南方科技大学 SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) **开课单位:** 数 学 系

考试时长: 120 分钟 **命题教师:** 高等数学出题组

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	20 分	20 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (20pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) Let $\lim\limits_{x\to c}|f(x)| = L$. Which of the following statements must be **correct**?

   (A) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$. (B) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -L$.

   (C) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ doesn't exist. (D) None of (A), (B) and (C) is correct.

   (2) If $f(x)$ is defined on $(-1,1)$, and $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Which of the following statements is **correct**?

   (A) When $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$， $f(x)$ is differentiable at $x = 0$.

   (B) When $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 0$， $f(x)$ is differentiable at $x = 0$.

   (C) When $f(x)$ is differentiable at $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$.

   (D) When $f(x)$ is differentiable at $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

   (3) Let $f(x) = x^3 + 6x + 2$. Use Newton's method to find the root of $f(x) = 0$. Start with $x_0 = 1$, then

   (A) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{20}{9}$. (B) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{7}{9}$.

   (C) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. (D) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

   (4) Let $f(x)$ and $g(x)$ be twice differentiable functions on $\mathbf{R}$ and $g''(x) < 0$. $g(x)$ has a local extreme value at x_0 and $g(x_0) = a$.

   (A) If $f'(a) < 0$, then $f(g(x))$ has a local maximum value at x_0.

   (B) If $f'(a) > 0$, then $f(g(x))$ has a local maximum value at x_0.

   (C) If $f''(a) < 0$, then $f(g(x))$ has a local maximum value at x_0.

   (D) If $f''(a) > 0$, then $f(g(x))$ has a local maximum value at x_0.

(5) Suppose that f is continuous on $[a,b]$, differentiable on (a,b), and f' is increasing on (a,b). For a fix c in (a,b), let

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \textit{and} \quad h(x) = f(c) + f'(c)(x-c).$$

Which of the following statements must be **correct**?

(A) $f(x) < g(x) \le h(x)$, $\forall x \in (a,b)$. (B) $h(x) \le f(x) < g(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

(C) $g(x) < f(x) \le h(x)$, $\forall x \in (a,b)$. (D) $h(x) < g(x) < f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

2. (20 pts) Fill in the blanks.

(1) If $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, then $f'''(0) =$ _______.

(2) Let $f(x) = \frac{x^2(|x|+x)}{x^2+1}$. Then the asymptotes of the curve $f(x)$ are _______.

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{16}}^{1} x^{-\frac{1}{4}}(1-x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx =$ _______.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} (\sec x + \tan x)^2\,dx =$ _______.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\sin^2 2x} =$ _______.

3. (10 pts) Find the equation of the tangent line to the curve $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ at the point $P(1,-1)$.

4. (10 pts) Find $\frac{dy}{dx}$, if $y = x\displaystyle\int_2^{x^2} \sin(t^3)\,dt$.

5. (10 pts) Let $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} + a, & x > 0 \\ ax + b, & x \le 0 \end{cases}$. If $f(x)$ is differentiable at $x=0$, find a and b.

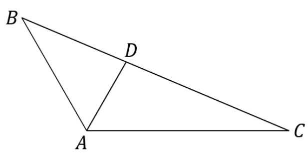
6. (10 pts) Let $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \sin x$, $0 < x < 3\pi$.

(a) Identify where the local extrema of f occur. Find the function’s local extreme values.

(b) Find the open intervals where the graph of f is concave up and where it is concave down.

(c) Sketch the graph.

7. (10 pts) Let $\triangle ABC$ be a triangle with $\angle BAC = 120^\circ$ and $|AB|\cdot|AC| = 1$. AD is the angle bisector of $\angle BAC$. Find the largest possible value of $|AD|$.



8. (10 pts) Suppose that the function $f(x)$ is defined on $(-\infty, \infty)$, and satisfies the following properties for any $x, y \in (-\infty, \infty)$.

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad f(x) = 1 + xg(x).$$

where $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$. Show that $f(x)$ is differentiable for any $x \in (-\infty, \infty)$.

一、（20分）**单项选择题:**

(1) 设 $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=L$. 则下列说法中哪一个是 **正确**的?

(A) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$.
(B) $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-L$.
(C) $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ 不存在.
(D) 前面的 (A)、(B) 和 (C)都不对.

(2) 设函数 $f(x)$在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 则下列说法中哪一个是 **正确**的?

(A) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(C) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.

(D) 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

(3) 设 $f(x)=x^3+6x+2$，采用 Newton 法求 $f(x)=0$ 的近似解. 若令 $x_0=1$，则

(A) $x_1=2$, $x_2=\frac{20}{9}$.
(B) $x_1=2$, $x_2=\frac{7}{9}$.
(C) $x_1=0$, $x_2=-\frac{2}{3}$.
(D) $x_1=0$, $x_2=-\frac{1}{3}$.

(4) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上具有二阶导数，$g(x)$ 在 x_0处取局部极值，且 $g''(x)<0$, $g(x_0)=a$.

(A) 若 $f'(a)<0$, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 处是局部极大值.

(B) 若 $f'(a)>0$, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 处是局部极大值.

(C) 若 $f''(a)<0$, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 处是局部极大值.

(D) 若 $f''(a)>0$, 则 $f(g(x))$ 在 x_0 处是局部极大值.

(5) 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且满足 f' 在 (a,b) 上单调增. 在 (a,b) 中选定一个常数 c, 定义

$$g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad 和 \quad h(x)=f(c)+f'(c)(x-c).$$

则下列说法中哪一个是 **正确**的?

(A) $f(x)<g(x)\le h(x)$, $\forall x\in(a,b)$.
(B) $h(x)\le f(x)<g(x)$, $\forall x\in(a,b)$.
(C) $g(x)<f(x)\le h(x)$, $\forall x\in(a,b)$.
(D) $h(x)<g(x)<f(x)$, $\forall x\in(a,b)$.

二、（20分）**填空题:**

(1) 若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 则 $f'''(0)=$ _______.

(2) 设 $f(x)=\frac{x^2(|x|+x)}{x^2+1}$. 则曲线 $f(x)$ 的所有的渐近线方程是 _______.

(3) $\displaystyle\int_{\frac{1}{16}}^{1}x^{-\frac{1}{4}}(1-x^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\,dx=$ _______.

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi/3}(\sec x+\tan x)^2\,dx=$ _______.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}{\sin^2 2x}=$ _______.

三、（10分）求曲线 $x^2+2xy^2+3y^4=6$ 在点 $P(1,-1)$ 处的切线方程.

四、（10分）设

$$y=x\int_2^{x^2}\sin(t^3)\,dt,$$

求 $\frac{dy}{dx}$.

五、（10分）若函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}+a, & x>0\\ ax+b, & x\le 0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处可导, 求 a 和 b 的值.

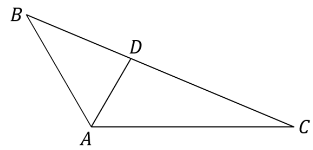
六、（10分）考虑函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x-\sin x,\,0<x<3\pi$.

(a) 求f在哪些点取局部极值，并求函数的局部极值.

(b) 求f上凹和下凹的开区间.

(c) 做出 $f(x)$的简略图.

七、（10分）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120^\circ$ 且 $|AB|\cdot|AC|=1$. 设 AD为角平分线，求 $|AD|$ 的最大值.



八、（10分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有定义，且对任意的 $x,y\in(-\infty,\infty)$ 恒有

$$f(x+y)=f(x)f(y),\quad f(x)=1+xg(x).$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上处处可导.