行列式

1、定义法：适用于0比较多的行列式.

2、利用性质化三角形行列式

3、 按行（列）展开

4、 其他方法：

析因子法
箭形行列式
行（列）和相等的行列式
递推公式法
加边法（升级法）
拆项法
数学归纳法

（一）析因子法

2种取法

例：计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$

①交以数

解：由行列式 D定义知为 x 的4次多项式.

②特殊情况：

$D=0$

又，当 $x=\pm1$时，1，2行相同，有 $D=0$，

$\therefore x=\pm1$ 为D的根.

当$x=\pm2$ 时，3，4行相同，有 $D=0$，

$\therefore x=\pm2$为D的根.

故D有4个一次因式：$x+1, x-1, x+2, x-2$

设 $D = a(x+1)(x-1)(x+2)(x-2),$

令 $x=0$, 则 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -12$

找特殊情况
猜系数

即, $a \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) = -12.$ $\therefore a = -3.$

$\therefore D = -3(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

（二）箭形行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_2 & \cdots & a_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, i=1,2,3\cdots n.$$

将$c_1 \sim c_n$消为0

解：把所有的第 $i+1$列$(i=1,\cdots,n)$的 $-\dfrac{c_i}{a_i}$倍加到第1列，得：

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_ic_i}{a_i})$$

可转为箭形行列式的行列式：

$$1)\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, i = 1,2,3\cdots n.$$

$$2)\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & x \\ x & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i \neq 0, i = 1,2,3\cdots n.$$

（把第 i 行分别减去第1行， 即可转为箭形行列式）

（三）行（列）和相等的行列式

$$1)\quad D=\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & \cdots & \cdots & a \end{vmatrix}$$

加在首列

解：$D \xlongequal[c_1+c_2+\cdots+c_n]{} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$

$$=\left(a+(n-1)b\right)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

第一行特殊

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots n]{r_i-r_1}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=(a-b)^{n-1}\left(a+(n-1)b\right)$$

2)

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解

$$D=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\begin{matrix} r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2} \\ \vdots \\ r_2-r_1 \end{matrix}}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$
=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

加上去

$$
\xlongequal[i=2,3\cdots n-1]{r_i-r_1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}_{n-1}
$$

标入标
易知大小

$$
\xlongequal[c_{n-1}+c_1+\cdots+c_{n-2}]{}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1}
$$

按顺序

$$
=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-1)}{2}}(-1)(-n)^{n-2}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}
$$

（四）升级法（加边法）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}, \quad b_1 b_2 \cdots b_n \neq 0$$

升级后好作差

解：

1) $$D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\underline{\underline{r_i - r_1(i = 2,3\cdots n+1)}} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\overline{\overline{c_1 + \frac{c_{i+1}}{b_i}(i = 1,2\cdots n+1)}} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \cdots b_n \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}\right).$$

（五）递推公式法

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

解

$$D_n \overset{\text{按}c_1\text{展开}}{=\!=\!=\!=} (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) = \cdots = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$$

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) = \cdots = a^{n-2}(D_2 - bD_1)$$

而 $D_2 = a^2 + ab + b^2, \quad D_1 = a + b$

$$\therefore D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(a^2 + ab + b^2 - a^2 - ab) = b^n;$$

$$D_n - bD_{n-1} = a^{n-2}(a^2 + ab + b^2 - a^2 - ab) = a^n.$$

由以上两式解得 $D_n = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} & a \neq b \\ (n+1)a^n & a = b \end{cases}$

（先将行列式表成两个低阶同型的行列式的线形关系式，再用递推关系及某些低阶（2阶，1阶）行列式的值求出 D 的值）

例 计算2n阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & 0 & & & b \\ & \ddots & & & & \unicode{x22F0} & \\ & & a & & b & & \\ 0 & & & & & & 0 \\ & & c & & d & & \\ & \unicode{x22F0} & & & & \ddots & \\ c & & & & & & d \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开,有

$$D_{2n}=a\begin{vmatrix} a & & & 0 & & & b & 0 \\ & \ddots & & & & \unicode{x22F0} & & \\ & & a & & b & & & \\ 0 & & & & & & 0 & \vdots \\ & & c & & d & & & \\ & \unicode{x22F0} & & & & \ddots & & \\ c & & & 0 & & & d & 0 \\ 0 & & & \cdots & & & 0 & d \end{vmatrix}+b(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix} 0 & a & & & 0 & & & b \\ & & \ddots & & & & \unicode{x22F0} & \\ & & & a & & b & & \\ \vdots & 0 & & & & & & 0 \\ & & & c & & d & & \\ & & \unicode{x22F0} & & & & \ddots & \\ 0 & c & & & \cdots & & & d \\ c & 0 & & & \cdots & & & 0 \end{vmatrix}$$

再对两个(2n-1)阶行列式各按最后一行展开,得

$$D_{2n}=adD_{2(n-1)}-bc(-1)^{(2n-1)+1}D_{2(n-1)}=(ad-bc)D_{2(n-1)}$$

$$=(ad-bc)^2D_{2(n-2)}=\cdots=(ad-bc)^{n-1}D_2=(ad-bc)^{n-1}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(ad-bc)^n$$

例 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

证： **将第n-1行乘以$(-x_1)$加到第n行,将第n-2行乘以$(-x_1)$加到第n-1行,这样依次下去,最后将第1行乘以$(-x_1)$加到第2行,得**

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

按第一列展开,并提出每一列的公因子(x_i-x_1)(i=1,2,…,n),得递推公式:

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_n\\ x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & x_4^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)D_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_n)$$

$$=[(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)][(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)]D_{n-2}(x_3,x_4,\cdots,x_n)$$

$$=\cdots$$

$$=[(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)][(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)]\cdots[(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})]D_2(x_{n-1},x_n)$$

$$=[(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)][(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)]\cdots[(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})]\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$=[(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)][(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)]\cdots[(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})](x_n-x_{n-1})$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

（六）拆项法（主对角线上、下元素相同）

$$1)\quad D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$$

拆项

$$D_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & 0 \\ a & a+x_2 & \cdots & a & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & a & x_n \end{vmatrix}$$

减最后一列

$$=\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}+x_nD_{n-1}$$

X_{n-1}

$$\therefore \quad D_n = x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_nD_{n-1}$$

$$D_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-2}a + x_{n-1}D_{n-2},$$

$D_1 = a + x_1$

$$D_{n-2} = x_1x_2\cdots x_{n-3}a + x_{n-2}D_{n-3}, \cdots\cdots$$

继续下去，可得

$D_2 = x_1a + x_2D_1$

$$D_n = ax_1\cdots x_{n-1} + ax_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + ax_1x_2\cdots x_{n-3}x_{n-1}x_n$$

$$+\cdots + ax_1x_2x_4\cdots x_n + ax_1x_3x_4\cdots x_n + x_nx_{n-1}\cdots x_3x_2D_1$$

$$= a(x_1x_2\cdots x_{n-1} + x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n + \cdots + x_1x_3\cdots x_n + x_2x_3\cdots x_n)$$

$$+ x_1x_2\cdots x_n$$

当 $x_1x_2\cdots x_n \neq 0$时, $D_n = x_1x_2\cdots x_n\left(1 + a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$

例 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

行列式基本性质

解: 将最后一列写成两数之和的形式,再由行列式的性质5可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

由观察可知,上式右端第一个行列式按最后一列展开得D_{n-1},而第二个行列式从最后一行开始,每后一行乘以(-1)加到相邻的前一行上,就变为下三角形,其值为1,故得

$D_n = D_{n-1} + 1.$ 于是由递推公式得

$$D_n = D_{n-1} + 1 = (D_{n-2} + 1) + 1 = D_{n-2} + 2 = D_{n-3} + 3$$

$$= \cdots\cdots = D_2 + (n-2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (n-2) = n+1$$

（七） 数学归纳法

例、证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n (1+\sum \frac{1}{a_i})$$

证：当 $n=1$ 时, $D_1 = 1 + a_1 = a_1(1+\frac{1}{a_1})$，结论成立.

假设 $n=k$ 时结论成立，即,

$$D_k = a_1 a_2 \cdots a_k (1+\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i})$$

对 $n=k+1$，将 D_{k+1} 按最后一列拆开，

$$D_{k+1}=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+a_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a_k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a_{k+1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_k & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + a_{k+1}D_k = a_1a_2\cdots a_k + a_{k+1}D_k$$

$$= a_1a_2\cdots a_k + a_{k+1}\cdot a_1a_2\cdots a_k(1+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i})$$

$$= a_1a_2\cdots a_{k+1}(1+\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{a_i})$$

所以 $n=k+1$时结论成立，故原命题得证.

（八） 范德蒙行列式

$0 \cdots 0 \; 1$

例、计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x^2_1 & x^2_2 & \cdots & x^2_n \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ x^{n-2}_1 & x^{n-2}_2 & \cdots & x^{n-2}_n \\ x^n_1 & x^n_2 & \cdots & x^n_n \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$

解：考察 $n+1$ 阶范德蒙行列式 x^{n-1}

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x^2_1 & x^2_2 & \cdots & x^2_n & x^2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ x^{n-1}_1 & x^{n-1}_2 & \cdots & x^{n-1}_n & x^{n-1} \\ x^n_1 & x^n_2 & \cdots & x^n_n & x^n \end{vmatrix}$$

添一行+一列

$$= (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

显然 D 就是行列式 $f(x)$ 中元素 x^{n-1} 的余子式 $M_{n.n+1}$，

即 $D_n = M_{n,n+1} = -A_{n,n+1}$，（ $A_{n,n+1}$ 为代数余子式）

又由 $f(x)$ 的表达式及根与系数的关系知，

$f(x)$ 中 x^{n-1} 的系数为：

$$-(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

即，$A_{n,n+1} = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$

$$\therefore D_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

练习1、计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 \\ 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}$$

解：

$$D_n \overset{\text{按}c_i\text{行展开}}{=\!=\!=} 9D_{n-1} - 4\begin{vmatrix} 5 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 4 & 9 \end{vmatrix}_{n-1} = 9D_{n-1} - 20D_{n-2},$$

即有 $\quad D_n - 5D_{n-1} = 4(D_{n-1} - 5D_{n-2}),$

于是有

$$D_n - 5D_{n-1} = 4^2(D_{n-2} - 5D_{n-3}) = \cdots = 4^{n-2}(D_2 - 5D_1)$$

$$= 4^{n-2}(61 - 45) = 4^n,$$

同理有 $D_n - 4D_{n-1} = 5^2(D_{n-2} - 4D_{n-3})$

$$= \cdots = 5^{n-2}(D_2 - 4D_1) = 5^{n-2}(61 - 36) = 5^n$$

即 $$\left.\begin{aligned} D_n - 5D_{n-1} &= 4^n \\ D_n - 4D_{n-1} &= 5^n \end{aligned}\right\} \Rightarrow D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$$

练习2、计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} c & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a-c & b & b & \cdots & b \\ 0 & a & b & \cdots & b \\ 0 & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=c\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}_n+(a-c)D_{n-1}$$

$$= c\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c-b & c-b & \cdots & a-b \end{vmatrix}_n + (a-c)D_{n-1}$$

$$= c(a-b)^{n-1} + (a-c)D_{n-1} \qquad ①$$

又

$$D_n = \begin{vmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$= b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix} + (a-b)D_{n-1} \qquad ②$$

①$\times(a-b)$ - ②$\times(a-c)$，得

$$(c-b)D_n = c(a-b)^n - b(a-c)^n$$

当 $c \neq b$ 时，$D_n = [c(a-b)^n - b(a-c)^n]/c-b$

当 $c = b$ 时，$D_n = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$

练习3、证明：

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \ddots & 2\cos\alpha & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

证：$n = 1$时，$D_1 = \cos\alpha$. 结论成立.

假设$n \le k$ 时，结论成立.

从后展找"相同的增长"

当 $n = k+1$ 时，D_{k+1} 按第 $k+1$行展开得

$$D_{k+1} = 2\cos\alpha D_k + (-1)^{k+1+k} \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \ddots & 2\cos\alpha & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\alpha D_k - D_{k-1}$$

由归纳假设 $D_{k+1} = 2\cos\alpha\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha$

$$= 2\cos\alpha\cos k\alpha - \cos(k-1)\alpha$$

$$= 2\cos\alpha\cos k\alpha - \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos k\alpha\cos\alpha - \sin k\alpha\sin\beta$$

$$= \cos(k+1)\alpha$$

于是$n = k + 1$**时结论亦成立，原命题得证.**

练习4、计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \cdots & x^2{}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^n{}_1 & x^n{}_2 & \cdots & x^n{}_n \end{vmatrix}$$

解：考察 $n+1$ 阶范德蒙行列式

$$g(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \cdots & x^2{}_n & x^2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ x^{n-1}{}_1 & x^{n-1}{}_2 & \cdots & x^{n-1}{}_n & x^{n-1} \\ x^n{}_1 & x^n{}_2 & \cdots & x^n{}_n & x^n \end{vmatrix}$$

$$= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_n) \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

显然 D_n就是行列式 $g(x)$中元素的余子式$M_{2,n+1}$，即

$$D_n = M_{2,n+1} = (-1)^{n+3} A_{2,n+1}$$

由$f(x)$的表达式知，x的系数为：

$$-(x_2x_3\cdots x_n + x_1x_2\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1}) \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

即

$$A_{2,n+1} = -(x_2x_3\cdots x_n + x_1x_2\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1}) \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$

$$\therefore D_n = (-1)^n (x_2x_3\cdots x_n + x_1x_2\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_n) \prod_{1\le j<i\le n} (x_i - x_j)$$