



南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) A

开课单位: 数学系

考试时长: 120 分钟

命题教师:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分值	15 分	15 分	9 分	9 分	8 分	9 分	9 分	10 分	16 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意: 本试卷里的中文为直译(即完全按英文字面意思直接翻译), 所有数学词汇的定义请参照教材(Thomas' Calculus, 13th Edition)中的定义. 如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍(比方说同济大学的高等数学教材)里的定义, 以教材(Thomas' Calculus, 13th Edition)中的定义为准.

1. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) Let $f(x)$ be a continuous function on $[-a, a]$, $a > 0$, then $\int_{-a}^a f(x) dx =$

(A) $\int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$

(B) $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx.$

(C) 0.

(D) $2 \int_0^a f(x) dx.$

(2) If $f(x) = \begin{cases} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, then at $x = 0$, it is a

(A) jump discontinuity.

(B) removable discontinuity.

(C) infinite discontinuity.

(D) continuous point.

(3) If the function $f(x)$ has the third derivative at $x = x_0$, and $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f^{(3)}(x_0) > 0$, then

(A) $f(x)$ has a local minimum at x_0 .

(B) $f(x)$ has a local maximum at x_0 .

(C) $f(x)$ has no local extremum at x_0 .

(D) None of (A), (B) and (C) is correct.

(4) If $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}$, then $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx =$

(A) 8 .

(B) 16 .

(C) 128 .

(D) 256 .

- (5) The number of real roots in $(0, 1)$ for $5x - 2 - \int_0^x \frac{dt}{1+t^8} = 0$ is
- (A) 0 . (B) 1 .
- (C) 2 . (D) greater than 2 .

2. (15 pts) Fill in the blanks.

- (1) If $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)(x^2 + 4)$, then $f^{(6)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (2) The average value for $f(x) = \cos^4 x$ on $[0, \pi]$ is $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (3) Using Simpson's Rule with $n = 4$ to estimate $\int_2^4 \frac{1}{x-1} dx$, the approximation is $\underline{\hspace{2cm}}$.
- (4) If $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 8$, then $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. (9 pts) Find the area of the surface generated by revolving the curve $4y = x^2$ ($1 \leq y \leq 3$) about the y -axis.

4. (9 pts) Solve the following first-order linear differential equation

$$xy' - y = 2x \ln x, \quad x > 0.$$

5. (8 pts) If the line $y = x$ is tangent to the curve $y = \log_a x$, find the value of a .

6. (9 pts) A isosceles triangle is to be inscribed in a circle of radius R . What is the largest perimeter possible for the isosceles triangle? Please provide the reason.

7. (9 pts) Find all values for p such that the improper integral $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^p} dx$ converges.

8. (10 pts) Evaluate the following limits.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$.

9. (16 pts) Evaluate the integrals.

- (1) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.
- (2) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx$.
- (3) $\int_1^\infty \frac{1}{x^6(x^5 + 4)} dx$.
- (4) $\int \frac{1}{(1+x+x^2)^2} dx$.

一、(15分) 单项选择题:

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ ($a > 0$) 上连续, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx =$

(A) $\int_0^a (f(x) + f(-x)) dx.$

(B) $\int_0^a (f(x) - f(-x)) dx.$

(C) 0.

(D) $2 \int_0^a f(x) dx.$

(2) 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则在 $x=0$ 处是一个

(A) 跳跃间断点.

(B) 可去间断点.

(C) 无穷间断点.

(D) 连续点.

(3) 若函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 3 阶导数, 且满足 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f^{(3)}(x_0) > 0$, 则

(A) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有一个局部极小值.

(B) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有一个局部极大值.

(C) $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处没有局部极值.

(D) (A)、(B) 和 (C) 都不对.

(4) 若 $\int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{2}$, 则 $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) dx =$

(A) 8.

(B) 16.

(C) 128.

(D) 256.

(5) 方程 $5x - 2 - \int_0^x \frac{dt}{1+t^8} = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 的实根个数为

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 大于 2.

二、(15分) 填空题:

(1) 若 $f(x) = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)$, 则 $f^{(6)}(0) =$

(2) 函数 $f(x) = \cos^4 x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的平均值为

(3) 使用辛普森公式 (Simpson's Rule) 估计 $\int_2^4 \frac{1}{x-1} dx$, 这里取 $n=4$, 则此积分的近似值为

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = 8$, 则 $a =$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right) =$

三、(9分) 求曲线 $y = x^2$ ($1 \leq y \leq 3$) 绕 y 轴旋转所成的旋转面的面积.

四、(9分) 求解一阶线性常微分方程

$$xy' - y = 2x \ln x, \quad x > 0.$$

五、(8分) 若直线 $y = x$ 与曲线 $y = \log_a x$ 相切, 求 a 的值.

找到事数为0点 (内部最值)

再与端点比较

六、(9分) 若一个等腰三角形内接于一个半径为 R 的圆, 则这个三角形的周长的最大值是多少? 请给出理由.

七、(9分) 求 p 的取值范围, 使得反常积分 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^p} dx$ 收敛.

收敛问题

只能让一边存在问题

陈的保证: $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^p} dx$

八、(10分) 求下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)}$

九、(16分) 计算积分.

(1) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$

(2) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2 - 1}} dx$

(3) $\int_1^{e^{\infty}} \frac{1}{x^6(x^5 + 4)} dx$

(4) $\int \frac{1}{(1+x+x^2)^2} dx$

"同收同发"

收敛或发散

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-x}}{x^p} = \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^p}} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p}}{e^x} = 0$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 收敛 when $p < 1$

so $p < 1$ 收敛

有一项不成立不成立

化简完再判断