1-行列式

1. 行列式

1.1. 行列式的递归定义

1.1.1. 二阶行列式

解二元一次线性方程组中自然遇到，故引进

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1}$$

以便于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{2}$$

的解 (x_1, x_2) 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{3}$$

1.1.2. 三阶行列式

解三元一次线性方程组中是否可以参照二元一次方程组？可以。对于方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{4}$$

从朴素的消元法思想， 我们希望有数对 (u, v, w) 使方程组经相加变为

$$\begin{cases} (a_{11}u + a_{21}v + a_{31}w)x_1 = b_1u + b_2v + b_3w \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{32}w = 0 \\ a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w = 0 \end{cases} \tag{5}$$

即：消去 x_2, x_3 并解出 x_1 。不妨设 $w \neq 0$ ，将后两个方程统一为

$$\begin{cases} a_{12}\dfrac{u}{w} + a_{22}\dfrac{v}{w} = -a_{32} \\ a_{13}\dfrac{u}{w} + a_{23}\dfrac{v}{w} = -a_{33} \end{cases} \tag{6}$$

利用 1.1.1. 二阶行列式 中介绍的二元一次方程组解法可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{u}{w} = \dfrac{\begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} \\
\dfrac{v}{w} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}
\end{cases} \tag{7}
$$

从上式，不妨设

$$
\begin{cases}
u = \begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} \\
v = \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix} \\
w = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}
\end{cases} \tag{8}
$$

回到方程组 (5) 的第一个方程中，解得

$$
x_1 = \frac{b_1 u + b_2 v + b_3 w}{a_{11} u + a_{21} v + a_{31} w} = \frac{b_1 \begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} -a_{32} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & -a_{32} \\ a_{13} & -a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix}} \tag{9}
$$

从二阶行列式的定义 (1) 中不难看出

$$
\begin{vmatrix} a & -b \\ c & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & b \\ -c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = -(ad - bc)
$$

而

$$
\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc
$$

那么，如果我们定义

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{10}
$$

解的表达式 (9) 将被统一为

$$
x_1 = \frac{b_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{a_{11} \begin{vmatrix} -a_{23} & a_{22} \\ -a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{21} & -a_{23} \\ a_{31} & -a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \tag{11}
$$

同样地，可知 x_2, x_3 也可以表示为三阶行列式的形式。

1.1.3. N 阶行列式

一般地，我们称

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

为 N 阶行列式，并定义其计算方式为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ + \cdots (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{13}$$

1.2. 行列式的余子式与子式

1.2.1. 余子式

定义 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的余子式为不含第 i 行和第 j 列的剩余 n-1 阶行列式，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & a_{j-1,2} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & a_{j+1,2} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{14}$$

那么 n 阶行列式的计算方式可以简便写为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

但正负交错的符号仍不够简洁，于是我们定义 n 阶行列式中元素 a_{ij} 的代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

于是式 (17) 写为更一般的形式

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} \tag{15}$$

1.2.2. K 阶子式

对 n 阶行列式，取阶数 $k < n$ 及两组数列 $(i_1, i_2, \cdots i_k), (j_1, j_2, \cdots j_k)$ 满足 $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n, 1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_k \le n$ ，那么称

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix} \tag{16}$$

是原行列式的一个 k 阶子式。上述元素 a_{ij} 的余子式即为 1 阶子式。
而除去第 i_1 行、第 i_2 行...第 i_k 行、第 j_1 列、第 j_2 列...第 j_k 列，剩下的元素构成一个 n-k 阶行列式，称为式 (16) 的余子式，记作

$$M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix}$$

若记 $p = i_1 + i_2 + \cdots + i_k, q = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$ ，那么称

$$\hat{A}\begin{pmatrix} I_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ J_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = (-1)^{p+q} M\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{pmatrix} \tag{17}$$

是式 (16) 的代数余子式。

1.3. 行列式的性质

1.3.1. 上下三角行列式

若行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则称之为上三角行列式，即 $\forall i > j, a_{ij} = 0$ 。同样地，若行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则称之为下三角行列式，即 $\forall i < j, a_{ij} = 0$ 。以上两种情况皆有 $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ 。归纳法证上三角。

- 对 $n = 1$ 有 $|A| = a_{11} = \prod_{i=1}^{1} a_{ii}$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，即

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 \times (n-1) \\
&= a_{11} \prod_{i=2}^{n} a_{ii} \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}. \quad \square
\end{aligned}
$$

1.3.2. 某一行/列元素全为 0

若行列式的某一行或某一列全为 0，则行列式的值为 0。下用归纳法证行元素。

- 对 $n=1$ 有 $|A| = a_{11} = 0$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式。设其第 i 行元素全为 0，那么行列式第一列展开式 $|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$ 中，易得 $a_i 1 = 0$ 且 $M_{j1} = 0, \forall j \neq i$ ，于是 $|A| = 0 - 0 + 0 + \cdots + (-1)^{n+1}0 = 0 \quad \square$

1.3.3. 某一行/列元素乘以常数

若行列式的某一行或某一列均乘以常数 c，则得到的新行列式 $|A'| = c\,|A|$ 。下用归纳法证行元素。

- 对 $n=1$ 有 $|A'| = ca_{11} = c\,|A|$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式。设其第 i 行元素均乘以常数 c，那么行列式第一列展开式 $|A'| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}ca_i 1N_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}$ 中，易得 $N_{j1} = cM_{j1}, \forall j \neq i$ ，其中 M_{ij} 是原行列式元素 a_{ij} 的余子式， N_{ij} 是新行列式对应元素的余子式。于是 $|A'| = a_{11}cM_{11} - a_{21}cM_{21} + \cdots + (-1)^{i+1}ca_i 1N_{i1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}cM_{n1} = c\,|A| \quad \square$

1.3.4. 交换两行

交换行列式的任意两行，则行列式的值符号改变但绝对值不变。下用归纳法证。

- 对 $n=2$ 有

$$
|A'| = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}
$$

- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式。设对换的两行分别是第 i 行和第 i+1 行，则行列式第一列展开式 $|A'| = a_{11}N_{11} + \cdots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}N_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i,1}N_{i+1,1} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}$ 中，易

得 $N_{j1}=-M_{j1},\forall j\neq i,i+1$ 而 $N_{i+1,1}=M_{i1},N_{i1}=M_{i+1,1}$ ，其中 M_{ij} 是原行列式元素 a_{ij} 的余子式， N_{ij} 是新行列式对应元素的余子式。于是
$|A'|=-a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{i+1}a_{i+1,1}M_{i+1,1}+(-1)^{i+2}a_{i,1}M_{i,1}+\cdots-(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$
$=-(a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{i+2}a_{i+1,1}M_{i+1,1}+(-1)^{i+1}a_{i,1}M_{i,1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1})=-|A|$

- 设对换的两行分别是第 i 行和第 j 行，其中 $i+1<j$ ，于是将第 j 行依次和第 j-1 行、第 j-2 行...第 i 行对换，再将第 i 行依次和第 i+1 行、第 i+2 行...第 j-1 行对换，此时完成了第 i 行和第 j 行的对换，并且其余行保持不变。累计做相邻行对换 $(j-i)+(j-i+1)=2(j-i)+1$ 次，则仍有 $|A'|=(-1)^{2(j-i)+1}|A|=-|A|$ □

1.3.5. 两行成比例

若行列式中有两行成比例，则行列式的值为 0。

- 若两行相同（比值为 1 的特殊情况），则据 1.3.4 交换两行 交换两行可知 $|A|=-|A|=0$
- 若两行不相同，设比值为 $k\neq 1$ ，则据 1.3.3 某一行/列元素乘以常数 将常数提出后有两行值相同，可知 $k|A|=0$ □

1.3.6. 某一行元素拆分

记三个行列式 $|A|,|B|,|C|$ 的元素满足

$$\begin{cases}c_{rj}=a_{rj}+b_{rj}\\ c_{ij}=a_{ij}=b_{ij},\forall i\neq r\end{cases}$$

那么我们有 $|C|=|A|+|B|$ 。下用归纳法证

- 对 $n=1$ 有 $|C|=c_{11}=a_{11}+b_{11}=|A|+|B|$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式。第一列元素对应的余子式满足

$$\begin{cases}Q_{rj}=M_{rj}=M_{rj}\\ Q_{ij}=M_{ij}+N_{ij},\forall i\neq r\end{cases}$$

  那么计算

$$\begin{aligned}|C|&=c_{11}Q_{11}+\cdots+(-1)^{r+1}c_{r1}Q_{r1}+\cdots-(-1)^{n+1}c_{n1}Q_{n1}\\&=c_{11}(M_{11}+n_{11})+\cdots+(-1)^{r+1}(a_{r1}+b_{r1})Q_{r1}+\cdots+(-1)^{n+1}c_{n1}(M_{n1}+n_{n1})\\&=(a_{11}M_{11}+\cdots+(-1)^{r+1}a_{r1}M_{r1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1})+\\&\quad(b_{11}N_{11}+\cdots+(-1)^{r+1}b_{r1}N_{r1}+\cdots+(-1)^{n+1}b_{n1}N_{n1})\\&=|A|+|B|\quad\square\end{aligned}$$

1.3.7. 某一行乘倍数后加到另一行

将行列式的某一行乘倍数后加到另一行上后，行列式的值不变。据 1.3.6. 某一行元素拆分 可以将得到的行列式拆分，而据 1.3.5. 两行成比例 可知拆分出的一个行列式为 0，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \square$$

1.3.8. 对列也成立

上述 1.3.4. 交换两行 - 1.3.7. 某一行乘倍数后加到另一行 性质对列元素同样成立。依次证明如下：

1.3.8.1 两列成比例

下证两列相同则行列式值为 0。

- 若相同的两列不含第 1 列，则归纳法可证，此处略；
- 若第 1 列与第 i 列元素相同，不妨设第一列元素至少有 1 个不为 0，通过两行交换将其置于 a_{11} 的位置。利用第一行将其余行第一列元素全部消去，即 $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ 倍第一行加在第 j 行上，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ a_{12} & \cdots & a_{12} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{1n} & \cdots & a_{1n} & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots \end{vmatrix}$$

  新行列式按第一列展开则据 1.3.2. 某一行/列元素全为 0 有 a_{11} 对应的余子式为 0，故原行列式为 0
  成比例的情况按 1.3.5. 两行成比例 同理可证，此处略。

1.3.8.2 某一列元素拆分

若 $r=1$ 则直接按第一列展开可证，若 $r>1$ 则归纳法可证，此处略。

1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列

按 1.3.7. 某一行乘倍数后加到另一行 同理可证，此处略。

1.3.8.4 交换两列

记行列式 $|A|,|B|$ 是由第 r 列、第 s 列交换得来，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3s} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3s} & \cdots & a_{3r} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

据 1.3.8.1 两列成比例 和 1.3.8.2 某一列元素拆分 可以构造一个值为 0 的行列式

$$\begin{aligned} |C| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3r}+a_{3s} & \cdots & a_{3r}+a_{3s} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= 0+0+|A|+|B| \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

1.4 行列式的任意展开

1.4.1 行列式按任意列展开

如想让行列式按第 i 列展开，则可以用类似 1.3.4. 交换两行 的方法，将第 i 列依次与第 i-1 列、第 i-2 列...第 1 列交换，得到新的行列式

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2i} & a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{3i} & a_{31} & \cdots & a_{3,i-1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1}|A|$$

而此行列式按第一列展开

$$\begin{aligned} |B| &= a_{1i}N_{1i} - a_{2i}N_{2i} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{ni}N_{ni} \\ &= a_{1i}M_{1i} - a_{2i}M_{2i} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{ni}M_{ni} \end{aligned}$$

故原行列式

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{i+1}|B| \\ &= (-1)^{i+1}a_{1i}M_{1i} + (-1)^{i+2}a_{2i}M_{2i} + \cdots + (-1)^{n+1+i+1}a_{ni}M_{ni} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ji}M_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n}a_{ji}A_{ji} \quad \square \end{aligned}$$

作为推论， 我们有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{jk} = 0, \forall k \neq i$ ，可构造两列相同的行列式证明，此处略。

1.4.2 行列式按任意行展开

先证可以按第一行展开。

- 对第一行仅有一个元素 a_{1s} 不为 0 的行列式，按第 s 列展开并据 1.3.2. 某一行/列元素全为 0 有 $|A|=a_{1s}A_{1s}$ ；
- 对一般的行列式，据 1.3.6. 某一行元素拆分 可拆分为 n 个第一行仅有一个元素 a_{1s} 不为 0 的行列式。 □
  按任意行展开及推论按 1.4.1 行列式按任意列展开 同理证，此处略。

1.5 行列式的转置

对行列式如 (12) 所示，记其转置行列式为

$$|A^T|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{18}$$

我们有 $|A^T|=|A|$ ，下用归纳法证。

- 对 $n=1$ 有 $|A^T|=a_{11}=|A|$ 成立；
- 假设对 n-1 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式。将其按照第一行展开

$$\begin{aligned} |A^T| &= a_{11}N_{11}-a_{21}N_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}N_{1n} \\ &= a_{11}M_{11}-a_{21}N_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1} \\ &= |A| \quad \square \end{aligned}$$

由此可知行列式的行与列地位等同，对行成立的性质理所应当对列成立。

1.6 Cramer (克莱默) 法则

对 n 个 n 元一次线性方程组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{19}$$

记其系数行列式为式 (12)，记系数行列式第 j 列换为常数项列组成的行列式为 $|A_j|$ 。若 $|A|\neq 0$ ，则方程组有且仅有一组解 $x_j=\dfrac{|A_j|}{|A|},\forall j=1,2\cdots n$ 。下证解的唯一性。

若方程组有解，则以 j=1 为例，有

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将第二个表达式中第 k 列乘以系数 x_k 加在第一列上，简化为

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

那么容易得到 $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$ ，同样可以表示出其他未知数。下证解的存在性。
对任意未知数，将分子的行列式 $|A_j|$ 按第 j 列展开则

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}), \forall j = 1, 2 \cdots n$$

对第 r 条方程，利用 1.4.2 行列式按任意行展开 任意行展开的推论计算

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{rj}x_j &= \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij}) \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{n} a_{rj}\sum_{i=1}^{n} b_iA_{ij} \\ &= \frac{1}{|A|}\sum_{i=1}^{n} b_i(\sum_{j=1}^{n} a_{rj}A_{ij}) \\ &= \frac{1}{|A|}b_r\,|A| = b_r \quad \square \end{aligned}$$

1.7 行列式的组合定义

1.7.1. 逆序数

取自然数 $1, 2, \ldots, n$ 的一个排列，称从小到大的 $(1, 2, \ldots, n)$ 为常排列。如果存在 $j > i$ 但排列中 j 在 i 的前面，则称数对 (j, i) 是一个逆序对。一个排列中存在的逆序对个数称为这个排列的逆序数，记作 $N(1, 2, \ldots, n)$ 。

1.7.2 奇偶排列

逆序数为偶数的排列称为偶排列，而逆序数为奇数的排列称为奇排列。
若交换排列中 k_i 和 k_j 的位置，则排列的奇偶性改变，下仿 1.3.4. 交换两行证明。

- 若两个数相邻，即交换 k_i 和 k_{i+1} ，则交换后逆序数增加 1（若 $k_i < k_{i+1}$ ）或逆序数减少 1（若 $k_i > k_{i+1}$ ），奇偶性均改变；
- 若两个数不相邻，即交换 k_i 和 k_j ，其中 $i + 1 < j$ ，于是将 k_j 依次和 k_{j-1} 、 k_{j-2} ... k_i 对换，再将 k_i 依次和 k_{i+1} 、 k_{i+1} ... k_{j-1} 对换，此时完成了 k_i 和 k_j 的对换，并且其余数保持不变。累计做相邻对换 $(j - i) + (j - i + 1) = 2(j - i) + 1$ 次，奇偶性均改变。 $\square$
  对于 n 个自然数所有排列组成的群 S_n ，其中奇排列和偶排列各占一半。事实上可以构造双射证明，此处略。

1.7.3 对换变为常排列

任意 n 个自然数的排列通过 $N(1, 2, \ldots, n)$ 次相邻对换都可以变为常排列，下用归纳法证明。

- 对 $n=1$ 显然成立；
- 假设对 n-1 的排列都成立，考虑 n 的排列。记排列 $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 中 n 在位置 i，其逆序数为 $m_i=n-i$ 。则通过 n 与其后每一个数的对换共 n-i 次可以将 n 置于位置 n，而前面的 n-1 个数构成了 n-1 排列，可以通过 $N(k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_n)$ 次对换变为常排列。注意到 $N(k_1,k_2,\dots,k_n)=m_i+N(k_1,\dots,k_{i-1},k_{i+1},\dots,k_n)$. $\square$

1.7.4 行列式的组合定义

以逆序数定义行列式的计算为

$$|A|=\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\dots,k_n)}a_{k_1 1}a_{k_2 2}\cdots a_{k_n n} \tag{20}$$

下验证此定义兼容 1.1. 行列式的递归定义和 1.5 行列式的转置。

1.7.4.1 兼容二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=(-1)^0ad+(-1)^1bc=ad-bc$$

1.7.4.2 兼容递归定义

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}&=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\left(\sum_{\substack{(k_2,k_3,\dots,k_n)\in S_{n-1}\\ i=k_1\notin k_2,k_3,\dots,k_n}}(-1)^{N(k_2,k_3,\dots,k_n)}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\cdots a_{k_n n}\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{(k_2,k_3,\dots,k_n)\in S_{n-1}\\ i=k_1\notin k_2,k_3,\dots,k_n}}(-1)^{N(i,k_2,\dots,k_n)-(i-1)+(i+1)}a_{i1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\cdots a_{k_n n}\\
&=\sum_{(i,k_2,k_3,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(i,k_2,\dots,k_n)-2i}a_{i1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\cdots a_{k_n n}\\
&=\sum_{(i,k_2,k_3,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(i,k_2,\dots,k_n)}a_{i1}a_{k_2 2}a_{k_3 3}\cdots a_{k_n n} \quad \square
\end{aligned}$$

1.7.4.3 兼容行列式的转置

对任意排列 $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ ，是按照行指标为常排列的顺序给出的，而列指标也是 n-排列，那么可以经 m 次相邻对换重新排布得到 $a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$ ，其中 q_i 是 $k_j=i$ 对应的 j。列指标 $(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 经 m 次相邻对换变为常排列，则据 1.7.3 对换变为常排列 可知 m 和 $N(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 奇偶性相同；行指标常排列经 m 次相邻对换变为 $(q_1,q_2,\dots,q_n)$ ，则同理 m 和 $N(q_1,q_2,\dots,q_n)$ 奇偶性相同。借由 m 作为桥梁得到 $N(k_1,k_2,\dots,k_n)$ 和 $N(q_1,q_2,\dots,q_n)$ 奇偶性相同，也就是

$$\begin{aligned}
|A^T|&=\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\dots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}\\
&=\sum_{(k_1,k_2,\dots,k_n)\in S_n}(-1)^{N(q_1,q_2,\dots,q_n)}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}\\
&=|A| \quad \square
\end{aligned}$$

1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理

对于 n 阶行列式 $|A|$ ，在其中任取 k 行（列），那么含于这 k 行（列）中的所有 k 阶子式与对应 n-k 阶代数余子式的乘积之和即 $|A|$ 。
先证任一 k 阶子式与对应 n-k 阶代数余子式之积展开式的每一项都属于 $|A|$ 的表达式。
特殊情况，若 k 阶子式由第 1-k 行及第 1-k 列的交叉元素构成，即

$$|A_1| = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}, |A_2| = \hat{A}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$$

那么前者展开式的每一项都形如 $(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_k)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_k k}$ ，后者展开式的每一项都形如 $(-1)^{N(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)}a_{j_{k+1},k+1}a_{j_{k+2},k+2}\cdots a_{j_n n}$ 。其乘积的每一项都形如 $\left[(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_k)}a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_k k}\right]\left[(-1)^{N(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)}a_{j_{k+1},k+1}a_{j_{k+2},k+2}\cdots a_{j_n n}\right]$ $= (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{j_1,1}a_{j_2,2}\cdots a_{j_n n}$ 。
一般情况，即 $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots i_k \le n, 1 \le j_1 \le j_2 \le \dots j_k \le n$ ，分别通过 $(i_1 + i_2 + \cdots + i_k) - \frac{1}{2}k(k+1)$ 次相邻行对换、 $(j_1 + j_2 + \cdots + j_k) - \frac{1}{2}k(k+1)$ 次相邻列对换可以变为上述已证明的情况，而系数多出 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-\frac{1}{2}k(k+1)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-\frac{1}{2}k(k+1)} = (-1)^{\sum_{l=1}^{k}(i_l+j_l)}$ ，正好是对换后行列式与原行列式的系数差。
注意到，对固定的 $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots i_k \le n$ ，所有 k 阶子式与对应 n-k 阶代数余子式之积展开式的每一项都不相同。而总共有 C_n^k 个 k 阶子式，每个子式展开项 $k!$ 个，每个对应的 n-k 阶代数余子式展开项 $(n-k)!$ 个，一共 $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$ 项，正好是 $|A|$ 展开项的总数。 □

1.9 行列式的刻画

设 f 是从 n 阶方阵全体构成的集合向复数集上的映射，使得对任意的 n 阶方阵 A 、任意的列指标 $1 \le i \le n$ 、任意的常数 c，都满足：

- 1）设方阵 A 的第 i 列是同阶方阵 B 的第 i 列和同阶方阵 C 的第 i 列之和，三个方阵的其余元素全部相同，则 $f(A) = f(B) + f(C)$ ；
- 2）将方阵 A 的第 i 列乘以常数 c 得到方阵 B ，则 $f(B) = c \times f(A)$ ；
- 3）对换方阵 A 的任意两列得到方阵 B ，则 $f(B) = -f(A)$ ；
- 对 n 阶单位阵 I_n 恒有 $f(I_n) = 1$
  这样的多重线性、反对称性、正规性唯一确定了行列式函数，证明如下：
  设方阵 A 的列向量表示为 $A = (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$ ，其中 $\boldsymbol{\alpha_i}$ 是 A 的第 i 列。设标准单位列向量 $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ ，那么有 $\boldsymbol{\alpha_j} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e_j}$ 。
  条件（1）所示的可加和性，表示我们可以把标准单位列向量表示的方阵列向量拆分，也就是对每一列（此处以第一列为例）都有

$$f(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}) = f(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i1}\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{\alpha_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$$

  而条件（2）所示的齐次性，表示我们可以把方阵的元素与标准单位列向量拆分并次数仍为 1，接着上述以第一列为例，即

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_{i1}\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot f(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n})$$

（1）和（2）共同描述的多重线性，让方阵的元素提取到映射之外，而标准单位列向量留在映射中，简化了讨论，也就是

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot f(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}) &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \left[\sum_{j=1}^{n} a_{j2} \cdot f(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}) \right] \\
&= \cdots \\
&= \sum_{1 \le k_1, k_2, \ldots, k_n \le n} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n} \cdot f(\boldsymbol{e_{k_1}}, \boldsymbol{e_{k_2}}, \ldots, \boldsymbol{e_{k_n}})
\end{aligned}$$

前面的大求和号来自于对 n 列的全部展开，一共 n^n 项。
然而根据条件（3），如果指标 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 中有相同的项，对于 $f(\boldsymbol{e_{k_1}}, \boldsymbol{e_{k_2}}, \ldots, \boldsymbol{e_{k_n}})$ 交换这两列得到的值既相同又互为相反数，那么只能为 0。因此上述 n^n 项中只有指标 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 互异的项，也就是指标属于全排列集 S_n 的项才不为 0，表示为

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \le k_1, k_2, \ldots, k_n \le n} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n} \cdot f(\boldsymbol{e_{k_1}}, \boldsymbol{e_{k_2}}, \ldots, \boldsymbol{e_{k_n}}) \\
= &\sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n \in S_n} a_{k_1,1} a_{k_2,2} \cdots a_{k_n,n} \cdot f(\boldsymbol{e_{k_1}}, \boldsymbol{e_{k_2}}, \ldots, \boldsymbol{e_{k_n}})
\end{aligned}$$

用 σ 表示指标的排列，由于条件（4），我们有
$f(I_n) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \cdot f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}) = f(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}) = 1$ ，故以此为基准再根据条件（3）交换列指标可以得到标准单位列向量所有排列对应的映射值，也即 $f(\sigma) = \operatorname{sgn} \sigma$ 。并且求出的方针对应的表达式正好是行列式的组合定义，参照 1.7.4 行列式的组合定义.