期中复习

一、LU分解

- LU分解是指矩阵 A可以分解为 LU乘积的形式，其中 L是单位下三角矩阵， U是单位上三角矩阵。一般用Gauss消去法

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)$$

- 对这个矩阵LU分解

一、LU分解

- 先求第一个变换矩阵

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 考虑分量等于0

$$\begin{cases} -l_{21} + 2 = 0 \Rightarrow l_{21} = 2 \\ -l_{31} + 3 = 0 \Rightarrow l_{31} = 3 \end{cases}$$

- 那么可以得到

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一、LU分解

- 接下来我们计算L2

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

- 可以得到如下式子

$$3l_{32} - 6 = 0 \Rightarrow l_{32} = 2$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 因此可以得到U

$$L_2(L_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一、LU分解

- 除此之外，万不得已情况下可以使用待定系数法去硬做

设 $A=LU$，即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \cdots & u_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

(1) 比较等式两边的第一行，可得

$$u_{1j}=a_{1j}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

再比较等式两边的第一列，可得

$$a_{i1}=l_{i1}u_{11} \Rightarrow l_{i1}=a_{i1}/u_{11}, \quad i=2,3,\ldots,n.$$

一、LU分解

(2) 比较等式两边的第二行, 可得

$$a_{2j} = l_{21}u_{1j} + a_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - l_{21}u_{1j}, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

再比较等式两边的第二列, 可得

$$a_{i2} = l_{i1}u_{12} + l_{i2}u_{22} \Rightarrow l_{i1} = (a_{i2} - l_{i1}u_{12})/u_{22}, \quad i = 3, 4, \ldots, n.$$

一、LU分解

(3) 以此类推, 第 k 步时, 比较等式两边的第 k 行, 可得

$$\boxed{u_{kj} = a_{kj} - (l_{k1}u_{1j} + \cdots + l_{k,k-1}u_{k-1,j}),}$$

$$j = k, k+1, \ldots, n.$$

比较等式两边的第 k 列, 可得

$$\boxed{l_{ik} = (a_{ik} - l_{i1}u_{1k} - \cdots - l_{i,k-1}u_{k-1,k})/u_{kk},}$$

$$i = k+1, k+2, \ldots, n.$$

直到第 n 步, 即可计算出 L 和 U 的所有元素.

一、LU分解

- 注意到如果主对角矩阵不可逆，那么需要变换行/列，也就是变成PA=LU
- LU分解是唯一的
- 可以提取U的对角元变成LDU分解，特别的，At=A时称为LDLt分解

二、增广矩阵与初等变换

- 增广矩阵意味着我们在原来矩阵基础上加上另外一个矩阵/向量
- 一般考点：1，增广矩阵求Ax=b,2，增广矩阵求逆
- 增广矩阵的初等变换
- 将某一行乘以一个非零常数k
- 交换矩阵中的任意两行；
- 将某一行加上另外一行的k 倍
- 不要对增广矩阵列变换！

二、增广矩阵与初等变换

- 求解方程的办法

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & -3 & 18 & | & 6 \\ 0 & -6 & 12 & | & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & -6 & 12 & | & 4 \\ 0 & -3 & 18 & | & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & -2 & 4 & | & \frac{4}{3} \\ 0 & -3 & 18 & | & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & -3 & 18 & | & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & -1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -5x_2 + 7, \quad x_3 = k$$

二、增广矩阵与初等变换

- 增广矩阵求逆的原理
- 对增广矩阵进行行列变换等同于在增广矩阵左乘一个矩阵

$$[A|I_n] \xrightarrow{行变换} [U|B] \xrightarrow{行变换} [I_n|A^{-1}]$$

二、增广矩阵与初等变换

- 以下是一个算例

【例】求解$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}$的逆矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

二、增广矩阵和初等变换

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

二、增广矩阵和初等变换

- 最后可以得到

$$\left[\begin{array}{cc:cc}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{array}\right]$$

- 同理可以用这个方法求解AX=B，其中B是矩阵

三、矩阵的秩和极大线性无关组

- 矩阵的秩：最大线性无关组的数量
- 行秩：行向量中最大线性无关组
- 列秩：列向量最大线性无关组
- 行秩=列秩=主元数量
- 求极大线性无关组，就是把向量排成矩阵然后直接求主元，主元行/列就是无关的向量组

三、矩阵的秩与极大线性无关组

求向量组$\alpha_1=(2,1,4,3)^T,\alpha_2=(-1,1,-6,6)^T,\alpha_3=(-1,-2,2,-9)^T,\alpha_4=(1,1,-2,7)^T$,
$\alpha_5=(2,4,4,9)^T$的秩，一个极大线性无关组，并把其余向量用该极大线性无关组线性表出。

[解]

构造矩阵$A=(\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4\quad\alpha_5)$作初等行变换化为最简，有

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

从最简形式观察到主元在第一列、第二列、第四列

三、矩阵的秩和极大线性无关组

从最简形式观察到主元在第一列、第二列、第四列

且第四行全为0，所以秩$r(A)=3$

极大线性无关组：α_1，α_2，α_4

$$\underset{\alpha_3}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}}}=-\underset{\alpha_1}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}}-\underset{\alpha_2}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}};\qquad \underset{\alpha_5}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}4\\3\\-3\\0\end{pmatrix}}}=4\underset{\alpha_1}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}}+3\underset{\alpha_2}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}}-3\underset{\alpha_4}{\underset{\uparrow}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}}$$

$$\therefore\begin{cases}\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4\end{cases}$$

←这就是由其他向量线性表出

三、矩阵的秩和极大线性无关组

- 对于非实向量空间的例子，我们可以选取一组基底，对于坐标进行上述操作
- 经典范例：极大无关的矩阵
- 定理：对于任意的向量组yi,对于任意的基底，如果对应的坐标向量xi无关，那么yi无关！

四、Ax=0和Ax=b的求解

- 1、b属于A的列空间的时候，Ax=b才有解
- 2、A行满秩，那么意味着A是不定/适定的
- 3、A列满秩，那么A是超定/适定的，Ax=0只有零解
- 求解方法，RREF格式

1.r=m=n（”满秩”），一定有唯一解：

（1）没有零行，一定有解；

（2）没有自由变量，解唯一（回代之后解出）。

2.r=m且r<n（“行满秩”），一定有无穷多个解：

（1）没有零行，一定有解；

（2）有自由变量，有无穷多个解；

3.r<m且r=n（“列满秩”），解的个数为0或1：

（1）有零行，可能无解；

（2）没有自由变量，如果有解，则解唯一；

4.r<m且r<n，解的个数为0或无穷大：

（1）有零行，可能无解；

（2）有自由变量，如果有解，则有无穷多个解。

四、Ax=0和Ax=b求解

- RREF格式的求解细节注意
- 主元和自由变量的关系，自由变量一个设置成1，别的设置为0，看主元对应的数

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 6 & 6 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

四、Ax=0和Ax=b的求解

- 转化成RREF后

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Ax=b，猜一个解，然后写成xp+xn

五、线性变换

- 满足数乘，满足加法
- 线性变换公式

讨论：

- 不同的基之间的关系
- 同一个向量在不同基下坐标之间的关系

1 基变换公式

设空间中有两组基：$\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$
$\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\}$

则$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)C_{n\times n}$

五、线性变换基本步骤

- 1、求Tu1=xxx,Tu2=xxx,Tu3=xxx
- 2、写成TU=VR的格式，R就是所求

六、旋转，投影矩阵

- 旋转矩阵的公式
- 二维旋转

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \exp\left(\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

- 投影矩阵的公式

$$P = \frac{aa^T}{a^T a}$$

习题

5. (10 points) Let $E = \{u_1, u_2, u_3\}$ and $F = \{v_1, v_2\}$, where

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Define the linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ by

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}.$$

Find the matrix A representing T with respect to the ordered bases E and F.

(10 分) 设 $E = \{u_1, u_2, u_3\}$, $F = \{v_1, v_2\}$, 其中

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \; u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; u_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

定义线性变换 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 如下

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}.$$

求 T 在 E 和 F 这两组有序基下的矩阵表示 A.

习题

8. (12 points) Let A be a 3×3 matrix such that $\operatorname{rank}(A) = 2$ and $A^3 = 0$.

   (a) Prove that $\operatorname{rank}(A^2) = 1$.

   (b) Let $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$ be a nonzero vector such that $A\alpha_1 = 0$. Prove that there exist vectors α_2, α_3 such that $A\alpha_2 = \alpha_1$, $A^2\alpha_3 = \alpha_1$.

   (c) For any vectors α_2, α_3 described as above, show that $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are linearly independent.

(In this problem, you are allowed to assume the statements of some questions to answer subsequent questions.)

(12 分) 设 A 是 3×3 矩阵, 它满足 $\operatorname{rank}(A) = 2$ 及 $A^3 = 0$.

$A\,A^2$

$\dim N(A) = 1$

$C(A) \subseteq N(A^2)$ $C(A^2) \subseteq N(A)$

还 $\dim C(A^2) \geq 1$

$N(A) \subset C(A)$ $x \in N(A)$ $C(A^2) \subseteq N(A)$

$Ax = 0$

$A^2x = 0$

$\alpha_1 \in N(A)$ $x \in N(A^2)$

$x \in C(A)$

(a) 证明 $\operatorname{rank}(A^2) = 1$.

(b) 设 $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$ 是满足 $A\alpha_1 = 0$ 的非零向量. 证明: 存在向量 α_2, α_3 使得 $A\alpha_2 = \alpha_1$, $A^2\alpha_3 = \alpha_1$.

(c) 证明: 对于任意满足上述条件的向量 α_2, α_3, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

(本题中, 允许承认前面小题的结果来用于后续问题的解答.)

习题

Let P and Q be $n \times n$ matrices satisfying $P - Q = PQ$. Let I be the identity matrix of order n. Which of the following statements is true? ( )

(A) $I + P$ is invertible. (B) $I + Q$ is invertible.

(C) $I - P$ is invertible. (D) $I - Q$ is not invertible.

设 P 和 Q 为 $n \times n$ 矩阵且 $P - Q = PQ$. 设 I 为 n 阶单位阵. 下列说法正确的是? ( )

(A) $I + P$ 可逆. (B) $I + Q$ 可逆.

(C) $I - P$ 可逆 . (D) $I - Q$ 不可逆.

习题

(8 分) 设 A 和 B 是可逆的 n 阶方阵, 且 A 和 B 可交换, 即 $AB = BA$. 令 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$.

(a) 证明 M 不可逆.

(b) 求 M 的秩.