Problem Set 8 —— Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 设 A 是秩为 n 的 $m \times n$ 矩阵, 在 Matlab 里面, $[Q, R] = qr(A)$ 命令得到一个方阵 Q 和一个 $m \times n$ 的矩阵 R:

$$\text{MATLAB 得到的因子为 } (m \times m)(m \times n) \quad A = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Q 的前 n 列 Q_1 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

   (b) Q 的后 $m-n$ 列 Q_2 是矩阵 A 的哪个基本子空间的一组标准正交基？

2. 证明：实下三角的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上的元素为± 1.

3. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中确定一组基

$$\alpha_1 = (1,1,0,0),\ \alpha_2 = (1,0,1,0),\ \alpha_3 = (-1,0,0,1),\ \alpha_4 = (1,-1,-1,1).$$

   (a) 施密特正交化过程, 把它们化为一组标准正交基.

   (b) 求方阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   的一个 QR 分解.

4. 证明：任何一个 n 阶可逆实方阵 A 都可以表为一个实正交方阵 Q 和一个对角元全为正数的上三角方阵 R 的乘积, 即

$$A = QR.$$

   而且这种表示法唯一.

5. 在欧氏空间 $\mathbb{R}^6$ 中求下列齐次线性方程组

可以延伸至 $x_{2n-1} - x_{2n}$

$\downarrow$

x_{2n-1} 个

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0$$

   的解空间的一组标准正交基.

有5个线性无关向量