南方科技大学

SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目:	高等数学(上) A	开课单位:	数 学 系
考试时长:	120 分钟	命题教师:	高等数学出题组

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) Which of the following functions is differentiable at $x = 0$?

   (A) $|x|\sqrt{\sin x + 2}$ (B) $|x| + \sqrt{\sin x + 2}$

   (C) $|x| \sin x$ (D) $|x| + \sin x$

   (2) Which of the following functions has an oblique asymptote ?

   (A) $\frac{\sqrt{2x^3+x+1}}{x+1}$ (B) $\frac{x^4+1}{x^3+\sin x}$

   (C) $x + \sin x$ (D) $x + \frac{1}{2+\sin x}$

   (3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \cos x \right) dx =$

   (A) $\frac{3}{2}$.   (B) $\frac{2}{3}$.   (C) $-\frac{3}{2}$.   (D) $-\frac{2}{3}$.

   (4) Let

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x > 0 \\ x \sin \frac{1}{x-1}, & x \le 0. \end{cases}$$

   Which of the following must be **true**?

   (A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ does not exist.

   (B) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ exists and f is not continuous at $x = 0$.

   (C) f is continuous at $x = 0$ and f is not differentiable at $x = 0$.

   (D) f is differentiable at $x = 0$.

(5) If there is a jump discontinuity for the function $y = f(x)$ at $x = 0$, then which of the following limits must exist ?

(A) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^2)$.

(B) $\lim\limits_{x \to 0} (f(x))^2$.

(C) $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3)$.

(D) $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) - f(-x))$.

2. (15 pts) Fill in the blanks.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \left(\sin \dfrac{\pi}{n} + \sin \dfrac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \dfrac{n\pi}{n} \right) = $ _____.

(2) If the line $y = 9x + b$ is a tangent line of the curve $y = x^3 - 3x$, then $b = $ _____.

(3) If $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x + \sqrt{x}}}$, then $f'(1) = $ _____.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \tan x}{1 - \cos x} = $ _____.

(5) Let $f(x) = \tan x$. Then $f^{(4)}(0) = $ _____.

3. (10 pts) Prove that there is only one real root for the equation $x^5 + 2x - 100 = 0$.

4. (10 pts) Compute
$$\int_0^1 (1 + x)^2 (1 - x)^5 \, dx.$$

5. (10 pts) Find the linear approximation of $f(x) = \frac{2}{1-x} + \sqrt{1 + x}$ at $x = 0$.

6. (10 pts) Find the constants a and b such that the function $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x + b}{x - 1}, & x > 1 \\ a, & x \le 1. \end{cases}$ is continuous at $x = 1$.

7. (10 pts) Let $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x - 1)^2}$.

(a) Identify the inflection points and local maxima and minima of the function that may exist.

(b) Identify the horizontal, vertical and oblique asymptotes that may exist.

(c) Sketch the graph.

8. (10 pts) Let $y = f(x)$ be an implicit function defined by the equation $2y^3 - y^2 + 3xy - 2x^2 - 2 = 0$. Find the equation of the tangent line to the curve $y = f(x)$ at $x = 1$.

9. (10 pts) Let f be continuous on $(-\infty, \infty)$ and define $F(x) = \int_0^x xt f(x^2 - t^2) \, dt$. Find $F'(x)$.

一、 （15分）**单项选择题：**

(1) 下列哪一个函数在 $x = 0$ 处可导?

(A) $|x|\sqrt{\sin x + 2}$ 　　　　　　　　　　(B) $|x| + \sqrt{\sin x + 2}$

(C) $|x|\sin x$ 　　　　　　　　　　　　　　(D) $|x| + \sin x$

(2) 下列哪一个函数存在斜渐近线?

(A) $\frac{\sqrt{2x^3+x+1}}{x+1}$ 　　　　　　　　　(B) $\frac{x^4+1}{x^3+\sin x}$

(C) $x + \sin x$ 　　　　　　　　　　　　　(D) $x + \frac{1}{2+\sin x}$

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \cos x \right) dx =$

(A) $\frac{3}{2}$. 　　　　(B) $\frac{2}{3}$. 　　　　(C) $-\frac{3}{2}$. 　　　　(D) $-\frac{2}{3}$.

(4) 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x > 0 \\ x\sin\frac{1}{x-1}, & x \leq 0. \end{cases}$$

下列说法中哪一个是**正确**的?

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

(B) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在但 f 在 $x = 0$ 处不连续.

(C) f 在 $x = 0$ 处连续但 f 在 $x = 0$ 处不可导.

(D) f 在 $x = 0$ 处可导.

(5) 若 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处有一个跳跃间断点，那么下面 4 个极限中哪一个必然存在?

(A) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$. 　　　　　　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^2$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$. 　　　　　　　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} (f(x) - f(-x))$.

二、 （15分）**填空题：**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n} \right) = $ _____.

(2) 若直线 $y = 9x + b$ 是曲线 $y = x^3 - 3x$ 的一条切线, 则 $b = $ _____.

(3) 已知 $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x + \sqrt{x}}}$，则 $f'(1) = $ _____.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\tan x}{1 - \cos x} = $ _____.

(5) 若 $f(x) = \tan x$，则 $f^{(4)}(0) = $ _____.

三、 （10分）证明：方程 $x^5 + 2x - 100 = 0$ 有且仅有一个实根.

四、 （10分）计算

$$\int_0^1 (1+x)^2(1-x)^5 \, dx.$$

五、 （10分）求函数 $f(x) = \frac{2}{1-x} + \sqrt{1+x}$ 在 $x = 0$ 处的线性近似.

六、 （10分）若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x+b}{x-1}, & x > 1 \\ a, & x \leq 1. \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续，求常数 a 和 b 的值.

七、　（10分）考虑函数 $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$.

　　　(a) 求所有（局部）极值点和拐点.

　　　(b) 求所有水平渐近线，垂直渐近线和斜渐近线.

　　　(c) 做出 $f(x)$ 的简略图.

八、　（10分）设函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 的邻域内满足方程 $2y^3 - y^2 + 3xy - 2x^2 - 2 = 0$. 求函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.

九、　（10分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上连续，且定义函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x xt f(x^2 - t^2)\, dt$. 求 $F'(x)$.