

SUSTECH2019高数上期末参考答案

WY

1. (判断题)

- (1) 对, 无穷大分阶问题, 参考quiz4中的判断题。
- (2) 对, 简单的换元法, $u = a - x$ 。
- (3) 对, 局部最小值问题及凹凸性, 参考quiz2的第4题。
- (4) 对, 复合函数的连续性, $(f(x))^2 = |f(x)|^2$ 。
- (5) 错, 洛必达法则反过来对吗? 有反例。比如,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

和 $g(x) = x$ 。这个反例给出洛必达法则失效的情景。

2. (选择题)

- (1) A, 反函数导数问题, 参考quiz4中的选择题。
- (2) B, 零点问题, 简单作图, 把方程写成 $(x-3)^2 = -\frac{c}{x}$ 。
- (3) D, 左右极限概念, 注意当 $x \rightarrow 0^-$ 时, 有 $x - \sin x \rightarrow 0^-$ 和 $x^2 + x \rightarrow 0^-$ 。
- (4) A, 不连续点(间断点)的分类, 验证 $x = 0$ 是可去不连续点, $x = 1$ 是跳跃不连续点。
- (5) C, 奇偶性, 注意到奇函数在0点的取值必为0, 因此可以排除A和D, 简单带入 $f(x) \equiv 1$ 可以排除B, 因此选C。

3. (参数的计算)

可参考quiz1中的第7题。注意三点: 1) 可微性推出连续性; 2) 连续性能得到左极限=右极限; 可微性可推出左导数=右导数。

4. (极限的计算)

可参考quiz4中的第3题。

第一题, 重要考点: 洛必达法则的应用。小技巧: 1) $\tan x$ 和 $\sin x$ 在0点和 x 同阶, 可替换, 方便使用洛必达法则。

第二题, 重要考点: 指数、对数函数的性质, 重要极限结果的应用。小技巧, 简化整理成标准形式。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

5. (平面区域面积的计算, 积分的简单应用)

$$2 \int_0^4 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - |x^2 - 4| \right) dx = 2 \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - (4 - x^2) \right) dx \\ + 2 \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - (x^2 - 4) \right) dx.$$

注意: 如果被积函数中有绝对值函数, 请注意分区间积分, 去掉绝对值再计算积分。

6. (旋转体表面积的计算, 积分的简单应用)

不记得相应的积分公式, 请回忆推导过程, 积分思想, 不难。

$$S = 2 \int_0^1 2\pi y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

这里

$$y(x) = (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

注意: 1) 灵活运用几何体的对称性; 2) 需要先确定变量取值范围, 这里 x 的取值范围是 $[-1, 1]$, 由于对称性, 最后积分中只需取 $[0, 1]$ 。

7. (求解参数问题, 隐式求导和导数的几何意义—切线斜率)

首先, 根据条件点在曲线上建立第一个方程:

$$(b - a)^3 = b + a.$$

其次, 对曲线方程 (隐式) 求导, 得出

$$3(y - x)^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx} - 1 \right) = \frac{dy}{dx} + 1.$$

带入点的坐标和该点处切线斜率 $\frac{dy}{dx} = 3$, 得到第二个方程:

$$3(b - a)^2 \cdot 2 = 4.$$

注意: 1) 切线斜率跟导数的关系; 2) 隐式求导时注意链式法则; 3) 最后解方程时不要遗漏解, 比如这里 a, b 有两组解。如果有时间, 一定要检查下, 特别是在会做的情况下的简单的计算类题型。

8. (链式法则, 微积分基本定理的应用)

首先, 由指数函数的性质和链式法则可以得到:

$$f'(2) = e^{g(2)} \cdot g'(2).$$

带入 $x = 2$ ，注意到 $g(2)$ 中的积分上界=积分下界，因此 $g(2) = 0$ 。

其次，根据微积分基本定理，

$$g'(x) = \frac{\frac{x^2}{2}}{1 + (\frac{x^2}{2})^4} \cdot x.$$

带入 $x = 2$ 可得 $g'(2) = \frac{4}{17}$ 。

最后，结合上述计算结果，

$$f'(2) = e^{g(2)} \cdot g'(2) = \frac{4}{17}.$$

注意：1) 链式法则的应用，指数函数的性质；2) 当积分上界是 x 的函数时，怎么求导，可参考补充作业8的第8题；3) 带入数字计算时一定要仔细。

9. (计算不定积分、定积分)

- (1) 换元法，带有根号时可尝试的一种换元： $t = \sqrt{1 + e^x}$ 。
- (2) 有理函数的积分，熟悉有理函数化为部分分式之和的一般规律。
- (3) 可以把被积函数改写成：

$$\tan^2 x \sec x = \frac{\tan^2 x}{\sec x} \cdot \sec^2 x = \frac{\tan^2 x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \cdot \sec^2 x.$$

注意这里常用的两个关系式：

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

和

$$d \tan x = \sec^2 x dx.$$

- (4) 被积函数中包含绝对值函数的定积分计算。根据绝对值里面函数的性质，把积分区间分成 $[\frac{1}{2}, 1]$ 和 $[1, \frac{3}{2}]$ 。之后，对根号里面的二次多项式进行配方法，比如：

$$\sqrt{x(1-x)} = \sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}.$$

再用相应的换元法。

10. (应用题，建模并求解)

首先，我们需要根据题意建立数学模型。由于问题跟时间有关，因此相关模型会是相应的微分方程。注意到，问题关注的是有多少盐，这提示我们

如何设未知函数。因此，我们设 t 时刻蓄水池的含盐量为 $y(t)$ 。此时整个蓄水池混合液的容量为：

$$800 + 16t - 8t = 800 + 8t.$$

因此，此时盐水的溶度为：

$$\frac{y}{800 + 8t}.$$

从 t 到 $t + dt$ 这段时间，蓄水池中的含盐量的改变量可近似为：

$$\begin{aligned} dy &= 0.0625 \cdot 16dt - \frac{y}{800 + 8t} \cdot 8dt \\ &= \left(1 - \frac{y}{100 + t}\right) dt. \end{aligned}$$

接着，第二步就是求解这个微分方程。首先，我们可以把微分方程改写成：

$$(100 + t)y' = 100 + t - y.$$

因此，

$$[(100 + t)y]' = y + (100 + t)y' = 100 + t.$$

令 $f(t) = (100 + t)y(t)$ ，那么

$$f' = 100 + t.$$

这样，

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 100t + C.$$

注意到 $f(0) = 100y(0) = 0$ 。那么我们很容易得到 $C = 0$ 并且

$$y(t) = \frac{\frac{1}{2}t^2 + 100t}{100 + t}.$$

另外一方面，根据 $800 + 16t - 8t = 1600$ ，得出蓄水池在 $t = 100$ 时正好装满混合液。因此，在这个时刻，蓄水池含盐量(单位为公斤)为：

$$y(100) = 100.$$

注意：一般求解数学模型不会很复杂，多尝试改写方程，变换函数，换元法等。

11. (微积分基本定理的应用, 变限积分求导, 单调性, 凹凸性)

首先, 注意到在 $F(x)$ 定义的第一个积分里面, u 是变量, 因此可以把积分里面的 x 放到第一个积分号外面, 把 $F(x)$ 改写成:

$$F(x) = x \int_{\frac{1}{x}}^1 f(u) du + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(u)}{u^2} du.$$

这样, 根据微积分基本定理和链式法则,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^1 f(u) du + \frac{f(\frac{1}{x})}{x} - f(\frac{1}{x}) \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^1 f(u) du - f(\frac{1}{x}) \left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

其次, 根据条件, $f(u)$ 是严格单调增函数, 因此:

(a) 如果 $\frac{1}{x} < 1$, 由于 $f(u) > f(\frac{1}{x})$ 对所有 $u > \frac{1}{x}$ 成立, 因此, 我们得到 $F'(x) > 0$ 。

(b) 如果 $\frac{1}{x} > 1$, 改写

$$F'(x) = - \int_1^{\frac{1}{x}} f(u) du + f(\frac{1}{x}) \left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

由于 $f(u) < f(\frac{1}{x})$ 对所有 $u < \frac{1}{x}$ 成立, 因此, 我们依然得到 $F'(x) > 0$ 。
综上所述, $F(x)$ 在整个区间 $(0, \infty)$ 上单调增。

接着, 根据微积分基本定理和链式法则,

$$\begin{aligned} F''(x) &= f(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} + f'(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right) + f(\frac{1}{x}) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1-x}{x^3} f'(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$

因此, 由于 $f'(\cdot) > 0$, $F''(x) > 0$ 如果 $x > 1$; $F''(x) < 0$ 如果 $0 < x < 1$ 。回顾, $F'(0) = 0$, 因此, F 的图像在区间 $(1, \infty)$ 上凹, 在区间 $(0, 1)$ 下凹。

注意: 单调性算一阶导数, 凹凸性算二阶导数。另外有时需要注意不可导的位置。

12. (如何建立未知函数的微分方程, 导数定义, 变量分离方程求解)

解答该题的关键是想到要建立未知函数的微分方程。

为了建立未知函数的微分方程，我们需要根据导数的定义，

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} = g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)+g(h)}{1-g(x)g(h)} - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(h)}{h} \cdot \frac{1+g^2(x)}{1-g(x)g(h)} \right] \\ &= 1 + g^2(x).\end{aligned}$$

$$f(y)dy = g(x)dx$$

可分离微分方程

因此，我们得到关于未知函数 $g(x)$ 的微分方程：

$$\frac{dg}{dx} = 1 + g^2.$$

改写一下，得到：

$$\frac{dg}{1+g^2} = dx.$$

因此， $\arctan g = x + C$ ，这里 c 是一个常数。由于条件(ii)给出 $g(0) = 0$ ，这样， $C = 0$ 。因此，这样我们解出

$$g(x) = \tan x.$$