南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) A　　**开课单位:** 数 学 系
考试时长: 150 分钟　　**命题教师:** 王融 等

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
分 值	15 分	15 分	6 分	8 分	6 分	6 分	6 分	6 分	16 分	6 分
题 号	11	12								
分 值	5 分	5 分								

本试卷共 12 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15 pts) Determine whether the following statements are **true** or **false**? No justification is necessary.

   (1) If $k > 0$, then $\ln^{100} x < x^{0.0001} < 2^{kx}$ for sufficiently large x.

   (2) If f is continuous on $\mathbf{R}$, then $\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.

   (3) If the graph of a differentiable function $f(x)$ is concave up on an open interval (a,b), then $f(x)$ has a local minimum value at a point $c \in (a,b)$ if and only if $f'(c) = 0$.

   (4) If $|f(x)|$ is continuous at $x = a$, then so is $(f(x))^2$.

   (5) Suppose that $f(a) = g(a) = 0$, that f and g are differentiable on an open interval I containing a, and that $g'(x) \neq 0$ on I if $x \neq a$. If $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ does not exist, then neither does $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) If $g(x)$ is one-to-one, and $g(1) = 3$, $g(3) = 1$, $g'(1) = 4$, $g'(3) = 28$, then $(g^{-1})'(3) =$

   (A) $\frac{1}{4}$.　　(B) $\frac{1}{28}$.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) 4 .

   (2) Let $c > 0$. How many real roots are there for the equation $x^3 - 6x^2 + 9x + c = 0$?

   (A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(3) Suppose $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = b$, then $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(f(x-\sin x) + 2f\left(x^2+x\right)\right) =$

(A) $a+2b$. (B) $b+2a$. (C) $3a$. (D) $3b$.

(4) If $f(x) = \frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$, then the function $f(x)$ has

(A) 1 removable discontinuity and 1 jump discontinuity.

(B) 2 removable discontinuities.

(C) 1 removable discontinuity and 1 infinite discontinuity.

(D) 2 jump discontinuities.

(5) Let $f(x)$ be a continuous function, and a is a nonzero constant. Which of the following function is an odd function ?

(A) $\displaystyle\int_a^x \left(\int_0^u tf(t^2)\,dt\right) du$. (B) $\displaystyle\int_0^x \left(\int_a^u f(t^3)\,dt\right) du$.

(C) $\displaystyle\int_0^x \left(\int_a^u tf(t^2)\,dt\right) du$. (D) $\displaystyle\int_a^x \left(\int_0^u (f(t))^2\,dt\right) du$.

3. (6 pts) If the function

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot\sin x, & x \le \frac{\pi}{4} \\ 1 + b\cdot\tan x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

is differentiable at $x = \frac{\pi}{4}$, find the values of a and b.

4. (8 pts) Evaluate the following limits.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1}x - x}{x\tan^2 x}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+100)^{100x}}{x^{100x}}$.

5. (6 pts) Find the area of the region enclosed by the curve $y = |x^2-4|$ and $y = \frac{x^2}{2} + 4$.

6. (6 pts) The graph of the equation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ is an astroid. Find the area of the surface generated by revolving the curve about the x-axis.

7. (6 pts) The point $P(a,b)$ lies on the curve $l:\ (y-x)^3 = y + x$, and the slope of the tangent line of l at $P(a,b)$ is 3. Find the values of a and b.

8. (6 pts) Find $f'(2)$ if $f(x) = e^{g(x)}$ and $g(x) = \displaystyle\int_2^{\frac{x^2}{2}} \frac{t}{1+t^4}\,dt$.

9. (16 pts) Evaluate the integrals.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

(2) $\displaystyle\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$.

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\sec x\,dx$.

(4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\,dx$.

10. (6 pts) An 1600-L tank is half full of fresh water; i.e., contains 800-L of fresh water. At the time $t = 0$, a solution containing 0.0625 kg/L of salt runs into the tank at the rate of 16 L/min, and the mixture is pumped out of the tank at the rate of 8 L/min. At the time the tank is full, how many kilograms of salt will it contain ?

11. (5 pts) $f(x)$ is differentiable, and $f'(x) > 0$ on $(0, +\infty)$. Let $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{1} xf(u)\,du + \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{f(u)}{u^2}\,du$.

    (1) Identify the open intervals on which $F(x)$ is decreasing and the open intervals on which $F(x)$ is increasing.

    (2) Find the open intervals on which the graph of $y = F(x)$ is concave up and the open intervals on which it is concave down.

12. (5 pts) Let g be a function that is differentiable throughout an open interval containing the origin. Suppose g has the following properties:

    (i) $g(x+y) = \frac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$ for all real numbers x, y, and $x+y$ in the domain of g.

    (ii) $\lim\limits_{h\to 0} g(h) = 0$.

    (iii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)}{h} = 1$.

    Find $g(x)$.

一、　（15分）判断题:

(1) 若 $k>0$，那么对充分大的 x，必有 $\ln^{100} x < x^{0.0001} < 2^{kx}$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，那么 $\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$.

(3) 若可微函数 $f(x)$ 的图形在开区间 (a,b) 上是上凹的，那么 $f(x)$ 在一点 $c\in(a,b)$ 处取得局部极小值当且仅当 $f'(c)=0$.

(4) 若函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续，则 $(f(x))^2$ 在 $x=a$ 处也连续.

(5) 设 $f(a)=g(a)=0$，函数 f 和 g 在包含 a 的一个开区间 I 上可微，且对任意 $x\in I$，只要 $x\neq a$，必有 $g'(x)\neq 0$. 如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在. ×

$x^2\sin\frac{1}{x}$　$x\neq0$
0　$x=0$

二、　（15分）单项选择题:

A
(1) 若 $g(x)$ 是一对一的函数，且 $g(1)=3,\ g(3)=1,\ g'(1)=4,\ g'(3)=28$，则 $(g^{-1})'(3)=$

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{28}$.　(C) $\frac{1}{3}$.　(D) 4 .

B
(2) 设 $c>0$，方程 $x^3-6x^2+9x+c=0$ 有多少个实根?

$x(x-3)^2$

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

D
(3) 若 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=b$，则 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(f(x-\sin x)+2f\left(x^2+x\right)\right)=$

(A) $a+2b$.　(B) $b+2a$.　(C) $3a$.　(D) $3b$.

A
(4) 设函数 $f(x)=\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有

间断点定义
极限计算
连续性判断
细致核查

(A) 1 个可去间断点，1个跳跃间断点.　(B) 2个可去间断点.

(C) 1个可去间断点，1个无穷间断点.　(D) 2个跳跃间断点.

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$

洛

$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x\sin x=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x\frac{\sin x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}\ln(-x)\sin x$

C
(5) 设 $f(u)$ 为连续偶函数，a 是非零常数，则为奇函数的是

偶

(A) $\int_a^x\left(\int_0^u tf(t^2)\,dt\right)du$.　(B) $\int_0^x\left(\int_a^u f(t^3)\,dt\right)du$.

(C) $\int_0^x\left(\int_a^u tf(t^2)\,dt\right)du$.　(D) $\int_a^x\left(\int_0^u (f(t))^2\,dt\right)du$.

偶

画积分图像
表奇偶

三、　（6分）已知函数

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin x, & x\le\frac{\pi}{4} \\ 1+b\cdot\tan x, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处可导，求常数 a，b 的值.

四、　（8分）求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan^{-1}x-x}{x\tan^2 x}$.　$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2+1}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-x^2-1}{3x^2(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{3(x^2+1)}=-\frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+100)^{100x}}{x^{100x}}$.　$\lim\limits_{x\to\infty}=\left(\frac{x+100}{x}\right)^{100x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{100}{x}\right)^{\frac{x}{100}\times10000}$

$=e^{10000}$

五、　（6分）求夹在两条曲线 $y=|x^2-4|$ 和 $y=\frac{x^2}{2}+4$ 之间的区域面积.

六、　（6分）方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 所对应的曲线为一个星形线. 求把此星形线绕 x 轴旋转所形成的旋转面的面积.

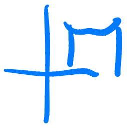
旋转体/面
公式

$=\int_0$

这个设有对称性!

Ans $=\frac{6\pi}{5}\times2=\frac{12\pi}{5}$

$S=\int 2\pi y\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$　公式



$x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

$3(y-x)^2\left(\frac{dy}{dx}-1\right)=\frac{dy}{dx}+1$　　$(y-x)^2=\frac{2}{3}$

$3\times 2(y-x)^2=4$

七、（6分）点 P 在曲线 $l: (y-x)^3 = y+x$ 上，且 l 在 P 处的切线斜率为 3，求点 P 的坐标.

① $y-x=\sqrt{\frac{2}{3}}$　　$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}=y+x$　　$2y=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$　　$y=\frac{5\sqrt{6}}{18}$　　$x=-\frac{1}{18}\sqrt{6}$

② $y-x=-\frac{\sqrt{6}}{3}$　　$-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2}{3}=y+x$　　$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$　　$y=-\frac{5\sqrt{6}}{18}$　　$x=-\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{5\sqrt{6}}{18}=\frac{\sqrt{6}}{18}$

八、（6分）设 $f(x)=e^{g(x)}$，这里 $g(x)=\int_2^{\frac{x^2}{2}}\frac{t}{1+t^4}\,dt$. 求 $f'(2)$.

$g(2)=0$　　$f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$　　$\frac{4}{17}$

九、（16分）计算积分.

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

(2) $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx$.

(3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\sec x\,dx$.

(4) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}}\,dx$.

十、（6分）一个容积为1600升的蓄水池装有800升的水. 在时间 $t=0$，浓度为每升 0.0625 公斤的盐水以每分钟 16 升的速度流入蓄水池，同时混合液以每分钟 8 升的速度被抽出蓄水池. 请问：当蓄水池正好装满混合液的那一刻，蓄水池内含有多少公斤的盐?

$t=100$　　充分利用条件

十一、（5分）设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上可导，且对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f'(x)>0$. 定义函数 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} x f(u)\,du+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(u)}{u^2}\,du$.

when $\frac{1}{x}<1$, $1>u>\frac{1}{x}$, ans >0；$\frac{1}{x}>1$, ans >0

$F'(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)\,du-\left(-\frac{1}{x^2}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)x+\left(-\frac{1}{x^2}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)x^2$

$=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)\,du+\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)$

$=\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)\,du-\left(1-\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)$

这种题慢慢算不要急

(1) 求函数 $F(x)$ 的单调区间.

(2) 求函数 $y=F(x)$ 的图形的凹凸区间（即上凹、下凹的开区间）.

$\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$

$F''(x)>0$ 恒成立　　$F''(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(+\frac{1}{x^2}\right)+\left(-\frac{1}{x^2}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)$

$=f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x-1}{x^3}$

十二、（5分）设函数 g 在一个包含原点的开区间上有定义且可微，并且 g 有下列性质:

(i) 对任意在 g 的定义域内的实数 x,y 和$x+y$，满足 $g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$.

(ii) $\lim_{h\to 0} g(h)=0$.

(iii) $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=1$.

求 $g(x)$.

$g(0)=0$　　$g'(0)=1$

$g(x)+g(-x)=0$ 奇

对 x 求导　$g'(x+y)=\frac{g'(x)(1-g(x)g(y))+g(y)g'(x)(g(x)+g(y))}{(1-g(x)g(y))^2}$

$g'(y)=\frac{g'(x)+g'(x)g(y)^2}{(1-g(x)g(y))^2}$

$x=0$

$\boxed{g'(y)=1+g(y)^2}$

$\frac{d(g(y))}{dy}=1+g(y)^2$