Problem Set 13 —— Linear Algebra (Spring 2024)

Dr. Y. Chen

1. 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同特征值, α_1, α_2 分别为 λ_1, λ_2 的特征向量, 证明： $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

2. 设向量组 $\alpha_1 = (1,2,1)^T, \alpha_2 = (1,3,2)^T, \alpha_3 = (1,a,3)^T$ 为 R^3 的一组基, $\beta = (1,1,1)^T$ 在这组基下的坐标为 $(b,c,1)^T$.

   (a) 求 a, b, c;

   (b) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 R^3 的一组基. 并求 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵.

3. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, 且 $A^2 = A$, 证明存在正交矩阵 Q, 使得

$$Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 0, \cdots, 0).$$

取H时 P也得取实矩！

4. 证明反对称实矩阵的特征值是 0 或纯虚数.

5. 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

   已知 A 有 3 个线性无关的特征向量, 且 $\lambda_1 = 2$ 是其二重特征值, 求 P, 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.