

Problem Set 12 — Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 证明: n 阶矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix}$ 相似.

2. 证明: 若 n 阶矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 $AB = BA$ 的充要条件是 A 的特征向量也是 B 的特征向量.

3. 已知

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$$

的一个特征向量是

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) 确定 a, b 以及 ξ 对应的特征值;

(b) A 能否相似于对角矩阵? 说明理由.

4. 设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(a) 证明 P 为可逆矩阵.

(b) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

5. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

求一个正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵.