单摆的设计与研究实验

实验目的

1. 利用经典的单摆公式，依据器材和对重力加速度的测量精度要求，进行设计性实验基本方法的训练。

2. 学习应用误差均分原则，选用适当的仪器和测量方法，完成设计性实验内容。

实验原理

1. 推导计算重力加速度的公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4\pi^2 l}{(t/N)^2} = \frac{4\pi^2 N^2 l}{t^2}$$

其中**g**为重力加速度，***l***为摆长, **T**为单摆周期，**t**为测量时间，**N**为周期数。

2. Δg的表达式

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta t}{t}$$

T = 1.7814

3. 不确定度均分原理

$$\Delta g / g < 1\% \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} < 0.5\% \qquad \frac{2\Delta t}{t} < 0.5\%$$

实验原理

4. 设计参数和选定仪器

首先对 $\dfrac{\Delta l}{l}$ 进行估算：

假设摆长 $l \approx 70.00\ \text{cm}$，为了满足 $\dfrac{\Delta l}{l} < 0.5\%$ ，则

$$\Delta l < 0.35cm$$

根据 $\Delta l = \Delta_L + \dfrac{1}{2}\Delta_D$ 利用测量仪器的最大允差进行估算：

$$\Delta_{\text{L}} = \Delta_{米} \approx 0.08\text{cm} \qquad \Delta_D = \Delta_{卡} \approx 0.002\ \text{cm}$$

$$\Delta l = \Delta_{米} + \frac{1}{2}\Delta_{卡} \approx 0.081cm << 0.35cm$$

因此，若用米尺测量线长，用卡尺测量摆球直径，可以满足 $\dfrac{\Delta l}{l} < 0.5\%$ 的要求。

实验原理

4. 设计参数和选定仪器

对 $\dfrac{2\Delta t}{t}$ 进行估算：

秒表精度 $\Delta_{秒} \approx 0.01\text{s}$，开停秒表的总反应时间 $\Delta_{人} \approx 0.2\text{s}$

$$\Delta t = \Delta_{秒} + \Delta_{人} \approx 0.2\ \text{s}$$

假设单摆周期 $T = 1.7\text{s}$，为了保证 $\dfrac{2\Delta t}{t} < 0.5\%$

利用 $t = N*T$，得

$$\frac{2\Delta t}{NT} < 0.5\% \quad \Rightarrow \quad N > 47$$

因此可以利用测量多个单摆周期的方法，减小时间测量的误差，提高周期测量的精确度。

实验数据（以下出现的实验数据仅供格式参考）

1. 记录数据要求：

摆线长度测量5次，摆球直径测量5次，求出平均值。

	1	2	3	4	5	平均值
摆线长度 l（cm）	69.98	69.99	70.00	70.01	70.02	70.00
摆球直径 d（mm）	19.96	19.98	20.00	20.02	20.04	20.00

周期T：每次测量50个周期，测量5次，然后求平均值。

	1	2	3	4	5	平均值
50个单摆周期 t（s）	84.98	84.99	85.00	85.01	85.02	85.00

数据处理（仅供格式参考）

1. 计算g

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(\bar{l} + \frac{\bar{d}}{2})}{(\frac{\bar{t}}{50})^2}$$

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2(\bar{l} + \frac{\bar{d}}{2})}{(\frac{\bar{t}}{50})^2}$$

$$= \frac{4\times 3.14^2 \times (70.00\times 10^{-2} + \frac{20.00\times 10^{-3}}{2})}{(\frac{85.00}{50})^2}$$

$$= 9.689 m/s^2$$

数据处理

2. 计算不确定度（要求有详细的计算过程）

A类不确定度计算：

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(L_i - \bar{L})^2}{n(n-1)}}$$

$$u_A(L) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(L_i-\bar{L})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(70.32-70.300)^2+ \ldots +(70.29-70.300)^2}{5\times 4}} = 0.01\text{cm}$$

$$u_A(D) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(D_i-\bar{D})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(22.04-22.032)^2+ \ldots +(22.02-22.032)^2}{5\times 4}} = 0.01\text{mm}$$

$$u_A(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i-\bar{t})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(84.65-84.92)^2+ \ldots +(85.06-84.92)^2}{5\times 4}} = 0.05\text{s}$$

数据处理

B类不确定度计算：

$$u_B = \frac{\Delta_B}{C} = \frac{\sqrt{\Delta_{估}^2 + \Delta_{仪}^2}}{C}$$

	摆线长度	摆球直径	50个周期
测量仪器	钢卷尺	游标卡尺	秒表
仪器误差	0.8mm	0.02mm	0.01s
估计误差	0.5mm	0.02mm	0.2s
误差分布	正态分布	均匀分布	正态分布
C	3	$\sqrt{3}$	3

数据处理

B类不确定度计算：

测量摆线长度使用的量程是1米的钢卷尺，因此

$$u_B(L)=\frac{\sqrt{\Delta_{估}^2(\mathrm{L})+\Delta_{仪}^2(\mathrm{L})}}{\mathrm{C}}=\frac{\sqrt{0.5^2+0.8^2}}{3}=0.31\mathrm{mm}$$

$$u_B(D)=\frac{\sqrt{\Delta_{估}^2(\mathrm{D})+\Delta_{仪}^2(\mathrm{D})}}{\mathrm{C}}=\frac{\sqrt{0.02^2+0.02^2}}{\sqrt{3}}=0.01\mathrm{mm}$$

测量时间的估计误差为实验人员开、停秒表的人手反应时间。秒表的仪器误差远小于次估计误差，故也可忽略：

$$u_B(\mathrm{t})=\frac{\sqrt{\Delta_{估}^2(\mathrm{t})+\Delta_{仪}^2(\mathrm{t})}}{C}\approx\frac{\Delta_{估}(\mathrm{t})}{C}=\frac{0.2}{3}=0.07\mathrm{s}$$

数据处理

3．不确定度的合成

各项直接测量量的合成不确定度为：

当 $p=0.68$ $$u_{0.68}=\sqrt{(t_{0.68}u_A)^2+u_B^2}$$

当 $p=0.95$ $$u_{0.95}=\sqrt{(t_{0.95}u_A)^2+(k_p u_B)^2}$$

其中，$T_{0.95}$是P=0.95下的t因子，Kp是P=0.95的置信因子，参见下表

表一 t因子与置信概率与测量次数相关

p \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
0.68	1.32	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1
0.95	4.30	3.18	2.78	2.57	2.46	2.37	2.31	2.26	1.96

表二 置信水平与包含因子对应表

分布类型	P=1	P=0.9973	P=0.99	P=0.95
正态分布	3	3	2.58	1.96
均匀分布	$\sqrt{3}$	1.73	1.71	1.65

数据处理

3．不确定度的合成

对于L：$n=5$，$t_{0.95}=2.78$, $k_{0.95}=1.96$

$$u_{0.95}(L)=\sqrt{(2.78\times0.01)^2+(1.96\times0.03)^2}=0.08\text{cm}$$

对于D：$n=5$，$t_{0.95}=2.78$, $k_{0.95}=1.65$

$$u_{0.95}(D)=\sqrt{(2.78\times0.01)^2+(1.65\times0.01)^2}=0.05\text{mm}$$

对于t：$n=5$，$t_{0.95}=2.78$, $k_{0.95}=1.96$

$u_{0.95}(t)=$代入数据$=0.18$ s

数据处理

4．不确定度的传递 $p=0.95$

$$l=L+\frac{D}{2}$$

$$u(l)=\sqrt{\left(u(L)\right)^2+\left(\frac{1}{2}u(D)\right)^2}=\sqrt{\left(0.09\right)^2+\left(\frac{1}{2}\times 0.005\right)^2}=0.0900cm$$

$$\frac{u(l)}{\bar{l}}=\frac{0.0900}{71.4016} \qquad \frac{u(t)}{\bar{t}}=\frac{0.18}{84.92}\approx 0.0022$$

$$\frac{u(g)}{g}=\sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2+\left(\frac{2u(T)}{T}\right)^2}\approx 0.0046$$

$$u(g)=0.0046\times 9.7622=0.0449m/s^2 \qquad p=0.95$$

数据处理

5. 实验结论

测得重力加速度为：

$$(9.76 \pm 0.04)\ m/s^2$$

或 $$(9.762 \pm 0.045)\ m/s^2 \quad (p = 0.95)$$

不确定度保留1-2位有效数字，测量结果的最后一位与不确定度的最后一位对齐。

参考深圳重力加速度9.7883 m/s^2，计算相对误差

$$\frac{|g - g_{真}|}{g_{真}} = \frac{|9.7662\text{-}9.7883|}{9.7883} \times 100\% = 0.26\% < 1\%$$

误差分析（定性分析原因）

产生误差的原因：

摆角的高次项

摆线的质量和伸缩系数

空气阻力

实验结论（总结）