

Problem Set 2 — Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 计算:

(a)

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n$$

换成 $\cos(-\theta)$

(b)

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}^n$$

$(\lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix})^n$

这里假定 n 是一个正整数.

2. 如果方阵 A 适合 $A^2 = I$, 则 A 称为对合矩阵 (*involutory matrix*), I 为 2 阶单位矩阵. 求出所有 2×2 的对合矩阵.

3. 证明: 主对角元全为 1 的上三角矩阵的乘积, 仍是主对角元为 1 的上三角矩阵.

4. n 阶矩阵 A 的主对角元之和称为矩阵 A 的迹, 记作 $\text{tr}(A)$, 即

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

证明: 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

5. 证明: 如果 A 和所有的 n 级矩阵都可以交换, 那么 $A = \lambda I$, 这里 λ 是一个实数, I 为 n 阶单位阵.

$[e_1 \dots e_n]$ 对 $\forall B$ 成立

$$AB = BA$$