

Problem Set 10 — Linear Algebra A (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & v_{n-1} \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & w \end{vmatrix}.$$

2. 设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) 求行列式 $|A|$;

(b) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;

(c) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

3. 设行列式 Δ 和 δ 如下:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) 求 $\Delta\delta$.

(b) 求 Δ .

4. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, λ 为一个未定元. 证明:

$$\lambda^n |\lambda I_m - AB| = \lambda^m |\lambda I_n - BA|.$$

5. 设 A, B, C, D 都为 n 阶矩阵, 且 $AC = CA$. 令

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

证明: $|M| = |AD - CB|$. 注意: 这里矩阵 A 不一定是可逆的.