2-矩阵

2. 矩阵

2.1. 矩阵的定义

2.1.1. 一般的矩阵记号

在 1-行列式#1.1.3. N 阶行列式中讨论了 n 个 n 元一次线性方程组的解法，然而一般情况下方程个数不一定等于未定元个数，此时记 mn 个数字的排列为 m 行 n 列 $(m \times n)$ 矩阵，如下所示

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

如果元素全部为实数则称其为实矩阵，如果元素全部为复数则称其为复矩阵，如果元素全部为 0 则称其为零矩阵，记作 $O_{m\times n}$

2.1.2. 方阵

行列数均为 n 的矩阵称其为 n 阶方阵，主对角线元素形如 $a_{ii}, \forall 1 \le i \le n$ ，矩阵形如

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2}$$

除主对角线上元素都为 0 的 n 阶方阵称其为对角阵，记作 $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ ，矩阵形如

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

对角线元素全部为 1 的 n 阶对角阵称其为 n 阶方阵，记作 I_n ，矩阵形如

$$A = I_n = \mathrm{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1. & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2.1.3. 上下三角阵

当主对角线以下的所有元素为 0，即 $a_{ij} = 0, \forall 1 \le j < i \le n$ ，则称其为上三角阵，矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

当主对角线以上的所有元素为 0，即 $a_{ij}=0, \forall 1 \leq i < j \leq n$ ，则称其为下三角阵，矩阵形如

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

2.1.4. 矩阵相等

如果两个矩阵的行数、列数、每个元素都相等，则称其为相等的矩阵，也就是
$A_{m\times n}=B_{s\times t} \Leftrightarrow m=s, n=t, a_{ij}=b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 。
注意到两个零矩阵除非行列数都相等，否则不相等；两个单位阵除非阶数相等，否则也不相等。

2.1.5. 行列向量

一个 $1\times n$ 矩阵又称为 n 维行向量，记作

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{7}$$

一个 $n \times 1$ 矩阵又称为 n 维列向量，记作

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{8}$$

一个 $m \times n$ 矩阵可以用行向量表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} \\ \boldsymbol{\alpha_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha_m} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha_i}=(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), \forall 1 \leq i \leq m \tag{9}$$

也可以用列向量表示为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha_i}=\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \forall 1 \leq i \leq n \tag{10}$$

2.1.6. 方阵的行列式

仅对 n 阶方阵 A ，记相同元素排布的行列式为 $\det(A)=|A|$ ，非方阵没有行列式。

2.1.7. 负矩阵

定义行列数相同的、元素为相反数的两个矩阵为互为负矩阵，记作
$A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},-A_{m\times n}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

2.2. 矩阵的运算

2.2.1. 矩阵的加减法

2.2.1.1. 矩阵的加法

对两个行列数相同的矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},B_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$ ，定义矩阵的加法为对应元素相加

$$C_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n} \tag{11}$$

注意到任何矩阵加上对应行列数的零矩阵仍为自身，即 $A_{m\times n}+O_{m\times n}=A_{m\times n}$ ；任何矩阵加上自己的负矩阵得到对应行列数的零矩阵，即 $A_{m\times n}+(-A_{m\times n})=O_{m\times n}$.

2.2.1.2. 矩阵的减法

类似地，对两个行列数相同的矩阵 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},B_{m\times n}=(b_{ij})_{m\times n}$ ，定义矩阵的减法为对应元素相减

$$D_{m\times n}=(d_{ij})_{m\times n}=A-B=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n} \tag{12}$$

注意到任何矩阵减去对应行列数的零矩阵仍为自身，即 $A_{m\times n}-O_{m\times n}=A_{m\times n}$ ；任何矩阵减去自身得到对应行列数的零矩阵，即 $A_{m\times n}-A_{m\times n}=O_{m\times n}$ 。

2.2.1.3. 矩阵的加减运算规则

下列讨论均基于矩阵的合法加减，即其行列数相同。
考虑两个相等的矩阵，显然将其相减得到零矩阵，反之亦成立，也就是 $A=B\Leftrightarrow A-B=O$ 。

- 加法交换律：任意两个矩阵满足 $A+B=B+A$ ，因为元素的加法满足交换律，即 $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ ；
- 加法结合律：任意三个矩阵满足 $(A+B)+C=A+(B+C)$ ，因为元素的加法满足结合律，即 $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ ；
- 加法零元：零矩阵作为矩阵加法的零元存在，即 $A+O=O+A=A$ ，因为数字 0 在数字加法中作为零元，即 $a_{ij}+0=0+a_{ij}=a_{ij}$ ；
- 减法的另一定义：任意两个矩阵满足 $A+(-B)=A-B$ ，因为元素的加减法也有此定义，即 $a_{ij}+(-b_{ij})=a_{ij}-b_{ij}$.
  至此域 F（此处为数域）上的 n 维矩阵集合 $M(n;F)$ 关于加法运算构成矩阵加法群。

2.2.2. 矩阵的数乘

2.2.2.1. 矩阵的数乘

对于一个矩阵 $A_{m\times n}$ 和一个常数 c，定义数乘 $cA_{m\times n}=(ca_{ij})_{m\times n}$ ，即将每个元素都乘以常数 c。注意到负矩阵可以看作原矩阵与 -1 的数乘结果。

2.2.2.2. 矩阵的数乘规则

下列讨论均基于矩阵和数的合法数乘。

- 对矩阵的分配律：任意常数和任意两个矩阵满足 $c(A+B)=cA+cB$ ，因为元素的乘法满足分配律即，即 $c(a_{ij}+b_{ij})=ca_{ij}+cb_{ij}$ ；
- 对数字的分配律：任意矩阵和任意两个常数满足 $(p+q)A=pA+qA$ ，因为元素的乘法满足分配律，即 $(p+q)a_{ij}=pa_{ij}+qa_{ij}$ ；
- 对数字的结合律：任意矩阵和任意两个常数满足 $(pq)A=p(qA)$ ，因为元素的乘法满足结合律，即 $(pq)a_{ij}=p(qa_{ij})$ ；
- 数乘幺元：数字 1 作为数乘的幺元存在，即 $1A=A$ ，因为数字 1 在数字乘法中作为幺元，即 $1\times a_{ij}=a_{ij}$ ；
- 零矩阵：零矩阵作为数乘的零元存在，即 $0A=O$ ，因为数字 0 在数字乘法中作为零元，即 $0\times a_{ij}=0$.
  至此域 F（此处为数域）上的 n 维矩阵集合 $M(n;F)$ 关于加法及数乘运算构成矩阵向量空间。

2.2.3. 矩阵的乘法

2.2.3.1. 矩阵的乘法

对满足其中一个的列数与另一个的行数相等的两个矩阵 $A_{m\times k}=(a_{ij})_{m\times k},B_{k\times n}=(b_{ij})_{k\times n}$ ，定义矩阵的乘法结果为满足下列规则的 $m\times n$ 矩阵

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}\times b_{pj} \tag{13}$$

注意到乘法交换后有可能不合法，即一般没有交换律；就算交换后合法，也不一定满足 $AB=BA$ ，因为阶数不一定相同。

2.2.3.2. 矩阵的乘法规则

下列讨论均基于矩阵的合法乘法。

- 结合律：任意三个矩阵满足 $(A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q}=A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q})$ ，因为结果的第 (i,j) 元素满足 $\sum\limits_{s=1}^{p}\left(\sum\limits_{t=1}^{n}a_{it}b_{ts}\right)c_{sj}=\sum\limits_{s=1}^{p}\sum\limits_{t=1}^{n}a_{it}(b_{ts}c_{sj})$ ；
- 分配律：任意三个矩阵满足 $(A_{m\times n}+B_{m\times n})C_{n\times p}=A_{m\times n}C_{n\times p}+B_{m\times n}C_{n\times p}$ ，因为结果的第 (i,j) 元素满足 $\sum\limits_{s=1}^{n}(a_{is}+b_{is})c_{sj}=\sum\limits_{s=1}^{n}(a_{is}c_{sj}+b_{is}c_{sj})$ ；同样地，任意三个矩阵满足

$A_{m\times n}\left(B_{n\times p}+C_{n\times p}\right)=A_{m\times n}B_{n\times p}+A_{m\times n}C_{n\times p}$ ，因为结果的第 (i,j) 元素满足 $\sum_{s=1}^{n}a_{is}\left(b_{sj}+c_{sj}\right)=\sum_{s=1}^{n}\left(a_{is}b_{sj}+a_{is}c_{sj}\right)$ ；

- 对数字的交换律：任意常数和任意两个矩阵满足 $c(A_{m\times n}B_{n\times p})=(cA_{m\times n})B_{n\times p}=A_{m\times n}(cB_{n\times p})$ ，因为结果的第 (i,j) 元素满足 $c\left(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}\right)=\sum_{s=1}^{n}(ca_{is})b_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\left(cb_{sj}\right)$ ；
- 乘法幺元：单位阵作为乘法的幺元存在，即对任意矩阵 $I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}=A_{m\times n}I_n$ ，因为数字 1 在数字乘法中作为幺元，即结果的第 (i,j) 元素满足 $\sum_{s=1}^{m}I_{is}a_{sj}=a_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}I_{sj}$

  至此域 F（此处为数域）上的 n 维矩阵集合 $M(n;F)$ 关于乘法构成矩阵乘法幺半群；关于加法及乘法运算构成矩阵环；关于加法、数乘及乘法构成矩阵结合代数。

2.2.4. 方阵的幂运算

2.2.4.1 方阵的幂运算

对 n 阶方阵和正整数 k，定义 $A^k=AA\cdots A(k个A)$ ，称为方阵 A 的 k 次幂。

2.2.4.2. 方阵的幂运算规则

下列讨论均基于矩阵的合法幂运算。

- 指数和：任意方阵和任意正整数指数满足 $A^rA^s=A^{r+s}$ ，显然都表示 r+s 个 A 相乘；
- 指数积：任意方阵和任意正整数指数满足 $(A^r)^s=A^{rs}$ ，显然都表示 rs 个 A 相乘.

  对乘法不可交换的两个矩阵，一般 $(AB)^k\neq(BA)^k$ ；对乘法可交换的矩阵，一般有 $(AB)^k=(BA)^k=A^kB^k$.

2.2.4.2. 方阵的二次项定理

对乘法可交换的两个 n 阶方阵和正整数 k，二项式定理成立，即

$$(A+B)^k=A^k+C_k^1A^{k-1}B^1+C_k^2A^{k-2}B^2+\cdots+C_k^{k-1}A^1B^{k-1}+B^k \tag{14}$$

2.2.5. 矩阵的转置

2.2.5.1 矩阵的转置

对一个矩阵 $A_{m\times n}$ ，定义其转置为 $A^T_{n\times m},a^T_{ij}=a_{ji},\forall 1\leq i\leq n,1\leq j\leq m$ 。注意到方阵的转置仍是同阶方阵。

转置前后相等的矩阵称为对称阵，转置前后互为负矩阵的矩阵称为反对称阵，注意到上述两种一定都是方阵。

2.2.5.2. 矩阵的转置规则

下列讨论均基于矩阵的合法运算。

- 二次转置：任意矩阵满足 $(A^T)^T=A$ ，因为 $(a^T_{ij})^T=a^T_{ji}=a_{ij},\forall 1\leq i\leq m,1\leq j\leq n$ ；

- 加法转置：任意两个矩阵满足 $(A+B)^T = A^T + B^T$ ，因为 $(a_{ij}+b_{ij})^T = a_{ji}+b_{ji} = a_{ij}^T + b_{ij}^T$ ；
- 数乘转置：任意矩阵和任意常数满足 $(cA)^T = cA^T$ ，因为 $(ca_{ij})^T = ca_{ji} = ca_{ij}^T$ ；
- 乘法转置：任意两个矩阵满足 $(AB)^T = B^T A^T$ ，因为 $\left(\sum\limits_s a_{is}b_{sj}\right)^T = \sum\limits_s a_{js}b_{si} = \sum\limits_s b_{is}^T a_{sj}^T$.

2.2.6. 矩阵的共轭

2.2.6.1 矩阵的共轭

对一个复矩阵 $A_{m\times n}$ ，定义其共轭为 $\overline{A_{m\times n}} = (\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 。

2.2.6.2. 矩阵的共轭规则

下列讨论均基于矩阵的合法运算。

- 二次共轭：任意矩阵满足 $\overline{(\overline{A})} = A$ ，因为 $\overline{(\overline{a_{ij}})} = a_{ij}$ ；
- 共轭转置：任意矩阵满足 $\overline{A^T} = (\overline{A})^T$ ，因为 $\overline{(a_{ij}^T)} = \overline{a_{ji}}$ ；
- 加法共轭：任意两个矩阵满足 $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$ ，因为 $\overline{a_{ij}+b_{ij}} = \overline{a_{ij}} + \overline{b_{ij}}$ ；
- 数乘共轭：任意矩阵和任意常数满足 $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}$ ，因为 $\overline{ca_{ij}} = \overline{c}\,\overline{a_{ij}}$;
- 乘法共轭：任意两个矩阵满足 $\overline{(AB)} = \overline{A}\,\overline{B}$ ，因为 $\overline{\sum\limits_{s=1} a_{is}b_{sj}} = \sum\limits_{s=1} \overline{a_{is}}\overline{b_{sj}}$.

2.3. 方阵的逆阵

2.3.1. 方阵的逆阵

2.3.1.1. 方阵的逆阵

对 n 阶方阵 A ，如果存在 n 阶方阵 B 使 $AB = BA = I_n$ ，则称 B 是 A 的逆阵，记作 $B = A^{-1}$ 。有逆阵的方阵统称可逆阵或非奇异阵，无逆阵的方阵统称不可逆阵或奇异阵。注意到仅有方阵才能讨论逆阵。

2.3.1.2. 逆阵存在则唯一

反证，设 n 阶方阵 A 有两个逆阵 B, C ，则有 $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$ ，故逆阵存在必唯一。

2.3.2. 方阵的逆阵运算规则

下列讨论均基于矩阵的合法运算。

- 二次求逆：任意非奇异阵满足 $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$ ，因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ ，表明 A 是 A^{-1} 的逆阵；
- 乘法逆阵：任意两个非奇异阵的乘积仍是非奇异阵，满足 $(AB) = B^{-1}A^{-1}$ ，因为 $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ 并且

$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB)=B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B=B^{-1}I_nB=B^{-1}B=I_n$ ，可以延伸到悠有限多个非奇异阵的乘积；
- 数乘逆阵：任意非零常数和任意非奇异阵的数乘仍是非奇异阵，满足 $(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$ ，因为 $(cA)\left(c^{-1}A^{-1}\right)=cAc^{-1}A^{-1}=\left(cc^{-1}\right)\left(AA^{-1}\right)=1I_n=I_n$ ；
- 逆阵转置：任意非奇异阵满足 $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$ ，因为 $A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=(I_n)^T=I_n$.

2.3.3. 方阵的伴随矩阵

2.3.3.1. 方阵的伴随矩阵

对 n 阶方阵 A 定义其行列式 $\det(A)=|A|$ 的代数余子式转置后组成的伴随矩阵 $A^*=(A_{ji})_{n\times n}$ ，注意到任意方阵都有伴随矩阵。

2.3.3.2. 伴随矩阵乘法

任意 n 阶方阵满足 $AA^*=A^*A=|A|I_n$ ，证明如下
AA^* 的第 (i,j) 元素为 $\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}A_{js}$ ，注意到 $i\neq j$ 时值为 0， $i=j$ 时为 $\sum\limits_{s=1}^{n}a_{is}A_{is}=|A|$ ，参照 1-行列式#1.4 行列式的任意展开。那么 $AA^*=|A|I_n$ ，同理有 $A^*A=|A|I_n$ 。

2.3.3.3. 伴随矩阵与逆阵

当 $|A|\neq 0$ 时注意到 $A\dfrac{A^*}{|A|}=\dfrac{A^*}{|A|}=I_n$ ，意味着 A 的逆阵存在且 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{|A|}$ 。

2.3.4. 线性方程组的解

方程个数和未定元个数都为 n 的方程组，在 1-行列式#1.6 Cramer (克莱默) 法则中写为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{15}$$

用矩阵可以简便表示为 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ ，其中
$A=(a_{ij})_{n\times n},\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^T,\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)^T$ 。
若 $|A|\neq 0$ ，则根据 2.3.3.3. 伴随矩阵与逆阵 知道 A^{-1} 存在，那么 $A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{\beta}$ ，也就是 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{\beta}$ 。
对 $\forall 1\leq i\leq n$ 有 $x_i=\dfrac{1}{|A|}A^*\boldsymbol{\beta}=\dfrac{|A_i|}{|A|}$ ，其中 $|A_i|$ 表示用 $\boldsymbol{\beta}$ 替换 $|A|$ 的第 i 列得到的行列式，也就是已证明的 Cramer 法则。

2.4 矩阵的初等变换

2.4.1. Gauss (高斯)消去法

2.4.1.1. Gauss 消去法

在解一般的线性方程组中自然采用 Gauss 消去法，调换方程次序使第一行方程的第一个未定元系数不为 0，然后将第一行方程乘以系数分别加在其余行上消去第一个未定元，再调换方程次序使第二行方程的第二个未定元系数不为 0，然后将第二行方程乘以系数分别加在其余行上消去第二个未定元，如此可以得到方程的解。

2.4.1.2 增广矩阵

将系数矩阵 A 和常数列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 拼在一起称为增广矩阵 $(A \mid \boldsymbol{\beta})$ ，实施 gauss 消元法的操作，可以使系数矩阵变为上三角矩阵甚至对角矩阵，得到方程的解。在 Gauss 消元法中，有三种操作：对换两行、一行乘以非零常数、一行乘以常数加到另一行上。

2.4.2. 矩阵的初等变换

2.4.2.1. 矩阵的初等变换

将对换两行、一行乘以非零常数、一行乘以常数加到另一行上这三种操作称为矩阵的初等行变换，分别属于第一类、第二类、第三类。
同样地，将对换两列、一列乘以非零常数、一列乘以常数加到另一列上这三种操作称为矩阵的初等列变换，分别属于第一类、第二类、第三类。

2.4.2.2. 初等行变换保持方程组解不变

增广矩阵的三类初等行变换都不改变对应方程组的解，证明如下：
设方程组形如式 (15) 所示，解集为 S_1

- 第一类行变换：设交换两行后新方程组的解集为 S_2 ，那么 $S_1 \subset S_2$ ，而重新交换这两行又可以得到原方程组，那么 $S_2 \subset S_1$ ，故 $S_1 = S_2$ ；
- 第二类行变换：设一行乘以非零常数 c 后新方程组的解集为 S_2 ，那么 $S_1 \subset S_2$ ，而这一行乘以 $\dfrac{1}{c}$ 又可以得到原方程组，那么 $S_2 \subset S_1$ ，故 $S_1 = S_2$ ；
- 第三类行变换：则设一行乘以常数 c 加到另一行后新方程组的解集为 S_2 ，那么 $S_1 \subset S_2$ ，而该行乘以 $-c$ 加到另一行又可以得到原方程组，那么 $S_2 \subset S_1$ ，故 $S_1 = S_2$.

2.4.2.3. 等价矩阵

2.4.2.3.1. 等价矩阵

对一个矩阵 A 实施有限次初等行/列变换后得到矩阵 B ，称这两个矩阵等价，记作 $A \sim B$.

2.4.2.3.2. 矩阵等价是等价关系

两个矩阵等价的关系是一种等价关系，证明如下

- 自反性：任意矩阵满足 $A \sim A$ ，采用某一行乘以 1 即可；
- 对称性：任意两个矩阵满足 $A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$ ，因为三类初等变换都有逆变换；
- 传递性：任意三个矩阵满足 $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ ，因为两次有限个初等变换之和仍是有限个.

2.4.2.3.3. 等价标准形

任意矩阵 A 一定可以与一个特殊形式的 $m \times n$ 矩阵 B 等价， B 满足前 r 行与前 r 列的交点处 $b_{ii} = 1, \forall 1 \leq i \leq r, \exists 0 \leq r \leq \min\{m, n\}$ ，称 B 是一个等价标准形，下证

- 若 $A = O$ 则 O 自身就是一个 $r = 0$ 的等价标准形；
- 若 $A \neq O$ ，则通过第一类行变换、第一类列变换让 $a_{11} \neq 0$ ，将第一行乘以 $\dfrac{1}{a_{11}}$ 使 $a_{11} = 1$ ，将第一列乘以 $-a_{1i}$ 加到其余第 i 列上、第一行乘以 $-a_{1j}$ 加到其余第 j 行上，使第一行、第一列除 a_{11} 外的元素都为 0 。对第二行第二列采取同样操作，直到除前 r 列与前 r 行的交点外其余元素都为 0.

2.4.2.4. 阶梯形矩阵

Gauss 消元法解方程组只能对增广矩阵使用初等行变换而不能使用任何列变换，因为列指标直接对应未定元的指标。

2.4.2.4.1. 矩阵阶梯点

定义矩阵每一行的阶梯点，当第 i 行元素全部为 0 时 $k_i = +\infty$ ，当第 i 行元素不全为 0 时，k_i 等于所有非零元素的列指标最小值，也就是 $\forall j < k_i, a_{ij} = 0$ 且 $a_{ik_i} \neq 0$ ，称 a_{ik_i} 为矩阵第 i 行的阶梯点。

2.4.2.4.2. 阶梯形矩阵

经过有限次的初等行变换，任意矩阵 A 一定可以变为一个特殊形式的 $m \times n$ 矩阵 B ， B 满足 $\exists 0 \leq r \leq m, k_1 < k_2 < \cdots < k_r, k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_m = +\infty$ ，称 B 是一个阶梯型矩阵，下证

- 若 $A = O$ 则 O 自身就是一个 $r = 0$ 的阶梯形矩阵；
- 若 $A \neq O$ ，当 A 的前 p 列元素都为 0 时，从第 p+1 列开始；
- 若 $A \neq O$ ，当 A 的第一列元素不全为 0 时，通过第一类初等行变换使 $a_{11} \neq 0$ ，再通过第三类初等行变换将第一列其余元素消去，重复.

2.4.3. 初等矩阵

三类初等矩阵的作用利用 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义 易证，此处省略。

2.4.3.1. 第一类初等矩阵

记第一类初等矩阵 P_{ij} 是将单位阵的第 i 行与第 j 行交换得到的矩阵（同样也是交换第 i 列和第 j 列的结果），形如

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

将 P_{ij} 左乘一个矩阵相当于交换矩阵的第 i 行和第 j 行，将 P_{ij} 右乘一个矩阵相当于交换矩阵的第 i 列和第 j 列。

第一类初等矩阵对应行列式的值为 -1。

2.4.3.2. 第二类初等矩阵

记第二类初等矩阵 $P_i(c)$ 是将单位阵的第 i 行乘以非零常数 c 得到的矩阵（同样也是第 i 列乘以常数 c 结果），形如

$$P_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

将 $P_i(c)$ 左乘一个矩阵相当于将矩阵的第 i 行乘以非零常数 c，将 $P_i(c)$ 右乘一个矩阵相当于将矩阵的第 i 列乘以非零常数 c 。

第二类初等矩阵对应的行列式的值为 c。

2.4.3.3. 第三类初等矩阵

记第三类初等矩阵 $T_{ij}(c)$ 是将单位阵的第 i 行乘以常数 c 加到第 j 行得到的矩阵（同样也是第 i 列乘以常数 c 加到第 j 列的结果），形如

$$T_{ij}(c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

将 $T_{ij}(c)$ 左乘一个矩阵相当于将矩阵的第 i 行乘以常数 c 加到第 j 行，将 $T_{ij}(c)$ 右乘一个矩阵相当于将矩阵的第 i 列乘以常数 c 加到第 j 列 。

第三类初等矩阵对应的行列式的值为 1。

2.4.3.4. 初等矩阵非奇异

三类初等矩阵都是非奇异阵。第一类初等矩阵的逆矩阵 $(P_{ij})^{-1} = P_{ij}$ ；第二类初等矩阵的逆矩阵 $(P_i(c))^{-1} = P_i(\frac{1}{c})$ ；第三类初等矩阵的逆矩阵 $(T_{ij}(c))^{-1} = T_{ij}(-c)$ 。

2.4.3.5. 初等变换不改变奇异性

非奇异阵经初等变换仍是非奇异阵，因为初等变换都是非奇异阵，在 2.3.2. 方阵的逆阵运算规则中证明了有限多个非奇异阵的乘积仍是非奇异阵。奇异阵经初等变换仍是奇异阵，反证如果得到非奇异阵那么逆变换回去仍是非奇异阵，矛盾。

2.5. 方阵和其行列式

2.5.1. 奇异性和对应的行列式

2.5.1.1. 可逆阵化为单位阵

任意可逆矩阵 A 可以仅通过初等行变换或者仅通过初等列变换化为相同阶数的单位阵 I_n ，下证行变换
矩阵 A 可逆，故没有元素全为 0 的一行或一列，通过第一类初等行变换使 a_{11} 不为 0，通过第二类初等行变换使 $a_{11} = 1$ ，通过第三类初等行变换使第一列其余元素都为 0；对第二列同样操作，并可以使 $a_{12} = 0$ ，如此对每一列操作，则得到单位阵 I_n 。

2.5.1.2.初等变化法求逆阵

由上条知 $\exists\, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n$ ，那么可以得到 $A^{-1} = P_k P_{k-1} \cdots P_1 I_n$ ，也就是同样的操作对单位阵使用会得到逆阵。
将原矩阵和单位阵拼成一个大矩阵如 $(A \mid I_n)$ ，仅使用行变换，在左侧变为单位阵的时候，右侧就变为 A 的逆阵；
或者拼成 $\begin{pmatrix} A \\ I_n \end{pmatrix}$ 的形式，仅使用列变换，在上侧变为单位阵的时候，下侧就变为 A 的逆阵。

2.5.1.3. 可逆阵是初等矩阵的乘积

任意可逆矩阵 A 都可以表示为有限多个可逆矩阵的乘积。由上上条知
$\exists\, P_1, P_2, \ldots, P_k, P_k P_{k-1} \cdots P_1 A = I_n$ ，那么可以用逆变换将 I_n 化为 A ，即 $P_1^{-1} P_2^{-1} P_k I_n = A$ ，而初等矩阵的逆矩阵、单位阵都是初等矩阵。

2.5.1.4. 初等矩阵乘法对应的行列式

当初等矩阵与另一个任意矩阵 A 相乘时，乘积的行列式等于行列式的乘积，并可以交换乘法的次序，下证

- 对第一类初等矩阵：交换两行使行列式值变为相反数 $|P_{ij}A| = -|A| = |P_{ij}|\,|A|$ ，交换两列亦有 $|AP_{ij}| = -|A| = |A|\,|P_{ij}|$ ；
- 对第二类初等矩阵：一行乘以非零常数 c 使行列式值乘以同一常数 $|P_i(c)A| = c\,|A| = |P_i(c)|\,|A|$ ，一列乘以非零常数 c 亦有 $|AP_i(c)| = c\,|A| = |A|\,|P_i(c)|$ ；

- 对第三类初等矩阵：一行乘以常数加到另一行不改变行列式的值 $|T_{ij}(c)A| = |A| = |T_{ij}(c)|\,|A|$ ，一列乘以常数加到另一行亦有 $|AT_{ij}(c)| = |A| = |A|\,|T_{ij}(c)|$.

2.5.1.5. 非奇异阵的行列式不为 0

一个方阵是非奇异矩阵的充分必要条件是其行列式不为 0，下证

- 充分性：在 2.3.3.3. 伴随矩阵与逆阵中证明并给出了基于伴随矩阵的计算方式；
- 必要性：2.5.1.2. 可逆阵是初等矩阵的乘积 和 2.5.1.3. 初等矩阵乘法对应的行列式共同证明了非奇异阵的行列式是多个初等矩阵对应行列式的乘积，故不为 0.

2.5.2. 矩阵乘法和对应的行列式

2.5.2.1. 两个任意矩阵乘积的行列式

对任意两个矩阵 A, B 有 $|AB| = |A|\,|B|$ ，下证

- 如果 A 是非奇异阵，那么 $\exists\, P_1, P_2, \ldots, P_k, A = P_1P_2\cdots P_k$ ，则 $|AB| = |P_1P_2\cdots P_k|\,|B| = |P_1|\,|P_2|\cdots|P_k|\,|B| = |A|\,|B|$ ；
- 如果 A 是奇异阵，那么 $\exists\, P_1, P_2, \ldots, P_k, Q_1, Q_2, \ldots, Q_l, P_kP_{k-1}\cdots P_1AQ_1Q_2\cdots Q_l = D$ ，其中 D 是 A 的等价标准形.由于 A 是奇异阵，则 D 至少最后一行元素全为 0，则 $P_kP_{k-1}\cdots P_1A = DQ_l^{-1}Q_{l-1}^{-1}\cdots Q_1$ 至少最后一行元素全为 0，导致 $P_kP_{k-1}\cdots P_1AB$ 至少最后一行元素全为 0，即其行列式为 0，而初等矩阵的行列式不为 0，则 $|AB| = 0 = |A|\,|B|$.
  同样可以用 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义 证明如下
  记 $C = AB, c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ ，于是将 C 的行列式按组合定义表示

$$\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_n\in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,\ldots,s_n)} c_{s_1,1}c_{s_2,2}\cdots c_{s_n,n} \\
&= \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_n\in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,\ldots,s_n)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{s_1,k}b_{k,1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_{s_2,k}b_{k,2}\right)\cdots\left(\sum_{k=1}^{n} a_{s_n,k}b_{k,n}\right) \\
&= \sum_{s_1,s_2,\ldots,s_n\in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,\ldots,s_n)} \left(\sum_{1\le k_1,k_2,\ldots,k_n\le n} a_{s_1,k_1}a_{s_2,k_2}\cdots a_{s_n,k_n}\cdot b_{k_1,1}b_{k_2,2}\cdots b_{k_n,n}\right)
\end{aligned}$$

  当选取的指标 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 有相同的项时，同 1-行列式#1.9 行列式的刻画 中讨论过，该项值将为 0，于是只有指标 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 互异的项，也就是指标属于全排列集 S_n 的项才不为 0，表示为

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= \sum_{s_1,s_2,...,s_n \in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,...,s_n)} \left(\sum_{1\le k_1,k_2,...,k_n \le n} a_{s_1,k_1} a_{s_2,k_2} \cdots a_{s_n,k_n} \cdot b_{k_1,1} b_{k_2,2} \cdots b_{k_n,n} \right) \\
&= \sum_{s_1,s_2,...,s_n \in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,...,s_n)} \left(\sum_{k_1,k_2,...,k_n \in S_n} a_{s_1,k_1} a_{s_2,k_2} \cdots a_{s_n,k_n} \cdot b_{k_1,1} b_{k_2,2} \cdots b_{k_n,n} \right) \\
&= \sum_{s_1,s_2,...,s_n \in S_n} (-1)^{\tau(s_1,s_2,...,s_n)} \\
&\quad \left(\sum_{k_1,k_2,...,k_n \in S_n} (-1)^{-\tau(k_1,k_2,...,k_n)} a_{s_1,k_1} a_{s_2,k_2} \cdots a_{s_n,k_n} \cdot (-1)^{\tau(k_1,k_2,...,k_n)} b_{k_1,1} b_{k_2,2} \cdots b_{k_n,n} \right) \\
&= \left(\sum_{\substack{s_1,s_2,...,s_n \in S_n \\ k_1,k_2,...,k_n \in S_n}} (-1)^{\tau(s_1,s_2,...,s_n)-\tau(k_1,k_2,...,k_n)} a_{s_1,k_1} a_{s_2,k_2} \cdots a_{s_n,k_n} \right) \\
&\quad \left(\sum_{k_1,k_2,...,k_n \in S_n} (-1)^{\tau(k_1,k_2,...,k_n)} b_{k_1,1} b_{k_2,2} \cdots b_{k_n,n} \right) \\
&= \det(A) \cdot \det(B)
\end{aligned}
$$

2.5.2.2. 乘法不改变奇异性

两个奇异阵的乘积仍是奇异阵，两个非奇异阵的乘积仍是非奇异阵，根据 2.5.1.4. 非奇异阵的行列式不为 0 和 2.5.2.1. 两个任意矩阵乘积的行列式易证。可以推广到有限多个矩阵的乘积。

2.5.2.3. 逆阵的行列式是行列式的倒数

任意非奇异阵 A 满足 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ，因为 $1 = |I_n| = |AA^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$.

2.5.2.4. 左逆与右逆等同

如果 n 阶方阵 A, B 仅满足 $AB = I_n$ 或 $BA = I_n$ ，可以推出 $BA = I_n$ 或 $AB = I_n$ ，也即 $B = A^{-1}$ 。下证前者
由 $AB = I_n$ 有 $1 = |I_n| = |AB| = |A|\,|B| \neq 0$ ，假设方阵 C 是 A 的逆阵，那么 $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$ ，也就是 B 是 A 的逆阵.

2.6. 分块矩阵

2.6.1. 分块矩阵

2.6.1.1.分块矩阵

对 $m \times n$ 的矩阵，用若干条横线将其分为 r 块，再用若干条竖线将其分为 s 块，就得到了 rs 块的分块矩阵，形如

$$
A = \left(\begin{array}{c:c:c:c}
A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline
A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline
\vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline
A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}
\end{array}\right) \tag{19}
$$

其中的每一个 A_{ij} 都代表一个矩阵，称作 A 的第 (i,j) 块，并且一行矩阵的行数相等、一列矩阵的列数相同

2.6.1.2.分块矩阵相等

两个分块矩阵 $A_{m\times n}=(A_{ij})_{r\times s}, B_{p\times q}=(B_{ij})_{k\times l}$ 相等，当且仅当它们的总行数、总列数、行分块方式、列分块方式、每一个块矩阵都相等，即
$m=p, n=q, r=k, s=l, A_{ij}=B_{ij}, \forall 1\le i\le r, 1\le j\le s$ 。

2.6.2. 分块矩阵的加减法

2.6.2.1. 分块矩阵的加减法

两个总行数、总列数、行分块方式、列分块方式都相同的矩阵可以加减，记
$(A_{ij})_{r\times s}\pm(B_{ij})_{r\times s}=(A_{ij}\pm B_{ij})_{r\times s}$ 。显然得到一个总行数、总列数、行分块方式、列分块方式都相同的矩阵，且每个元素和普通矩阵的加减法是相同的。

2.6.2.2. 分块矩阵的加法规则

下列讨论均基于分块矩阵的合法加法，即其总行数、总列数、行分块方式、列分块方式都相同。
考虑两个相等的分块矩阵，显然将其相减得到分块零矩阵，反之亦成立，也就是
$(A_{ij})_{r\times s}=(B_{ij})_{r\times s}\Leftrightarrow(A_{ij})_{r\times s}-(B_{ij})_{r\times s}=(O_{ij})_{r\times s}$ 。

- 加法交换律：任意两个分块矩阵满足 $(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}=(B_{ij})_{r\times s}+(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为矩阵的加法满足交换律，即 $A_{ij}+B_{ij}=B_{ij}+A_{ij}$ ；
- 加法结合律：任意三个分块矩阵满足
$[(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}]+(C_{ij})_{r\times s}=(A_{ij})_{r\times s}+[(B_{ij})_{r\times s}+(C_{ij})_{r\times s}]$ ，因为矩阵的加法满足结合律，即 $(A_{ij}+B_{ij})+C_{ij}=A_{ij}+(B_{ij}+C_{ij})$ ；
- 加法零元：分块零矩阵作为分块矩阵加法的零元存在，即
$(A_{ij})_{r\times s}+(O_{ij})_{r\times s}=(O_{ij})_{r\times s}+(A_{ij})_{r\times s}=(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为零矩阵在矩阵加法中作为零元，即 $A_{ij}+O_{ij}=O_{ij}+A_{ij}=A_{ij}$.

2.6.3. 分块矩阵的数乘

2.6.3.1. 分块矩阵的数乘

对于一个分块矩阵 $(A_{ij})_{r\times s}$ 和一个常数 c，定义数乘 $c(A_{ij})_{r\times s}=(cA_{ij})_{r\times s}$ ，即将每个块矩阵都乘以常数 c。显然得到一个总行数、总列数、行分块方式、列分块方式都相同的矩阵，且每个元素和普通矩阵的数乘是相同的。

2.6.3.2. 分块矩阵的数乘规则

下列讨论均基于分块矩阵和数的合法数乘、加法。

- 对分块矩阵的分配律：任意常数和任意两个分块矩阵满足
$c[(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}]=c(A_{ij})_{r\times s}+c(B_{ij})_{r\times s}$ ，因为矩阵的乘法满足分配律即，即

$c(A_{ij}+B_{ij})=cA_{ij}+cB_{ij}$ ；

- 对数字的分配律：任意分块矩阵和任意两个常数满足 $(p+q)(A_{ij})_{r\times s}=p(A_{ij})_{r\times s}+q(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为矩阵的乘法满足分配律，即 $(p+q)A_{ij}=pA_{ij}+qA_{ij}$ ；
- 对数字的结合律：任意分块矩阵和任意两个常数满足 $(pq)(A_{ij})_{r\times s}=p[q(A_{ij})_{r\times s}]$ ，因为矩阵的乘法满足结合律，即 $(pq)A_{ij}=p(qA_{ij})$ ；
- 数乘幺元：数字 1 作为数乘的幺元存在，即 $1(A_{ij})_{r\times s}A=(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为 1在矩阵乘法中作为幺元，即 $1\times A_{ij}=A_{ij}$ ；
- 分块零矩阵：数字 0 作为数乘的零元存在，即 $0(A_{ij})_{r\times s}=(O_{ij})_{r\times s}$ ，因为数字 0 在矩阵乘法中作为零元，即 $0\times A_{ij}=O_{ij}$.

2.6.4. 分块矩阵的乘法

2.6.4.1. 分块矩阵的乘法

对于两个分块矩阵 $(A_{ij})_{r\times s},(B_{ij})_{s\times t}$ ，如果 A 的总列数、列分块方式与 B 的总行数、行分块方式分别相等，A 的每一列块矩阵的行数与 B 的对应行的块矩阵列数分别相等，则定义 $(C_{ij})_{r\times t}=(A_{ij})_{r\times s}(B_{ij})_{s\times t}$ ，其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$.

2.6.4.2. 分块矩阵的乘法规则

下列讨论均基于分块矩阵的合法乘法。

- 结合律：任意三个分块矩阵满足 $[(A_{ij})_{m\times n}(b_{ij})_{n\times p}](C_{ij})_{p\times q}=(A_{ij})_{m\times n}\left[(B_{ij})_{n\times p}(C_{ij})_{p\times q}\right]$ ，因为矩阵的乘法满足结合律；
- 分配律：任意三个分块矩阵满足 $[(A_{ij})_{m\times n}+(B_{ij})_{m\times n}](C_{ij})_{n\times p}=(A_{ij})_{m\times n}(C_{ij})_{n\times p}+(B_{ij})_{m\times n}(C_{ij})_{n\times p}$ ，因为矩阵乘法满足左分配律；同样地，任意三个矩阵满足 $(A_{ij})_{m\times n}\left[(B_{ij})_{n\times p}+(C_{ij})_{n\times p}\right]=(A_{ij})_{m\times n}(B_{ij})_{n\times p}+(A_{ij})_{m\times n}(C_{ij})_{n\times p}$ ，因为矩阵乘法满足右分配律；
- 对数字的交换律：任意常数和任意两个矩阵满足 $c\left[(A_{ij})_{m\times n}(B_{ij})_{n\times p}\right]=[c(A_{ij})_{m\times n}](B_{ij})_{n\times p}=(A_{ij})_{m\times n}\left[c(B_{ij})_{n\times p}\right]$ ，因为矩阵乘法满足对数字的交换律；
- 乘法幺元：分块单位阵作为乘法的幺元存在，即对任意矩阵 $(I_{ij})_{s\times s}(A_{ij})_{s\times t}=(A_{ij})_{s\times t}=(A_{ij})_{s\times t}(I_{ij})_{t\times t}$ ，因为单位阵在矩阵乘法中作为幺元.

2.6.5. 分块矩阵的转置

2.6.5.1. 分块矩阵的转置

对于一个分块矩阵 $(A_{ij})_{r\times s}$ ，定义其转置是一个 $s\times r$ 矩阵，其中 $A_{ij}^{T}=(A_{ij})^{T}$ 。

2.6.5.2. 分块矩阵的转置规则

下列讨论均基于矩阵的合法运算。

- 二次转置：任意分块矩阵满足 $[(A_{ij})^T_{r\times s}]^T=(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为矩阵的二次转置是自身；
- 加法转置：任意两个分块矩阵满足 $[(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}]^T=(A_{ij})^T_{r\times s}+(B_{ij})^T_{r\times s}$ ，因为矩阵加法的转置是转置的加法；
- 数乘转置：任意分块矩阵和任意常数满足 $[c(A_{ij})_{r\times s}]^T=c(A_{ij})^T_{r\times s}$ ，因为数乘的转置是转置数乘；
- 乘法转置：任意两个分块矩阵满足 $((A_{ij})_{r\times s}(B_{ij})_{s\times t})^T=(B_{ij})^T_{s\times t}(A_{ij})^T_{r\times s}$ ，因为矩阵乘法的转置是交换次序后的转置乘法.

2.6.6. 分块矩阵的共轭

2.6.6.1. 分块矩阵的共轭

对于一个分块复矩阵 $(A_{ij})_{r\times s}$ ，定义其转置是一个总行数、总列数、行分块方式、列分块方式都相同的矩阵，其中 $\overline{A_{ij}}=(\overline{A_{ij}})^T$ 。

2.6.6.2. 分块矩阵的共轭规则

下列讨论均基于矩阵的合法运算。

- 二次共轭：任意分块矩阵满足 $\overline{[\overline{(A_{ij})_{r\times s}}]}=(A_{ij})_{r\times s}$ ，因为矩阵的二次共轭是自身；
- 共轭转置：任意分块矩阵满足 $\overline{(A_{ij})^T_{r\times s}}=[\overline{(A_{ij})_{r\times s}}]^T$ ，因为矩阵转置的共轭是共轭的转置；
- 加法共轭：任意两个分块矩阵满足 $\overline{[(A_{ij})_{r\times s}+(B_{ij})_{r\times s}]}=\overline{(A_{ij})_{r\times s}}+\overline{(B_{ij})_{r\times s}}$ ，因为矩阵加法的共轭是共轭的加法；
- 数乘共轭：任意分块矩阵和任意常数满足 $\overline{c(A_{ij})_{r\times s}}=\overline{c}\overline{(A_{ij})_{r\times s}}$ ，因为矩阵数乘的共轭是共轭常数数乘共轭矩阵；
- 乘法共轭：任意两个分块矩阵满足 $(\overline{(A_{ij})_{r\times s}(B_{ij})_{s\times t}})=\overline{(A_{ij})_{r\times s}}\,\overline{(B_{ij})_{s\times t}}$ ，因为矩阵乘法的共轭是共轭的乘法 .

2.6.7. 分块初等变换

2.6.7.1. 分块矩阵的初等变换

第一类分块初等变换：对换分块矩阵的某两分块行或者某两分块列
第二类分块初等变换：将分块矩阵的某一分块行或者某一分块列乘以一个非零常数 c
第三类分块初等变换：将分块矩阵的某一分块行乘以一个常数加到另一分块行，或将某一分块列乘以一个常数加到另一分块列，此处要求相关块矩阵的加法合法

2.6.7.2. 分块初等矩阵

记 $I=\operatorname{diag}(I_{m_1},I_{m_2},...,I_{m_k})$ 是分块单位矩阵，则
第一类分块初等矩阵：对换 I 的第 i 分块行和第 j 分块行，或者对换 I 的第 i 分块列和第 j 分块列得到的矩阵
第二类分块初等矩阵：将分块矩阵的第 i 分块行或者第 i 分块列乘以一个非零常数 c 得到的矩阵
第三类分块初等矩阵：将分块矩阵的第 i 分块行乘以一个常数加到第 j 分块行，或将第 i 分块

列乘以一个常数加到第 j 分块列得到的矩阵
易证第一类分块初等矩阵的逆阵是自身、第二类分块初等矩阵的逆阵是常数为 c^{-1} 的第二类分块初等矩阵、第三类分块初等矩阵的逆阵是常数为-c 的第三类初等分块矩阵，即分块初等矩阵都可逆
分块初等行变换等同于左乘对应的分块初等矩阵，分块初等列变换等同于右乘对应的分块初等矩阵。

2.6.8. 分块矩阵的行列式

2.6.8.1. 上下三角分块矩阵的行列式

称以下两种分块矩阵分别为上三角分块矩阵和下三角分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ O & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ O & O & \cdots & A_{3s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & O & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & O & \cdots & O \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & O \\ A_{31} & A_{32} & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \tag{20}$$

其行列式仍然等于对角线上的块矩阵对应行列式之积，可以依据 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理 用归纳法证明

2.6.8.2. 分块矩阵的行列式降阶

对于两个分块行、两个分块列的分块矩阵，形如

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right)$$

其中 A 是 m 阶方阵、 B 是 $m \times n$ 阶矩阵、 C 是 $n \times m$ 阶方阵、 D 是 n 阶方阵。若 A 可逆，则行列式值为 $|A|\,|D - CA^{-1}B|$ ，若 D 可逆，则行列式值为 $|D|\,|A - BD^{-1}D|$ ，下证前者
用第三类分块初等变换，以 $-CA^{-1}$ 左乘第一分块列加到第二分块列上消去 C ，得

$$\left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline O & D - CA^{-1}B \end{array}\right).$$

如此可以将行列式化为更低阶，简便计算

2.6.9. 分块矩阵的逆阵

与普通的 2.5.1.2.初等变化法求逆阵类似，将分块矩阵与对应总行数、纵总列数、行分块方式、列分块方式都相同的分块单位阵左右拼在一起，利用分块初等变换将左侧华为分块单位阵，则右侧变为要求的逆阵。

2.7. Cauchy-Binet 公式

2.7.1. Cauchy-Binet 公式

设 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},B_{n\times m}=(b_{ij})_{n\times m}$ ，而 A 的 s 阶子式形如 $A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_s\\ j_1 & \cdots & j_s\end{pmatrix}$ ，是 A 的第 $i_1,\dots,i_s$ 行与第 $j_1,\dots,j_s$ 列的交点上共 s^2 个元素组成的 s 阶行列式，同理可以定义 B 的 s 阶子式。当 $m>n$ 时必有 $|AB|=0$ ；当 $m\le n$ 时必有 $|AB|=\sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}A\begin{pmatrix}1 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & \cdots & m\end{pmatrix}$ 。下证

构造新的分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A & O\\ I_n & B\end{pmatrix}$ ，利用第三类分块初等变换，用 A 左乘第二分块列加到第一分块列上，得到新的分块矩阵 $M=\begin{pmatrix}O & AB\\ I_n & B\end{pmatrix}$ ，并且注意到 $|M|=|C|$ 。

用 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理 展开 M 的前 m 行得 $|M|=(-1)^{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+m)+1+2+\cdots+m}\,|-I_n|\,|AB|=(-1)^{n(m+1)}\,|AB|$ 。

同样展开 C 的前 m 行得 $|C|=\sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n}A\begin{pmatrix}1 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix}\hat{C}\begin{pmatrix}1 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix}$

- 若 $m>n$ 则 C 的 m 阶子式必有 m-n 列全部为 0，故值为 0；
- 若 $m\le n$ ，式中的代数余子式 $\hat{C}\begin{pmatrix}1 & \cdots & m\\ j_1 & \cdots & j_m\end{pmatrix}=(-1)^{(1+2+\cdots+m)+(j_1+j_2+\cdots+j_m)}\,|-\boldsymbol{e}_{i_1},,-\boldsymbol{e}_{i_2},\dots,-\boldsymbol{e}_{i_{n-m}},B|$ ，其中 $\boldsymbol{e}$ 都是单位列向量，而 i 是前 n 列去掉 A 的 m 阶子式指标后剩下的 n-m 个列指标。
  记 $|N|=|-\boldsymbol{e}_{i_1},,-\boldsymbol{e}_{i_2},\dots,-\boldsymbol{e}_{i_{n-m}},B|$ ，将其按照前 n-m 列展开，则子式之中只有一个没有零行，即对应的 $|-I_{n-m}|=-1$ ，而这个子式的代数余子式就是 $(-1)^{(n-m)+(i_1+i_2+\cdots+i_{n-m})+(1+2+\cdots+n-m)}B\begin{pmatrix}j_1 & \cdots & j_m\\ 1 & \cdots & m\end{pmatrix}$ ，综合计算 $|AB|$ 的展开式中 -1 的系数为

$$
\begin{aligned}
&(1+2+\cdots+m)+(j_1+j_2+\cdots+j_m)+(n-m)+(i_1+i_2+\cdots+i_{n-m})\\
&+(1+2+\cdots+n-m)-n(m+1)\\
&=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-m+1)(n-m)}{2}+(n-m)-n(m+1)\\
&=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}m^2-nm+\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}m+n-m-nm-n\\
&=m^2+n^2-2nm+n-m\\
&=(n-m)(n-m-1)
\end{aligned}
$$

  是偶数，证毕

2.7.2. 矩阵乘积的 r 阶子式

设 $A_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n},B_{n\times m}=(b_{ij})_{n\times m}$ ，常数 $r\le m$ 是一个正整数。
若 $r>n$ 则 AB 的任意 r 阶子式恒为 0；
若 $r\le n$ 则 AB 的 r 阶子式
$AB\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}=\sum\limits_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ k_1 & \cdots & k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1 & \cdots & k_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$ ，下证
设 $C_{m\times m}=AB=(c_{ij})$ ，那么

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \left|\begin{pmatrix} a_{i_1,1} & a_{i_1,2} & \cdots & a_{i_1,n} \\ a_{i_2,1} & a_{i_2,2} & \cdots & a_{i_2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r,1} & a_{i_r,2} & \cdots & a_{i_r,n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,j_1} & b_{1,j_2} & \cdots & b_{1,j_r} \\ b_{2,j_1} & b_{2,j_2} & \cdots & b_{2,j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,j_1} & b_{n,j_2} & \cdots & b_{n,j_r} \end{pmatrix}\right|$$

当 $r > n$ 时，由 2.7.1. Cauchy-Binet 公式 ，右侧一个 $r \times n$ 矩阵和 $n \times r$ 矩阵乘出来的行列式为 0，则左侧 C 的 r 阶子式为 0；
当 $r \le n$ 时，同样直接得出结果。

2.7.3. 实矩阵乘自身转置的主子式非负

对于矩阵 A 的 r 阶子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ ，如果指标满足 $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \ldots, i_r = j_r$ ，则称其为主子式。
任意实矩阵 $A_{m\times n}$ 满足 AA^T 的任意主子式非负，下证
主子式阶数 $r \le n$ 则

$$\begin{aligned} AA^T\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} &= \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ i_1 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \\ &= \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} \left(A\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix}\right)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

主子式阶数 $r > n$ 则子式恒为 0，亦非负.

2.7.4. Lagrange (拉格朗日)恒等式

任意正整数 $n \ge 2$ ，都有 $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$ ，下证
左边用行列式改写，再化为矩阵乘法

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$$

再次使用 2.7. Cauchy-Binet 公式 有

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

由右侧平方和总非负引申出Cauchy-Schwarz 不等式 $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$