8.8 Improper Integrals(反常积分)

DEFINITION Integrals with infinite limits of integration are **improper integrals of Type I**.

1. If $f(x)$ is continuous on $[a, \infty)$, then

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, b]$, then

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

3. If $f(x)$ is continuous on $(-\infty, \infty)$, then

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)\,dx,$$

where c is any real number.

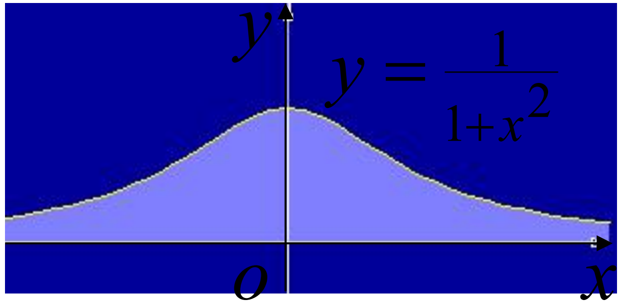
In each case, if the limit is finite we say that the improper integral **converges** and that the limit is the **value** of the improper integral. If the limit fails to exist, the improper integral **diverges**.

例1. 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解: $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0+\lim_{b\to\infty}[\arctan x]_0^b$$

$$=-(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi$$



思考: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\cancel{=}0$ 对吗?

分析: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散!

例2. 证明第一类 p 积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}\ (a>0)\begin{cases}当\ p>1\ 时收敛;\\ 当\ P\le 1\ 时发散.\end{cases}$

证: 当 $p=1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\lim_{b\to\infty}\big[\ln|x|\big]_a^b=+\infty$$

当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$$

因此, 当 $p>1$ 时, 反常积分收敛, 其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$;

当 $p\le 1$ 时, 反常积分发散.

DEFINITION Type II Improper Integrals

Integrals of functions that become infinite at a point within the interval of integration are **improper integrals of Type II**.

1. If $f(x)$ is continuous on $(a, b]$ and is discontinuous at a then

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

2. If $f(x)$ is continuous on $[a, b)$ and is discontinuous at b, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

3. If $f(x)$ is discontinuous at c, where $a < c < b$, and continuous on $[a, c) \cup (c, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

In each case, if the limit is finite we say the improper integral **converges** and that the limit is the **value** of the improper integral. If the limit does not exist, the integral **diverges**.

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上除点 $c\,(a<c<b)$ 外连续, 而在点 c 的邻域内无界 , 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

无界函数的积分又称作第二类反常积分, 无界点常称为**瑕点(奇点)** .

注： $\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx$不是瑕积分

若 a , b 都为瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

注意: 若瑕点 $c\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \underline{F(c^+) + F(c^-)} - F(a)$$

可相消吗?

注： 不可以，此时要把上式化为$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)\,dx$,然后分别计算两个瑕积分.

例 4 证明广义积分$\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx$当$q<1$时收敛，当$q \geq 1$时发散.

证 (1) $q=1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_0^1 = +\infty$,

(2) $q \neq 1$, $\int_0^1 \frac{1}{x^q}dx = \left[\frac{x^{1-q}}{1-q}\right]_0^1 = \begin{cases} +\infty, & q>1 \\ \frac{1}{1-q}, & q<1 \end{cases}$

因此当$q<1$时广义积分收敛，其值为$\frac{1}{1-q}$；

当$q \geq 1$时广义积分发散.

例5. 计算反常积分 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

注意瑕积分必须首先判断出瑕点

解: 显然瑕点为 a, 所以

$$原式 = \lim_{c\to a^-}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^c = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

例6. 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的收敛性.

解: $x=0$为瑕点,

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{c\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^c + \lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_c^1 = \infty$$

所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

例7. 证明反常积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；$q\geq 1$ 时发散 .

证: 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \lim_{c\to a^+}\left[\ln|x-a|\right]_c^b = +\infty$

当 $q\neq 1$ 时

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \lim_{c\to a^+}\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_c^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛 , 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；

当 $q\geq 1$ 时, 该广义积分发散 .

敛散性判别

THEOREM 2—Direct Comparison Test Let f and g be continuous on $[a, \infty)$ with $0 \leq f(x) \leq g(x)$ for all $x \geq a$. Then

1. $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converges if $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converges.

2. $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverges if $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverges.

敛散性判别

THEOREM 3—Limit Comparison Test If the positive functions f and g are continuous on $[a, \infty)$, and if

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

then

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{and} \qquad \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

both converge or both diverge.

若$\mathrm{L} = 0, \int_a^{\infty} g(x)\,dx$收敛，则$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$收敛.

最常用$g(x) = \frac{1}{x^P}$

例 判断$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-x}}dx$的敛散性.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{e^x-x}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{e^x}}}=1$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}=\int_1^{\infty}e^{-\frac{x}{2}}dx=\lim_{b\to\infty}-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_1^b=\frac{2}{\sqrt{e}}$$

则由$\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^x}}$收敛可知，$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{e^x-x}}dx$收敛

练习 1. 讨论$\int_1^{\infty}\frac{1}{e^x-2^x}dx$的敛散性.

提示：求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{e^x-2^x}}{\frac{1}{e^x}}$

例讨论$\int_{\pi}^{\infty}\frac{2+cosx}{x}dx$的敛散性.

解 由于 $0<\frac{1}{x}\leq\frac{2+\cos x}{x}$ for $x\geq\pi$

$$\int_{\pi}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}[\ln x]_{\pi}^{b}=\infty$$ 发散

故 $\int_{\pi}^{\infty}\frac{2+cosx}{x}dx$发散

练习2 讨论$\int_{\pi}^{\infty}\frac{1+sinx}{x^2}dx$的敛散性.

提示： $0\leq\frac{1+\sin x}{x^2}\leq\frac{2}{x^2}$ for $x\geq\pi$

例8　p取何值时,下面的反常积分收敛?

(1) $\int_1^2 \frac{dx}{x(lnx)^p}$　　　　(2) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(lnx)^p}$

解　(1) $x=1$为瑕点，**注意瑕积分必须首先判断出瑕点**

令$t=lnx$,则$x=e^t, dx=e^t dt$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(lnx)^p}=\int_0^{ln2}\frac{e^t dt}{e^t t^p}=\int_0^{ln2}\frac{1}{t^p}dt=\lim_{b\to 0^+}\int_b^{ln2}\frac{1}{t^p}dt$$

$$=\lim_{b\to 0^+}\frac{1}{-p+1}t^{-p+1}\Big|_b^{ln2}$$

$$=\lim_{b\to 0^+}\frac{b^{1-p}}{p-1}+\frac{1}{1-p}(ln2)^{1-p}$$

则当$p\geq 1$时，上述极限为无穷，反常积分发散

当$p<1$时，上述极限为$\frac{1}{1-p}(ln2)^{1-p}$，反常积分收敛.

(2)$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(lnx)^p}$

令$t = lnx$,则$x = e^t, dx = e^t dt$

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(lnx)^p} = \int_{ln2}^{\infty}\frac{e^t dt}{e^t t^p} = \int_{ln2}^{\infty}\frac{1}{t^p}dt = \lim_{b\to\infty}\int_{ln2}^{b}\frac{1}{t^p}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{-\mathrm{p}+1}\mathrm{t}^{-\mathrm{p}+1}\Big|_{ln2}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}(ln2)^{1-p}$$

则当$p \le 1$时，上述极限为无穷，反常积分发散

当$p > 1$时，上述极限为$\frac{1}{p-1}(ln2)^{1-p}$，反常积分收敛.

定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，

如果 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛.

例9 讨论 $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{1+x^2}dx$ 的敛散性.

解 由于 $\left|\frac{sinx}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}, x \in [0,\infty)$

$\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{1+x^2}dx$ 收敛.

例10讨论反常积分 $\int_1^{\infty}\frac{sinx}{x^2}dx$ 的收敛性

1. $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}dx$，判断收敛性，说明理由。

2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2+x}dx$，判断收敛性，说明理由。

3. $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}dx$，判断收敛性，说明理由。

4. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$，判断收敛性，说明理由。

5. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$，指出该积分的瑕点，判断收敛性，说明理由。

6. 若 $\int_2^{\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^p}dx$ 收敛，则 p 的取值范围是__________.

7. 若 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p(1+x^q)}dx$ 收敛，则 p,q 的取值范围是__________.

这里p,q均为正数

8. 若 $\int_0^{+\infty} \frac{\tan^{-1}x}{x^p}dx$ 收敛，则 p 的取值范围是__________.

2. Let p be a real number. Investigate the convergence of improper integrals.

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}. \qquad (b) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad (c) \int_0^\infty \frac{x^p}{1+x}\,dx.$$

5. Find

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx.$$