোগ করে পাই 24। এই 24 হবে দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। আর প্রথম শ্রেণি দিয়ে শুরু হওয়ায় এই শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা হবে 11। আবার দ্বিতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা 24 এর সাথে তৃতীয় শ্রেণির গণসংখ্যা যোগ করলে $24 + 7 = 31$, যা তৃতীয় শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা। এইভাবে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি করা হয়। উপরের আলোচনার প্রেক্ষিতে উদাহরণ ১ এর তাপমাত্রার ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি নিম্নরূপ:

তাপমাত্রা (সেলসিয়াস)	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$6^\circ - 8^\circ$	11	11
$9^\circ - 11^\circ$	13	$(11 + 13) = 24$
$12^\circ - 14^\circ$	7	$(24 + 7) = 31$

উদাহরণ ২. নিচে 40 জন শিক্ষার্থীর বার্ষিক পরীক্ষার ইংরেজীতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হলো (পূর্ণ নম্বর 100)। প্রাপ্ত নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

70, 40, 35, 60, 55, 58, 45, 60, 65, 80, 70, 46, 50, 60, 65, 70, 58, 60, 48, 70, 36, 85, 60, 50, 46, 65, 55, 61, 72, 85, 90, 68, 65, 50, 40, 56, 60, 65, 46, 76

সমাধান: উপাত্তের পরিসর $=$ (সর্বোচ্চ মান $-$ সর্বনিম্ন মান) $+ 1$
$= (90 - 35) + 1 = 55 + 1 = 56$

শ্রেণি ব্যবধান যদি 5 ধরা হয়, তবে শ্রেণি সংখ্যা = $\frac{56}{5} = 11.2$ বা 12 [যদি দশমিক চলে আসে তবে পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা নিতে হয়]

সুতরাং শ্রেণি ব্যবধান 5 ধরে ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হবে নিম্নরূপ:

প্রাপ্ত নম্বর	টালি চিহ্ন	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$35 - 39$	||	2	2
$40 - 44$	||	2	$2 + 2 = 4$
$45 - 49$	~~||||~~	5	$5 + 4 = 9$
$50 - 54$	|||	3	$3 + 9 = 12$
$55 - 59$	~~||||~~	5	$5 + 12 = 17$
$60 - 64$	~~||||~~ ||	7	$7 + 17 = 24$
$65 - 69$	~~||||~~ |	6	$6 + 24 = 30$
$70 - 74$	~~||||~~	5	$5 + 30 = 35$
$75 - 79$	|	1	$1 + 35 = 36$
$80 - 84$	|	1	$1 + 36 = 37$
$85 - 89$	||	2	$2 + 37 = 39$
$90 - 94$	|	1	$1 + 39 = 40$

চলক (Variable): আমরা জানি সংখ্যাসূচক তথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের উপাত্ত। উপাত্তে ব্যবহৃত সংখ্যাসমূহ চলকের মান নির্দেশ করে। যেমন, উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা ও উদাহরণ ২ এ প্রাপ্ত নম্বর চলক।

বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক (Discrete and Continuous Variable): পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত চলক দুই প্রকারের হয়। যেমন বিচ্ছিন্ন চলক ও অবিচ্ছিন্ন চলক। যে চলকের মান শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যা হয় তা বিচ্ছিন্ন চলক, যেমন উদাহরণ ২ এ ব্যবহৃত প্রাপ্ত নম্বর। তদনুরূপ জনসংখ্যা নির্দেশক উপাত্তে পূর্ণসংখ্যা ব্যবহৃত হয়। তাই জনসংখ্যামূলক উপাত্তের চলক হচ্ছে বিচ্ছিন্ন চলক। আর যে সকল চলকের মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে, সে সকল চলক অবিচ্ছিন্ন চলক। যেমন উদাহরণ ১ এ তাপমাত্রা নির্দেশক উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। এ ছাড়া বয়স, উচ্চতা, ওজন ইত্যাদি সংশ্লিষ্ট উপাত্তে যেকোনো বাস্তব সংখ্যা ব্যবহার করা যায়। তাই এগুলোর জন্য ব্যবহৃত চলক হচ্ছে অবিচ্ছিন্ন চলক। অবিচ্ছিন্ন চলকের দুইটি মানের মধ্যবর্তী যেকোনো সংখ্যাও ঐ চলকের মান হতে পারে। অনেক সময় শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার প্রয়োজন হয়। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন করার জন্য কোনো শ্রেণির উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির নিম্নসীমার মধ্যবিন্দু নিয়ে সেই শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা এবং পরবর্তী শ্রেণির প্রকৃত নিম্নসীমা নির্ধারণ করা হয়। যেমন, উদাহরণ ১ এ প্রথম শ্রেণির প্রকৃত উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে $8.5°$ ও $5.5°$ এবং দ্বিতীয় শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমা যথাক্রমে $11.5°$ ও $8.5°$, ইত্যাদি।

কাজ: তোমাদের শ্রেণির শিক্ষার্থীদের নিয়ে অনূর্ধ্ব ৪০ জনের দল গঠন কর। দলের সদস্যদের ওজন/উচ্চতা নিয়ে দলে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর।

উপাত্তের লেখচিত্র (Graphs or Plots of Data): আমরা দেখেছি যে, অনুসন্ধানাধীন সংগৃহীত উপাত্ত পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। এগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিভুক্ত বা ক্রমযোজিত সারণিভুক্ত করা হলে এদের সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা ও সিদ্ধান্ত নেওয়া সহজ হয়। এই সারণিভুক্ত উপাত্তসমূহ যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হয়, তবে তা বুঝানোর জন্য যেমন আরও সহজ হয় তেমনি চিত্তাকর্ষক হয়। এ জন্য পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা ও লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন বহুল প্রচলিত এবং ব্যাপক ব্যবহৃত পদ্ধতি। ৮ম শ্রেণি পর্যন্ত বিভিন্ন প্রকার লেখচিত্রের মধ্যে রেখাচিত্র ও আয়তলেখ সম্বন্ধে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে এবং এগুলো কীভাবে আঁকতে হয় তা দেখানো হয়েছে। এখানে কীভাবে গণসংখ্যা নিবেশন ও ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁকা হয় তা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

গণসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon): ৮ম শ্রেণিতে আমরা বিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ আঁকা শিখেছি। এখানে কীভাবে প্রথমে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের আয়তলেখ এঁকে তার গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়, তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ৩. কোনো স্কুলের ১০ম শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের গণসংখ্যা নিবেশন হলো নিম্নরূপ:

ওজন (কিলোগ্রাম)	$46-50$	$51-55$	$56-60$	$61-65$	$66-70$
গণসংখ্যা (শিক্ষার্থীর সংখ্যা)	5	10	20	15	10

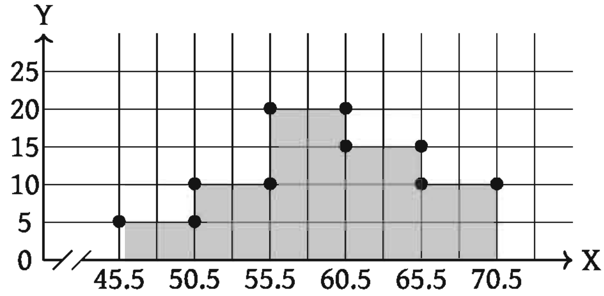
ক) গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁক।

খ) আয়তলেখের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

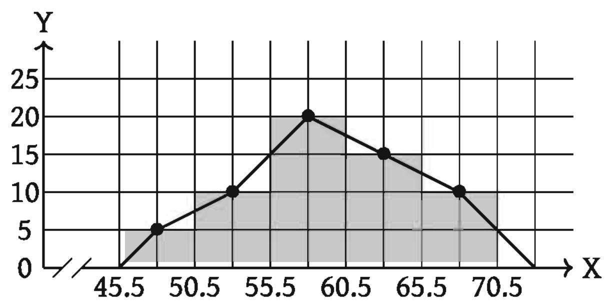
সমাধান: প্রদত্ত সারণিতে উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধান বিচ্ছিন্ন। শ্রেণি ব্যবধান অবিচ্ছিন্ন হলে সারণি হবে:

শ্রেণি ব্যবধান: ওজন (কিলোগ্রাম)	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিসীমা	শ্রেণি মধ্যবিন্দু	গণসংখ্যা
$46-50$	$45.5-50.5$	48	5
$51-55$	$50.5-55.5$	53	10
$56-60$	$55.5-60.5$	58	20
$61-65$	$60.5-65.5$	63	15
$66-70$	$65.5-70.5$	68	10

ক) ছক কাগজের প্রতি ঘরকে পাঁচ একক ধরে x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা এবং y-অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা নিয়ে নিচে আয়তলেখ আঁকা হয়েছে। x-অক্ষ বরাবর শ্রেণিসীমা 45.5 থেকে আরম্ভ হয়েছে। মূলবিন্দু থেকে 45.5 পর্যন্ত পূর্ববর্তী ঘরগুলো আছে বোঝাতে —⁄⁄— ছেদ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।



খ) আয়তলেখ হতে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকার জন্য আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির সমান্তরাল বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহ নির্ধারণ করা হয়েছে। চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হয়েছে। গণসংখ্যা বহুভুজ সুন্দর দেখানোর জন্য প্রথম ও শেষ আয়তের মধ্যবিন্দুর সংযোগ রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করা হয়েছে।

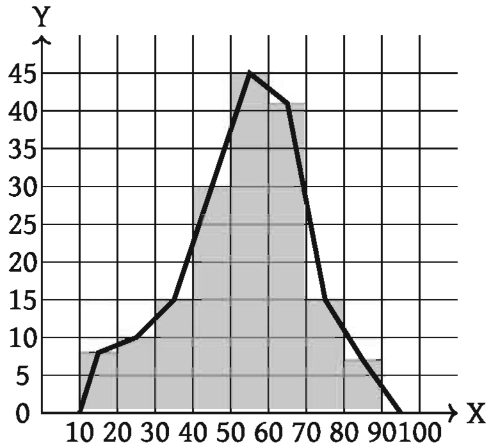


গণসংখ্যা বহুভুজ: কোনো অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের শ্রেণি ব্যবধানের বিপরীতে গণসংখ্যা নির্দেশক বিন্দুসমূহকে পর্যায়ক্রমে রেখাংশ দ্বারা যুক্ত করে যে লেখচিত্র পাওয়া যায়, তাই হলো গণসংখ্যা বহুভুজ। লক্ষ কর এখানে রেখাংশগুলো প্রতিটি শ্রেণির মধ্যবিন্দু বরাবর।

উদাহরণ ৪. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারণির বহুভুজ অঙ্কন কর।

শ্রেণি ব্যবধান	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$	$80-90$
মধ্যবিন্দু	15	25	35	45	55	65	75	85
গণসংখ্যা	8	10	15	30	45	41	15	7

সমাধান: x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে 10 একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি ঘরকে গণসংখ্যার 5 একক ধরে প্রদত্ত গণসংখ্যা নিবেশনের আয়তলেখ আঁকা হলো। আয়তলেখের আয়তসমূহের ভূমির বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু যা শ্রেণির মধ্যবিন্দু চিহ্নিত করি। এখন চিহ্নিত মধ্যবিন্দুসমূহ রেখাংশ দ্বারা সংযুক্ত করি। প্রথম শ্রেণির প্রান্তবিন্দু ও শেষ শ্রেণির প্রান্তবিন্দুদ্বয়কে শ্রেণি ব্যবধান নির্দেশক x-অক্ষের সাথে সংযুক্ত করে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো।



কাজ: তোমাদের শ্রেণিতে অধ্যয়নরত শিক্ষার্থীদের প্রথম সাময়িক পরীক্ষায় বাংলায় প্রাপ্ত নম্বর নিয়ে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উদাহরণ ৫. ১০ম শ্রেণির 50 জন শিক্ষার্থীর বিজ্ঞান বিষয়ের প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক (আয়তলেখ ব্যবহার না করে)।

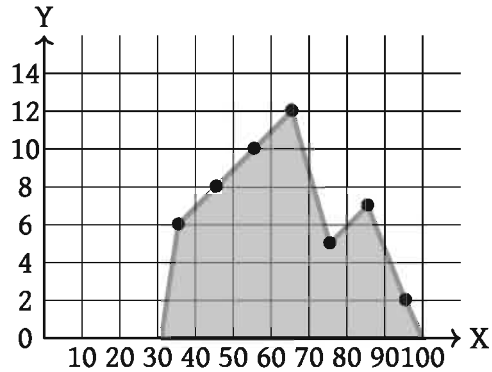
শ্রেণি ব্যবধান	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

সমাধান: এখানে প্রদত্ত উপাত্ত বিচ্ছিন্ন। এক্ষেত্রে শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু বের করে সরাসরি গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা সুবিধাজনক। প্রথম শ্রেণি $(31-40)$ এর মধ্যবিন্দু $\dfrac{31+40}{2}=35.5$।

শ্রেণি ব্যবধান	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
শ্রেণি ব্যবধানের মধ্যবিন্দু	35.5	45.5	55.5	65.5	75.5	85.5	95.5
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

x-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের প্রতি এক ঘরকে এক একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর ছক কাগজের ১ ঘরকে গণসংখ্যার ২ একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ আঁকা হলো।

২০২১



কাজ: ১০০ জন কলেজ ছাত্রের উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন থেকে গণসংখ্যা বহুভুজ আঁক।

উচ্চতা (সে.মি.)	141 – 150	151 – 160	161 – 170	171 – 180	181 – 190
গণসংখ্যা	5	16	56	11	12

ক্রমযোজিত গণসংখ্যা লেখচিত্র বা অজিভ রেখা (Cumulative Frequency Graph or Ogive Graph): কোনো উপাত্তের শ্রেণি বিন্যাসের পর শ্রেণি ব্যবধানের উচ্চসীমা x-অক্ষ বরাবর এবং শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা y-অক্ষ বরাবর স্থাপন করে ক্রমযোজিত গণসংখ্যার লেখচিত্র বা অজিভ রেখা পাওয়া যায়।

উদাহরণ ৬. কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ৫০ নম্বরের সাময়িকী পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি হলো:

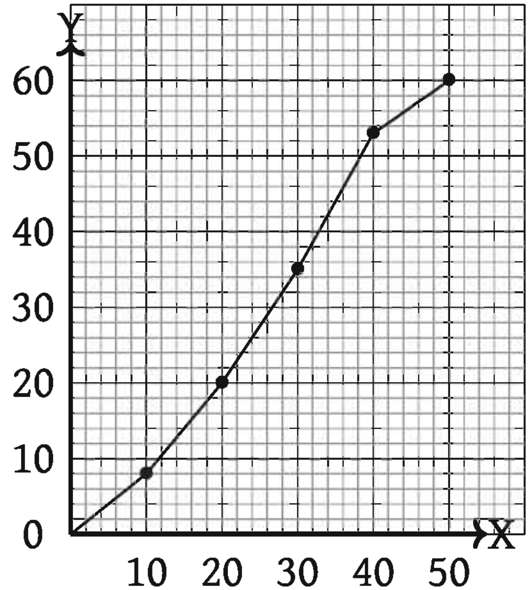
প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7

এই গণসংখ্যা নিবেশনের অজিভ রেখা আঁক।

সমাধান: প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশনের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি হলো:

প্রাপ্ত নম্বরের শ্রেণি ব্যবধান	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
গণসংখ্যা	8	12	15	18	7
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	8	$8 + 12 = 20$	$15 + 20 = 35$	$18 + 35 = 53$	$7 + 53 = 60$

ছক কাগজের উভয় অক্ষে প্রতি এক ঘরকে দুই একক ধরে প্রদত্ত উপাত্তের ক্রমযোজিত গণসংখ্যার অজিভ রেখা আঁকা হলো। ২০২১



কাজ: কোনো এক পরীক্ষায় গণিতে তোমাদের শ্রেণির ৫০ বা তার চেয়ে বেশি নম্বরপ্রাপ্ত শিক্ষার্থীদের নম্বরের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং অজিভ রেখা আঁক।	

কেন্দ্রীয় প্রবণতা (Central Tendency): ৭ম ও ৮ম শ্রেণিতে কেন্দ্রীয় প্রবণতা সমন্ধে আলোচনা করা হয়েছে। অনুসন্ধানাধীন অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। অর্থাৎ, মাঝামাঝি একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যা খুব বেশি হয়। বস্তুত উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার এই প্রবণতাই হলো কেন্দ্রীয় প্রবণতা। কেন্দ্রীয় মান একটি সংখ্যা এবং এই সংখ্যা উপাত্তসমূহের প্রতিনিধিত্ব করে। এই সংখ্যা দ্বারা কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপ করা হয়। সাধারণত কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ হলো: (১) গাণিতিক গড় (২) মধ্যক (৩) প্রচুরক।

গাণিতিক গড় (Arithmetic Average or Mean): আমরা জানি, উপাত্তসমূহের মানের সমষ্টিকে যদি তার সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে উপাত্তসমূহের গড় মান পাওয়া যায়। তবে উপাত্তসমূহের সংখ্যা যদি খুব বেশি হয় তাহলে এ পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা সময়সাপেক্ষ, বেশ কঠিন ও ভুল হওয়ার সম্ভাবনা থাকে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তসমূহ শ্রেণি বিন্যাসের মাধ্যমে সারণিবদ্ধ করে সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ৭. নিচে কোনো একটি শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রাপ্ত নম্বরের গাণিতিক গড় নির্ণয় কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94
গণসংখ্যা	5	10	15	20	30	16	4

সমাধান: এখানে শ্রেণি ব্যাপ্তি দেওয়া আছে বিধায় শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগত নম্বর কত তা জানা যায় না। এ ক্ষেত্রে প্রত্যেক শ্রেণির শ্রেণি মধ্যমান নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়।

$$\text{শ্রেণি মধ্যমান} = \frac{\text{শ্রেণির ঊর্ধ্বমান + শ্রেণির নিম্নমান}}{2}$$

যদি শ্রেণি মধ্যমান $x_i(i = 1 \dots k)$ হয় তবে মধ্যমান সংবলিত সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণি মধ্যমান (x_i)	গণসংখ্যা (f_i)	$(f_i x_i)$
$25 - 34$	29.5	5	147.5
$35 - 44$	39.5	10	395
$45 - 54$	49.5	15	742.5
$55 - 64$	59.5	20	1190
$65 - 74$	69.5	30	2085
$75 - 84$	79.5	16	1275
$85 - 94$	89.5	4	358
	মোট	$n = 100$	6190.0

নির্ণেয় গাণিতিক গড়

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{100} \times 6190 = 61.9$$

শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় (সহজ পদ্ধতি): শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তের গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি হলো সহজ পদ্ধতি, যাতে গড় নির্ণয়ের ধাপসমূহ নিম্নরূপ:

১. শ্রেণিসমূহের মধ্যমান নির্ণয় করা

২. মধ্যমানসমূহ থেকে সুবিধাজনক কোনো মানকে আনুমানিক গড় (a) ধরা

৩. প্রত্যেক শ্রেণির মধ্যমান থেকে আনুমানিক গড় বিয়োগ করে একে শ্রেণি ব্যাপ্তি দ্বারা ভাগ করে

ধাপ বিচ্যুতি $u = \dfrac{\text{মধ্যমান} - \text{আনুমানিক গড়}}{\text{ব্যাপ্তি}}$ নির্ণয় করা

৪. ধাপ বিচ্যুতিকে সংশ্লিষ্ট শ্রেণির গণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা

৫. বিচ্যুতির গড় নির্ণয় করা এবং এর সাথে আনুমানিক গড় যোগ করে কাঙ্ক্ষিত গড় নির্ণয় করা।

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি: শ্রেণিবিন্যাসকৃত উপাত্তসমূহের গাণিতিক গড়

$$\bar{x} = a + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i}{n} \times h$$

যেখানে, $\bar{x}$ = নির্ণেয় গড়, a = আনুমানিক গড়, $f_i = i$-তম শ্রেণির গণসংখ্যা, $u_i f_i = i$-তম শ্রেণির গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $h =$ শ্রেণি ব্যাপ্তি, $k =$ শ্রেণিসংখ্যা,$n=$ মোট গণসংখ্যা।

উদাহরণ ৮. কোনো দ্রব্যের উৎপাদনে বিভিন্ন পর্যায়ে যে খরচসমূহ (শত টাকায়) হয় তা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে। সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে গড় খরচ নির্ণয় কর।

উৎপাদন খরচ	$2-6$	$6-10$	$10-14$	$14-18$	$18-22$	$22-26$	$26-30$	$30-34$
গণসংখ্যা	1	9	21	47	52	36	19	3

সমাধান: সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে অনুসৃত ধাপের আলোকে গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	মধ্যমান x_i	গণসংখ্যা f_i	ধাপ বিচ্যুতি $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$	গণসংখ্যা ধাপ বিচ্যুতি $f_i u_i$
$2-6$	4	1	-4	-4
$6-10$	8	9	-3	-27
$10-14$	12	21	-2	-42
$14-18$	16	47	-1	-47
$18-22$	$20 \leftarrow a$	52	0	0
$22-26$	24	36	1	36
$26-30$	28	19	2	38
$30-34$	32	3	3	9
মোট		188		-37

গড় $\bar{x} = a + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i u_i}{n} \times h = 20 + \dfrac{-37}{188} \times 4 = 20 - 0.79 = 19.21$

$\therefore$ উৎপাদনে আনুমানিক গড় খরচ 19 শত টাকা।

গুরুত্ব যুক্ত উপাত্তের গড় নির্ণয় (Determination of Weighted Average): অনেক ক্ষেত্রে অনুসন্ধানাধীন পরিসংখ্যানের চলকের সাংখ্যিক মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ বিভিন্ন কারণ/গুরুত্ব/ভার দ্বারা প্রভাবিত হতে পারে। এ সকল ক্ষেত্রে উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এর সাথে এদের কারণ/গুরুত্ব/ভার $w_1, w_2, \ldots, w_n$ বিবেচনা করে গাণিতিক গড় নির্ণয় করতে হয়। যদি n সংখ্যক উপাত্তের মান $x_1, x_2, \ldots, x_n$ হয় এবং এদের গুরুত্ব $w_1, w_2, \ldots, w_n$ হয়, তবে এদের গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় হবে:

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

উদাহরণ ৯. কোনো বিশ্ববিদ্যালয়ের কয়েকটি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা নিচের সারণিতে উপস্থাপন করা হলো। উক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ঐ কয়টি বিভাগের স্নাতক সম্মান শ্রেণিতে পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

বিভাগের নাম	গণিত	পরিসংখ্যান	ইংরেজি	বাংলা	প্রাণিবিদ্যা	রাষ্ট্রবিজ্ঞান
পাশের হার (%)	70	80	50	90	60	85
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	80	120	100	225	135	300

২০২৫

সমাধান: এখানে পাশের হার ও শিক্ষার্থীর সংখ্যা দেওয়া আছে। পাশের হারের ভার হলো শিক্ষার্থীর সংখ্যা। যদি পাশের হারের চলক x এবং শিক্ষার্থীর সংখ্যা চলক w ধরা হয়, তবে গুরুত্ব প্রদত্ত গাণিতিক গড় নির্ণয়ের সারণি হবে নিম্নরূপ:

বিভাগের নাম	পাশের হার x_i	শিক্ষার্থীর সংখ্যা w_i	$x_i w_i$
গণিত	70	80	5600
পরিসংখ্যান	80	120	9600
ইংরেজি	50	100	5000
বাংলা	90	225	20250
প্রাণিবিদ্যা	60	135	8100
রাষ্ট্রবিজ্ঞান	85	300	25500
মোট		960	74050

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{6} w_i} = \frac{74050}{960} = 77.14$$

$\therefore$ পাশের গড় হার 77.14

> **কাজ:** তোমাদের উপজেলার কয়েকটি স্কুলের এস.এস.সি পাশের হার ও তাদের সংখ্যা সংগ্রহ কর এবং পাশের গড় হার নির্ণয় কর।

মধ্যক (Median): ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, পরিসংখ্যানের উপাত্তগুলো মানের ক্রমানুসারে সাজালে যেসকল উপাত্ত ঠিক মাঝখানে থাকে সেইগুলোর মানই হবে উপাত্তগুলোর মধ্যক। যদি উপাত্তের সংখ্যা n হয় এবং n যদি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n+1}{2}$তম পদের মান। আর n যদি জোড় সংখ্যা হয় তবে মধ্যক হবে $\frac{n}{2}$তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুইটির সাংখ্যিক মানের গড়। এখানে সূত্র ব্যবহার না করে এবং ব্যবহার করে কীভাবে মধ্যক নির্ণয় করা হয় তা উদাহরণের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলো।

উদাহরণ ১০. নিচের 51 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

উচ্চতা (সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5

সমাধান: মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি:

উচ্চতা (সে.মি.)	150	155	160	165	170	175
গণসংখ্যা	4	6	12	16	8	5
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	4	10	22	38	46	51

এখানে, $n = 51$, যা বিজোড় সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যক $= \dfrac{51+1}{2}$ তম পদের মান $= 26$ তম পদের মান $= 165$

নির্ণেয় মধ্যক 165 সে.মি.।

লক্ষ করি: 23 থেকে 38 তম পদের মান 165।

উদাহরণ ১১. নিচে 60 জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি। মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1

সমাধান: মধ্যক নির্ণয়ের ক্রমযোজিত গণসংখ্যা সারণি:

প্রাপ্ত নম্বর	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
গণসংখ্যা	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1
ক্রমযোজিত গণসংখ্যা	2	6	10	13	20	30	46	52	56	59	60

এখানে, $n = 60$, যা জোড় সংখ্যা।

$\therefore$ মধ্যক $= \dfrac{\frac{60}{2}\text{তম পদ } + (\frac{60}{2}+1)\text{তম পদ}}{2} = \dfrac{30\text{তম পদ} + 31\text{তম পদ}}{2} = \dfrac{70+80}{2} = 75$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক 75।

কাজ:

ক) তোমাদের শ্রেণির 49 জন শিক্ষার্থীর উচ্চতা (সে.মি.) নিয়ে গণসংখ্যা সারণি তৈরি কর এবং কোনো সূত্র ব্যবহার না করে মধ্যক নির্ণয় কর।

খ) পূর্বের সমস্যা থেকে 9 জনের উচ্চতা বাদ দিয়ে 40 জনের উচ্চতার (সে.মি.) মধ্যক নির্ণয় কর।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের মধ্যক নির্ণয়: শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা n হলে, $\dfrac{n}{2}$ তম পদের মান হচ্ছে মধ্যক। আর $\dfrac{n}{2}$ তম পদের মান বা মধ্যক নির্ণয়ে ব্যবহৃত সূত্র হলো মধ্যক $= L + \left(\dfrac{n}{2} - F_c\right) \times \dfrac{h}{f_m}$, যেখানে L হলো যে শ্রেণিতে মধ্যক অবস্থিত সেই শ্রেণির নিম্নসীমা, n গণসংখ্যা, F_c মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির যোজিত গণসংখ্যা, f_m মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h শ্রেণি ব্যাপ্তি।

উদাহরণ ১২. নিচে একটি গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া আছে।

সময় (সেকেন্ড)	$30-35$	$36-41$	$42-47$	$48-53$	$54-59$	$60-65$
গণসংখ্যা	3	10	18	25	8	6

ক) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি বলতে কী বুঝ?

খ) উপরের গণসংখ্যা সারণি থেকে মধ্যক নির্ণয় কর।

গ) তারপর সারণিতে প্রদত্ত উপাত্তের বহুভুজ অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে নির্দিষ্ট শ্রেণি ব্যবধান ও শ্রেণি সংখ্যা নির্ধারণের মাধ্যমে বিন্যস্ত ও সারণিভুক্ত করাকে গণসংখ্যা সারণি বলে।

খ) মধ্যক নির্ণয়ের জন্য গণসংখ্যা নিবেশন সারণি:

শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$30-35$	3	3
$36-41$	10	13
$42-47$	18	31
$48-53$	25	56
$54-59$	8	64
$60-65$	6	70
	$n=70$	

এখানে, $n=70$ এবং $\frac{n}{2}=\frac{70}{2}$ বা 35।

অতএব, মধ্যক 35 তম পদ যার অবস্থান $48-53$ শ্রেণিতে। অতএব মধ্যক শ্রেণি $48-53$।

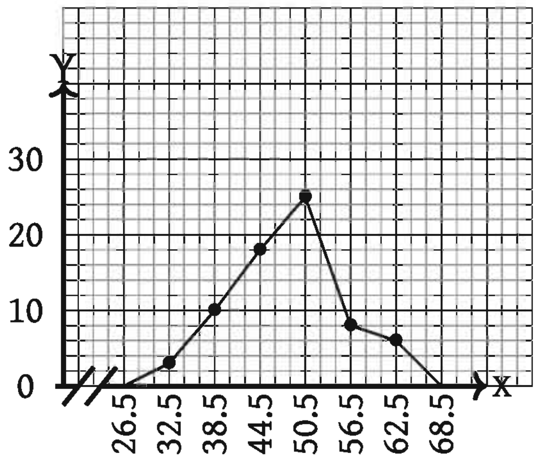
সুতরাং $L=48, F_c=31, f_m=25$ এবং $h=6$।

কাজেই মধ্যক $=48+(35-31)\times\frac{6}{25}=48+4\times\frac{6}{25}=48+0.96=48.96$

নির্ণেয় মধ্যক 48.96

গ) বহুভুজ অঙ্কনের জন্য সারণি: প্রথম শ্রেণির পূর্বের শ্রেণির মধ্যমান 26.5 এবং শেষ শ্রেণির পরের শ্রেণির মধ্যমান 68.5। এবার X অক্ষ বরাবর শ্রেণির মধ্যমান সুবিধাজনক একককে নিয়ে যেখানে —⁄⁄— (ছেদ) চিহ্নটি 0 থেকে 26.5 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা প্রতি ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে 2 ধরে গণসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন করা হলো। ২০২৩

শ্রেণি ব্যাপ্তি	শ্রেণির মধ্যমান	গণসংখ্যা
30 − 35	32.5	3
36 − 41	38.5	10
42 − 47	44.5	18
48 − 53	50.5	25
54 − 59	56.5	8
60 − 65	62.5	6



কাজ: তোমাদের শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীকে নিয়ে ২টি দল গঠন কর। একটি সমস্যা সমাধানে প্রত্যেকের কত সময় লাগে (ক) তার গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর, (খ) সারণি হতে মধ্যক নির্ণয় কর।

প্রচুরক (Mode): ৮ম শ্রেণিতে আমরা শিখেছি যে, কোনো উপাত্তে যে সংখ্যা সর্বাধিক বার উপস্থাপিত হয়, সেই সংখ্যাই উপাত্তের প্রচুরক। একটি উপাত্তের এক বা একাধিক প্রচুরক থাকতে পারে। কোন উপাত্তে যদি কোন সংখ্যাই একাধিকবার না থাকে তবে সেই উপাত্তে কোন প্রচুরক নেই। এখানে সূত্র ব্যবহার করে কীভাবে শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয় করতে হয় তাই আলোচনা করা হলো।

শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের প্রচুরক নির্ণয়: প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$, যেখানে

L প্রচুরক শ্রেণির অর্থাৎ যে শ্রেণিতে প্রচুরক অবস্থিত তার নিম্নমান

$f_1 =$ প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা − পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা

$f_2 =$ প্রচুরক শ্রেণির গণসংখ্যা − পরবর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা এবং h হলো শ্রেণি ব্যাপ্তি

উদাহরণ ১৩. নিচের সারণিটি লক্ষ কর।

শ্রেণি ব্যাপ্তি	31 − 40	41 − 50	51 − 60	61 − 70	71 − 80	81 − 90	91 − 100
গণসংখ্যা	4	6	8	12	9	7	4

ক) কেন্দ্রীয় প্রবণতা কী?

খ) প্রদত্ত সারণি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গ) উপাত্তের অজিভ রেখা অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে, উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। আবার উপাত্তসমূহ গণসংখ্যা নিবেশন সারণিতে উপস্থাপন করা হলে কোনো একটি শ্রেণিতে গণসংখ্যার প্রাচুর্য দেখা যায়। উপাত্তসমূহের কেন্দ্রীয় মানের দিকে পুঞ্জিভূত হওয়ার এই প্রবণতাকে কেন্দ্রীয় প্রবণতা বলে।

খ) প্রচুরক নির্ণয়ের সারণি:

শ্রেণি	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
গণসংখ্যা	4	6	8	12	9	7	4

প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1+f_2} \times h$

এখানে, গণসংখ্যা সর্বাধিক 12 আছে $61-70$ শ্রেণিতে।

সুতরাং $L = 61, f_1 = 12-8 = 4, f_2 = 12-9 = 3, h = 10$

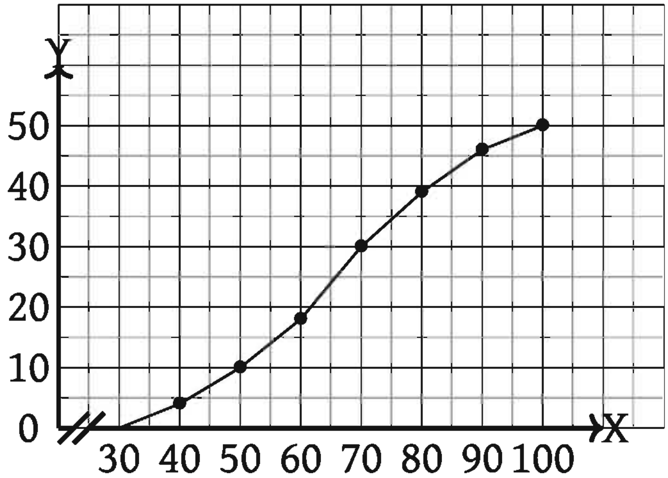
$\therefore$ প্রচুরক $= 61 + \dfrac{4}{4+3} \times 10 = 61 + \dfrac{4}{7} \times 10 = 61 + \dfrac{40}{7} = 61 + 5.7 = 66.7$

নির্ণেয় প্রচুরক 66.7

গ) অজিভ রেখা অঙ্কনের জন্য সারণি:

শ্রেণি	অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি	গণসংখ্যা	ক্রমযোজিত গণসংখ্যা
$31-40$	$30-40$	4	4
$41-50$	$40-50$	6	10
$51-60$	$50-60$	8	18
$61-70$	$60-70$	12	30
$71-80$	$70-80$	9	39
$81-90$	$80-90$	7	46
$91-100$	$90-100$	4	50

X অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণি ব্যাপ্তি সুবিধাজনক একক নিয়ে যেখানে —//— (ছেদ) চিহ্নটি 0 থেকে 30 বুঝায় এবং y অক্ষ বরাবর ক্রমযোজিত গণসংখ্যা ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 5 একক ধরে শ্রেণির উর্ধ্বসীমা বরাবর বিন্দুগুলো চিহ্নিত করি। অতপর: X অক্ষে 30 থেকে চিহ্নিত বিন্দুগুলো সাবলীলভাবে যোগ করি। এটিই নির্ণেয় অজিভ রেখা। ২০২৫



উদাহরণ ১৪. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারনি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর:

শ্রেণি	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80
গণসংখ্যা	25	20	15	8

সমাধান: এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 25 বার আছে $(41 - 50)$ শ্রেণিতে। সুতরাং, প্রচুরক এই শ্রেণিতে আছে।

আমরা জানি প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$। এখানে, $L = 41$, $f_1 = 25 - 0 = 25$, $f_2 = 25 - 20 = 5$ কারণ প্রথম শ্রেণিতে গণসংখ্যা বেশি হলে, পূর্ববর্তী শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য।

$\therefore$ প্রচুরক $= 41 + \dfrac{25}{25 + 5} \times 10 = 41 + \dfrac{25}{30} \times 10 = 41 + 8.33 = 49.33$

নির্ণেয় প্রচুরক 49.33

উদাহরণ ১৫. নিচের গণসংখ্যা নিবেশন সারনি থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর:

শ্রেণি	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
গণসংখ্যা	4	16	20	25

সমাধান: এখানে গণসংখ্যা সর্বাধিক 25 বার আছে $(41 - 50)$ শ্রেণিতে। এই শ্রেণিতে প্রচুরক বিদ্যমান।

আমরা জানি প্রচুরক $= L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$

এখানে, $L = 41, f_1 = 25 - 20 = 5, f_2 = 25 - 0 = 25, h = 10$ কারণ শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, পরবর্তী শ্রেণির ঘটন সংখ্যা শূন্য ধরা হয়।

$\therefore$ প্রচুরক $= 41 + \dfrac{5}{25 + 5} \times 10 = 41 + \dfrac{5}{30} \times 10 = 41 + \dfrac{5}{3} = 41 + 1.67 = 42.67$

নির্ণেয় প্রচুরক 42.67 (প্রায়)।

> শ্রেণি বিন্যস্ত উপাত্তে প্রথম শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার আগের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়। শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তে শেষ শ্রেণি প্রচুরক শ্রেণি হলে, তার পরের শ্রেণির গণসংখ্যা শূন্য ধরতে হয়।

অনুশীলনী ১৭

১. উপাত্তসমূহ সারণিভুক্ত করা হলে প্রতি শ্রেণিতে যতগুলো উপাত্ত অন্তর্ভুক্ত হয় তার নির্দেশক নিচের কোনটি?

ক) শ্রেণি সীমা খ) শ্রেণির মধ্যবিন্দু গ) শ্রেণি সংখ্যা ঘ) শ্রেণির গণসংখ্যা

২. পরিসংখ্যানের অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ মানের ক্রমানুসারে সাজালে উপাত্তসমূহ মাঝামাঝি কোনো মানের কাছাকাছি পুঞ্জিভূত হয়। উপাত্তের এই প্রবণতাকে বলা হয়

ক) প্রচুরক খ) কেন্দ্রীয় প্রবণতা গ) গড় ঘ) মধ্যক

৩. নিচের সারণিতে

তাপমাত্রা	$6^\circ - 8^\circ$	$8^\circ - 10^\circ$	$10^\circ - 12^\circ$
গণসংখ্যা	5	9	4

(i) শ্রেণিব্যাপ্তি 3

(ii) মধ্যক শ্রেণি $8^\circ - 10^\circ$

(iii) তাপমাত্রা অবিচ্ছিন্ন চলক

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) $i, ii,$ ও iii

৪. আয়তলেখ অঙ্কন করতে দরকার -

(i) x অক্ষ বরাবর অবিচ্ছিন্ন শ্রেণিব্যাপ্তি

(ii) y অক্ষ বরাবর গণসংখ্যা

(iii) শ্রেণির মধ্যমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) $i, ii,$ ও iii

৫. উপাত্তের ক্ষেত্রে প্রচুরক -

(i) কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ

(ii) সবচেয়ে বেশি বার উপস্থাপিত মান

(iii) সবক্ষেত্রে অনন্য নাও হতে পারে

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i* ও *ii* খ) *i* ও *iii* গ) *ii* ও *iii* ঘ) *i*, *ii* ও *iii*

শীতকালে বাংলাদেশের কোনো একটি অঞ্চলের 10 দিনের তাপমাত্রার (সে.) পরিসংখ্যান হলো $10°, 9°, 8°, 6°, 11°, 12°, 7°, 13°, 14°, 5°$। এবার নিচের (৬-৮) প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

৬. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের প্রচুরক কোনটি?

ক) 12° খ) 5° গ) 14° ঘ) প্রচুরক নেই

৭. উপরের সংখ্যাসূচক উপাত্তের গড় তাপমাত্রা কোনটি?

ক) 8° খ) 8.5° গ) 9.5° ঘ) 9°

৮. উপাত্তসমূহের মধ্যক কোনটি?

ক) 9.5° খ) 9° গ) 8.5° ঘ) 8°

৯. সারণিভুক্ত শ্রেণিবিন্যস্ত উপাত্তের সংখ্যা হলো n, মধ্যক শ্রেণির নিম্নসীমা L, মধ্যক শ্রেণির পূর্ববর্তী শ্রেণির ক্রমযোজিত গণসংখ্যা F_c, মধ্যক শ্রেণির গণসংখ্যা F_m এবং শ্রেণিব্যাপ্তি h; এই তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি মধ্যক নির্ণয়ের সূত্র?

ক) $L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{F_m}$ খ) $L + \left(\frac{n}{2} - F_m\right) \times \frac{h}{F_m}$

গ) $L - \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{F_m}$ ঘ) $L - \left(\frac{n}{2} - F_m\right) \times \frac{h}{F_m}$

১০. ১০ম শ্রেণির ৫০জন শিক্ষার্থীর গণিত বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। প্রদত্ত উপাত্তের গণসংখ্যা বহুভুজ ও অজিভ রেখা আঁক।

শ্রেণিব্যাপ্তি	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
গণসংখ্যা	6	8	10	12	5	7	2

১১. নিচে ৫০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি দেওয়া হলো। মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজন (কেজি)	45	50	55	60	65	70
গণসংখ্যা	2	6	8	16	12	6

১২. কোনো বিদ্যালয়ের বার্ষিক পরীক্ষায় ৯ম শ্রেণির ৫০ জন শিক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বরগুলো নিম্নরূপ:

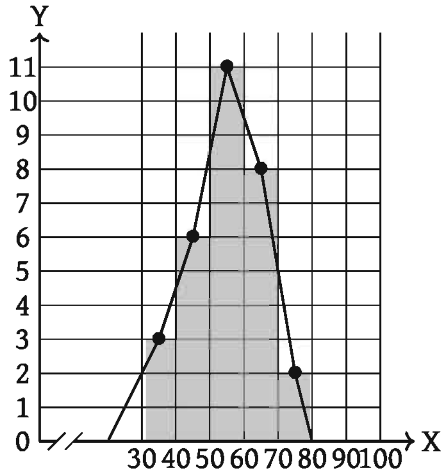
76, 65, 98, 79, 64, 68, 56, 73, 83, 57, 55, 92, 45, 77, 87, 46, 32, 75, 89, 48
97, 88, 65, 73, 93, 58, 41, 69, 63, 39, 84, 56, 45, 73, 93, 62, 67, 69, 65, 53
78, 64, 85, 53, 73, 34, 75, 82, 67, 62

ক) প্রদত্ত তথ্যটির ধরণ কীরূপ? কোনো নিবেশনে একটি শ্রেণির গণসংখ্যা কী নির্দেশ করে?

খ) উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি কর।

গ) সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে প্রাপ্ত নম্বরের গড় নির্ণয় কর।

১৩.



ক) উপরের চিত্রে, প্রথম শ্রেণিটির শ্রেণি মধ্যমান ও শেষ শ্রেণিটির গণসংখ্যা কত?

খ) চিত্রে প্রদর্শিত তথ্যটিকে ছকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ) উপরে প্রাপ্ত ছক থেকে নিবেশনটির মধ্যক নির্ণয় কর।

১৪. কোনো শ্রেণির ৬০ জন শিক্ষার্থীর ওজনের (কেজি) গণসংখ্যা নিবেশন সারণি নিম্নরূপ:

শ্রেণিব্যাপ্তি	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69	70 – 74
গণসংখ্যা	4	8	10	20	12	6

ক) মধ্যক নির্ণয়ের সূত্রটি লিখ।

খ) প্রদত্ত তথ্য থেকে প্রচুরক নির্ণয় কর।

গ) উপাত্তের আয়তলেখ অঙ্কন কর।

১৫. তাপমাত্রা পরিবর্তনশীল। বাংলাদেশে সাধারণত জানুয়ারি মাসের ১ম সপ্তাহে তাপমাত্রা কম এবং জুন মাসের ৪র্থ সপ্তাহে তাপমাত্রা বেশি থাকে। ৫২ সপ্তাহের তাপমাত্রা ডিগ্রী সেলসিয়াস এককে নিম্নরূপ: 35, 30, 27, 42, 20, 19, 27, 36, 39, 14, 15, 38, 37, 40, 40, 12, 10, 9, 7, 20, 21, 24, 33, 30, 29, 21, 19, 31, 28, 26, 32, 30, 22, 23, 24, 41, 26, 23, 25, 22, 17, 19, 21, 23, 8, 13, 23, 24, 20, 32, 11, 17

ক) শ্রেণিব্যাপ্তি 5 ধরে শ্রেণি সংখ্যা নির্ণয় কর।

খ) প্রদত্ত উপাত্তসমূহকে সারণি আকারে প্রকাশ করে সারণি থেকে তাপমাত্রার গড় নির্ণয় কর।

গ) উপরে প্রাপ্ত সারণি ব্যবহার করে আয়তলেখ অঙ্কনের মাধ্যমে প্রচুরক নির্ণয় কর।

২০২৫

Mathematics

Classes Nine-Ten

NATIONAL CURRICULUM AND TEXTBOOK BOARD, BANGLADESH

Chapter 17

Statistics

Owing to the contribution of information and data, the world has become a global village for the rapid advancement of science and information. Globalization has been made possible due to rapid transformation and expansion of information and data. So, to keep the continuity of development and for participating and contribute in globalization, it is essential for the students at this stage to have clear knowledge about information and data. In the context, to meet the demands of students in acquiring knowledge, information and data have been discussed from class VI and class-wise contents have been arranged step by step. In continuation of this, the students of this class will know and learn cumulative frequency, frequency polygon, ogive curve in measuring of central tendency mean, median, mode etc. in short-cut method.

At the end of this chapter, the students will be able to —

- explain cumulative frequency, frequency polygon and ogive curve.
- explain data by the frequency polygon, and ogive curve.
- explain the method of measuring of central tendency.
- explain the necessity of short-cut method in the measurement of central tendency.
- find the mean, median and mode by the short-cut method.
- explain the diagram of frequency polygon and ogive curve.

Presentation of Data: We know that numerical information which are not qualitative are the data of statistics. The data under investigation are the raw materials of statistics. They are in unorganized form and it is not possible to take necessary decision directly from the unorganized data. It is necessary to organize and tabulate the data. And the tabulation of data is the presentation of the data. In previous class we have learnt how to organize the data in tabulation. We know that it is required to determine the range of data for tabulation. Then determining the class interval and the number of classes by using tally marks, the frequency distribution table is made. Here, the methods of making frequency distribution table are to be re-discussed through example for convenient understanding.

Example 1. In a winter season, the temperature (in celsius) of the month of January in the district of Srimangal is placed below. Find the frequency distribution table of the temperature.

14°, 14°, 14°, 13°, 12°, 13°, 10°, 10°, 11°, 12°, 11°, 10°, 9°, 8°, 9°, 11°, 10°, 10°, 8°, 9°, 7°, 6°, 6°, 6°, 6°, 7°, 8°, 9°, 9°, 8°, 7°

Solution: Here the minimum and maximum numerical values of the data of temperature are 6 and 14 respectively.
Hence the range $= (14 - 6) + 1 = 9$
If the class interval is considered to be 3, the numbers of class will be $\frac{9}{3}$ or 3
Considering 3 to be the class interval, if the data are arranged in 3 classes, the frequency table will be:

Temperature (in celcius)	Tally	Frequency
$6^\circ - 8^\circ$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert$	11
$9^\circ - 11^\circ$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert\vert$	13
$12^\circ - 14^\circ$	$\cancel{\vert\vert\vert\vert}\ \vert\vert$	7
	Total	31

Work: Form two groups of all the students studying in your class. Find the frequency distribution table of the weights (in Kgs) of all the members of the groups.

Cumulative Frequency: In Example 1 considering 3 the class interval and determining the number of classes, the frequency distribution table has been made. The number of classes of the mentioned data is 3. The limit of the first class is $6^\circ - 8^\circ$. The lowest range of the class is 6° and the highest range is 8°. The frequency of this class is 11. Similarly, The limit of the second class is $9^\circ - 11^\circ$ and the frequency of this class is 13. Now if the frequency 11 of first class is added to the frequency 13 of the second class, we get 24. This 24 will be the cumulative frequency of the second class and the cumulative frequency of first class as begins with the class will be 11. Again, if the cumulative frequency 24 of the second class is added to the frequency of the third class, we get $24 + 7 = 31$ which is the cumulative frequency of the third class. Thus cumulative frequency distribution table is made. In the context of the above discussion, the cumulative frequency distribution of temperature in Example 1 is as follows:

Temperature (in celcius)	Frequency	Cumulative Frequency
$6^\circ - 8^\circ$	11	11
$9^\circ - 11^\circ$	13	$(11 + 13) = 24$
$12^\circ - 14^\circ$	7	$(24 + 7) = 31$

Example 2. The marks obtained in English by 40 students in an annual examination are given below. Make a cumulative frequency table of the marks obtained.

70, 40, 35, 60, 55, 58, 45, 60, 65, 80, 70, 46, 50, 60, 65, 70, 58, 60, 48, 70, 36, 85, 60, 50, 46, 65, 55, 61, 72, 85, 90, 68, 65, 50, 40, 56, 60, 65, 46, 76

Solution:
Range of the data $=$ (highest numerical value $-$ lowest numerical value) $+ 1 =$ $(90 - 35) + 1 = 55 + 1 = 56$

Let the class interval be 5 then the number of classes $= \dfrac{56}{5} = 11.2$ or 12 [taking the immediate next integer when class interval is fractional]

Hence the cumulative frequency distribution table at a class interval of 5 will be as follows:

Obtained marks	Tally	Frequency	Cumulative frequency
$35 - 39$	$\|\|$	2	2
$40 - 44$	$\|\|$	2	$2 + 2 = 4$
$45 - 49$	$\cancel{\|\|\|\|}$	5	$5 + 4 = 9$
$50 - 54$	$\|\|\|$	3	$3 + 9 = 12$
$55 - 59$	$\cancel{\|\|\|\|}$	5	$5 + 12 = 17$
$60 - 64$	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|\|$	7	$7 + 17 = 24$
$65 - 69$	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|$	6	$6 + 24 = 30$
$70 - 74$	$\cancel{\|\|\|\|}$	5	$5 + 30 = 35$
$75 - 79$	$\|$	1	$1 + 35 = 36$
$80 - 84$	$\|$	1	$1 + 36 = 37$
$85 - 89$	$\|\|$	2	$2 + 37 = 39$
$90 - 94$	$\|$	1	$1 + 39 = 40$

Variable: We know that the numerical information is the data of statistics. The numbers used in data are variable. Such as, in example 1 the numbers indicating temperatures are variable. Similarly, in example 2, the secured marks used in the data are the variables.

Discrete and Indiscrete variable: The variables used in statistics are of two types. Such as, discrete and indiscrete vari ables. The variables whose values are only integers, are discrete variables. The marks obtained in example 2 are discrete variables. Similarly, only integers are used in population indicated data. That is why, the variables of data used for population are discrete variables. A nd the variables whose numerical values can be any real number are indiscrete variables. Such as, in example 1, the temperature indicated data which can be any real number. Besides, any real number can be used for the data related to age, height, weight etc. That is why, the variables used for those are indiscrete variables. The number between two indiscrete variables can be the value of those variables. Some times it becomes necessary to make class interval indiscrete. To make the class interval indiscrete, the actual higher limit of a class and the lower limit of the next class are determined by fixing mid-point of a higher limit of any class and the lower limit of the next class. Such as, in example 1 the actual higher-lower limits of the first class are 8.5° and 5.5° respectively and that of the second class are 11.5° 8.5° etc.

Work: Form a group of maximum 40 students of your class. Form frequency distribution table and cumulative frequency table of the group with the weights/heights of the members.

Diagram of Data: We have seen that the collected data under investigation are the raw materials of the statistics. If the frequency distribution and cumulative frequency distribution table are made with them, it becomes clear to comprehend and to draw a conclusion. If that tabulated data are presented through diagram, they become easier to understand as well as attractive. That is why, presentation of statistical data in tabulation and diagram is widely and frequently used method. In class VIII, different types of diagram in the form of line graph and histogram have been discussed elaborately and the students have been taught how to draw them. Here, how frequency polygon, pie-chart, ogive curve are drawn from frequency distribution and cumulative frequency table will be discussed.

Frequency Polygon: In class VIII, we have learnt how to draw the histogram of discrete data. Here how to draw frequency polygon from histogram of indiscrete data will be put for discussion through example.

Example 3. The frequency distribution table of the weights (in Kg) of 60 students of class X of a school is given below:

Weight (Kg)	46 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 65	66 – 70
Frequency (No. of students)	5	10	20	15	10

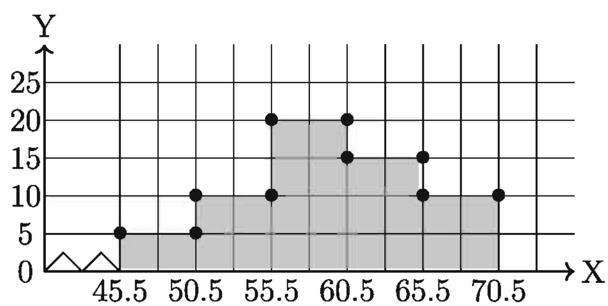
1) Draw the histogram of frequency distribution.

2) Draw frequency polygon of the histogram.

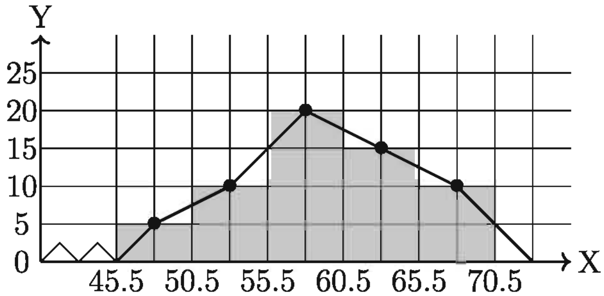
Solution: The class interval of the data in the table is discrete. If the class interval are made indiscrete, the table will be :

Class interval of the weight (in Kg)	In Discrete class interval	Mid point of class	Frequency
46 – 50	45.5 – 50.5	48	5
51 – 55	50.5 – 55.5	53	10
56 – 60	55.5 – 60.5	58	20
61 – 65	60.5 – 65.5	63	15
66 – 70	65.5 – 70.5	68	10

1) Histogram has been drawn taking each square of graph paper as 5 unit of class interval along with x-axis and frequency along with y-axis. The class interval along with x-axis has started from 45.5. The broken segments △△ have been used to show the presence of previous squares starting from from origin to 45.5.



2) The mid-points of the opposite sides parallel to the base of rectangle of the histogram have been fixed for drawing frequency polygon from histogram. The mid-points have been joined by line segments to draw the frequency polygon (shown in the adjacent figure). The mid-points of the first and the last rectangles have been joined with x-axis representing the class interval by the end points of line segments to show the frequency polygon attractive

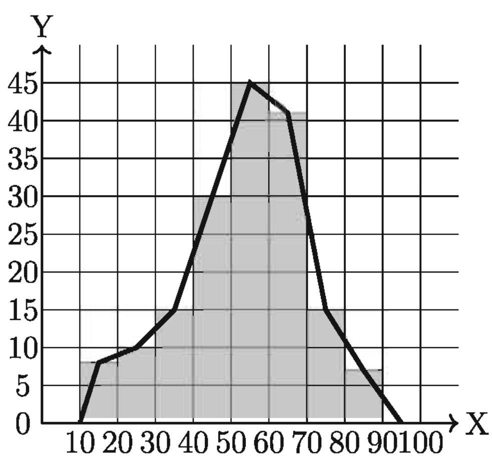


Frequency Polygon: The diagram drawn by joining frequency indicated points opposite to the class interval of indiscrete data by line segments successively is frequency polygon.

Example 4. Draw polygon of the following frequency distribution table.

Class interval	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90
Mid-point	15	25	35	45	55	65	75	85
Frequency	8	10	15	30	45	41	15	7

Solution: Histogram of frequency distribution is drawn taking each square of graph paper as 10 units of class interval along with x-axis and each square of graph paper as 5 units of frequency along with y-axis. The mid-points of the sides opposite to the base of rectangle of histogram are identified which are the mid-points of the class. Now the fixed mid-points are joined. The end-points of the first and the last classes are joined to x-axis representing the class interval to draw frequency polygon.



> **Work:** Draw frequency polygon from the marks obtained in Bangla by the students of your class in first terminal examination.

Example 5. The frequency distribution table of the marks obtained by 50 students of class X in science are given. Draw the frequency polygon of the data (without using histogram):

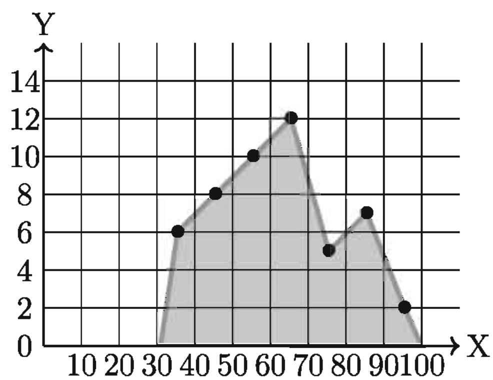
Class interval	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
Frequency	6	8	10	12	5	7	2

Solution: Here the given data are discrete. In this case, it is convenient to draw frequency polygon directly by finding the mid-point of class interval.

The Mid-point of the first class interval (31 – 40) is $\dfrac{31+40}{2} = 35.5$

Class interval	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
Mid-point	35.5	45.5	55.5	65.5	75.5	85.5	95.5
Frequency	6	8	10	12	5	7	2

The polygon is drawn by taking each squares of graph paper as 1 units of mid-points of class interval along with x-axis and taking each square of graph paper as 2 units of frequency along with y-axis.



> **Work:** Draw frequency polygon from the frequency distribution table of heights of 100 students of a college.

Heights (in cm.)	141 – 150	151 – 160	161 – 170	171 – 180	181 – 190
Frequency	5	16	56	11	12

2023

Cumulative Frequency Diagram or Ogive curve: Cumulative frequency diagram or Ogive curve is drawn by taking the upper limit of class interval along with x-axis and cumulative frequency along with y-axis after classification of a data.

Example 6. The frequency distribution table of the marks obtained by 50 students out of 60 students is as follows:

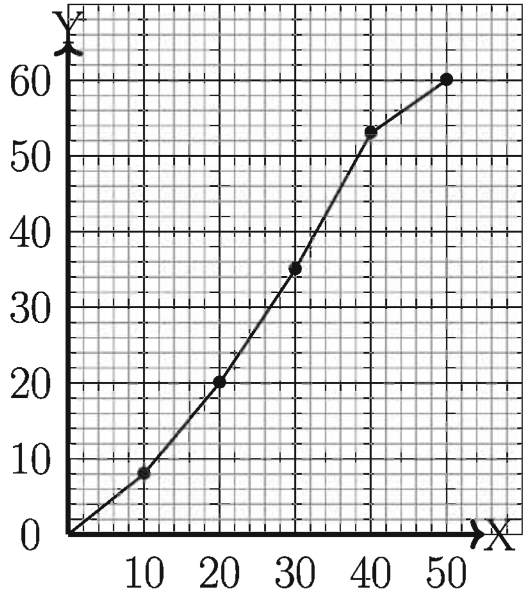
Class interval of marks obtained	$1-10$	$11-20$	$21-30$	$31-40$	$41-50$
Frequency	8	12	15	18	7

Draw the Ogive curve of this frequency distribution.

Solution: The cumulative frequency table of frequency distribution of the given data is :

Class interval of marks obtained	$1-10$	$11-20$	$21-30$	$31-40$	$41-50$
Frequency	8	12	15	18	7
Cumulative Frequency	8	$8+12=20$	$15+20=35$	$18+35=53$	$7+53=60$

Ogive curve of cumulative frequency of data is drawn taking each square of graph paper as two units of upper limit of class interval along with x-axis and cumulative frequency along with y-axis.



Work: Make cumulative frequency table of the marks obtained 50 and above in Mathematics by the students of your class in an examination and draw an Ogive curve.

Central Tendency: Central tendency and its measurement have been discussed in class VII and VIII. We have seen if the data under investigation are arranged in order of values, the data cluster round near any central value. A gain if the disorganized data are placed in frequency distribution table, the frequency is found to be abundant in a middle class i.e. frequency is maximum in middle class. In fact, the tendency of data to be clustered around the central value is number and it represents the data. The central tendency is measured by this number. Generally, the measurement of central tendency is of three types (1) Arithmetic means (2) Median (3) Mode :

Arithmetic Mean: We know if the sum of data is divided by the numbers of the data, we get the arithmetic mean. But this method is complex, time consuming and there is every possibility of committing mistake for large numbers of data. In such cases, the data are tabulated through classification and the arithmetic mean is determined by short-cut method.

Example 7. The frequency distribution table of the marks obtained by the students of a class is as follows. Find the arithmetic mean of the marks.

Class interval	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94
Frequency	5	10	15	20	30	16	4

Solution: Here class interval is given and that is why it is not possible to know the individual marks of the students. In such case, it becomes necessary to know the mid-value of the class.

$$\text{Mid-value of the class} = \frac{\text{Class upper value} + \text{class lower value}}{2}$$

If the class mid-value is $x_i (i = 1 \ldots k)$ the mid-value related table will be as follows:

Class interval	Class mid-value (x_i)	Frequency (f_i)	$(f_i x_i)$
25 – 34	29.5	5	147.5
35 – 44	39.5	10	395
45 – 54	49.5	15	742.5
55 – 64	59.5	20	1190
65 – 74	69.5	30	2085
75 – 84	79.5	16	1272
85 – 94	89.5	4	385
	Total	$n = 100$	6190.0

The required arithmetic mean

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{100} \times 6190 = 61.9$$

Arithmetic mean of classified data (short-cut method): The short-cut method is easy for determining arithmetic mean of classified data. The steps to determine mean by short-cut method are :

1. To find the mid-value of classes.
2. To take convenient approximated mean (a) from the mid-values.
3. To determine steps deviation, the difference between class mid-values and approximate mean are divided by the class interval i.e.

   $$\text{steps deviation } u = \frac{\text{mid value} - \text{approximate mean}}{\text{class interval}}$$
4. To multiply the steps deviation by the corresponding class frequency.
5. To determine the mean of the deviation and to add this mean with approximate mean to find the required mean.

Short-cut method: The formula used for determining the mean of the data by this method is

$$\bar{x} = a + \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} f_i u_i}{n} \times h$$

where, $\bar{x}$ = required mean, a = approximate mean, f_i =class frequency of ith class, $u_i f_i$ =-the product of step deviation with class intervals of ith class and h = class interval, k= number of class and n= total number of frequency.

Example 8. The production cost (in hundred taka) of a commodity at different stages is shown in the following table. Find the mean of the expenditure by short-cut method.

Production cost(in hundred taka)	$2-6$	$6-10$	$10-14$	$14-18$	$18-22$	$22-26$	$26-30$	$30-34$
Frequency	1	9	21	47	52	36	19	3

Solution: To determine mean in the light of followed steps in short-cut method, the table will be :

Class interval	Mid-value x_i	Frequency f_i	Step deviation $u_i = \frac{x_i - a}{h}$	Frequency and step deviation $f_i u_i$
2 – 6	4	1	–4	–4
6 – 10	8	9	–3	–27
10 – 14	12	21	–2	–42
14 – 18	16	47	–1	–47
18 – 22	$20 \leftarrow a$	52	0	0
22 – 26	24	36	1	36
26 – 30	28	19	2	38
30 – 34	32	3	3	9
Total		188		–37

Mean $\bar{x} = a + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i u_i}{n} \times h = 20 + \frac{-37}{188} \times 4 = 20 - 0.79 = 19.21$

$\therefore$ Mean production cost is Tk. 19 hundred.

Weighted mean: In many cases the numerical values $x_1, x_2, \ldots, x_n$ of statistical data under investigation may be influenced by different reasons/ importance/ weight. In such case, the values of the data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ along with their reasons/ importance/ weight $w_1, w_2, \ldots, w_n$ are considered to find the arithmetic mean. If the values of n numbers of data are $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and their weights are $w_1, w_2, \ldots, w_n$, the weighted mean will be

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Example 9. The rate of passing in degree Honours class and the number of students of some department of a University are presented in the table below. Find the mean rate of passing in degree Honours class of those departments of the university.

Name of the department	Math	Statistics	English	Bangla	Zoology	Political Science
Rate of passing (%)	70	80	50	90	60	85
Number of students	80	120	100	225	135	300

Solution: Here, the rate of passing and the number of students are given. The weight of rate of passing is the number of students. If the variables of rate of passing are x and numerical variable of students is w, the table for determining the arithmetic mean of given weight will be as follows :

Department	Rate of passing x_i	Number of students w_i	$x_i w_i$
Math	70	80	5600
Satistics	80	120	9600
English	50	100	5000
Bangla	90	225	20250
Zoology	60	135	8100
Political Science	85	300	25500
Total		960	74050

$$\overline{x_w} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{6} w_i} = \frac{74050}{960} = 77.14$$

$\therefore$ Mean rate of passing 77.14

Work: Collect the rate of passing students and their numbers in S.S.C. examination of some schools in your Upazilla and find mean rate of passing.

Median:

We have already learnt in class VIII the value of the data which divide the data when arranged in ascending order into two equal parts are median of the data.

2023

We have also learnt if the numbers of data are n and n is an odd number, the median will be the value of $\frac{n+1}{2}$ th term. But if n is an even number, the median will be numerical mean of the value of $\frac{n}{2}$ and $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ th terms. Here we present through example how mean is determined with or without the help formulae.

Example 10. The frequency distribution table of 51 students is placed below. Find the median.

Height(cm)	150	155	160	165	170	175
Frequency	4	6	12	16	8	5

Solution: Cumulative frequency distribution table for finding mean is as follows :

Height(cm)	150	155	160	165	170	175
Frquency	4	6	12	16	8	5
Cumulative Frequency	4	10	22	38	46	51

Here, $n = 51$ is an odd number.

$\therefore$ Median $=$ the value of $\frac{51+1}{2}$ th term $=$ the value of26th term $= 165$

Required median 165 cm.

Note: The value of the terms from 23th to 38th is 165.

Example 11. The frequency distribution table of marks obtained in mathematics of 60 students is as follows. Find the median :

Marks obtained	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
Frequency	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1

Solution: Cumulative frequency distribution table for determining median is :

Marks obtained	40	45	50	55	60	70	80	85	90	95	100
Frequency	2	4	4	3	7	10	16	6	4	3	1
Cumulative Frequency	2	6	10	13	20	30	46	52	56	59	60

Here, $n = 60$, which is an even number.

$$\therefore \text{Median} = \frac{\frac{60}{2}\text{th term} + (\frac{60}{2}+1)\text{th term}}{2} = \frac{30\text{th term} + 31\text{th term}}{2}$$

$$= \frac{70+80}{2} = 75$$

$\therefore$ Required median 75

Work:

1) Make frequency distribution table of the heights (in cm.) of 49 students of your class and find the mean without using any formula.
2) From the above problem, deduct the heights of 9 students and then find the median of heights (in cm.) of 40 students.

Determining Median of Classified Data: If the number of classified data is n, the value of $\frac{n}{2}$th term of classified data is median. And the formula used to determine the median or the value of $\frac{n}{2}$th term is : Median $= L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{f_m}$, where L is the lower limit of the median class, n is the frequency, F_c is the cumulative frequency of previous class to median class, f_m is the frequency of median class and h is the class interval.

Example 12. Determine median from the following frequency distribution table :

Time(sec.)	30 – 35	36 – 41	42 – 47	48 – 53	54 – 59	60 – 65
Frequency	3	10	18	25	8	6

1) What is a frequency distribution table?
2) Determine median from the frequency distribution table given above.
3) Draw the frequency polygon of the given data.

Solution:

1) Frequency distribution table refers to organize and tabulate a dataset by determining specific class interval and number of classes.
2) The frequency distribution table to determine median is given below:

2023

Class interval	Frequency	Cumulative frequency
30 – 35	3	3
36 – 41	10	13
42 – 47	18	31
48 – 53	25	56
54 – 59	8	64
60 – 65	6	70
	$n = 70$	

Here, $n = 70$ and $\frac{n}{2} = \frac{70}{2}$ or 35

Therefore, median is the value of 35th term. 35th term lies in the class (48–53). Hence the median class is (48–53).

$\therefore L = 48, F_c = 31, f_m = 25$ and $h = 6$

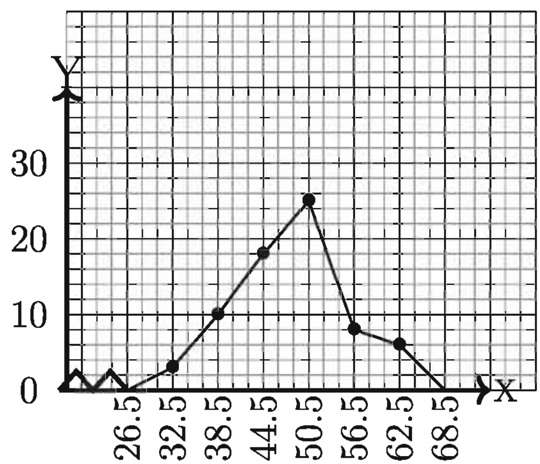
So median $= 48 + (35 - 31) \times \frac{6}{25} = 48 + 4 \times \frac{6}{25} = 48 + 0.96 = 48.96$

Required median 48.96.

3) The table useful to draw the frequency polygon is given below: The median of the class prior to the first class would be 26.5 and the median of the class following the last class would be 68.5.

Now, taking convenient unit for median values in along the X axis where, —//— sign indicates $0 - 26.5$ and taking length of side of each sqaure as 2 of frequency along Y axis, the frequency polygon has been drawn.

Class interval	Median	Frequency
30 – 35	32.5	3
36 – 41	38.5	10
42 – 47	44.5	18
48 – 53	50.5	25
54 – 59	56.5	8
60 – 65	62.5	6



Work: Make two groups with all the students of your class. (a) Make a frequency distribution table of the time taken by each of you to solve a problem, (b) find the median from the table.

Mode:

In class VIII, we have learned that the number which appears maximum times in a data is the mode of the data. In a data, there may be one or more than one mode. If there is no repetition of a member in a data, data will have no mode. Now we shall discuss how to determine the mode of classified data using formula.

Determining Mode of Classified Data: Mode $= L + \dfrac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$, where

L is the lower limit of mode-class i.e. the class where the mode lies,

$f_1 =$ frequency of mode-class – frequency of the class previous

$f_2 =$ frequency of mode class – frequency of next class of mode class and $h =$class interval.

Example 13. Following is a table.

Class interval	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
Frequency	4	6	8	12	9	7	4

1) What is central tendency?
2) Find mode from the above table.
3) Draw ogive curve of the given data.

Solution:

1) If the disorganized data of statistics are arranged according to the value, the data cluster round near any central value. Moreover, abundance of data is observed in a single class when these data are presented in some frequency distribution table. This tendency of data to cluster around central value is known as central tendency.

2) The table to determine mode is given below:

Class	$31-40$	$41-50$	$51-60$	$61-70$	$71-80$	$81-90$	$91-100$
Frequency	4	6	8	12	9	7	4

$$\text{Mode} = L + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times h$$

Here, the maximum numbers of repetition of frequency is 12 which lies in the class (61–70).

$$\therefore L = 61, f_1 = 12 - 8 = 4, f_2 = 12 - 9 = 3, h = 10$$

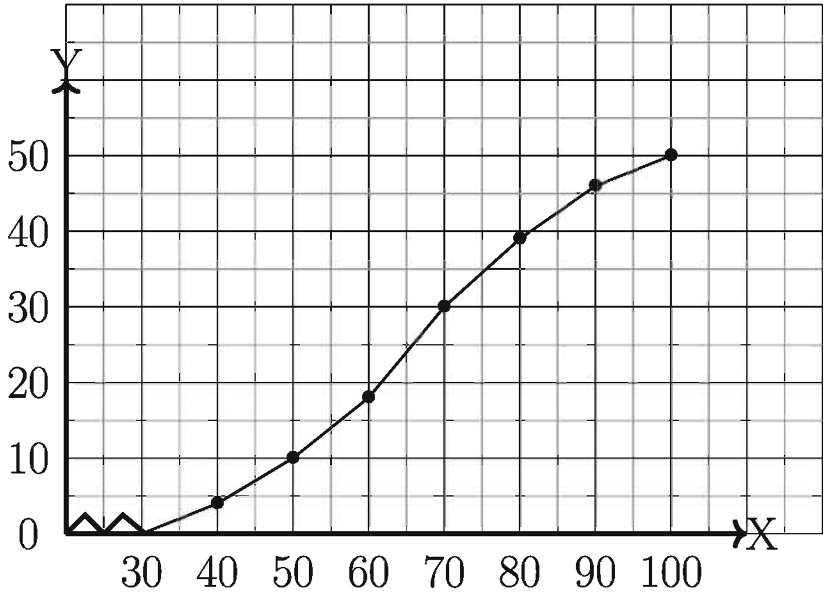
$$\therefore \text{Mode} = 61 + \frac{4}{4+3} \times 10 = 61 + \frac{4}{7} \times 10 = 61 + \frac{40}{7} = 61 + 5.7 = 66.7$$

Required mode 66.7

3) The table to draw the ogive curve is given below:

Class interval	Discontinuous class interval	Frequency	Cumulative frequency
$31-40$	$30-40$	4	4
$41-50$	$40-50$	6	10
$51-60$	$50-60$	8	18
$61-70$	$60-70$	12	30
$71-80$	$70-80$	9	39
$81-90$	$80-90$	7	46
$91-100$	$90-100$	4	50

Using convenient scaling along X axis where —⁄⁄— (sign indicates $0-30$ and taking per square unit as 5 units of cumulative frequency along Y axis points along higher limits of classes have been marked. Then these marked points have been joined and thus the Ogive curve has been drawn.



Example 14. Find mode from the frequency distribution table given below.

Class	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80
Frequency	25	20	15	8

Solution: Here, maximum numbers of frequency are 25 which lie in the class (41–50). So it is evident that mode is in this class. We know that

Mode$= L + \dfrac{f_1}{f_1+f_2} \times h$. Here, $L = 41$, $f_1 = 25 - 0 = 25$, $f_2 = 25 - 20 = 5$ [If the frequency is maximum in the first class, the frequency of previous class is zero]

$\therefore$ Mode $= 41 + \dfrac{25}{25+5} \times 10 = 41 + \dfrac{25}{30} \times 10 = 41 + 8.33 = 49.33$

Required mode 49.33.

Example 15. Find mode from the frequency distribution table given below.

Class	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50
Frequency	4	16	20	25

Solution: The maximum numbers of Class Frequency frequency are 25 which lie in the class (41 – 50). So it is obvious that this class is the class of mode. We know that, Mode $= L + \dfrac{f_1}{f_1+f_2} \times h$

Here, $L = 41$, $f_1 = 25 - 20 = 5$, $f_2 = 25 - 0 = 25$, $h = 10$ [If the frequency is maximum in the last class, the frequency of following class is zero]

2023

$$\therefore \text{Mode} = 41 + \frac{5}{25+5} \times 10 = 41 + \frac{5}{30} \times 10 = 41 + \frac{5}{3} = 41 + 1.67 = 42.67$$

Required mode 42.67 (approximately)

> If the frequency is maximum in the first class, the frequency of previous class is zero. If the frequency is maximum in the last class, the frequency of following class is zero.

Exercise 17

1. Which one indicates the data included in each class when the data are classified?
   1) Class interval 2) Mid-point of the class 3) Number of classes 4) Class frequency
2. If the disorganized data of statistics are arranged according to the value, the data cluster round near any central value. This tendency of data is called
   1) Mode 2) Central tendency 3) Mean 4) Median
3. Consider the table below:

Temperature	$6° - 8°$	$8° - 10°$	$10° - 12°$
Frequency	5	9	4

   (i) Class interval is 3

   (ii) Median class is $8° - 10°$

   (iii) Temperature is a discontinuous variable

   Which of the following is true?

   1) i and ii 2) i and iii 3) ii and iii 4) i, ii, and iii
4. To draw histograms we need -

   (i) Discontinuous class interval along x axis

   (ii) Frequency along y axis

   (iii) Class mid-point

   Which of the following is true?

1) *i* and *ii* 2) *i* and *iii* 3) *ii* and *iii* 4) *i*, *ii*, and *iii*

5. In case of data, Mode is -

(*i*) Measures of central tendency

(*ii*) Represented value which is mostly occurred

(*iii*) May not unique in all respect

Which is correct on the basis of above information?

1) *i* and *ii* 2) *i* and *iii* 3) *ii* and *iii* 4) *i*, *ii* and *iii*

In winter, the statistics of temperatures (in Celsius) of a region in Bangladesh is $10°, 9°, 8°, 6°, 11°, 12°, 7°, 13°, 14°, 5°$. In the context of this statistics, answer questions(6- 8).

6. Which is the mode of the above numerical data?

1) 12° 2) 5° 3) 14° 4) no mode

7. Which one is the mean of temperature of the above numerical data?

1) 8° 2) 8.5° 3) 9.5° 4) 9°

8. Which one is the median of the data?

1) 9.5° 2) 9° 3) 8.5° 4) 8°

9. The number of classified data included in the table is n, the lower limit of median class is L, the cumulative data of previous class to median class is F_c, the frequency of median class is f_m and class interval is h. In the light of these information, which one is the formula for determining the median

1) $L + \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{F_m}$ 2) $L + \left(\frac{n}{2} - F_m\right) \times \frac{h}{F_m}$

3) $L - \left(\frac{n}{2} - F_c\right) \times \frac{h}{F_m}$ 4) $L - \left(\frac{n}{2} - F_m\right) \times \frac{h}{F_m}$

10. The frequency distribution table of marks obtained in mathematics of 60 students of class X is given below. Draw frequency diagram and ogive curve.

Class interval	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
Frequency	6	8	10	12	5	7	2

11. Frequency distribution table of the marks obtained in mathematics of 50 students of class X are provided. Draw the frequency polygon of the provided data

2023

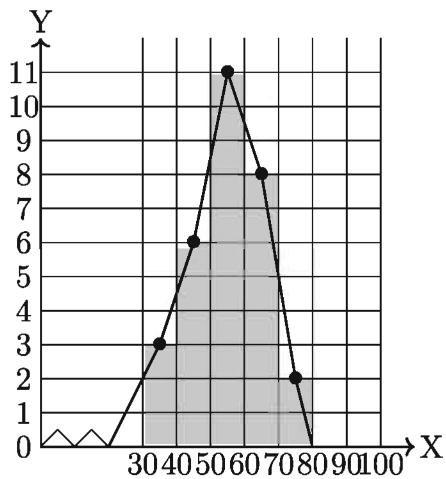
Weight (Kg)	45	50	55	60	65	70
Frequency	2	6	8	16	12	6

12. The following are the marks obtained in Mathematics of fifty students of class IX in a school:

    76, 65, 98, 79, 64, 68, 56, 73, 83, 57, 55, 92, 45, 77, 87, 46, 32, 75, 89, 48
    97, 88, 65, 73, 93, 58, 41, 69, 63, 39, 84, 56, 45, 73, 93, 62, 67, 69, 65, 53
    78, 64, 85, 53, 73, 34, 75, 82, 67, 62

    1) What is the type of the given information? What indicate frequency in a class of distribution?
    2) Make frequency table taking appropriate class interval.
    3) Determine the mean of the given number by short-cut method.

13.



    1) In the above figure, what is the mid-point value of the first class and what is the frequency of the last class?
    2) Express by data of information demonstrated in the above figure.
    3) Find the median of frequency obtained from 142.

14. The frequency distribution table of weights (in kg) of 60 students of a class are:

Class interval	45 – 49	50 – 54	55 – 59	60 – 64	65 – 69	70 – 74
Frequency	4	8	10	20	12	6

1) Write the formula to determine median.
2) Find the mode of the data.
3) Draw histogram of the data.

15. Temperature is always changing. Usually in Bangladesh temperature is comparatively lower during first week of January and comparatively higher during fourth week of June. Following is the list of temperatures of 52 weeks is celsius.

 35, 30, 27, 42, 20, 19, 27, 36, 39, 14, 15, 38, 37, 40, 40, 12, 10, 9, 7, 20, 21, 24, 33, 30, 29, 21, 19, 31, 28, 26, 32, 30, 22, 23, 24, 41, 26, 23, 25, 22, 17, 19, 21, 23, 8, 13, 23, 24, 20, 32, 11, 17

 1) Calculate the number of classes considering a class interval of 5.
 2) Express the given data in a tabular form and find the mean value of temperatures.
 3) Draw histogram using the table and find the mode.