1. 降阶法

在 1-行列式#1.1.3. N阶行列式中引入了行列式的递归定义，即将 n 阶行列式通过某一行/某一列展开为 n-1 阶行列式。

1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式

N 阶范德蒙行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

将每一列乘以 $-x_1$ 加到下一列，消去第一行除第一列以外的其他元素

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2^1 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n^1 & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

故可以表示为元素 a_{11} 和其代数余子式之积，并从每一行提取公因式

$$|A| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2^1 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3^1 & \cdots & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n^1 & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{n}(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3^1 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

如此得到 n-1 阶范德蒙行列式，类似操作可以推出 $|A| = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$

1.2 爪形行列式

N 阶爪形行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

若 $a_i \neq 0, \forall i = 2, 3, \ldots, n$ ，则将每一列乘以 $-\dfrac{c_i}{a_i}$ 加到第一列上，消去第一列除第一行以外的其他元素

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix}
a_1 - \frac{c_2 b_2}{a_2} - \cdots - \frac{c_n b_n}{a_n} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\
0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix} \\
&= (a_1 - \frac{c_2 b_2}{a_2} - \cdots - \frac{c_n b_n}{a_n}) a_2 a_3 \cdots a_n \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=2}^{n} b_i c_i \prod_{j \geq 2, j \neq i}^{n} a_j
\end{aligned}
$$

若 $\exists a_i = 0, i = 2, 3, \ldots, n$ ，当多于一个 $a_i = 0$ 时显然原行列式值为 0，亦和上面求出的表达式统一；当仅有一个 $a_i = 0$ 时，按第 i 行展开

$$
\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{i+1} c_i \begin{vmatrix}
b_2 & b_3 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_n \\
a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+1} c_i (-1)^{i+1} b_i \begin{vmatrix}
a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix} \\
&= c_i b_i \prod_{j \geq 2, j \neq i}^{n} a_j
\end{aligned}
$$

同样和上面求出的表达式统一。 □

1.3 组合数行列式

元素全部由组合数写成的 n 阶行列式形如

$$
|A| = \begin{vmatrix}
C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\
C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

注意到我们有组合数公式 $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$ ，那么将每一行乘以 -1 加到下一行，消去第一列除第一行以外的其他元素

$$|A| = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n+1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}$$

对比原行列式，发现正好是右上角元素 a_{1n} 对应的余子式，那么反复利用这一点得到 $|A| = a_{n1} = C_{n-1}^{n-1} = 1.\quad \square$

1.4 对角异常行列式

除对角线元素外每一行都相同的行列式，形如

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

将第一行乘以 -1 加到其余各行，得到爪形行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$
$$= (x_1 - a_1)(-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n) - \sum_{i=2}^{n} a_1 x_i \prod_{j\geq 2, j\neq i}^{n} (-a_j)$$
$$= x_1(-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n} a_i + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - (-1)^{n-2}\sum_{i=2}^{n} x_i \prod_{j\neq i}^{n} a_j$$
$$= (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j\neq i}^{n} a_j + (-1)^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$
$$= (-1)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i \prod_{j\neq i}^{n} a_j - \prod_{i=1}^{n} a_j) \quad \square$$

1.5 扩充行列式

原 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ ，增补一行一列后得到的新行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & z \end{vmatrix}$$

直接按最后一列展开，再按最后一行展开，并用原行列式的代数余子式表示

$$\begin{aligned}|A| &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n+1}x_{iin}+z\,|A| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n+1}x_i(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+n}y_jM_{ij})+z\,|A| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j+2n+1}x_iy_jM_{ij}+z\,|A| \\ &= z\,|A|-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jA_{ij} \quad \square\end{aligned}$$

2. 求和法

据 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数中证明，对每一行加和相同或每一列加和相同的行列式，可以将每一列或每一行求和并提取公因式，简化计算

2.1 特殊的对角异常行列式

可以看作 1 .4 对角异常行列式 中 a_i 值全部相同的特殊情况，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

注意到每一行元素累加和都相同，将每一列加到第一列上可以提出公因式，再利用降阶思想计算

$$\begin{aligned}|A| &= (\sum_{i=1}^{n}a_i+b)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} \\ &= (\sum_{i=1}^{n}a_i+b)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \\ &= (\sum_{i=1}^{n}a_i+b)b^{n-1}\end{aligned}$$

利用一般情况的公式验证

$$|A| = (-1)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n}a_i+b)(-b)^{n-1} = (\sum_{i=1}^{n}a_i+b)b^{n-1} \quad \square$$

2.2 自然数轮换行列式

每一行每一列都由自然数 1-n 的常排列轮换构成，即

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ n & 1. & 2 & \cdots & n-1\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

注意到每一行之和与每一列之和都相同，将每一列加到第一列上可以提出公因式，再利用降阶思想计算

$$\begin{aligned}|A|&=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 1. & 2 & \cdots & n-1\\ 1 & n & 1 & \cdots & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2\\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1\end{vmatrix}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1\\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n\end{vmatrix}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2\\ n-3 & n-3 & \cdots & -3 & -3\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\end{vmatrix}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n\\ n-3 & 0 & \cdots & -n & -n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n\end{vmatrix}\\
&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(-1)\cdot(-n)^{n-2}\\
&=(-1)^{n-1}\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}\quad\square\end{aligned}$$

3. 递推法

利用降阶或直接展开，得到行列式与阶数更低的同类行列式之间的递推关系，解此关系得到行列式的表达式

3.1 三对角行列式

除主对角线及两条侧对角线外其余元素均为 0 的行列式，形如

$$
|D_n| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}
$$

采用降阶思想按最后一行或最后一列展开，得到通项公式

$$
\begin{aligned}
|D_n| &= a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-3} & a_{n-2} & 0 \\ & & & c_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\
&= a_n |D_{n-1}| - c_{n-1} b_{n-1} |D_{n-2}|
\end{aligned}
$$

并注意到 $|D_0| = 1, |D_1| = a_1$ $\square$
特别地，令 $a_i = 1, b_{i-1}c_{i-1} = -1$ ，得到 Fibonacci (斐波那契) 数列通项 $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ 。

3.2 余弦对角行列式

由余弦函数表示的三对角行列式，形如

$$
|A| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos x & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}
$$

注意到主对线除 a_{11} 元素外形式相同，则拆分第一列元素使其符合 3.1 三对角行列式的形式

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 2\cos x & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos x & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} -\cos x & 1 & & & & \\ 0 & 2\cos x & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos x & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 2\cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \\
&= |D_n| - \cos x\,|D_{n-1}|
\end{aligned}
$$

其中 $|D_n|$ 的参数为 $a_i = 2\cos x, b_i = c_i = 1$ ，即递推式 $|D_n| = 2\cos x\,|D_{n-1}| - |D_{n-2}|$ ，并且 $|D_2| = 4\cos^2 x - 1, |D_1| = 2\cos x$ 。下解此类递推式。
令三元一次递推式为 $|D_n| = (\alpha + \beta)\,|D_{n-1}| - \alpha\beta\,|D_{n-2}|$ ，则得到两个相似的方程

$$
\begin{cases} |D_n| - \alpha\,|D_{n-1}| = \beta(|D_{n-1}| - \alpha\,|D_{n-2}|) \\ |D_n| - \beta\,|D_{n-1}| = \alpha(|D_{n-1}| - \beta\,|D_{n-2}|) \end{cases}
$$

分别代表两个等比数列，于是得到二元一次方程组

$$\begin{cases} |D_n| - \alpha\,|D_{n-1}| = \beta^{n-2}(|D_2| - \alpha\,|D_1|) \\ |D_n| - \beta\,|D_{n-1}| = \alpha^{n-2}(|D_2| - \beta\,|D_1|) \end{cases}$$

- 当 $\alpha \neq \beta$ 时容易解出

$$\begin{cases} |D_n| = \dfrac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\,|D_2| - \alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\,|D_1|}{\alpha - \beta} \\ |D_{n-1}| = \dfrac{(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\,|D_2| - \alpha\beta(\alpha^{n-3} - \beta^{n-3})\,|D_1|}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

  并可以看出二者的形式统一。
- 当 $\alpha = \beta$ 时方程仅剩 $|D_n| - \alpha\,|D_{n-1}| = \alpha^{n-2}(|D_2| - \alpha\,|D_1|)$
  若 $\alpha \neq 1$，解出 $|D_n| = (n-1)\alpha^{n-2}\,|D_2| - (n-2)\alpha^{n-1}\,|D_1|$；
  若 $\alpha = 1$，直接累加得到 $|D_n| = (n-1)(|D_2| - |D_1|) + |D_1|$。
  回到原行列式的递推式，注意到此时 $\alpha = \cos x + i\sin x, \beta = \cos x - i\sin x$，于是
- 当 $x = 2k\pi$ 时 $\alpha = \beta = \cos x = 1$，于是
  $|D_n| = (n-1)(|D_2| - |D_1|) + |D_1| = (n-1)(3-2) + 2 = n+1$，则
  $|A| = |D_n| - \cos x\,|D_{n-1}| = 1 = \cos(nx)$；
- 当 $x = (2k+1)\pi$ 时 $\alpha = \beta = \cos x = -1$，于是
  $|D_n| = (n-1)(-1)^{n-2} \times 3 - (n-2)(-1)^{n-1} \times (-2) = (n+1) \times (-1)^n$，则
  $|A| = |D_n| - \cos x\,|D_{n-1}| = (n+1) \times (-1)^n + n \times (-1)^{n-1} = (-1)^n = cos(nx)$；
- 当 $x \neq \pm 1$ 时，$\sin x \neq 0$ 故 $\alpha \neq \beta$，那么写成 $\alpha = e^{ix}, \beta = e^{-ix}$ 代入方程的解算出
  $|D_n| = \dfrac{(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})\,|D_2| - \alpha\beta(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2})\,|D_1|}{\alpha - \beta} = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x}$，于是
  $|A| = |D_n| - \cos x\,|D_{n-1}| = \dfrac{\sin(n+1)x}{\sin x} - \dfrac{\cos x \sin nx}{\sin x} = \cos nx.$ □

3.3 上下三角行列式

对角线元素将行列式分为上下两个三角区域，形如

$$|A_n| = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}$$

将最后一行或最后一列拆开以便降阶，即

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x_n - y \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_1 - z & y - z & y - z & \cdots & y - z & 0 \\ 0 & x_2 - z & y - z & \cdots & y - z & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - z & \cdots & y - z & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - z & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + (x_n - y)\,|A_{n-1}| \\
&= y \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - z) + (x_n - y)\,|A_{n-1}|
\end{aligned}
$$

而转置后可知 y, z 地位相同，同样操作得到 $|A_n| = z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - y) + (x_n - z)\,|A_{n-1}|$ ，并且我们有 $|A_1| = x_1$ 。仿照 3.2 余弦行列式的讨论

- 当 $y = z$ 时，有 $\dfrac{|A_n|}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y)} - \dfrac{|A_{n-1}|}{\prod_{i=1}^{n-1}(x_i - y)} = \dfrac{y}{x_n - y}$ ，累加得到 $\dfrac{|A_n|}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y)} = y\sum_{i=2}^{n}\dfrac{1}{(x_i - y)} + \dfrac{x_1}{x_1 - y} = y\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{(x_i - y)} + 1$ ，也就是 $|A_n| = \prod_{i=1}^{n}(x_i - y) + y\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j - y)$;
- 当 $y \neq z$ 时，解二元一次方程组有 $|A_n| = \dfrac{1}{y - z}[y\prod_{i=1}^{n}(x_i - z) - z\prod_{i=1}^{n}(x_i - y)]$. □

3.4 Cauchy (柯西)行列式

全部由分式构成的行列式，形如

$$
|A_n| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1 + b_1} & \dfrac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1 + b_n} \\ \dfrac{1}{a_2 + b_1} & \dfrac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n + b_1} & \dfrac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}
$$

将最后一列乘以 -1 加到前面每一列上并通分，则可以提取公因式，再对最后一列重复，得到递推式

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_n+b_2)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & 0 \\ \frac{a_n-a_1}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)(a_n-a_i)}{\prod_{j=1}^{n}(a_j+b_n)(a_n+b_j)} |A_{n-1}|
\end{aligned}
$$

连乘得到 $|A_n| = \dfrac{\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)(a_j-a_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}$. $\square$

4.数学归纳法

与递推法类似，在知道行列式表达式的情况下，利用更低次数的行列式值与递推关系证明其正确性

4.1 行列式的导数

设 $f_{ij}(t)$ 都是可微函数，有行列式 $(t) = |f_{ij}(t)|$ ，求证 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n} {}_i(t)$ ，其中

$$
{}_i(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{1i}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{2i}(t) & \cdots & f_{n2}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{ni}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}
$$

下用归纳法证

- 当 $n=1$ 时，有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|f_{11}(t)| = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{11}(t) = \left|\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{11}(t)\right| = \sum_{i=1}^{1} {}_i(t)$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，按第一列展开，即

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_{i=1}^{n}[(-1)^{i+1}f_{i1}(t)M_{i1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[f_{i1}(t)M_{i1}] \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(-1)^{i+1}M_{i1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f_{i1}(t)+(-1)^{i+1}f_{i1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}M_{i1}] \\
&= {}_1(t)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[f_{i1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}A_{i1}] \\
&= {}_1(t)+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}[f_{i1}(t)\sum_{j=2}^{n}{}_j(t)] \\
&= {}_1(t)+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}f_{i1}(t){}_j(t) \\
&= {}_1(t)+\sum_{j=2}^{n}{}_j(t)=\sum_{j=1}^{n}{}_j(t). \quad \square
\end{aligned}
$$

4.2 三对角加和行列式

一种特殊的三对角行列式，形如

$$
|A_n| = \begin{vmatrix}
a_0+a_1 & a_1 & & & & \\
a_1 & a_1+a_2 & a_2 & & & \\
 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{n-2} & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\
 & & & & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n
\end{vmatrix}
$$

求证 $|A_n|=\prod_{i=0}^{n}a_i\times\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{a_j}$

据 3.1 三对角行列式容易得出 $|A_n|=(a_{n-1}+a_n)\,|A_{n-1}|-a_{n-1}^2\,|A_{n-2}|$，下用归纳法证

- 当 $n=1,2$ 时，有 $|A_1|=a_0+a_1, |A_2|=a_0a_1+a_0a_2+a_1a_2$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，计算

$$
\begin{aligned}
|A_n| &= (a_{n-1}+a_n)\,|A_{n-1}|-a_{n-1}^2\,|A_{n-2}| \\
&= (a_{n-1}+a_n)\prod_{i=0}^{n-1}a_i\times\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_j}-a_{n-1}^2\prod_{i=0}^{n-2}a_i\times\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{a_j} \\
&= a_{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}a_i\times\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_j}+\prod_{i=0}^{n}a_i\times\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_j}-a_{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}a_i\times\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{a_j} \\
&= a_{n-1}\prod_{i=0}^{n-1}a_i\times\frac{1}{a_{n-1}}+\prod_{i=0}^{n}a_i\times\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_j} \\
&= \prod_{i=0}^{n}a_i\times\frac{1}{a_n}+\prod_{i=0}^{n}a_i\times\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{a_j} \\
&= \prod_{i=0}^{n}a_i\times\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{a_j}. \quad \square
\end{aligned}
$$

4.3 绝对值全一行列式

设 n 2 阶行列式 $|A|$ 中所有元素的绝对值都为 1，求证 $|A|$ 的绝对值小于 $\frac{2}{3}n$

下用归纳法证

- 当 $n=3$ 时，若第一列有元素为 -1，则将其行乘以 -1，此时第一列元素全为 1 且行列式值不变，同样可以将第二、三列第一行元素变为 -1，再将第一列加到第二、三列，得到的行列式形如

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a & b\\ 1 & c & d\end{vmatrix}$$

其中右下角元素 a,b,c,d 只能为 0 或2,，那么 $abs(|A|)=abs(ad-bc)\le 4=\dfrac{2}{3}\times 3$ 成立

- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，将其按第一列展开，有 $abs(|A|)=abs(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1})\le n\times\dfrac{2}{3}(n-1)=\dfrac{2}{3}n.\quad\square$

5. 拆分法

在 1-行列式 #1.3 行列式的性质中证明过，可以将一行或一列拆开为多个行列式分别求值

5.1 同等增量行列式

设参数 t，行列式形如

$$|A(t)|=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}$$

求证 $|A(t)|=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}$ ，其中 A_{ij} 是元素 a_ij 在行列式 $|A(0)|$ 中的代数余子式
不断将每一行拆开并将拆出的行列式化简展开，即

$$\begin{aligned}|A(t)|&=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11} & t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21} & t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}+t\sum_{i=1}^{n}A_{i1}\\ &=\cdots\\ &=|A(0)|+t\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}.\quad\square\end{aligned}$$

推论：若每一列的增量各自相同，分别为 $t_i,i=1,2,\dots,n$ ，则更一般的结论 $|A(t_1,t_2,\dots,t_n)|=|A(0,0,\dots,0)|+\sum_{i=1}^{n}(t_i\sum_{j=1}^{n}A_{ij})$.

5.2 多项式行列式

设 $f_1(x),f_2(x),\dots,f_n(x)$ 都是次数不超过 $n-2$ 的多项式，求证对于任意 n 个数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 都有

$$\begin{vmatrix}f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1)\\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0$$

每个 $f_k(x)$ 都是 $x^0,x^1,\dots,x^{n-2}$ 的线性组合，按每一列拆分开得到若干个次数相同的 n 阶行列式，那么至少有两列是同次的单项式，故所有行列式为 0. □

6. Vandermonde (范德蒙)行列式-模板法

将行列式化为与在 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式中已求出的 Vandermonde 行列式类似的次数递进行列式，套用公式

6.1 n 余弦行列式

由余弦函数表示的满行列式，形如

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}$$

将 De Moivre 公式利用二项式展开得 $\cos k\theta+i\sin k\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\sum_{j=0}^{k}C_k^j(\cos\theta)^j(i\sin\theta)^{k-j}$ ，并将偶次项中的 $\sin^2\theta$ 替换为 $1-\cos^2\theta$ ，得到 $\cos\theta$ 的 k 次多项式，首项系数为 $C_k^0+C_k^2+C_k^4+\cdots=2^{k-1}$ 。
每一列都是比后一列低一次的多项式，利用第一列将后面所有列的常数项消去、第二列将后面所有项的一次式消去...得到一个带系数的 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式，即

$$\begin{aligned}|A|&=\begin{vmatrix}1 & 2^0\cos\theta_1 & 2^1\cos^2\theta_1 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_1\\ 1 & 2^0\cos\theta_2 & 2^1\cos^2\theta_2 & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 2^0\cos\theta_n & 2^1\cos^2\theta_n & \cdots & 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}\\ &=2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\begin{vmatrix}1 & \cos\theta_1 & \cos^2\theta_1 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_1\\ 1 & \cos\theta_2 & \cos^2\theta_2 & \cdots & \cos^{n-1}\theta_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cos\theta_n & \cos^2\theta_n & \cdots & \cos^{n-1}\theta_n\end{vmatrix}\\ &=2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i).\quad\square\end{aligned}$$

6.2 n 正弦行列式

由正弦函数表示的满行列式，形式上与 6.1 n 余弦行列式相同，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1\\ \sin\theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sin\theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n\end{vmatrix}$$

可以用相同的方法解，也可以利用和差化积公式 $\sin k\theta-\sin(k-2)\theta=2\sin\theta\cos(n-1)\theta$ ，即将第 k 列乘以-1 加到第 k+2 列上，提取公因式并利用已有结果

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \sin\theta_1 & 2\sin\theta_1\cos\theta_1 & \cdots & 2\sin\theta_1\cos(n-1)\theta_1 \\ \sin\theta_2 & 2\sin\theta_2\cos\theta_2 & \cdots & 2\sin\theta_2\cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin\theta_n & 2\sin\theta_n\cos\theta_n & \cdots & 2\sin\theta_n\cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}\sin\theta_n \times 2^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\
&= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}\sin\theta_n \times \prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j - \cos\theta_i). \quad \square
\end{aligned}
$$

7. 升阶法

与已知行列式相似但缺少某一列或某一行，可以将其添补；也可以用的新的行或列消去难以计算的部分，只需注意不要改变行列式的值

7.1 同等增量Vandermonde 行列式

表示为全 1 矩阵与 Vandermonde 矩阵相加对应行列式，即

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & 1+x_n^3 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}
$$

符合 5.1 同等增量行列式的形式，但代数余子式难以计算，故采用升阶法消去其增量，得到 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式， 即

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1^1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2^1 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n^1 & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2+(-1) & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\
&= 2\prod_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{1\le k<l\le n}(x_l - x_k) + (-1)\prod_{i=1}^{n}(x_n - 1)\prod_{1\le k<l\le n}(x_l - x_k) \\
&= [2\prod_{i=1}^{n} x_i - \prod_{i=1}^{n}(x_n - 1)] \times \prod_{1\le k<l\le n}(x_l - x_k). \quad \square
\end{aligned}
$$

7.2 缺项 Vandermonde 行列式

类似 Vandermonde 的 N 阶行列式但缺少 i 次列

$$
|A|=\begin{vmatrix}
1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n
\end{vmatrix}
$$

通过补齐一行一列使其具有 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式的形式，即

$$
\begin{aligned}
|B| &= (-1)^{i+n}|A|y^i \\
&= \begin{vmatrix}
1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_1^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{i-1} & x_1^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\
1 & y^1 & y^2 & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n
\end{vmatrix} \\
&= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\times\prod_{k=1}^{n}(y-x_k)
\end{aligned}
$$

求原行列式 $|A|$ 的值，即求上述表达式中 y^i 次的系数，那么

$$
\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{n+i}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\times\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-i}\le n}(-x_{p_1})(-x_{p_2})\cdots(-x_{p_{n-i}}) \\
&= (-1)^{n+i}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\times(-1)^{n-i}\times\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-i}\le n}x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_{n-i}} \\
&= \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\times\sum_{1\le p_1<p_2<\cdots<p_{n-i}\le n}x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_{n-i}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

7.3 对角线全 0对称行列式

行列式对角线全为 0，其余元素可以表示为行指标对应元素 a_i 和列指标对应 a_j 的和，即

$$
|A|=\begin{vmatrix}
0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\
a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0
\end{vmatrix}, a_i\neq 0, \forall\, 1\le i\le n
$$

用新的一行消去其中一个加数

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix}
1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\
0 & 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\
0 & a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & a_{n-1}+a_1 & a_{n-1}+a_2 & a_{n-1}+a_3 & \cdots & a_{n-1}+a_n \\
0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0
\end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix}
1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\
1 & -a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\
1 & a_2 & -a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\
1 & a_n & a_n & a_n & \cdots & -a_n
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

然而变化之后的行列式仍然难以计算，遂用新的一列继续消去

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}
$$

实际上这是一个分块爪形行列式，用右下角 $n \times n$ 的对角线消去左侧两列或者上侧两行，得到

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}\times n & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{1}{2}\times n & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}\times n & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{1}{2}\times n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\
&= [(1-\frac{n}{2})^2 - \frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j})] \times \prod_{i=1}^{n}(-2a_i) \\
&= (-2)^{n-2}\prod_{i=1}^{n}a_i[(2-n)^2 - (\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j})]. \quad \square
\end{aligned}
$$

8. 求根法

设 n 阶行列式的元素 $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 都是关于 m 个未定元的多项式，则 $|A|$ 是一个多元多项式。若将 x_1 看为主未定元，则可以写成

$$
|A| = c_0(x_2, x_3, \ldots, x_m)x_1^d + c_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)x_1^{d-1} + \cdots + c_d(x_2, x_3, \ldots, x_m)x_1^0
$$

其中首项系数不为 0，最高次数 $d \geq 1$ 。假设存在互异的多项式 $g_1(x_2, x_3, \ldots, x_m), g_2(x_2, x_3, \ldots, x_m), \ldots, g_d(x_2, x_3, \ldots, x_m)$ 使得当 $x_1 = g_i(x_2, x_3, \ldots, x_m)(1 \leq i \leq d)$ 时总有 $|A| = 0$ ，那么可以写成

$$
|A| = c_0(x_2, x_3, \ldots, x_m)[x_1 - g_1(x_2, x_3, \ldots, x_m)][x_2 - g_2(x_2, x_3, \ldots, x_m)]\cdots[x_1 - g_d(x_2, x_3, \ldots, x_m)]
$$

8.1 另法解 Vandermonde 行列式

在 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式中介绍了 Vandermonde 行列式形如

$$
|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}
$$

在此将 x_n 看为主未定元，那么最高次数 $d=n-1$ ，首项系数就是元素 $a_{nn}=x_n^{n-1}$ 对应的代数余子式 $A_{nn}=D_{n-1}$ 。当 $x_n=x_i,\forall 1\le i\le n-1$ 时，行列式有两个相同的行，故行列式值为 0，也就是表达式中含有 $\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)$ 这个 n-1 次式。显然 $|A|=D_{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(x_n-x_i)$ ，不断对系数做此讨论，得到结论 $|A|=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$. □

8.2 另法解多项式行列式

在 5.2 多项式行列式中引入了次数不超过 n-2 的多项式组成的 n 阶行列式，求证对于任意 n 个数 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 都有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}=0$$

在此构造新的行列式

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

若 $a_2,a_3,\dots,a_n$ 中有相同的数，那么立刻得到 $g(x)=0$ ；若 $a_2,a_3,\dots,a_n$ 互异，注意到 $x=a_i,\forall 2\le i\le n$ 时行列式有两行相同，故行列式值为 0，也即这 n-1 个 a_i 是多项式的根。
然而 $g(x)$ 与 $f_i(x)$ 一样，都是不超过 n-2 次的多项式，设 $g(x)=b_0+b_1x^1+b_2x^2+\dots+b_{n-2}x^{n-2}$ ，那么对于方程组

$$\begin{cases} y_0+a_2^1y_1+\dots+a_2^{n-2}y_{n-2}=0 \\ y_0+a_3^1y_1+\dots+a_3^{n-2}y_{n-2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_0+a_n^1y_1+\dots+a_n^{n-2}y_{n-2}=0 \end{cases}$$

显然 $y_0=b_0,y_1=b_1,\dots,y_{n-2}=b_{n-2}$ 是方程组的解，且系数行列式是一个不为 0 的 Vandermonde 行列式。依据 Cramer 法则得知，方程组只有零解，也就是 $g(x)$ 是零多项式。□
后半部分推广可知，有 m 个互不相同的根的 n 次多项式如果满足 $n<m$ 则此多项式恒为 0。

8.3 另法解 Cauchy 行列式

在 3.4 Cauchy (柯西)行列式中引入了分数组成的 Cauchy 行列式，形如

$$|A_n|=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

将分母全部提出，得到

$$|A_n| = \prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)^{-1}|B_n|$$

$$= \prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)^{-1}\begin{vmatrix} \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_1+b_k)}{a_1+b_1} & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_1+b_k)}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_1+b_k)}{a_1+b_n} \\ \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_2+b_k)}{a_2+b_1} & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_2+b_k)}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_2+b_k)}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}{a_n+b_1} & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

观察 $|B_n|$ 的结构，发现如果 $\exists 1\le i\ne j\le n, a_i=a_j$ 或 $b_i=b_j$ ，则有两行或两列相等，行列式值为 0。而每个 a_i，b_i 在展开式中的最高次数都是 n-1，因此

$$|B_n| = k\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$$

为确定 k 的值，令 $a_i+b_i=0, \forall 1\le i\le n$ ，注意到除对角线上元素都为 0，此时

$$|B_n| = \prod_{1\le i\ne j\le n}(a_i+b_j) = \prod_{1\le i\ne j\le n}(a_i-a_j) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$$

也就是 k=1，故 $|A_n| = \dfrac{\prod_{1\le i<j\le n}(b_j-b_i)(a_j-a_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i+b_j)}$. $\square$

9. 组合定义法

在 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义中介绍过，行列式的组合定义表示为 $|A| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n}$ ，与递归定义等价

9.1 另法解行列式的导数

在 4.1 行列式的导数中给出了可微函数 $f_{ij}(t)$ 组成的行列式 $(t)=|f_{ij}(t)|$ ，求证 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{i=1}^{n}{}_i(t)$ ，其中

$${}_i(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{1i}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{2i}(t) & \cdots & f_{n2}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_{ni}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

利用组合定义改写 $|\,(t)\,| = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}f_{k_1 1}(t)f_{k_2 2}(t)\cdots f_{k_n n}(t)$ ，计算

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}f_{k_1 1}(t)f_{k_2 2}(t)\cdots f_{k_n n}(t) \\ &= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f_{k_1 1}(t)f_{k_2 2}(t)\cdots f_{k_n n}(t)] \\ &= \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}[\sum_{i=1}^{n}f_{k_i 1}(t)(\prod_{j\ne i}^{n}f_{k_j 1}(t))] \\ &= \sum_{i=1}^{n}f_{k_i 1}(t)\sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\ldots,k_n)}\prod_{j\ne i}^{n}f_{k_j 1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n}{}_i(t). \quad \square \end{aligned}$$

9.2 复矩阵的共轭

设 n 阶复矩阵 $A=(a_{ij})$ ， 求证 $\left|A\right| = |A|$
利用组合定义计算

$$
\begin{aligned}
\left|A\right| &= \sum_{(k_1,k_2,...,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2,...,k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= \sum_{(k_1,k_2,...,k_n)\in S_n} (-1)^{N(k_1,k_2,...,k_n)} a_{k_1 1}\, a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n} \\
&= |A|. \quad \square
\end{aligned}
$$

9.3 奇数阶反对称行列式

若行列式 $|A|$ 的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji}, \forall 1 \le i,j \le n$ 则称为反对称行列式。求证奇数阶反对称行列式的值为 0
注意到行列式主对角线元素全部为 0，则组合定义只需要考虑 $T = a_{k_1,1}, a_{k_2,2} \cdots, a_{k_n,n}$ $k_i \ne i, \forall 1 \le i \le n$ 。设一个映射 ：$T \to T, a_{k_1,1}, a_{k_2,2} \cdots, a_{k_n,n}$ $a_{1,k_1}, a_{2,k_2} \cdots, a_{n,k_n}$ ，注意到 $^2 = \mathrm{Id_T}$ ，也就是 是一个双射。如果 $a_{k_1,1}, a_{k_2,2} \cdots, a_{k_n,n}$ 和 $a_{1,k_1}, a_{2,k_2} \cdots, a_{n,k_n}$ 是相同的项，由于定义中有 $k_i \ne i$ ，那么一定能找到多对 (i_p, j_p) 使元素呈现 $a_{i_1,j_1} a_{j_1,i_1} \dots a_{i_p,j_p} a_{j_p,i_p}$ ，但行列式阶数为奇数，出现矛盾。那么 $a_{k_1,1}, a_{k_2,2} \cdots, a_{k_n,n}$ 和 $a_{1,k_1}, a_{2,k_2} \cdots, a_{n,k_n}$ 一定是互异的项，将其看成一组，有

$$
a_{k_1,1}, a_{k_2,2} \cdots, a_{k_n,n} = (-1)^n a_{1,k_1}, a_{2,k_2} \cdots, a_{n,k_n} = -a_{1,k_1}, a_{2,k_2} \cdots, a_{n,k_n}
$$

也即加和为 0，故行列式拆开的每一组都为 0，行列式值为 0. □

10. Laplace (拉普拉斯) 定理法

对于 n 阶行列式 $|A|$ ，在其中任取 k 行（列)，那么含于这 k 行（列）中的所有 k 阶子式与对应 n-k 阶代数余子式的乘积之和即 $|A|$ 。在 1-行列式，1.8 Laplace (拉普拉斯)定理 中证明。

10.1 双对角线行列式

仅有主对角线和反对角线上元素不为 0 的 2n 阶行列式，形如

$$
|A_{2n}| = \begin{vmatrix}
a & & & & & b \\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a & b & & \\
& & b & a & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
b & & & & & a
\end{vmatrix}
$$

取第一行和最后一行，观察到仅有第一列和最后一列构成的 2 阶子式不为 0，也就是

$$
\begin{aligned}
|A_{2n}| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \times &\begin{vmatrix}
a & & & & & b \\
& \ddots & & & \iddots & \\
& & a & b & & \\
& & b & a & & \\
& \iddots & & & \ddots & \\
b & & & & & a
\end{vmatrix} \\
&= (a^2 - b^2)\,|A_{2n-2}| \\
&= \cdots \\
&= (a^2 - b^2)^n. \quad \square
\end{aligned}
$$

10.2 矩阵和的行列式

设两个 n 阶方阵 A, B ，求证

$$|A+B| = |A| + |B| + \sum_{1 \le k \le n-1} \left(\sum_{\substack{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \\ 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n}} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right)$$

用列向量表示 $A = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}), B = (\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta_n})$ ，故
$|A+B| = (\boldsymbol{\alpha_1} + \boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\alpha_2} + \boldsymbol{\beta_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n} + \boldsymbol{\beta_n})$ ，并按照每一列将拆开得到 2^n 个不同的行列式。其中含有一个 $|A|$ 和一个 $|B|$ ，其余 $2^n - 2$ 个行列式按含有 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 k 个列拆开。□

10.3 另法解对角线全 0 对称行列式

在 7.3 对角线全 0对称行列式中引入了对角线全为 0，其余元素可以表示为行指标对应元素 a_i 和列指标对应 a_j 的和的行列式，即

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, a_i \neq 0, \forall\, 1 \le i \le n$$

观察对角线本应该是 $a_i + a_i$ 的形式，故将其拆开分别计算

$$|A| = |B| + |C| = \begin{vmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & a_n+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

观察 $|B|$ ，可以将其按第一列拆开，并消去后面列，即

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2 & a_2+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & a_n+a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1+a_2 & a_1+a_3 & \cdots & a_1+a_n \\ a_1 & a_2+a_2 & a_2+a_3 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_n+a_2 & a_n+a_3 & \cdots & a_n+a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

对 $|B|$ 及其子式，注意到 1 阶时值为 $2a_1$ ，2 阶时值为 $-(a_2 - a_2)^2$ ，3 阶及以上时必有至少两列成比例故值为 0；对 $|C|$ 的子式，需要取到同样的行列排布才非 0.
据 10.2 矩阵和的行列式的公式计算

$$
\begin{aligned}
|A| &= |B| + |C| + \sum_{1\le k\le n-1} \left(\sum_{\substack{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n\\ 1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n}} B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \hat{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \right) \\
&= |C| + \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} B\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \hat{C}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1\le i_1<i_2\le n\\ 1\le j_1<j_2\le n}} B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \hat{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(-2a_i) + \sum_{1\le i\le n} B\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \hat{C}\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \hat{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^{n}(-2a_i) + \sum_{1\le i\le n} \left[2a_i \prod_{j\ne i}^{n}(-2a_i) \right] + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \left[-(a_{i_2}-a_{i_1})^2 \prod_{j\ne i_1,i_2}^{n} (-2a_j) \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - (-2)^{n-2} \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \left[(a_{i_2}^2 + a_{i_1}^2 - 2a_{i_1}a_{i_2}) \prod_{j\ne i_1,i_2}^{n} a_j \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - (-2)^{n-2} \sum_{1\le i_1<i_2\le n} \left[\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} - 2 \right) \prod_{j=1}^{n} a_j \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \\
&\quad + (-2)^{n-2} n(n-1) \prod_{i=1}^{n} a_i - (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) - n \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left[4 - 4n + n(n-1) + n - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left[(n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \right]. \quad \square
\end{aligned}
$$