# 1-行列式章末习题

全部来自谢启鸿《高等代数》(第四版)，一般来说对列成立的讨论对行都成立，个人习惯写列，并且反向链接一般省略行的对应引用

## 单选题

非必要不给选项，按照填空题解答

### 1.若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$，则 $x = (\quad)$.

#### 1.解析

考察 1-行列式 #1.1.2. 三阶行列式， 直接计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & x-10 \end{vmatrix} = (x-10)+7 = x-3 = 0, \therefore\ x = 3$$

### 2.在关于 $x$ 的多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & -5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 7 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ 中，一次项的系数是 $(\quad)$.

#### 2.解析

考察 1-行列式 #1.2.1. 余子式，一次项系数对应 x 的代数余子式

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

### 3.N 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值为 $(\quad)$.

#### 3.解析

考察 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义，直接用逆序数计算
$1^n \times (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} = (-1)^{n(n-1)/2}$.

`PS：本人是怎么按照代数余子式的 i+j 指数算的、、、真是昏了头了`

**4.行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ 的值为 (　　).**

**4.解析**

考察 1-行列式 #1.2.1. 余子式 ，最后一行只有最后一个 f 为 0，而其代数余子式最后一行只有最后一个 d 为 0，然后得到二阶行列式直接计算

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix} = f \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} = fd \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix} = fd(-ab) = -abdf.$$

也可按照 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理 的思想，按照第一行、第二行展开，注意到只有第一列、第二列不全为 0

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix} = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = (-ab)df = -abdf.$$

**5.若 $|A|$ 是 n 阶行列式， $|B|$ 是 m 阶行列式，它们的值都不为 0，记 $\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = |C|, \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = |D|$ ，则 $|C| : |D|$ 的值是 (　　).**

**5.解析**

考察 1-行列式#1.3.8.4 交换两列，将 $|D|$ 的第 m+1 列（其中 $|A|$ 的第一列 ）逐次向前与相邻列交换，交换 m 次后成为第 1 列，依此下去共交换 mn 次可以将 $|D|$ 变为 $|C|$ ，故比值为 $(-1)^{mn}$ .
也可以按照 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理 的思想， $|C|$ 的值是 $(-1)^{1+2+\cdots+n+1+2+\cdots+n} |A| |B| = |A| |B|$ ，而 $|D|$ 的值是 $(-1)^{(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n)+1+2+\cdots+n} |A| |B| = (-1)^{mn} |A| |B|$ ，故比值为 $(-1)^{mn}$ .

**6.若一个 n (n>1) 阶行列式中元素或为 1 或为 -1，则其值必为 (　　).**

$(A)\ 1$　　$(B)\ -1$　　$(C)$ 奇数　　$(D)$ 偶数

**6.解析**

考察 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列，将上述行列式的一列加到另一列，得到的元素或为 -2 或为 0 或为 2。若全部为 0 则行列式的值为 0，是偶数；否则新的一列可以提取公因数 2，亦是偶数，选 D.
`PS：选择题直接用特例，元素全为 1 的任意阶行列式值为 0，选 D.`

**7.行列式** $\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\quad)$.

7.解析

一眼 1-行列式计算方法 > 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式，常见为每一行为从左到右递增的次数，将此行列式取转置再对换第一列/第四列、第二列/第三列即可

$$\begin{vmatrix} 8 & 27 & 64 & 125 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix}$$
$$= (5-4)\times(5-3)\times(5-2)\times(4-3)\times(4-2)\times(3-2) = 12.$$

**8.行列式** $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = (\quad)$.

8.解析

与选择题第四题、第五题都相似，考察 1-行列式#1.3.8.4 交换两列，将第二列/第三列、第二行/第三行对换即成为分块行列式；也可利用 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理 的思想，按照第一行、第三行展开注意到只有第一列、第三列不全为 0

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1).$$

原题选项设置一般，居然不考符号正负

**9.如行列式** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$ **，则** $\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} = (\quad)$.

9.解析

考察 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数 和 1-行列式#1.3.4. 交换两行，注意到三行分别乘以常数 -1, 2, 3，同时交换了第一行/第三行

$$\begin{vmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} = 3\times 2\times(-1)\times \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \end{vmatrix} = -6\times(-d) = 6d.$$

### 10.当 (　　) 时，下列线性方程组有唯一解:

$$\begin{cases} bx_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$$

#### 10.解析

考察 1-行列式#1.6 Cramer (克莱默) 法则，当系数行列式不为 0 的时候线性方程组有唯一解

$$\begin{vmatrix} b & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} b+2 & 4 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -6(b-2) \neq 0, \therefore\ b \neq 2.$$

### 11.下列论断错误的是 (　　).

$(A)$ 行列式 $|A|$ 的第 $(i,j)$ 元素的代数余子式等于其余子式乘以 $(-1)^{i+j}$
$(B)$ 将行列式 $|A|$ 的第一行元素都乘以 2，第二行元素都乘以 $\frac{1}{2}$ ，行列式值不变
$(C)$ 行列式转置后的值等于原行列式值的相反数
$(D)$ 将行列式的第一行和第二行对换，再将第一列和第二列对换，其值不变

#### 11.解析

A 正确，是代数余子式的定义，源自 1-行列式#1.2.1. 余子式；
B 正确，两次操作分别让行列式的值乘以 2 和 $\frac{1}{2}$ ，最后值不变，源自 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数；
C 错误，行列式和其转置的值相同，源自 1-行列式#1.5 行列式的转置；
D 正确，两次操作分别让行列式的值乘以 -1，最后值不变，源自 1-行列式#1.3.8.4 交换两列和 1-行列式#1.3.4. 交换两行.

### 12.下列论断正确的是 (　　).

$(A)$ 将 n (n>1) 阶行列式 $|A|$ 的每个元素都乘以 2，所得行列式的值是原行列式值的 2 倍
$(B)$ 某线性方程组的系数行列式 $|A|$ 的值等于零，则方程组的解全为 0
$(C)$ 若上三角行列式的值为零，则行列式主对角线上必有一个元素等于零
$(D)$ 若上三角行列式主对角线上方的所有元素等于零，则行列式的值为零

#### 12.解析

A 错误，所得行列式变为 $2^n$ 倍，源自 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数；
B 错误，代表方程组有无穷多组解；
C 正确，反证法如果全不为 0 则行列式值必不为 0，源自 1-行列式#1.3.1. 上下三角行列式；
D 错误，与上方元素无关，反例可以举 n 阶单位行列式值为 1，源自 1-行列式#1.3.1. 上下三角行列式.
选项 B 考了后面的内容呃呃呃坏题

**13.设** $f(x)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&1&x^2-2\\2&x^2+1&1\end{vmatrix}$ **，则** $f(x)=0$ **的根为 (  ).**

## 13.解析

考察 1-行列式#1.3.5. 两行成比例以及 1-行列式计算方法 > 8. 求根法的思想。观察第一列和第二列相同时行列式值为 0，即 $x^2+1=2, x=\pm1$；观察第一行和第二行相同时行列式值为 0，即 $x^2-2=2, x=\pm2$ 。而函数最高次为 2+2=4 次，故上述四个根就是全部的根.

**14.设** $f(x)=\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}$ **，则** $f(x)=0$ **的根为 (  ).**

## 14.解析

考察 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列 将第一列乘以 -1 依次加到后面的列上面，再将第二列加到第四列上，变成一个分块的下三角行列式

$$\begin{vmatrix}x-2&x-1&x-2&x-3\\2x-2&2x-1&2x-2&2x-3\\3x-3&3x-2&4x-5&3x-5\\4x&4x-3&5x-7&4x-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1&0&-1\\2x-2&1&0&-1\\3x-3&1&x-2&-2\\4x&-3&x-7&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}=(-x)(5-5x)=0,\ \therefore\ x=0,1.$$

**15. N 阶行列式** $\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$ **的值为 (  ).**

## 15.解析

典型的 1-行列式计算方法 > 3.1 三对角行列式，其中 $a_i=2, b_i=c_i=1, \forall 1\le i\le n$ 。利用已知的递推公式 $|D_n|=a_nD_{n-1}-b_nc_nD_{n-2}=2D_{n-1}-D_{n-2}$ ，并且注意到 $|D_1|=2,|D_2|=3$ ，于是猜测 $|D_n|=n+1$ ，代入验证正确.

## 填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 \end{vmatrix}$ 的值为 (　　).

### 1.解析

考察 1-行列式#1.3.5. 两行成比例，任何一个 $a_i, b_i = 0$ 时，行列式有一行或一列为 0，值为 0；任何一个 $a_i, b_i \neq 0$ 时，第 i 列与第 j 列之比为 $\frac{b_i}{b_j}$，第 i 行与第 j 行之比为 $\frac{a_i}{a_j}$，行列式值为 0.

2. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ 的值为 (　　).

### 2. 解析

按照 1-行列式计算方法 > 8. 求根法只能看出有一个根 $x = 0$，不知道是几重根，所以按照 1-行列式#1.3.7. 某一行乘倍数后加到另一行 直接计算

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & x & -x \\ 0 & x & 0 & -x \\ x & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4 \times (-1)^{3+2+1} = x^4.$$

3.行列式 $\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 \\ x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 \\ x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 \\ x_4^3 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & y_4^3 \end{vmatrix}$ 的值为 (　　).

### 3.解析

假设 $x_i \neq 0$，可以将每一列的三次项提出，得到一个 1-行列式计算方法 > 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^3 & x_1^2y_1 & x_1y_1^2 & y_1^3 \\ x_2^3 & x_2^2y_2 & x_2y_2^2 & y_2^3 \\ x_3^3 & x_3^2y_3 & x_3y_3^2 & y_3^3 \\ x_4^3 & x_4^2y_4 & x_4y_4^2 & y_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{4} x_i^3 \begin{vmatrix} 1 & \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^1 & \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 & \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^1 & \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2 & \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{y_3}{x_3}\right)^1 & \left(\frac{y_3}{x_3}\right)^2 & \left(\frac{y_3}{x_3}\right)^3 \\ 1 & \left(\frac{y_4}{x_4}\right)^1 & \left(\frac{y_4}{x_4}\right)^2 & \left(\frac{y_4}{x_4}\right)^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{4} x_i^3\right)\left[\prod_{1\le i<j\le 4}\left(\frac{y_j}{x_j}-\frac{y_i}{x_i}\right)\right]$$

$$= \prod_{1\le i<j\le 4}(x_iy_j - x_jy_i).$$

与 $x_i = 0$ 时的结果兼容.

**4.已知 n 阶行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 的值为 c， $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 为常数，则行列式 $|B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{vmatrix}$ 的值为 (　　).**

**4.解析**

考察 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，将每一行、每一列的常数分别提出

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_1^2 & a_{12}b_1b_2 & \cdots & a_{1n}b_1b_n \\ a_{21}b_2b_1 & a_{22}b_2^2 & \cdots & a_{2n}b_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_nb_1 & a_{n2}b_nb_2 & \cdots & a_{nn}b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} b_i \begin{vmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \cdots & a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 & a_{22}b_2 & \cdots & a_{2n}b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b_1 & a_{n2}b_2 & \cdots & a_{nn}b_n \end{vmatrix}$$

$$= (\prod_{i=1}^{n} b_i)^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c\prod_{i=1}^{n} b_i^2.$$

**5.行列式 $\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\199 & 200 & 395\\301 & 300 & 600\end{vmatrix}$ 的值为 $(\quad)$.**

### 5.解析

考察 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列 和 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，将第二列的因数 100 提出后简便计算

$$\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\199 & 200 & 309\\301 & 300 & 600\end{vmatrix} = 100\times\begin{vmatrix}103 & 1 & 204\\199 & 2 & 395\\301 & 3 & 600\end{vmatrix} = 100\times\begin{vmatrix}3 & 1 & 4\\-1 & 2 & -5\\1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 100\times\begin{vmatrix}0 & -8 & 4\\0 & 5 & -5\\1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 2000.$$

**6. 设 $|A| = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}, |B| = \begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\a_2 & b_2 & d_2\\a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$，则 $\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & 2c_1-d_1\\a_2 & b_2 & 2c_2-d_2\\a_3 & b_3 & 2c_3-d_3\end{vmatrix} = (\quad)$.**

### 6.解析

考察 1-行列式#1.3.8.2 某一列元素拆分 和 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，第三列来自两个不同的行列式，也就是 $2|A| - |B| = 1$.

**7. 设行列式 $|A| = \begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\2 & x & y\end{vmatrix}$，其代数余子式 $A_{11}+A_{12}+A_{13}=1$，则 $|A| = (\quad)$.**

### 7.解析

考察 1-行列式#1.2.1. 余子式，第一行的代数余子式前面系数都是 1，指示我们将第一行元素全部化为相同的元素，注意到第二行乘以 -1 加到第一行即可

$$|A| = \begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\2 & x & y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\\2 & x & y\end{vmatrix} = A_{11}+A_{12}+A_{13} = 1.$$

**8.设行列式 $|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & -2 & 0\\1 & 2 & 0 & -1\\2 & -3 & 4 & 3\end{vmatrix}$，则 $|A|$ 的第四行元素的代数余子式之和 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = (\quad)$.**

与上一题类似，考察考察 1-行列式#1.2.1. 余子式，将第四行元素替换为 0 得到的新行列式的值就是代数余子式之和

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\1 & 1 & -2 & 0\\1 & 2 & 0 & -1\\1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & -3 & -1\\0 & 1 & -1 & -2\\1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = (-3)\times(-1)^{3+2+1} = -3.$$

本人很蠢地两道题都是硬算的呃呃呃

9. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 依次是行列式 $|A|$ 的第一、第二、第三、第四列， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\gamma,\boldsymbol{\alpha}_2$ 依次是行列式 $|B|$ 的第一、第二、第三、第四列。又已知 $|A|=a,|B|=b$，则行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\gamma|$ 的值为 (　　).

9.解析

考察 1-行列式#1.3.8.2 某一列元素拆分 和 1-行列式#1.3.8.4 交换两列，将目标行列式拆开再还原

$$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}+\gamma|=|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1,\gamma|=a\times(-1)^2+b\times(-1)^2=a+b.$$

10.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若将 $|A|$ 的第一列移到最后一列，其余各列依次保持原来次序向左移动，则得到的行列式的值为 (　　).

10.解析

考察 1-行列式#1.3.8.4 交换两列，可以看作第一列先与第二列交换，再与第三列交换，不断进行直到与最后一列交换，共交换 n-1 次，则值为 $(-1)^{n-1}c$.

11.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若将 $|A|$ 的所有元素改变符号，则得到的行列式的值为 (　　).

11.解析

考察 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，可以看作每一列乘以 -1，共乘 n 次，则值为 $(-1)^n c$.

12.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若将 $|A|$ 的每个第 $(i,j)$ 元素 $a_{ij}$ 换到第 $(n-i+1,n-j+1)$ 元素的位置上，则得到的行列式的值为 (　　).

12.解析

考察 1-行列式#1.3.8.4 交换两列和 1-行列式#1.3.4. 交换两行，每一列和对称列交换一次，每一行和对称行交换一次，共交换偶数次，则值为 $c$.

13.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若将 $|A|$ 的每个元素 $a_{ij}$ 换成 $(-1)^{i+j}a_{ij}$，则得到的行列式的值为 (　　).

13.解析

考察 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，第 i 行乘以 $(-1)^i$，第 j 列乘以 $(-1)^j$，则值为 $(-1)^{2\times n(n+1)/2}c=c$.

14.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若将 $|A|$ 的每个元素 $a_{ij}$ 换成 $b^{i-j}a_{ij}$，则得到的行列式的值为 (　　).

14.解析

考察 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数，第 i 行乘以 $b^i$，第 j 列乘以 $b^{-j}$，则值为 $(-1)^{n(n+1)/2-n(n+1)/2}c=c$.

15.N 阶行列式 $|A|$ 的值为 c，若从第二列开始每一列加上它前面的一列，同时对第一列加上 $|A|$ 的第 n 列，则得到的行列式的值为 (　　).

### 15.解析

考察 1-行列式#1.3.8.2 某一列元素拆分 和 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列，按照第一行拆开再恢复到原行列式，按照列向量表达为

$$
\begin{aligned}
&|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n|\\
&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}+\boldsymbol{\alpha}_n|\\
&=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|+|\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}|\\
&=c[1+(-1)^{n-1}].
\end{aligned}
$$

## 解答题

1. 求下列行列式的值 $\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&n\\0&0&\cdots&n-1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&2&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$.

### 1. 解析

考察 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义，直接计算
$n!\times(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=n!\times(-1)^{n(n-1)/2}$.

2. 已知五阶行列式 $|A|=2,|B|=3$，求十阶行列式 $\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}$ 的值.

### 2.解析

考察 1-行列式#1.8 Laplace (拉普拉斯) 定理，对 6-10 列、1-5 行展开，得

$$
\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{6+7+8+9+10+1+2+3+4+5}|A|\,|B|=-6.
$$

3. 若 $a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}$ 互不相同，求解方程：

$$
\begin{vmatrix}1&x^1&x^2&\cdots&x^{n-1}\\1&a_1^1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_{n-2}^1&a_{n-2}^2&\cdots&a_{n-2}^{n-1}\\1&a_{n-1}^1&a_{n-1}^2&\cdots&a_{n-1}^{n-1}\end{vmatrix}=0
$$

### 3.解析

典型的 1-行列式计算方法 > 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式，x 最高次项 n-1 次，则有 n-1 个根，而 $x=a_i,\forall 1\leq i\leq n-1$ 时行列式两行相同，则值为 0，故解为
$x=a_i,\forall 1\leq i\leq n-1$.

### 4.设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相同，求证下列线性方程组有唯一组解：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \cdots + a_n^2x_n = b^2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1} \end{cases}$$

#### 4.解析

系数行列式是典型的 1-行列式计算方法 > 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式， $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 互不相同时行列式值非 0，故有唯一解.

### 5.计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

#### 5.解析

每一行乘以-1，依次将下一行的低次项消去，则是典型的 1-行列式计算方法 > 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式的转置，所以答案 $\prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$.

### 6.求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

#### 6.解析

方程左边是 n 阶行列式对应的 n-1 阶多项式，按照 1-行列式计算方法 > 8. 求根法 ，注意到 $x = i - 2$ 将使第 i 行和第 1 行相等，行列式值为 0，故根为 $x = 0, 1, 2, \ldots, n-2$.

### 7.求证：对 $n \geq 2$ 的上三角行列式 $|A|$ ，若 $i < j$ ，则 $A_{ij} = M_{ij} = 0$.

#### 7.解析

考察 1-行列式#1.3.1. 上下三角行列式 ， $i < j$ 对应上三角区域的元素，其余子式和代数余子式也是上三角行列式且主对角线上有一个元素为 0.

## 8.令

$$(a_1a_2\dots a_n)=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & -1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

证明关于连分数的如下等式成立：

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\vdots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}}=\frac{(a_1a_2\dots a_n)}{(a_2a_3\dots a_n)}$$

## 8.解析

原行列式是典型的 1-行列式计算方法 > 3.1 三对角行列式，显然有
$A_1=(a_1)=a_1, A_2=(a_1a_2)=a_1a_2+1$ 。
观察要证明的等式，右边是出现 n 阶行列式和其去掉第一行第一列形成的 n-1 阶行列式，那么按照第一行展开

$$\begin{aligned}(a_1a_2\dots a_n)&=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & -1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & a_n \end{vmatrix}\\ &=a_1\begin{vmatrix} a_2 & 1 & & & \\ -1 & a_3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} -1 & 1 & & & \\ & a_3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & -1 & a_n \end{vmatrix}\\ &=a_1(a_2a_3\dots a_n)+(a_3a_4\dots a_n)\end{aligned}$$

记 $S_n=\dfrac{(a_1a_2\dots a_n)}{(a_2a_3\dots a_n)}$，$S_{n-1}=\dfrac{(a_2a_3\dots a_n)}{(a_3a_4\dots a_n)},\dots,S_2=\dfrac{(a_{n-1}a_n)}{a_n}$ ，那么有 $S_n=a_1+\dfrac{1}{S_{n-1}}$ 。后续归纳法可证.

## 9. 求证：若下列行列式中 $a \neq b$，则

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

### 9.解析

典型的 1-行列式计算方法 > 3.1 三对角行列式，显然有 $a_i = a+b, b_i = ab, c_i = 1, \forall 1 \le i \le n, A_1 = a+b, A_2 = a^2+b^2+ab$，那么递推式 $A_n = (a+b)A_{n-1} - abA_n$，后续归纳法可证.

## 10.求 $n\ (n>1)$ 阶行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

### 10.解析

考察 1-行列式#1.4.1 行列式按任意列展开 直接按照第一列展开计算

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$
$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

## 11. 求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

### 11. 解析

典型的 1-行列式计算方法 > 8. 求根法，对角线上 x 元素的最高次数为 n 次且最高次系数为 $a_0$，注意到 $x = a_i, \forall 1 \le i \le n$ 都有行列式值为 0，于是行列式表达式为 $a_0 \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.

### 12.求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

#### 12.解析

典型的 1-行列式计算方法 > 3.3 上下三角行列式，当 $a=0$ 时直接得 $x^n$ ；当 $a\neq -a$ 时代入公式 $|A_n| = \frac{1}{2a}[a\prod_{i=1}^{n}(x+a)+a\prod_{i=1}^{n}(x-a)] = \frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}$.

### 13.设 $|A|$ 是 n 阶行列式， $|A|$ 的第 $(i,j)$ 元素 $a_{ij}=\max\{i,j\}$ ，试求 $|A|$ 的值.

#### 13.解析

写出行列式的表达式并利用 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列等性质直接计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = n\times 1^{n-1}\times(-1)^{n+1} = n\times(-1)^{n+1}.$$

### 14.设 $|A|$ 是 n 阶行列式， $|A|$ 的第 $(i,j)$ 元素 $a_{ij}=|i-j|$ ，试求 $|A|$ 的值.

#### 14.解析

写出行列式的表达式并利用 1-行列式#1.3.8.3 某一列乘倍数后加到另一列等性质直接计算

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & 2n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)\times(-2)^{n-2}\times(n-1) \\ &= (1-n)\times(-2)^{n-2}.\end{aligned}$$

## 15.求下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ 1 & x_3(x_3-a) & x_3^2(x_3-a) & \cdots & x_3^{n-1}(x_3-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \end{vmatrix}$$

### 15.解析

对比 1-行列式计算方法 > 7.2 缺项 Vandermonde 行列式，显然缺一列 $x_i - a$ ，于是补齐

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1-a & x_1(x_1-a) & x_1^2(x_1-a) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-a) \\ 1 & x_2-a & x_2(x_2-a) & x_2^2(x_2-a) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-a) \\ 1 & x_3-a & x_3(x_3-a) & x_3^2(x_3-a) & \cdots & x_3^{n-1}(x_3-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n-a & x_n(x_n-a) & x_n^2(x_n-a) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-a) \\ 1 & y-a & y(y-a) & y^2(y-a) & \cdots & y^{n-1}(y-a) \end{vmatrix} = \left[\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\right]$$

如果 $a=0$ ，研究 y 的一次项系数 $\left[\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\ne i}^{n}x_j\right]$ ；如果 $a\ne 0$ ，研究常数项 $\frac{1}{a}\left[\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-a)\right]$.