1. 线性空间

一、定义 1. 可加性 2. 数乘性

加法：交换律，结合律，*0* 元存在，逆元存在

乘法：结合律，*1* 元存在，分配律

①$a+b=b+a$

②$a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

③$a+b+c=a+(b+c)$

④$\exists 1$, $\forall a$, $1\cdot a=a$

⑤$\exists 0$, $\forall a$,$a+0=a$

⑥$\forall a$, $\exists -a$, $a+(-a)=0$

⑦$\forall a,b,c$

$a(b+c)=ab+ac$

$(a+b)c=ac+bc$

二、例子

1. 反例

①可加不可乘（整数集）

②可乘不可加（坐标轴）

2. 常见空间

① $\mathbb{R}^n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n|x_i\in\mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n$ 衍生 $\mathbb{C}^n=\{x_1,x_2,\ldots,x_n|x_i\in\mathbb{C}\}$

② $\mathbb{R}^n$ 中的 m 维空间 $(m<n)$: $K=\{(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n|x_i\in\mathbb{R}\}$

③ 某些向量张成的空间

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}a1\\..\\an\end{pmatrix},\ \ldots\ ,\begin{pmatrix}x1\\..\\xn\end{pmatrix}\right\}$$

注意，一般不认为 $\mathbb{R}^m\subset\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ 不是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

3. 函数空间

$P_i=\{a_0+a_1x+\ldots+a_ix^i|i\in N^*,a_i\in\mathbb{R}\}$ 表示 i 次以及更低次多项式。

例：

$P_0=\{a_0|a_0\in\mathbb{R}\}$ 等同 $\mathbb{R}$

$P_1=\{a_0+a_1x|a_0,a_1\in\mathbb{R}\}$ 一次函数及常数

P_i 对于加法，数乘封闭，P_i 是 $i+1$ 维的。

与 $\mathbb{R}^n$ 不同，$P^m\subset P^n$, P^m 是 P^n 的子空间！

P_i 衍生，常见衍生有：

① $P(x_i)=0$, 即存在一个解为 x_i 的多项式，

自行证：满足加/乘，同理 $P^{('')}(x_i)=0$ 也可！

②$P(x_i)=P(x_j)$ 即固定两点等值
如 $P(1)=P(3)$ 也满足加/乘。

2. 秩.(极大无关组的量)

满秩：存在逆 $Ax=b$ 必有解，必有唯一解。
列满秩：存在左逆 $Ax=b$ 最多一解。
行满秩：存在右逆 $Ax=b$ 必有解。

$$rank(AB)\le \min(rank(A),rank(B))$$

$$rank(A)+rank(B)-n\le rank(AB)$$

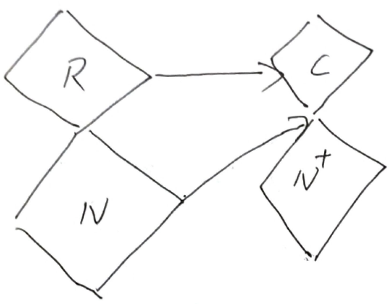
$$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$$

$$r(A)+r(B)=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix} A & 0 \\ Ep & B\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ Ep & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ Ep & B\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & -AB \\ Ep & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A)+r(B)\le rank(AB)\quad +n$$

行空间：行向量空间。
列空间：列向量空间。
零空间：$Ax=0$ 空间。
左零空间：$A^Tx=0$ 空间。
空间的和：+ 表示和。
$A+B=x|x=a+b,a\in A,b\in B$
和空间仍未线性空间。
行空间 + 零空间 = 全空间
取行空间一组基 $x_1,\ldots,x_r$, 正交延拓到全空间上
$x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n$ $(x_i\perp x_j,i\le r,r<j)$
x_j 为零空间，x_i 行空间。
列空间 + 左零空间 = 全空间
同上



$Ax\in C(A)$

$A=(b_1,\ldots,b_n)$, $x=\begin{bmatrix} x1 \\ .. \\ xn \end{bmatrix}$

$\Rightarrow Ax=b_1x_1+\ldots+b_nx_n \in span(b_1,b_2,\ldots,b_n)=C(A)$

$Ax \notin N^T(A)$

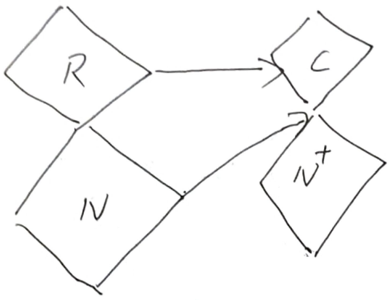
若 $\exists b \in N^T(A)Ax=b \Rightarrow A^TAx=A^Tb=0$

$\Rightarrow x^TA^TAx=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow b=0$

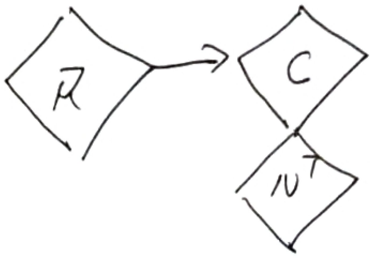
$r(A^TA)=r(A)$

$Ax=0 \Rightarrow A^TAx=0$

$\Rightarrow x^TA^TAx=0 \Rightarrow (Ax)=0$



左逆：



左逆无零空间！$\Rightarrow$

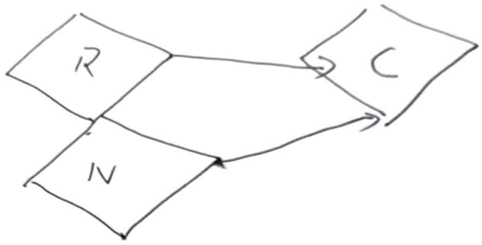
故只需要把 $R \to C$ 的元素映射回来即可，

也就是对于 $A:\forall x,\exists B \Rightarrow BAx=0$

简单推：$Ax=b$

$\Rightarrow A^TAx=A^Tb \Rightarrow x=(A^TA)^{-1}A^Tb$

$b=Ax \Rightarrow x=((A^TA)^{-1}A^T)Ax \to$ 左逆



右逆：

右逆无 N^T 空间！

右逆：反过来考虑左逆的问题

$\Rightarrow A^T(AA^T)^{-1}$