Problem Set 14 —— Linear Algebra(Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 证明:

   (a) 如果

   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \ (a_{ij}=a_{ji})$$

   是正定二次型, 那么

   $\begin{vmatrix} A & y \\ y^T & 0 \end{vmatrix}$

   $$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 \end{vmatrix}$$

   $\begin{vmatrix} A & y \\ 0 & -y^TA^{-1}y \end{vmatrix}$

   $= -|A|y^TA^{-1}y < 0$ 对 $\forall y$

   是负定二次型;

   $b=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{bmatrix}$

   (b) 如果 A 是正定矩阵, 那么

   $A = \begin{vmatrix} A_{n-1} & b \\ b^T & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & b \\ 0 & -b^TA_{n-1}^{-1}b + a_{nn} \end{vmatrix}$

   $$|A| \le a_{nn}P_{n-1},$$

   <0

   这里 P_{n-1} 是 A 的 $n-1$ 级的顺序主子式;

   $= |A_{n-1}|\,(a_{nn} \underline{-b^TA_{n-1}^{-1}b})$

   $< |A_{n-1}|a_{nn}$

   (c) 如果 A 是正定矩阵, 那么

   $$|A| \le a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

   (d) 如果 $T=(t_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵, 那么

   $$|T|^2 \le \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$ 舒尔定理

   $\rightarrow tr(AA^T) = |\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\cdots+|\lambda_n|^2$

2. 如果 A 是 3 阶的实矩阵, 满足条件 $\underline{A^TA=AA^T}$, $A^T \ne A$.

   $Ax=\lambda x$ 表示出来

   (a) 证明: 存在 3 阶正交矩阵 P 和 $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}$, 使得

   $A(u+iv)=(a+bi)(u+iv)$

   $A(u-iv)=(a-bi)(u-iv)$

   $P=[p_1\ p_2\ p_3]$

   $p^{-1}AP$

   $$P^TAP=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{bmatrix}.$$

   特征值方程

   $(a-\lambda)\left((b-\lambda)^2+c^2\right)$

   $u,v \xrightarrow{\text{正交化}} p_2,\ p_3$

   $\lambda = a,\ b+ci,\ b-ci$

   $A[p_2\ p_3]=[p_2\ p_3]\begin{bmatrix} b & c \\ -c & b \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} b+ci & \\ & b-ci \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} b & c \\ -c & b \end{bmatrix}$ 相似

   (b) 若

   $$A=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}E_{i,j},\ AA^T=A^TA=I_3,\ |A|=1,$$

   证明 1 为 A 的一个特征值, 并求特征值 1 的一个特征向量. 其中 $E_{i,j}$ 表示第 i 行第 j 列元素为 1, 其余位置为 0 的 3 阶矩阵.

写成 $(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 形式

$= n(x_1^2+\cdots+x_n^2)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$

$= (x_1\cdots x_n)\begin{bmatrix}n&&\\&\ddots&\\&&n\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} - (x_1\cdots x_n)\begin{bmatrix}1&\cdots&1\\\vdots&\ddots&\vdots\\1&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

3. 证明:

$$n\sum_{i=1}^n x_i^2-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$$

$= (x_1\cdots x_n)\begin{bmatrix}n-1&-1&\cdots&-1\\-1&n-1&&\\\vdots&&\ddots&\\-1&&&n-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

是半正定的.

4. 已知二次型

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,\\g(y_1,y_2,y_3)&=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3.\end{aligned}$$

$\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$

$P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$P^TAP=B$

(a) 求可逆变换 $x=Py$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$;

(b) 是否存在正交变换 $x=Qy$, 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

$Q^T=Q^{-1}$ 相似才可能做到 求λ 发现不相似

5. 考虑矩阵:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

(a) 求 A 的所有奇异值;

(b) 求 A 的奇异值分解.

T4. 变换B

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 规范型

$G_1^TBG_1=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$ 通过共同形式理解

$G_2^TAG_2=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$

$B=(G_1^T)^{-1}G_2^TAG_2G_1^{-1}$ 惯性定理保证

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

只关注 trace:

$$c_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2$$

$$c_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2$$

$$\vdots$$

$$c_{nn} = a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \cdots + a_{nn}^2$$

$$\operatorname{tr}(AA^T) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

e.g. $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

$AA^T = A^TA$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = a+bi \quad \lambda_2 = a-bi$

$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = a^2+b^2$

$\operatorname{tr}(AA^T) = |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2$

$A \in R^{2\times 2}$

$A^TA = AA^T$ A有2个共轭特征值 $b \pm ci$

$\Rightarrow \exists Q \in R^{2\times 2}, Q^T = Q^{-1}$

s.t. $Q^TAQ = \begin{bmatrix} b & c \\ -c & b \end{bmatrix}$

$A(x+iy) = \underline{(b+ic)}(x+iy) = bx - cy + (cx+by)i$

$A(x-iy) = \underline{(b-ic)}(x-iy) = (bx-cy) - (cx+by)i$

$Ax = bx - cy$

$Ay = cx + by$

$A[x\ y] = [x\ y]\begin{bmatrix} b & -c \\ c & b \end{bmatrix}$

$[x\ y]^{-1}A[x\ y] = \begin{bmatrix} b & -c \\ c & b \end{bmatrix}$

$x\ y$ 线性无关

$A^HA = AA^H$

正规矩阵：不同特征值特征向量正交

$\xi_1 \quad \xi_2$

$\lambda_1 \quad \lambda_2$

$\underline{\bar{\lambda}_1 \xi_1^H \xi_2 = \xi_1^H A^H \xi_2 = \xi_1^H \bar{\lambda}_2 \xi_2 = \bar{\lambda}_2 \xi_1^H \xi_2}$

正规矩阵：λ 是 A 特征值，$\bar{\lambda}$ 是 A^H 特征值
且同特征向量

证：$(\lambda I - A)\xi = 0$

$|(\lambda I - A)\xi| = |(\lambda I - A)^H \xi| = |(\bar{\lambda} I - A^H)\xi| = 0$

$\bar{\lambda}$ 是 A^H 特征值

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \xi_2$ 正交

不同特征值特征向量正交

$0=(x+iy)^H(x-iy)$

$=(x^H+-iy^H)(x-iy)$

$=x^Hx-y^Hy-2i\,y^Hx$

$\Rightarrow x^Ty=y^Tx=0$

$\Rightarrow x^Tx=y^Ty$

$\exists Q$ 使得 $Q^TAQ=\begin{bmatrix} b & c \\ -c & b \end{bmatrix}$

① $\lambda=0 \Rightarrow$ 实根

$|\lambda I-A|=\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0$

② $f(\lambda) \quad =\lambda^3\left(1+\frac{a_2}{\lambda}+\frac{a_1}{\lambda^2}+\frac{a_0}{\lambda^3}\right)$

$\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda)=+\infty \quad \lim\limits_{\lambda=-\infty} f(\lambda)=-\infty$

连续 至少 $\exists$ 一个实根 使得 $f(\lambda)=0$

$\lambda_1=a \quad \lambda_2=b+ci \quad \lambda_3=b-ci$

$c\neq 0$

$Ax_a=ax_a$

$A^TAx_a=aA^Tx_a$

$\Rightarrow A\overset{(实体)}{(A^Tx_a)}=a(A^Tx_a)$

$\Rightarrow A^Tx_a=kx_a$

$x_a^Tx_a=1$

$[x_a\ x_1\ x_2]^TA[x_a\ x_1\ x_2]$

$=[x_a\ x_1\ x_2]^T[Ax_a\ Ax_1\ Ax_2]$

$=\begin{bmatrix} x_a^TAx_a & x_a^TAx_1 & x_a^TAx_2 \\ x_1^TAx_a & x_1^TAx_1 & x_1^TAx_2 \\ x_2^TAx_a & x_2^TAx_1 & x_2^TAx_2 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & D & \end{bmatrix}$

$D=[x_1\,x_2]^TA\,[x_1\,x_2]$

$x^TAx\,[x^TAx]^T=x^TAxx^TA^Tx$

$=x^TAA^Tx$

$=x^TA^TAx$

$=x^TA^Txx^TAx$

$=[x^TAx]^Tx^TAx$

$\Rightarrow_{②}$ D 是正规矩阵

③ D 有共轭复根

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^T X^T A X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \\ & Q^T D Q \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & & \\ & b & c \\ & -c & b \end{bmatrix}$$

$$P = X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

* 正交矩阵的特征值只可能是 1/-1