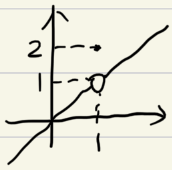
chapter 2 极限和连续性

极限: $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的表现就是 $f(x)$ 的极限.

趋势



$f(x)$ 在 $x \to 1$ 时的极限为1

definition: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, st 当 $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \varepsilon$, 这个L便是 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限.

极限的计算: 注意, $f(x) = x$; $x \to \infty$; $g(x) = -x$ $x \to \infty$ } 无极限 但和有极限

都存在极限才可以算

f/g: 确保g取极限不为0 => $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \neq \frac{\lim_{x \to 0} \sin x}{\lim_{x \to 0} x}$

上下都不能直接认为是0

Thm1: 如果f为多项式函数或有理函数, $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

如果函数连续 可以直接带

sandwich: 夹逼 $h(x) \le f(x) \le g(x)$ $\forall x \in I$

$x_0 \in I$

若 $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L$ 那么 $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

eg: $\lim_{x \to 0} [\frac{1}{x}] \sin x$: 取整函数多用sandwich想

$\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x}$

极限数值放缩(更紧致些)

Thm:

$f(x) \le g(x) \to \lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$: 极限保序

若 $f(x) < g(x) \not\Rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) < \lim_{x \to \infty} g(x)$ eg: $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x}$

(ε, δ)

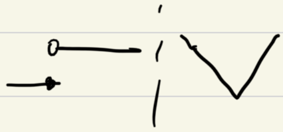
$\varepsilon - \delta^{(x_0 - \delta, x_0 + \delta)}$

单边极限 2.4

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$　　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$　　若左右极限存在且相等 => 在这一点存在极限.

从右边逼近

左右极限存在但不等:



重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{n}=1$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

* Stolz定理 2个比值　　若 $b_n\to\infty$, $b_n\uparrow$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

a_{n-1}

eg: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$ ✓

连续性

=> $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

单边连续 $x\to x_0^+$: 右; $x\to x_0^-$: 左 } 若既右连续,又左连续 则在这点连续

Prop1: $g,\ f\in C_{(a,b)}$ => $g\cdot f$ 在 (a,b) 上也连续

g, f 在 x_0 处不连续, $g\cdot f$ 在 x_0 处的连续性不确定

eg: $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$

Prop2:

$\lim g(f(x)) = g(\lim f(x))$: 若 g 连续的

间断点分类

- 一: 可去, 跳跃
- 二: 振荡, 无界 $\to\infty$

等价无穷小

$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}=0 \Rightarrow f$ 比 g 更高阶

$=L\neq 0 \Rightarrow$ 同阶

$=1 \Rightarrow$ 等阶

定理. 若 f 和 g 等阶：$\lim_{x\to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)h(x)$

$f(x)/h(x) \qquad g(x)/h(x)$

$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$：$x$ 和 $\tan x$ 等阶　x 和 $\sin x$ 等阶　$(x\to 0)$

$\Rightarrow \frac{x^5}{x^3(\frac{1}{2}x^2)}=2$　$\cos x$ 和 $(1-\frac{1}{2}x^2)$ 等阶

$\arctan x \sim x$　$e^x \sim 1+x$　$(1+x)^\alpha \sim \alpha x+1$

$\ln(1+x)\sim x$　$\sqrt[n]{x+1}-1 \sim \frac{1}{n}x$　} $x\to 0$ 时等阶

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} \neq 0$：加减不一定可以换

$\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=-\frac{1}{2}$

加减要换：

$\begin{cases}\alpha\sim\alpha' \\ \beta\sim\beta' \\ \alpha/\beta=C\neq 1\end{cases} \Rightarrow \alpha\pm\beta \sim \alpha'\pm\beta'$

增长速度：

阶：　$\ln x$　x^α　α^x　x^x

　　　　$\alpha>0$　$\alpha>0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{10000}}{x^{0.0001}}=0$

渐近线：$\begin{cases}\text{垂直} \Rightarrow \boxed{\text{先找没有定义的点}} \\ \text{水平} \\ \text{斜的}\end{cases}$

Thm1：有限闭区间上的连续函数：有界且可积

Thm2：$f(a)\cdot f(b)<0$，f 在 $[a,b]$ 连续，一定可以找到 $\delta\in(a,b)$，使 $f(\delta)=0$

介值定理

Dirichlet $D(x)$：处处不连续 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理} \\ 0, & x\text{无理}\end{cases}$

$xD(x)$ 只在 $x=0$ 处连续 $\lim\limits_{x\to 0} xD(x)=0$

$f(x)=\frac{1}{x}$ 在定义域上是连续的；

可微性

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

强：导数也连续

连续可导 ≠ 连续且可导

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$：右导数 $=f'_+(x_0)$

导数的右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$

eg. $f(x)=\begin{cases}|x|^p\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$

(1) $f(x)$ 在 0 处连续

(2) $f(x)$ 在 0 处可导　　求 P

(3) $f'(x)$ 在 0 处连续

(1) 求右极限，左极限

$\lim_{x\to 0^+} x^p \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$， $p>0$时

$\lim_{x\to 0^-} x^p \sin\frac{1}{x} \cdot (-1)^p = 0$， $p>0$

$p\le 0$时左右极限不存在

所以 $p>0$ 时连续。

(2) 存在左导数，右导数

(3): $p\geq 2$.

prop1: 可导必连续，连续不一定可导

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

和差化积

$\sin A + \sin B =$

$\sin A - \sin B =$

$\cos A + \cos B =$

$\cos A - \cos B =$

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

反函数求导： $[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}$ $\quad y_0 = f(x_0)$

莱布尼茨公式.

$f \cdot g$ 存在 n 阶导

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$$

$$(uv)^{(n)} = C_n^0 u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + \cdots C_n^n u v^{(n)}$$

$\binom{n}{k} = C_n^k$

隐函数求导

① $y^2 = x$

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dx}{dx} \qquad 2y\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} \ (y\neq 0)$$

②取两边微分

$dy^2 = dx$

$2y\,dy = dx$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}\ (y \neq 0)$

函数的线性化

$dy = f'(x)dx$

local maximum or minimum: 不要求在那个点有导数

$y = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 在R上的最小值

$\underbrace{\left|\sin x + \frac{1}{\sin x} + \cos x + \frac{1}{\cos x} + \tan x + \frac{1}{\tan x}\right|}$ 只需考虑 $[0, 2\pi]$ 即可

$\underbrace{\underbrace{(\sin x + \cos x)}_{t} + \frac{1}{\sin x \cos x} + (\sec x + \csc x)}$

$\lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ 不存在

4.2 中值定理

费马定理: $x_0 \in (a,b)$, $f(x)$ 极值点, 若 $f'(x)$ 存在 $f'(x_0) = 0$

Rolle $\quad f$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导 若 $f(a) = f(b)$

则 $x_0 \in (a,b)$ 必可使 $f'(x_0) = 0$

拉格朗日中值定理: f 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导, $\exists\ \xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)$$

$$\Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

柯西中值定理 f, g在$[a,b]$连续 (a,b)可导

$g(x)\neq 0$

$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

引理1: $f'(x)=0 \quad \forall x\in(a,b) \iff f(x)=\text{constant}$

引理2: $f'(x)=g'(x), \forall x\in(a,b) \iff f(x)=g(x)+C$

达布中值定理:

如果f在$[a,b]$可导 $\Rightarrow$ $\begin{cases} f'(x)\text{可取到 } f'_+(a) \text{ 和 } f'_-(b)\text{之间的所有值} \\ f'(x)\text{无第一类间断点(跳跃,可去)} \end{cases}$

a有右导, b左导

导数的"连续"变化

单调性的判断

$f'(x)\geq 0$; $\uparrow$

$f'(x)\leq 0$; $\downarrow$

严格单调增的判定: $f'(x)\geq 0$且于任意的开子区间, $f'(x)$不恒等于0

☆

$f(x)=\begin{cases} |x|+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$; 0附近反复振荡 ; $x=0 \Rightarrow$ 严格极小值点

$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}+x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

凹凸性:

concave up: f' 在I$\uparrow$  $\Rightarrow f''>0$

concave down: f'在I$\downarrow$  $\Rightarrow f''<0$

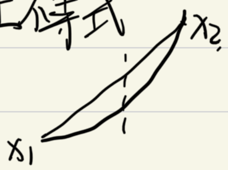
inflection

凸凹性改变的点,

不可用$f''(x)=0$定义,因为可能不存在二阶导

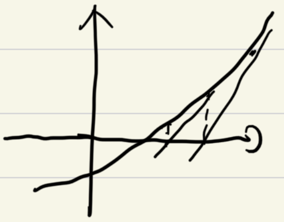
eg: $f(x)=|x|$

琴生不等式



$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

牛顿法



: 一直找切线逼近 $f(x)=0$的根

Antiderivatives 求不定积分

f在I上,若 $\exists\ F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$ 则 $F(x)$为$f(x)$原函数

$\int f(x)dx$

什么样的函数有原函数: 有限个间断点

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + C$$

积分的方法

1. 换元 令 $x=u(x)$ $\quad dx \to \underbrace{d(u(x))}_{u'(x)\,d(u(x))}$

2. 分部: $(uv)' = u'v + v'u$

$$\int (uv)' = \int (u'v) + \int (v'u)$$

$$uv = \int u\cdot dv + \int v\,du$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$$

$$= x\ln x - \int \underbrace{x\,d\ln x}_{x\cdot\frac{1}{x}dx} = x\ln x - x + C$$

exercise:

$$\int e^x \cos x\,dx$$

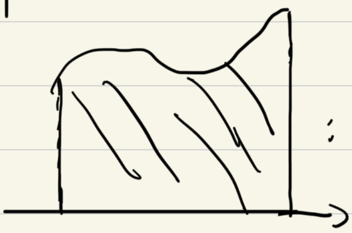
$$= \int e^x d\sin x$$

$$= e^x \sin x + \int e^x d\cos x$$

$$\int e^x d\cos x = e^x\cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{\int e^x d\sin x}$$

Integrals

5.1



：以直代曲的想法 => 小矩形的面积

upper sum => 取小区间内 $f(x)_{max}$

lower sum => $f(x)_{min}$

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ ：t是一个哑变量

积出来是关于x的函数

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

f在什么时候可积？

①闭区间上连续

②有限个第一类间断点

若f, g都可积 => $f\pm g$, $f\times\div g$ 可积

保序性

区间可加性

eg: f周期函数，f可积，证 $\int_0^x f(t)\,dt$ 是周期函数

$f(x)=f(x+T)$

可积一定有原函数吗？ 连续

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$ ：可积，但无原函数

跳跃间断

有原函数不一定可积

例子： $x^2\sin\frac{1}{x^2}$

振荡

积分中值定理

$av(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ 积分平均值定理

$\boxed{g\text{同号}}$

f,g 可积 : $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$

f在$[a,b]$连续 $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$F'(x) = f(x)$

强条件: 可导 > 连续 > 可积

牛顿-莱布尼茨公式: $F'(x) = f(x)$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

极限可视作向量

巧用莱布尼茨公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\cdots a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots b_1x+b_0}$$

注意 $x\to-\infty$ 时正负

$$e=(1+\tfrac{1}{x})^x \quad x\to\pm\infty$$
$$=(1+t)^{\frac{1}{t}} \quad t\to 0$$

$u^v \quad u\to 1 \quad v\to\infty$

$$e=\left[1+(u-1)\right]^v=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{u-1}}\right)^{\frac{1}{u-1}}=e$$

次数 $=\lim\limits_{\substack{u\to1\\ v\to\infty}}(u-1)v$

$(\cos\frac{1}{x})^{x^2} \quad x\to+\infty$

$$=\lim_{x\to\infty}(\cos\tfrac{1}{x}-1)x^2=-\tfrac{1}{2}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{e}$$

* $\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$

例 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

平方

$$=2x-2\sqrt{x^2-x-\sqrt{x}}$$
$$=0$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ 连续

✓ $\lim_{x\to c} \underset{\text{连续}}{\underline{g}}\big(\underset{\downarrow\, b}{f(x)}\big) = g(b)$ 基础

$y=\sqrt{x}$ 无渐近线

→ $y=ax+b$

$\frac{f(x)}{x} = a$

注意定理的"开闭" 谨慎

极限的保号性

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}$ $\begin{cases}\text{隐函数}\\ \text{参数方程}\end{cases}$

$$\begin{cases} y = a(1+\cos\varphi) \\ y = \rho\cos\theta \\ x = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$2xy^2 + 3y^5 + yx = 25$ → $F_x dx + F_y dy = 0$

$z = LHS$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_x}{F_y}$

$\left.\begin{array}{ll} F_x = \frac{dz}{dx} & y \\ F_y = \frac{dz}{dy} & x \end{array}\right\}$ 作常数

$$(f^{-1}(x))' = (f'(x))^{-1}$$

$$(\tan x)' = 1+\tan^2 x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$f^{(n)}(x)$ 存在 $n=$?

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \Delta x^3\sin\frac{1}{\Delta x} = 0$$

定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$= \ln\frac{4}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)\cdots(n+n)}}{n}$$

取对 $\frac{1}{n}\left(\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots\ln(2n)\right)-\ln(n)$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right] \Rightarrow \frac{4}{e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$$

仅此一个特殊在闭区间

$[a,b]$ 连续 $c\in[a,b]$ $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

令 $F'(x)=f(x)$ $\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\frac{F(1)-F(0)}{1-0}$

$=F'(c)=f(c)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

周期函数

$$\int_a^x f(x)dx=\begin{cases} f(x)\text{ even} & 奇 \\ a=0 & \\ f(x)\text{ odd} & 偶\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$$

$$=2\int_0^{\pi}\frac{\cos x\,d\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$t=\cos x$

几何意义 — 圆