Final Examination

Sun Lulu

sunll@mail.sustech.edu.cn

4th January 2024

考点一: 间断点(可去间断点,跳跃间断点,无穷间断点).

1. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的无穷间断点的个数为(C)

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$ 的可去间断点的个数为(D)

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

3. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数的间断点, 其结论为(B)

A. 不存在间断点. B. 存在间断点 $x=1$.

C. 存在间断点 $x=0$. D. 存在间断点 $x=-1$.

4. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x)$(D)

A. 在$x=1,x=-1$处连续. B. 在 $x=1$ 处连续, 在$x=-1$ 处不连续.

C. 在$x=1,x=-1$处都不连续. D. 在$x=1$处不连续, 在$x=-1$ 处连续.

考点二: 渐近线.

1. 下列曲线中有渐近线的是(C)

A. $y = x + \sin x$.   B. $y = x^2 + \sin x$.

C. $y = x + \sin \frac{1}{x}$.   D. $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$.

2. 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为(D)

A. 0.   B. 1.   C. 2.   D. 3.

考点三: 求极限.

1.关于$\sin f(x)$, 如果 $\sin f(x)$ 趋于0,则凑重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. 若不趋于0, 则有界, 夹逼定理.

2. 整体乘除法可以用等价替换, 极限是非零数也可以替换, 但必须是整体的乘除法,分开的不能用, 加减法也不能用.
$\frac{\sin x}{x}\to 1$, $\frac{\tan x}{x}\to 1$, $\frac{\sin^{-1}x}{x}\to 1$, $\frac{\tan^{-1}x}{x}\to 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x}\to 1$, $\frac{e^x-1}{x}\to 1$, if $x\to 0$.

3. 1^∞ 可以用重要极限 $(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$.

4. 无穷减去去穷要合并后洛必达. 洛必达中, 若 $\frac{f'x}{g'(x)}$ 极限不存在, 说明洛必达不可用.

考点三: 求极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1+e^x}{2})^{\cot x}=e^{\frac{1}{2}}$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=1$.

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}{e^x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\arcsin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]=1$, 则 a 等于(C)

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

6. 若极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$, 则$a=1, b=-4$.

考点四：导数的定义.

1. Determine if the function $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{x} \neq 0 \\ 0, & \text{x} = 0 \end{cases}$ is continuous at the origin.

(2) Find $f'(0)$ and $f'(x)$.

(3) Determine if the function $f'(x)$ is continuous at the origin.

考点四：导数的定义.

2. When (B), $f(x)$ is differentiable at $x=0$.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$ exists. B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3-0}$ exists.

C. $f'_-(0)$ and $f'_+(0)$ exist. D. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{x}$ exists.

3. $f(x)$ is continuous at $x=0$, the wrong statement is (D).

A. If $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ exists, then $f(0)=0$.

B. If $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=A$ exists, then $f(0)=0$.

C. If $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$ exists, then $f'(0)=A$.

D. If $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=A$ exists, then $f'(0)=\frac{A}{2}$.

考点四：导数的定义.

4. 设$f(x)$ 在$x=a$ 的某个邻域内有定义,则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是(D)

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在. B. $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(a+\frac{1}{n})-f(a)]$存在.

C. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在. D. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

5. 已知$f'(x_0)=-1$,则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=1$.

6. Assume $f(x)$ is differentiable at $x=0$ with $f(0)=0$, compute:
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$.

考点五: 复合函数和隐函数求导.

1. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, (\ln|ax|)' = \frac{1}{x}$.

2. 记住 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$的导数; $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$的导数.

例: 1. 函数$y = y(x)$ 由方程 $\sin(x^2 + y^2) + e^x - xy^2 = 0$所确定, 则$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - e^x - 2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2) - 2xy}$.

2. 设$y = \sin[f(x^2)]$, 其中f具有二阶导数, 求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

考点六: 反常积分.

1. 下列反常积分中收敛的是(D)

A. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$. B. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\ dx$.

C. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\ dx$. B. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{e^x}\ dx$.

2, 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e; \\ \frac{1}{x\ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e. \end{cases}$. 若反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ 收敛,则(D)

A. $\alpha < -2$. B. $\alpha > 2$. C. $-2 < \alpha < 0$. C. $0 < \alpha < 2$.

3. 反常积分 $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\ dx, \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\ dx$的敛散性为(B)

A.收敛,收敛 B.收敛,发散 C.发散,收敛 D.发散,发散

考点六: 反常积分.

4. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b}\,dx$ 收敛, 则(C)

A. $a < 1, b > 1.$ B. $a > 1, b > 1.$

C. $a < 1, a + b > 1.$ C. $a > 1, a + b > 1.$