

线性代数期中考试答案

第一题

D D C B B

第二题

(1)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 2-a & 3-b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(2) $t = 5$

(3) $K = 10$

(4) $\dim N(A^T A) = 1$

(5)

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第三题

(1) 证: 设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是该线性方程组的三个线性无关的解, 则 $\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_3$ 是其对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个线性无关的解, 因而 $4 - \text{rank}(A) \geq 2$, 即 $\text{rank}(A) \leq 2$, 又显见 A 的前两行线性无关, 于是 $\text{rank}(A) \geq 2$, 因此 $\text{rank}(A) = 2$.

(2) 解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 & -1 & -1 \\ a & 1 & 3 & b & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4-2a & 4a+b-5 & 4-2a \end{bmatrix}$$

因 $\text{rank}(A) = 2$, 故 $4 - 2a = 0, 4a + b - 5 = 0$, 解得 $a = 2, b = -3$.

方程组的通解为 $x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, k_1, k_2 为任意常数.

第四题

(1)

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第五题

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) $N(A)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) $C(A^T)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) $C(A)$'s basis:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

第六题

(a) basis(要满足正交性 $v_1^T v_2 = 0$):

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) L 's basis:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(c) projection:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第七题

(a) 解:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow x_n &= \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_p = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A^2 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow x_{n1} &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{n2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_p = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \xi_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关, 等价于只有 k_1, k_2, k_3 全为 0 时 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 成立。

法一: 注意到 $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = \xi_1, A\xi_3 = \xi_2, A^2\xi_1 = 0, A^2\xi_2 = 0, A^2\xi_3 = \xi_1$, 则有:

$$A^2(k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3) = 0 \Rightarrow k_1A^2\xi_1 + k_2A^2\xi_2 + k_3A^2\xi_3 = k_3\xi_1 = 0.$$

由于 $\xi_1 = 0$, 则有 $k_3 = 0$ 。带入 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 有:

$$k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0 \Rightarrow A(k_1\xi_1 + k_2\xi_2) = 0 \Rightarrow k_1A\xi_1 + k_2A\xi_2 = k_2\xi_1 = 0 \Rightarrow k_2 = 0.$$

带入 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ 有 $k_1\xi_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ 。

法二: $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0$ 等价于 $B\xi = 0$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 + c/2 & -1/2 - a \\ 1 & 1/2 - c/2 & a \\ -2 & c & b \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1/2 - c/2 & a \\ 0 & 1 & b + 2a \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + k_3\xi_3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 。

第八题

(a) $uv^T A = uv^T - u(v^T u)v^T \quad (v^T u \neq 1)$

由于 $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v^T u$ 为常数,

所以 $uv^T A = (1 - v^T u)uv^T$, 可得 $\frac{uv^T}{1-v^T u} A = uv^T$. 又因 $I_n A = I_n - uv^T$,

$$\frac{uv^T}{1-v^T u} A + I_n A = I_n,$$

$\left(I_n + \frac{uv^T}{1-v^T u}\right) A = I_n$, 此时 $v^T u \neq 1$, 成立故 $A^{-1} = I_n + \frac{uv^T}{1-v^T u}$

(b) 考虑到

$$\begin{bmatrix} I_n & -u \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & u \\ v^T & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - uv^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & u \\ v^T & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -u \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m - v^T u \end{bmatrix}$$

当且仅当 $I_m - v^T u$ 可逆时, $I_n - uv^T$ 可逆。从而有

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} I_n - uv^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ v^T & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -u \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & (I_m - v^T u)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & u \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n + u(I_m - v^T u)^{-1}v^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从而 $(I_n - uv^T)^{-1} = I_n + u(I_m - v^T u)^{-1}v^T$.