**Problem Set 3 —— Linear Algebra (Spring 2024)**

Dr. Y. Chen

1. 设 $A, B$ 为 $n$ 阶矩阵, $I+AB$ 可逆. 证明: 矩阵 $I+BA$ 可逆.

2. 设 $n$ 阶矩阵 $A$ 满足 $A^2+2A-3I=0$.

   (1) 证明 $A$, $A+2I$ 可逆，并求它们的逆.

   (2) 当 $A \neq I$ 时, 判断 $A+3I$ 是否可逆，并说明理由.

3. 若矩阵 $A$ 由初等列变换化为矩阵 $B$, 则下列说法是否正确？请说明理由。

   (1) 存在矩阵 $P$, 使得 $PA=B$.

   (2) 存在矩阵 $P$, 使得 $BP=A$.

   (3) 存在矩阵 $P$, 使得 $PB=A$.

   (4) 方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解.

4. 证明：

   (1) 如果 $A$ 是可逆对称矩阵, 那么 $A^{-1}$ 也是对称矩阵.

   (2) 设 $n$ 阶方阵 $A$ 不可逆, 则存在 $n$ 阶非零的方阵 $B$ 使得 $AB=O$. 这里 $O$ 表示零矩阵.

   (3) 可逆的上（下）三角形矩阵的逆仍是上（下）三角形矩阵.

5. 用两种方法求

$$A = \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

   的逆：

   (1) 用初等变换；

   (2) 按 $A$ 中的划分, 利用分块矩阵的初等变换。