Problem Set 6 —— Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 已知三阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$$

(k 为常数), 且 $AB=O$ (这里的 O 是 3 乘 3 的零矩阵), 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

2. 已知非齐次线性方程组

$A(x_1-x_2)=0$

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

有 3 个线性无关的解. $Ax_0=b$

(a) 证明方程组的系数矩阵的秩为 2.

(b) 求 a, b 的值和方程组的通解.

3. 考虑两个四元齐次线性方程组 (1) 和 (2). 设齐次线性方程组 (1) 为

$$\begin{cases}x_1+x_3 &=0,\\x_3+x_4 &=0.\end{cases}$$

齐次线性方程组 (2) 的基础解系为

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\-3\\-3\\1\end{bmatrix}.$$

(a) 求线性方程组(1)的一般解;

(b) 线性方程组 (1) 和 (2) 是否有非零的公共解, 若有, 求出其所有的非零公共解,若没有,则说明理由.

4. 设 α, β, γ 为四维列向量, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T+\gamma\gamma^T$, 其中 $\alpha^T,\beta^T,\gamma^T$ 分别是 α,β,γ 的转置. 证明:

(a) A 的秩小于等于 3.

(b) 若 α, β, γ 线性相关, 则 A 的秩小于 3.

5. 设矩阵 A 为 $m\times n$ 实矩阵. 证明:

(a) 如果 $\mathrm{rank}A=n$, A^TA 是一个可逆矩阵. Q: ?

(b) 如果 $\mathrm{rank}A=m$, AA^T 是一个可逆矩阵.

(c) **矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的，就称该矩阵为列(行)满秩的**. 假定矩阵 A 的秩为 r, 则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q, 使得 $A=PQ$.