Problem Set 11 —— Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & & & \\ & \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}$

1. 如果 A 是一个 n 阶复方阵, 且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 A 的互不相同的特征值. 称 $s_i = \dim N(A - \lambda_i I)$ 为 λ_i 的几何重数. 如果矩阵 A 的特征多项式为

   $\dim = \dim N(S^{-1}AS - S^{-1}\lambda_i I S)$

   $$f(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}.$$

   $= \dim N(\Lambda - \lambda_i I)$

   称 λ_i 的代数重数为 n_i.

   证明：λ_i 的代数重数大于等于它的几何重数, 也即, $n_i \geq s_i$.

2. 设 A 是一个 n 阶复方阵, 如果矩阵 A 的所有特征值的几何重数和代数重数都相等. 证明：矩阵 A 是可对角化的.

3. (方阵的同时对角化问题) 假定矩阵 A, B 都是可对角化矩阵, 并且 $AB = BA$. 证明：存在可逆矩阵 S 使得

   $$S^{-1}AS = \Lambda_1, \ S^{-1}BS = \Lambda_2,$$

   其中 Λ_1 和 Λ_2 都为对角矩阵.

4. 设 A 为一个 3×3 复矩阵. 如果

   $$A^2 = I.$$

   证明: A 是可对角化的.

   $Ax = \lambda x$

   $A^2 x = \lambda^2 x$

   $(A^2 - I)x = (\lambda^2 - 1)x$

   $0 = (\lambda^2 - 1)x$

   $0 = \lambda^2 - 1$

   $\lambda = \pm 1$

   $A^2 - I = (A+I)(A-I)$

   $\underbrace{\operatorname{rank}(A+I)}_{3-\dim N(A+I)} + \underbrace{\operatorname{rank}(A-I)}_{3-\dim N(A-I)} \leq 3$

   只要证 $\dim N(A+I) + \dim N(A-I) = 3$

   $\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) = 3$

   $3 = \operatorname{rank}(A^2 - I) + 3 \geq \operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I)$

   $\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) \geq \operatorname{rank} 2I = 3$

   $\operatorname{rank}(A+I) + \operatorname{rank}(A-I) = 3$

5. 设 n 阶方阵 A 的特征值为

   $$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_n,$$

   且 $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$. 证明: 方阵 $f(A)$ 的特征值为

   $$\lambda_1^2 + 1, \ \lambda_2^2 + 1, \cdots, \ \lambda_n^2 + 1.$$

   还要证重数相同