

1-行列式计算方法

1. 降阶法

在 1-行列式#1.1.3. N阶行列式 中引入了行列式的递归定义，即将 n 阶行列式通过某一行/某一列展开为 $n-1$ 阶行列式。

1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式

N 阶范德蒙行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

将每一列乘以 $-x_1$ 加到下一列，消去第一行除第一列以外的其他元素

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2^1 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n^1 & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

故可以表示为元素 a_{11} 和其代数余子式之积，并从每一行提取公因式

$$|A| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)x_2^1 & \cdots & (x_2 - x_1)x_2^{n-2} \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)x_3^1 & \cdots & (x_3 - x_1)x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & (x_n - x_1)x_n^1 & \cdots & (x_n - x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^n (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3^1 & \cdots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

如此得到 $n-1$ 阶范德蒙行列式，类似操作可以推出 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

1.2 爪形行列式

N 阶爪形行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

若 $a_i \neq 0, \forall i = 2, 3, \dots, n$ ，则将每一列乘以 $-\frac{c_i}{a_i}$ 加到第一列上，消去第一列除第一行以外的其他元素

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_1 - \frac{c_2 b_2}{a_2} - \dots - \frac{c_n b_n}{a_n} & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= (a_1 - \frac{c_2 b_2}{a_2} - \dots - \frac{c_n b_n}{a_n}) a_2 a_3 \dots a_n \\
&= \prod_{i=1}^n a_i - \sum_{i=2}^n b_i c_i \prod_{j \geq 2, j \neq i}^n a_j
\end{aligned}$$

若 $a_i = 0, i = 2, 3, \dots, n$ ，当多于一个 $a_i = 0$ 时显然原行列式值为 0，亦和上面求出的表达式统一；当仅有一个 $a_i = 0$ 时，按第 i 行展开

$$\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{i+1} c_i \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & \dots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \dots & b_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i+1} c_i (-1)^{i+1} b_i \begin{vmatrix} a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{i+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} \\
&= c_i b_i \prod_{j \geq 2, j \neq i}^n a_j
\end{aligned}$$

同样和上面求出的表达式统一。□

1.3 组合数行列式

元素全部由组合数写成的 n 阶行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \dots & C_{n-1}^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

注意到我们有组合数公式 $C_m^{k-1} + C_m^k = C_{m+1}^k$ ，那么将每一行乘以 -1 加到下一行，消去第一列除第一行以外的其他元素

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^0 & C_2^0 & \cdots & C_{n-1}^0 \\ 0 & C_1^1 & C_2^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \\ C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_{n-1}^1 \\ C_2^2 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^{n-1} & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-3}^{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

对比原行列式，发现正好是右上角元素 a_{1n} 对应的余子式，那么反复利用这一点得到 $|A| = a_{n1} = C_{n-1}^{n-1} = 1$. \square

1.4 对角异常行列式

除对角线元素外每一行都相同的行列式，形如

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

将第一行乘以 -1 加到其余各行，得到爪形行列式

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
 &= (x_1 - a_1)(-a_2)(-a_3)\cdots(-a_n) - \sum_{i=2}^n a_1 x_i \prod_{j \geq 2, j \neq i}^n (-a_j) \\
 &= x_1(-1)^{n-1} \prod_{i=2}^n a_i + (-1)^n \prod_{i=1}^n a_i - (-1)^{n-2} \sum_{i=2}^n x_i \prod_{j \neq i}^n a_j \\
 &= (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n x_i \prod_{j \neq i}^n a_j + (-1)^n \prod_{i=1}^n a_i \\
 &= (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i - a_i \right) \prod_{j \neq i}^n a_j \quad \square
 \end{aligned}$$

1.5 扩充行列式

原 n 阶行列式 $|A| = |a_{ij}|$ ，增补一行一列后得到的新行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & \end{vmatrix}$$

直接按最后一列展开，再按最后一行展开，并用原行列式的代数余子式表示

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+1} x_{in} + |A| \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n+1} x_i \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} y_j M_{ij} \right) + |A| \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j+2n+1} x_i y_j M_{ij} + |A| \\ &= |A| - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j A_{ij} \quad \square \end{aligned}$$

2. 求和法

据 1-行列式#1.3.3. 某一行/列元素乘以常数中证明，对每一行加和相同或每一列加和相同的行列式，可以将每一列或每一行求和并提取公因式，简化计算

2.1 特殊的对角异常行列式

可以看作 1.4 对角异常行列式 中 a_i 值全部相同的特殊情况，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

注意到每一行元素累加和都相同，将每一列加到第一列上可以提出公因式，再利用降阶思想计算

$$\begin{aligned}
|A| &= \left(\sum_{i=1}^n a_i + b \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i + b \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i + b \right) b^{n-1}
\end{aligned}$$

利用一般情况的公式验证

$$|A| = (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i + b \right) (-b)^{n-1} = \left(\sum_{i=1}^n a_i + b \right) b^{n-1} \quad \square$$

2.2 自然数轮换行列式

每一行每一列都由自然数 1-n 的常排列轮换构成，即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注意到每一行之和与每一列之和都相同，将每一列加到第一列上可以提出公因式，再利用降阶思想计算

$$\begin{aligned}
|A| &= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & n-2 & -2 & \cdots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ n-2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ n-3 & n-3 & \cdots & -3 & -3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2-n & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-2 & -n & \cdots & -n & -n \\ n-3 & 0 & \cdots & -n & -n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & -n & -n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \end{vmatrix} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \cdot (-1) \cdot (-n)^{n-2} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{(n+1)n^{n-1}}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

3. 递推法

利用降阶或直接展开，得到行列式与阶数更低的同类行列式之间的递推关系，解此关系得到行列式的表达式

3.1 三对角行列式

除主对角线及两条侧对角线外其余元素均为 0 的行列式，形如

$$|_n| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & c_2 & a_3 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

采用降阶思想按最后一行或最后一列展开，得到通项公式

$$\begin{aligned}
 |n| &= a_n \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-3} & a_{n-2} & b_{n-2} \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} - c_{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-3} & a_{n-2} & 0 \\ & & & c_{n-2} & b_{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= a_n |_{n-1}| - c_{n-1} b_{n-1} |_{n-2}|
 \end{aligned}$$

并注意到 $|_0| = 1, |_1| = a_1$ \square

特别地，令 $a_i = 1, b_{i-1}c_{i-1} = -1$ ，得到 Fibonacci (斐波那契) 数列通项 $|_n| = |_{n-1}| + |_{n-2}|$ 。

3.2 余弦对角行列式

由余弦函数表示的三对角行列式，形如

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos x & 1 & & & \\ 1 & 2 \cos x & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos x & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 2 \cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix}$$

注意到主对线除 a_{11} 元素外形式相同，则拆分第一列元素使其符合 3.1 三对角行列式的形式

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 2 \cos x & 1 & & & \\ 1 & 2 \cos x & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos x & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 2 \cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\cos x & 1 & & & \\ 0 & 2 \cos x & 1 & & \\ & 1 & 2 \cos x & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 2 \cos x & 1 \\ & & & & 1 & 2 \cos x \end{vmatrix} \\
 &= |_n| - \cos x |_{n-1}|
 \end{aligned}$$

其中 $|_n|$ 的参数为 $a_i = 2 \cos x, b_i = c_i = 1$ ，即递推式 $|_n| = 2 \cos x |_{n-1}| - |_{n-2}|$ ，并且 $|_2| = 4 \cos^2 x - 1, |_1| = 2 \cos x$ 。下解此类递推式。

令三元一次递推式为 $|_n| = (\alpha + \beta) |_{n-1}| - \alpha |_{n-2}|$ ，则得到两个相似的方程

$$\begin{cases} |_n| - \alpha |_{n-1}| = (\beta |_{n-1}| - \alpha |_{n-2}|) \\ |_n| - |_{n-1}| = \alpha (|_{n-1}| - |_{n-2}|) \end{cases}$$

分别代表两个等比数列，于是得到二元一次方程组

$$\begin{cases} |_n| - \alpha |_{n-1}| = \alpha^{n-2} (|_2| - \alpha |_1|) \\ |_n| - |_{n-1}| = \alpha^{n-2} (|_2| - |_1|) \end{cases}$$

- 当 $\alpha \neq 1$ 时容易解出

$$\begin{cases} |_n| = \frac{(\alpha^{n-1} - 1) |_2| - \alpha(\alpha^{n-2} - 1) |_1|}{\alpha - 1} \\ |_{n-1}| = \frac{(\alpha^{n-2} - 1) |_2| - \alpha(\alpha^{n-3} - 1) |_1|}{\alpha - 1} \end{cases}$$

并可以看出二者的形式统一。

- 当 $\alpha = 1$ 时方程仅剩 $|n| - \alpha|_{n-1}| = \alpha^{n-2}(|_2| - \alpha|_1|)$
 若 $\alpha \neq 1$ ，解出 $|n| = (n-1)\alpha^{n-2}|_2| - (n-2)\alpha^{n-1}|_1|$ ；
 若 $\alpha = 1$ ，直接累加得到 $|n| = (n-1)(|_2| - |_1|) + |_1|$ 。
 回到原行列式的递推式，注意到此时 $\alpha = \cos x + i \sin x, = \cos x - i \sin x$ ，于是
- 当 $x = 2k$ 时 $\alpha = \cos x = 1$ ，于是
 $|n| = (n-1)(|_2| - |_1|) + |_1| = (n-1)(3-2) + 2 = n+1$ ，则
 $|A| = |n| - \cos x|_{n-1}| = 1 = \cos(nx)$ ；
- 当 $x = (2k+1)$ 时 $\alpha = \cos x = -1$ ，于是
 $|n| = (n-1)(-1)^{n-2} \times 3 - (n-2)(-1)^{n-1} \times (-2) = (n+1) \times (-1)^n$ ，则
 $|A| = |n| - \cos x|_{n-1}| = (n+1) \times (-1)^n + n \times (-1)^{n-1} = (-1)^n = \cos(nx)$ ；
- 当 $x \neq 1$ 时， $\sin x \neq 0$ 故 $\alpha \neq 1$ ，那么写成 $\alpha = e^{ix}, = e^{-ix}$ 代入方程的解算出
 $|n| = \frac{(\alpha^{n-1} - \alpha^{n-1})|_2| - \alpha(\alpha^{n-2} - \alpha^{n-2})|_1|}{\alpha - 1} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}$ ，于是
 $|A| = |n| - \cos x|_{n-1}| = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} - \frac{\cos x \sin nx}{\sin x} = \cos nx$. \square

3.3 上下三角行列式

对角线元素将行列式分为上下两个三角区域，形如

$$|A_n| = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ & x_2 & y & \cdots & y & y \\ & & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & x_{n-1} & y \\ & & & \cdots & & x_n \end{vmatrix}$$

将最后一行或最后一列拆开以便降阶，即

$$\begin{aligned} |A_n| &= \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ & x_2 & y & \cdots & y & y \\ & & x_3 & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & x_{n-1} & y \\ & & & \cdots & & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0 \\ & x_2 & y & \cdots & y & 0 \\ & & x_3 & \cdots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ & & & \cdots & & x_n - y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_1 - y & y - y & y - y & \cdots & y - y & 0 \\ 0 & x_2 - y & y - y & \cdots & y - y & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - y & \cdots & y - y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} - y & 0 \\ & & & \cdots & & y \end{vmatrix} + (x_n - y) |A_{n-1}| \\ &= y \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - y) + (x_n - y) |A_{n-1}| \end{aligned}$$

而转置后可知 y , 地位相同, 同样操作得到 $|A_n| = \prod_{i=1}^{n-1} (x_i - y) + (x_n - y) |A_{n-1}|$, 并且我们有 $|A_1| = x_1$ 。仿照 3.2 余弦行列式的讨论

- 当 $y =$ 时, 有 $\frac{|A_n|}{\prod_{i=1}^n (x_i - y)} - \frac{|A_{n-1}|}{\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - y)} = \frac{y}{x_n - y}$, 累加得到

$$\frac{|A_n|}{\prod_{i=1}^n (x_i - y)} = y \sum_{i=2}^n \frac{1}{(x_i - y)} + \frac{x_1}{x_1 - y} = y \sum_{i=1}^n \frac{1}{(x_i - y)} + 1$$
, 也就是

$$|A_n| = \prod_{i=1}^n (x_i - y) + y \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} (x_j - y);$$
- 当 $y \neq$ 时, 解二元一次方程组有 $|A_n| = \frac{1}{y -} [y \prod_{i=1}^n (x_i -) - \prod_{i=1}^n (x_j - y)]$. \square

3.4 Cauchy (柯西)行列式

全部由分式构成的行列式, 形如

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$$

将最后一列乘以 -1 加到前面每一列上并通分, 则可以提取公因式, 再对最后一列重复, 得到递推式

$$\begin{aligned}
|A_n| &= \begin{vmatrix} \frac{b_n - b_1}{(a_1 + b_1)(a_1 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_1 + b_2)(a_1 + b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1 + b_n} \\ \frac{b_n - b_1}{(a_2 + b_1)(a_2 + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_2 + b_2)(a_2 + b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{b_n - b_1}{(a_n + b_1)(a_n + b_n)} & \frac{b_n - b_2}{(a_n + b_2)(a_n + b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_n + b_n} \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 + b_1} & \frac{1}{a_1 + b_2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2 + b_1} & \frac{1}{a_2 + b_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{a_n - a_1}{(a_1 + b_1)(a_n + b_1)} & \frac{a_n - a_2}{(a_1 + b_2)(a_n + b_2)} & \cdots & 0 \\ \frac{a_n - a_1}{(a_2 + b_1)(a_n + b_1)} & \frac{a_n - a_2}{(a_2 + b_2)(a_n + b_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n + b_1} & \frac{1}{a_n + b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (b_n - b_i)(a_n - a_i)}{\prod_{j=1}^n (a_j + b_n)(a_n + b_j)} |A_{n-1}|
\end{aligned}$$

连乘得到 $|A_n| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)(a_j - a_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$. \square

4. 数学归纳法

与递推法类似，在知道行列式表达式的情况下，利用更低次数的行列式值与递推关系证明其正确性

4.1 行列式的导数

设 $f_{ij}(t)$ 都是可微函数，有行列式 $F(t) = |f_{ij}(t)|$ ，求证 $\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^n F_i(t)$ ，其中

$$F_i(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{1i}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{2i}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{ni}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

下用归纳法证

- 当 $n = 1$ 时，有 $\frac{d}{dt} F(t) = \frac{d}{dt} |f_{11}(t)| = \frac{d}{dt} f_{11}(t) = \left| \frac{d}{dt} f_{11}(t) \right| = \sum_{i=1}^1 F_i(t)$ 成立；

- 假设对 $n-1$ 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，按第一列展开，即

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}F(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n [(-1)^{i+1} f_{i1}(t) M_{i1}] \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{d}{dt} [f_{i1}(t) M_{i1}] \\
 &= \sum_{i=1}^n [(-1)^{i+1} M_{i1} \frac{d}{dt} f_{i1}(t) + (-1)^{i+1} f_{i1}(t) \frac{d}{dt} M_{i1}] \\
 &= F_1(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [f_{i1}(t) \frac{d}{dt} A_{i1}] \\
 &= F_1(t) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} [f_{i1}(t) \sum_{j=2}^n P_j(t)] \\
 &= F_1(t) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_{i1}(t) P_j(t) \\
 &= F_1(t) + \sum_{j=2}^n F_j(t) = \sum_{j=1}^n F_j(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

4.2 三对角加和行列式

一种特殊的三对角行列式，形如

$$|A_n| = \begin{vmatrix}
 a_0 + a_1 & a_1 & & & & \\
 a_1 & a_1 + a_2 & a_2 & & & \\
 & a_2 & a_2 + a_3 & a_3 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-1} & a_{n-1} \\
 & & & & a_{n-1} & a_{n-1} + a_n
 \end{vmatrix}$$

求证 $|A_n| = \prod_{i=0}^n a_i \times \sum_{j=0}^n \frac{1}{a_j}$

据 3.1 三对角行列式容易得出 $|A_n| = (a_{n-1} + a_n) |A_{n-1}| - a_{n-1}^2 |A_{n-2}|$ ，下用归纳法证

- 当 $n = 1, 2$ 时，有 $|A_1| = a_0 + a_1, |A_2| = a_0 a_1 + a_0 a_2 + a_1 a_2$ 成立；
- 假设对 $n-1$ 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，计算

$$\begin{aligned}
|A_n| &= (a_{n-1} + a_n) |A_{n-1}| - a_{n-1}^2 |A_{n-2}| \\
&= (a_{n-1} + a_n) \prod_{i=0}^{n-1} a_i \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} - a_{n-1}^2 \prod_{i=0}^{n-2} a_i \times \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{a_j} \\
&= a_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} a_i \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} + \prod_{i=0}^n a_i \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} - a_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} a_i \times \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{a_j} \\
&= a_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} a_i \times \frac{1}{a_{n-1}} + \prod_{i=0}^n a_i \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} \\
&= \prod_{i=0}^n a_i \times \frac{1}{a_n} + \prod_{i=0}^n a_i \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{a_j} \\
&= \prod_{i=0}^n a_i \times \sum_{j=0}^n \frac{1}{a_j}. \quad \square
\end{aligned}$$

4.3 绝对值全一行列式

设 $n > 2$ 阶行列式 $|A|$ 中所有元素的绝对值都为 1，求证 $|A|$ 的绝对值小于 $\frac{2}{3}n!$

下用归纳法证

- 当 $n = 3$ 时，若第一列有元素为 -1，则将其行乘以 -1，此时第一列元素全为 1 且行列式值不变，同样可以将第二、三列第一行元素变为 -1，再将第一列加到第二、三列，得到的行列式形如

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{vmatrix}$$

其中右下角元素 a, b, c, d 只能为 0 或 2，那么 $abs(|A|) = abs(ad - bc) \leq 4 = \frac{2}{3} \times 3!$ 成立

- 假设对 $n-1$ 阶行列式成立，考虑 n 阶行列式，将其按第一列展开，有

$$abs(|A|) = abs(\sum_{i=1}^n a_{i1} A_{i1}) \leq n \times \frac{2}{3}(n-1)! = \frac{2}{3}n!. \quad \square$$

5. 拆分法

在 1-行列式 #1.3 行列式的性质中证明过，可以将一行或一列拆开为多个行列式分别求值

5.1 同等增量行列式

设参数 t ，行列式形如

$$|A(t)| = \begin{vmatrix} a_{11} + t & a_{12} + t & \cdots & a_{1n} + t \\ a_{21} + t & a_{22} + t & \cdots & a_{2n} + t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + t & a_{n2} + t & \cdots & a_{nn} + t \end{vmatrix}$$

求证 $|A(t)| = |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij}$ ，其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 在行列式 $|A(0)|$ 中的代数余子式
不断将每一行拆开并将拆出的行列式化简展开，即

$$\begin{aligned}
|A(t)| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t \\ t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & t & \cdots & a_{1n}+t \\ a_{21} & t & \cdots & a_{2n}+t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & t & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix} + t \sum_{i=1}^n A_{i1} \\
&= \cdots \\
&= |A(0)| + t \sum_{i,j=1}^n A_{ij}. \quad \square
\end{aligned}$$

推论：若每一列的增量各自相同，分别为 $t_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，则更一般的结论 $|A(t_1, t_2, \dots, t_n)| = |A(0, 0, \dots, 0)| + \sum_{i=1}^n (t_i \sum_{j=1}^n A_{ij})$ 。

5.2 多项式行列式

设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ 都是次数不超过 $n-2$ 的多项式，求证对于任意 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 都有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

每个 $f_k(x)$ 都是 x^0, x^1, \dots, x^{n-2} 的线性组合，按每一列拆分开得到若干个次数相同的 n 阶行列式，那么至少有两列是同次的单项式，故所有行列式为 0。□

6. Vandermonde (范德蒙)行列式-模板法

将行列式化为与在 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式中已求出的 Vandermonde 行列式类似的次数递进行列式，套用公式

6.1 n 余弦行列式

由余弦函数表示的满行列式，形如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

将 De Moivre 公式利用二项式展开得

$\cos k\theta + i \sin k\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^k = \sum_{j=0}^k C_k^j (\cos \theta)^j (i \sin \theta)^{k-j}$ ，并将偶次项中的 $\sin^2 \theta$ 替换为 $1 - \cos^2 \theta$ ，得到 $\cos \theta$ 的 k 次多项式，首项系数为 $C_k^0 + C_k^2 + C_k^4 + \cdots = 2^{k-1}$ 。

每一列都是比后一列低一次的多项式，利用第一列将后面所有列的常数项消去、第二列将后面所有项的一次式消去...得到一个带系数的 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式，即

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2^0 \cos \theta_1 & 2^1 \cos^2 \theta_1 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & 2^0 \cos \theta_2 & 2^1 \cos^2 \theta_2 & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^0 \cos \theta_n & 2^1 \cos^2 \theta_n & \cdots & 2^{n-2} \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} \\
&= 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos^2 \theta_1 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos^2 \theta_2 & \cdots & \cos^{n-1} \theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos^2 \theta_n & \cdots & \cos^{n-1} \theta_n \end{vmatrix} \\
&= 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \quad \square
\end{aligned}$$

6.2 n 正弦行列式

由正弦函数表示的满行列式，形式上与 6.1 n 余弦行列式相同，即

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & \sin 2\theta_1 & \cdots & \sin n\theta_1 \\ \sin \theta_2 & \sin 2\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & \sin 2\theta_n & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix}$$

可以用相同的方法解，也可以利用和差化积公式 $\sin k\theta - \sin(k-2)\theta = 2 \sin \theta \cos(n-1)\theta$ ，即将第 k 列乘以-1 加到第 k+2 列上，提取公因式并利用已有结果

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \sin \theta_1 & 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 & \cdots & 2 \sin \theta_1 \cos(n-1)\theta_1 \\ \sin \theta_2 & 2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 & \cdots & 2 \sin \theta_2 \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin \theta_n & 2 \sin \theta_n \cos \theta_n & \cdots & 2 \sin \theta_n \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \times 2^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} \\
&= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n \sin \theta_i \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\cos \theta_j - \cos \theta_i). \quad \square
\end{aligned}$$

7. 升阶法

与已知行列式相似但缺少某一列或某一行，可以将其添补；也可以用的新的行或列消去难以计算的部分，只需注意不要改变行列式的值

7.1 同等增量Vandermonde 行列式

表示为全 1 矩阵与 Vandermonde 矩阵相加对应行列式，即

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & 1+x_n^3 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

符合 5.1 同等增量行列式 的形式，但代数余子式难以计算，故采用升阶法消去其增量，得到 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式，即

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1^1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2^1 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1+x_n^1 & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2+(-1) & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \\ &= 2 \prod_{i=1}^n x_i \times \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k) + (-1) \prod_{i=1}^n (x_n - 1) \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k) \\ &= [2 \prod_{i=1}^n x_i - \prod_{i=1}^n (x_n - 1)] \times \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k). \quad \square \end{aligned}$$

7.2 缺项 Vandermonde 行列式

类似 Vandermonde 的 N 阶行列式但缺少 i 次列

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

通过补齐一行一列使其具有 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式 的形式，即

$$\begin{aligned}
|B| &= (-1)^{i+n} |A| y^i \\
&= \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{i-1} & x_1^i & x_1^{i+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{i-1} & x_2^i & x_2^{i+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{i-1} & x_n^i & x_n^{i+1} & \cdots & x_n^n \\ 1 & y^1 & y^2 & \cdots & y^{i-1} & y^i & y^{i+1} & \cdots & y^n \end{vmatrix} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \prod_{k=1}^n (y - x_k)
\end{aligned}$$

求原行列式 $|A|$ 的值，即求上述表达式中 y^i 次的系数，那么

$$\begin{aligned}
|A| &= (-1)^{n+i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_{n-i} \leq n} (-x_{p_1})(-x_{p_2}) \cdots (-x_{p_{n-i}}) \\
&= (-1)^{n+i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times (-1)^{n-i} \times \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_{n-i} \leq n} x_{p_1} x_{p_2} \cdots x_{p_{n-i}} \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \sum_{1 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_{n-i} \leq n} x_{p_1} x_{p_2} \cdots x_{p_{n-i}}. \quad \square
\end{aligned}$$

7.3 对角线全 0 对称行列式

行列式对角线全为 0，其余元素可以表示为行指标对应元素 a_i 和列指标对应 a_j 的和，即

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, a_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$$

用新的一行消去其中一个加数

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n-1} + a_1 & a_{n-1} + a_2 & a_{n-1} + a_3 & \cdots & a_{n-1} + a_n \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 1 & -a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & -a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ 1 & a_n & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

然而变化之后的行列式仍然难以计算，遂用新的一列继续消去

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} \\ -a_n & 1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_n & 1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

实际上这是一个分块爪形行列式，用右下角 $n \times n$ 的对角线消去左侧两列或者上侧两行，得到

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} \times n & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & 1 - \frac{1}{2} \times n & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2} \times n & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i & 1 - \frac{1}{2} \times n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix} \\
&= \left[\left(1 - \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) \right] \times \prod_{i=1}^n (-2a_i) \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[(2-n)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j}\right) \right]. \quad \square
\end{aligned}$$

8. 求根法

设 n 阶行列式的元素 $a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 都是关于 m 个未定元的多项式，则 $|A|$ 是一个多元多项式。若将 x_1 看为主未定元，则可以写成

$$|A| = c_0(x_2, x_3, \dots, x_m)x_1^d + c_1(x_2, x_3, \dots, x_m)x_1^{d-1} + \cdots + c_d(x_2, x_3, \dots, x_m)x_1^0$$

其中首项系数不为 0，最高次数 $d \geq 1$ 。假设存在互异的多项式

$g_1(x_2, x_3, \dots, x_m), g_2(x_2, x_3, \dots, x_m), \dots, g_d(x_2, x_3, \dots, x_m)$ 使得当

$x_1 = g_i(x_2, x_3, \dots, x_m) (1 \leq i \leq d)$ 时总有 $|A| = 0$ ，那么可以写成

$$|A| = c_0(x_2, x_3, \dots, x_m)[x_1 - g_1(x_2, x_3, \dots, x_m)][x_1 - g_2(x_2, x_3, \dots, x_m)] \cdots [x_1 - g_d(x_2, x_3, \dots, x_m)]$$

8.1 另法解 Vandermonde 行列式

在 1.1 Vandermonde (范德蒙) 行列式中介绍了 Vandermonde 行列式形如

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

在此将 x_n 看为主未定元, 那么最高次数 $d = n - 1$, 首项系数就是元素 $a_{nn} = x_n^{n-1}$ 对应的代数余子式 $A_{nn} = a_{n-1}$ 。当 $x_n = x_i, \forall 1 \leq i \leq n - 1$ 时, 行列式有两个相同的行, 故行列式值为 0, 也就是表达式中含有 $\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$ 这个 $n-1$ 次式。显然 $|A| = a_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i)$, 不断对系数做此讨论, 得到结论 $|A| = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. \square

8.2 另法解多项式行列式

在 5.2 多项式行列式中引入了次数不超过 $n-2$ 的多项式组成的 n 阶行列式, 求证对于任意 n 个数 a_1, a_2, \dots, a_n 都有

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_n(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

在此构造新的行列式

$$g(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_n(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(a_n) & f_2(a_n) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

若 a_2, a_3, \dots, a_n 中有相同的数, 那么立刻得到 $g(x) = 0$; 若 a_2, a_3, \dots, a_n 互异, 注意到 $x = a_i, \forall 2 \leq i \leq n$ 时行列式有两行相同, 故行列式值为 0, 也即这 $n-1$ 个 a_i 是多项式的根。然而 $g(x)$ 与 $f_i(x)$ 一样, 都是不超过 $n-2$ 次的多项式, 设 $g(x) = b_0 + b_1x^1 + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2}$, 那么对于方程组

$$\begin{cases} y_0 + a_2^1 y_1 + \cdots + a_2^{n-2} y_{n-2} = 0 \\ y_0 + a_3^1 y_1 + \cdots + a_3^{n-2} y_{n-2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ y_0 + a_n^1 y_1 + \cdots + a_n^{n-2} y_{n-2} = 0 \end{cases}$$

显然 $y_0 = b_0, y_1 = b_1, \dots, y_{n-2} = b_{n-2}$ 是方程组的解, 且系数行列式是一个不为 0 的 Vandermonde 行列式。依据 Cramer 法则得知, 方程组只有零解, 也就是 $g(x)$ 是零多项式。 \square

后半部分推广可知, 有 m 个互不相同的根的 n 次多项式如果满足 $n < m$ 则此多项式恒为 0。

8.3 另法解 Cauchy 行列式

在 3.4 Cauchy (柯西)行列式中引入了分数组成的 Cauchy 行列式，形如

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

将分母全部提出，得到

$$|A_n| = \prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)^{-1} |B_n| = \prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\prod_{k=1}^n (a_1 + b_k)}{a_1 + b_1} & \frac{\prod_{k=1}^n (a_1 + b_k)}{a_1 + b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^n (a_1 + b_k)}{a_1 + b_n} \\ \frac{\prod_{k=1}^n (a_2 + b_k)}{a_2 + b_1} & \frac{\prod_{k=1}^n (a_2 + b_k)}{a_2 + b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^n (a_2 + b_k)}{a_2 + b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k)}{a_n + b_1} & \frac{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k)}{a_n + b_2} & \cdots & \frac{\prod_{k=1}^n (a_n + b_k)}{a_n + b_n} \end{vmatrix}$$

观察 $|B_n|$ 的结构，发现如果 $1 \leq i \neq j \leq n, a_i = a_j$ 或 $b_i = b_j$ ，则有两行或两列相等，行列式值为 0。而每个 a_i, b_i 在展开式中的最高次数都是 $n-1$ ，因此

$$|B_n| = k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

为确定 k 的值，令 $a_i + b_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$ ，注意到除对角线上元素都为 0，此时

$$|B_n| = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (a_i + b_j) = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

也就是 $k=1$ ，故 $|A_n| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)(a_j - a_i)}{\prod_{i,j=1}^n (a_i + b_j)}$. \square

9. 组合定义法

在 1-行列式#1.7.4 行列式的组合定义中介绍过，行列式的组合定义表示为

$$|A| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}, \text{ 与递归定义等价}$$

9.1 另法解行列式的导数

在 4.1 行列式的导数中给出了可微函数 $f_{ij}(t)$ 组成的行列式 $F(t) = |f_{ij}(t)|$ ，求证

$$\frac{d}{dt} F(t) = \sum_{i=1}^n F_i(t), \text{ 其中}$$

$$F_i(t) = \begin{vmatrix} f_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{1i}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{2i}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} f_{ni}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

利用组合定义改写 $|F(t)| = \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t)$ ，计算

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t) \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \frac{d}{dt} [f_{k_1 1}(t) f_{k_2 2}(t) \cdots f_{k_n n}(t)] \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \left[\sum_{i=1}^n f'_{k_i 1}(t) \left(\prod_{j \neq i}^n f_{k_j 1}(t) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n f'_{k_i 1}(t) \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \prod_{j \neq i}^n f_{k_j 1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n F_i(t). \quad \square \end{aligned}$$

9.2 复矩阵的共轭

设 n 阶复矩阵 $A = (a_{ij})$ ，求证 $|\overline{A}| = \overline{|A|}$

利用组合定义计算

$$\begin{aligned} |\overline{A}| &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \overline{a_{k_1 1}} \overline{a_{k_2 2}} \cdots \overline{a_{k_n n}} \\ &= \sum_{(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n} (-1)^{N(k_1, k_2, \dots, k_n)} \overline{a_{k_1 1}} \overline{a_{k_2 2}} \cdots \overline{a_{k_n n}} \\ &= \overline{|A|}. \quad \square \end{aligned}$$

9.3 奇数阶反对称行列式

若行列式 $|A|$ 的元素满足 $a_{ij} = -a_{ji}, \forall 1 \leq i, j \leq n$ 则称为反对称行列式。求证奇数阶反对称行列式的值为 0

注意到行列式主对角线元素全部为 0，则组合定义只需要考虑

$T = \{a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n} \mid k_i \neq i, \forall 1 \leq i \leq n\}$ 。设一个映射

$\varphi: T \rightarrow T, a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n} \mapsto a_{1, k_1}, a_{2, k_2}, \dots, a_{n, k_n}$ ，注意到 $\varphi^2 = \text{Id}_T$ ，也就是 φ 是一个双射。

如果 $a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n}$ 和 $a_{1, k_1}, a_{2, k_2}, \dots, a_{n, k_n}$ 是相同的项，由于定义中有 $k_i \neq i$ ，那么一定能找到多对 (i_p, j_p) 使元素呈现 $a_{i_1, j_1} a_{j_1, i_1} \cdots a_{i_p, j_p} a_{j_p, i_p}$ ，但行列式阶数为奇数，出现矛盾。那么 $a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n}$ 和 $a_{1, k_1}, a_{2, k_2}, \dots, a_{n, k_n}$ 一定是互异的项，将其看成一组，有

$$a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n} = (-1)^n a_{1, k_1}, a_{2, k_2}, \dots, a_{n, k_n} = -a_{1, k_1}, a_{2, k_2}, \dots, a_{n, k_n}$$

也即加和为 0，故行列式拆开的每一组都为 0，行列式值为 0. \square

10. Laplace (拉普拉斯) 定理法

对于 n 阶行列式 $|A|$ ，在其中任取 k 行（列），那么含于这 k 行（列）中的所有 k 阶子式与对应 $n-k$ 阶代数余子式的乘积之和即 $|A|$ 。在 1-行列式, 1.8 Laplace (拉普拉斯)定理 中证明。

10.1 双对角线行列式

仅有主对角线和反对角线上元素不为 0 的 $2n$ 阶行列式，形如

$$|A_{2n}| = \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a \\ b & & & & & \end{vmatrix}$$

取第一行和最后一行，观察到仅有第一列和最后一列构成的 2 阶子式不为 0，也就是

$$\begin{aligned} |A_{2n}| &= \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & b & a & \\ & & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \\ &= (a^2 - b^2) |A_{2n-2}| \\ &= \dots \\ &= (a^2 - b^2)^n. \quad \square \end{aligned}$$

10.2 矩阵和的行列式

设两个 n 阶方阵 A, B ，求证

$$|A + B| = |A| + |B| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \hat{B} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \right)$$

用列向量表示 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ，故

$|A + B| = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ ，并按照每一列将拆开得到 2^n 个不同的行列式。其中含有一个 $|A|$ 和一个 $|B|$ ，其余 $2^n - 2$ 个行列式按含有 α 的 k 个列拆开。□

10.3 另法解对角线全 0 对称行列式

在 7.3 对角线全 0 对称行列式中引入了对角线全为 0，其余元素可以表示为行指标对应元素 a_i 和列指标对应 a_j 的和的行列式，即

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, a_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n$$

观察对角线本应该是 $a_i + a_i$ 的形式，故将其拆开分别计算

$$|A| = |B| + |C| = \begin{vmatrix} a_1 + a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & a_n + a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}$$

观察 $|B|$ ，可以将其按第一列拆开，并消去后面列，即

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & a_n + a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_1 & a_2 + a_2 & a_2 + a_3 & \cdots & a_2 + a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_n + a_2 & a_n + a_3 & \cdots & a_n + a_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

对 $|B|$ 及其子式，注意到 1 阶时值为 $2a_1$ ，2 阶时值为 $-(a_2 - a_2)^2$ ，3 阶及以上时必有至少两列成比例故值为 0；对 $|C|$ 的子式，需要取到同样的行列排布才非 0。

据 [10.2 矩阵和的行列式](#) 的公式计算

$$\begin{aligned}
|A| &= |B| + |C| + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n}} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} \right) \\
&= |C| + \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} B \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} + \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq n}} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ j_1 & j_2 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n (-2a_i) + \sum_{1 \leq i \leq n} B \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \hat{C} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} \\
&= \prod_{i=1}^n (-2a_i) + \sum_{1 \leq i \leq n} \left[2a_i \prod_{j \neq i}^n (-2a_j) \right] + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left[-(a_{i_2} - a_{i_1})^2 \prod_{j \neq i_1, i_2}^n (-2a_j) \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^n a_i - (-2)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left[(a_{i_2}^2 + a_{i_1}^2 - 2a_{i_1}a_{i_2}) \prod_{j \neq i_1, i_2}^n a_j \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^n a_i - (-2)^{n-2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \left[\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}} + \frac{a_{i_2}}{a_{i_1}} - 2 \right) \prod_{j=1}^n a_j \right] \\
&= (-2)^n \prod_{i=1}^n a_i - n(-2)^n \prod_{i=1}^n a_i + (-2)^{n-2} n(n-1) \prod_{i=1}^n a_i - (-2)^{n-2} \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[4 - 4n + n(n-1) + n - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right] \\
&= (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^n a_i \left[(n-2)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \right]. \quad \square
\end{aligned}$$