0.课程信息

课程大纲

见教学进度

考试时间及分数占比

期中大概 10.29 期末已定 01.07
平时成绩15%，期中考试35%，期末考试50%

教材及参考

《数学分析》（第三册）（伍胜健编著，北京大学出版社）90%及以上重合度
1、《数学分析习题课讲义》（下册）（谢惠民等编著）
2、V. A. Zorich, Mathematical Analysis II

Office hour

随时，智华楼 327

习题课

双周四 10-11
理教 204 沙熠；一教 204 朱海鑫；一教 203 邓杰

13.多元函数的极限与连续

13.1. 欧式空间 $\mathbb{R}^d$

13.1.1. 欧式空间

13.1.1.1. 欧式空间 $\mathbb{R}^d$

记 $\mathbb{R}^d=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\mathbb{R}\times\mathbb{R}}_{d\text{个}\mathbb{R}}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d)\mid x_i\in\mathbb{R},\forall 1\le i\le d)\}$ 为 d 维的欧式空间，其中 x_i 是 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量

13.1.1.2. 向量基本运算

对两个向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d),\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_d)$ ，定义

- 加法： $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_d+y_d)\in\mathbb{R}^d$
- 数乘：取 $\alpha\in\mathbb{R}$ 则有 $\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_d)\in\mathbb{R}^d$
  这两个线性运算显然对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^d,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 满足四条性质：
- 加法的交换律： $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
- 加法的结合律： $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
- 数乘两边的分配律： $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ 和 $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$
- 加法零元和数乘幺元： $\exists\mathbf{0}=(0,0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^d,\text{s.t. }\mathbf{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ 和 $\exists 1\in\mathbb{R},\text{s.t. }1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$
  上述四条性质使这个空间成为一个向量空间，简称空间。实际上标准的线性/向量空间还有四条性质：加法封闭、数乘封闭、存在加法逆元、数乘对数的结合律，在这个空间中显然。

13.1.1.3. 向量内积

13.1.1.3.1. 向量内积

定义两个向量的内积： $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d \in \mathbb{R}$.
如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ 但是 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ 则称 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 两个向量正交。

13.1.1.3.2. 向量内积的性质

- 正定性： $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \geq 0$ 且 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
- 对称性： $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$
- 线形性：取 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 一定有 $(\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \beta \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$
  向量内积的定义使其成为 Euclid 欧几里得空间，简称欧式空间。

13.1.1.3.3. Cauchy-Schwarz 不等式

对向量的内积有 $|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| \, |\boldsymbol{y}|$ ，下证
两边平方即 $\sum_{i=1}^{d} (x_i y_i)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{d} y_i^2 \right)$ ，也就是 Schwarz 不等式在 $\mathbb{R}$ 上的形式

13.1.1.4 范数

13.1.1.4.1. 内积诱导欧几里得范数

内积空间自动成为赋范空间，自然定义一个向量的模/欧几里得范数为 $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \in \mathbb{R}$

满足范数的三大性质，因此是良定义的

- 正定性： $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ 且 $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ，由内积的正定性保证
- 齐次性：取 $\alpha \in \mathbb{R}$ 一定有 $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$ ，由内积的对称性和线性性保证，即
  $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = \sqrt{\alpha \boldsymbol{x} \cdot \alpha \boldsymbol{x}} = \sqrt{\alpha^2 \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = |\alpha| \, \|\boldsymbol{x}\|$
- 三角不等式： $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ ，由内积的Cauchy-Schwarz 不等式保证，即

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2 \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2$$

13.1.1.4.2. 范数诱导内积

范数如果想要导出内积，则必须满足平行四边形法则，即 $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)$
首先，内积诱导的 2-范数/欧几里得范数可以验证满足平行四边形法则

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
&= \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \\
&= 2\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y} \\
&= 2(\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2)
\end{aligned}$$

其次，满足平行四边形法则的范数，可以定义对应的内积为极化恒等式 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2)$
，并且可以验证这个内积诱导的范数就是原来的范数，此处略。

13.1.1.5. 非零向量的夹角

内积和范数共同导出（实际是内积空间直接导出）非零向量的夹角，定义为 $\cos\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\|} \in \mathbb{R}$ ，并且其取值范围 $[0, \pi]$ 。零向量和其他向量的夹角视为未定义或者无意义的。

13.1.1.6. 向量的欧几里得距离

利用欧式范数导出两个向量的欧式距离，定义为 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|\in\mathbb{R}$ ，因此继承范数的性质

- 正定性： $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$ 且 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$
- 对称性： $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathrm{d}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
- 三角不等式： $\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\mathrm{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

13.1.1.7. 向量的切比雪夫距离

13.1.1.7.1. 最大范数/无穷范数

对 d 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_d)$ 定义其最大范数为 $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_d|\}$ ，实际上也是 L^p 范数族 $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(x_1^p+x_2^p+\cdots+x_d^p\right)^{1/p}$ 在 $p=+\infty$ 时的值，所以又称无穷范数。

13.1.1.7.2. 向量的切比雪夫距离

利用最大范数导出向量的切比雪夫距离，定义为 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\max\{|x_i-y_i|,\forall 1\leq i\leq d\}$ ，同样继承范数的性质

- 正定性： $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geq 0$ 且 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$
- 对称性： $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$
- 三角不等式： $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leq\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\rho(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$

13.1.2. 实矩阵空间 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

13.1.2.1. 同构于 $\mathbb{R}^{m\times n}$

将 $A_{m\times n}=(a_{ij})$ 的 m 行依次连接成一个长的向量 $(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{m1},\ldots,a_{mn})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ，称为矩阵的向量化。
记 $\phi:M_{m\times n}(\mathbb{R})\mapsto\mathbb{R}^{m\times n}$ 为向量化映射，验证其双射性、线性性，即成为一个矩阵空间到欧式空间的同构映射，记 $M_{m\times n}(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{m\times n}$.

13.1.2.2. 矩阵的 Frobenius 范数

矩阵的 Frobenius 阵见 2-矩阵应用 > 1.5. 多项式友阵和 Frobenius 块，虽然除了是同一个数学家定义的以外并没有什么关系
利用同构性将欧式空间的欧式范数推广到矩阵空间，定义矩阵的 **Frobenius 范数**为 $\|A_{m\times n}\|=\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{ij}^2}=\sqrt{\mathrm{tr}(A^*A)}$ ，与此同时有矩阵的 **Frobenius 内积**为 $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(A^*B)$ 。
可以验证其矩阵的 Frobenius 范数满足范数的基础性质

- 正定性： $\|A_{m\times n}\|\geq 0$ 且 $\|A_{m\times n}\|=0\Leftrightarrow A_{m\times n}=O_{m\times n}$
- 齐次性： 取 $a\in\mathbb{R}$ 一定有 $\|aA_{m\times n}\|=|a|\,\|A_{m\times n}\|$
- 三角不等式： $\|A_{m\times n}+B_{m\times n}\|\leq\|A_{m\times n}\|+\|B_{m\times n}\|$

设向量 $\boldsymbol{x}\in R^{1\times m}$ 可以验证 $\|\boldsymbol{x}A\|\leq\|\boldsymbol{x}\|\,\|A\|$ ，注意这两个范数的定义空间不同，此处仅用相同的符号表示，下证

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}A\|^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j a_{ij}\right)^2 \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2\right) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \|A\|^2
\end{aligned}
$$

13.1.2.3. 矩阵的其他范数

一般要求矩阵的范数定义满足 $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$

例如对方阵还可以通过矩阵的一般范数诱导出算子范数 $\|A_{n\times n}\| = \sup \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|$ ，也就是在单位球面上找向量使方阵被拉伸最大，可以看作一个 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的映射，将单位球映射为椭球而 $\|A\|$ 是椭球的长轴

13.1.3. 点列的极限

13.1.3.1. 点列的极限

设 $\{\boldsymbol{x}_n\} \in \mathbb{R}^d, n \ge 1$ 是 d 维欧式空间的一列点，取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$

如果有 $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{\alpha}\| = 0$ ，则称点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛于点 $\boldsymbol{\alpha}$ ，记作 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{\alpha}$ 或 $\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{\alpha} \quad (n \to \infty)$ 。

13.1.3.2. 邻域

13.1.3.2.1. 球形邻域

用 13.1.1.6. 向量的欧几里得距离 定义

设 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d, \delta > 0 \in \mathbb{R}$ ，记 $U(\boldsymbol{a},\delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \delta\}$ 为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、 δ 为半径的开邻域，称 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域。

而记 $U_\circ(\boldsymbol{a},\delta) = U(\boldsymbol{a},\delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 为以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、 δ 为半径的去心邻域，称 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 去心邻域。

13.1.3.2.2. 方形邻域

用 13.1.1.7.2. 向量的切比雪夫距离 定义

记 $N(\boldsymbol{a},\delta) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \mid \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \delta\}$ ，当 d=2 时是以 $\boldsymbol{a}$ 为中心、 δ 为半边长的正方形，称 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 方形邻域。

而记 $N_\circ(\boldsymbol{a},\delta) = N(\boldsymbol{a},\delta) \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 为以为中心、 δ 为半径的去心方形邻域，称 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 方形去心邻域。

和欧式距离有不等式 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \le \sqrt{d}\,\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ，也就是 $\dfrac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|}{\sqrt{d}} \le \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$

13.1.3.3. 分量极限定理

设 $\{\boldsymbol{x}_n\} \in \mathbb{R}^d, n \ge 1$ 是 d 维欧式空间的一列点 $\boldsymbol{x}_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_d^n)$ ，取 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^d$ ，则 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow \forall 1 \le i \le d, \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_i^n = \boldsymbol{a}_i$ ，下证

- 必要性：由 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a}$ 得到 $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ ，而有 $0 \le \mid \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{a}_i \mid \le \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\|$ ，夹逼得到 $\lim_{n\to\infty} \mid \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{a}_i \mid = 0$ ，也就是 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_i^n = \boldsymbol{a}_i$ ；
- 充分性：由 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_i^n = \boldsymbol{a}_i$ 得到 $\lim_{n\to\infty} \mid \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{a}_i \mid = 0$ ，而有 $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| \le \sum_{1\le i\le d} \mid \boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{a}_i \mid$ ，有限夹逼得到 $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| = 0$ ，也就是 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x_n} = \boldsymbol{a}$.

13.1.3.4.点列有界

设集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ ，如果 $\exists R > 0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \boldsymbol{x} \in E, \|\boldsymbol{x}\| < R$ ，也就是 $E \subset U(\boldsymbol{0}, R)$ ，则称 E 是有界的。
如果点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \in \mathbb{R}^d, n \geq 1$ 作为一个集合是有界的，则称点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是有界的

13.1.3.5 点列收敛的性质

13.1.3.5.1. 点列收敛则极限唯一

若点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 收敛则极限唯一，下证
反证，假设有两个极限 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ ，则 $\forall 1 \leq i \leq d, \lim_{n\to\infty} x_i = \boldsymbol{a}_i, \lim_{n\to\infty} x_i = \boldsymbol{b}_i$ ，由序列的极限唯一可知 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i$ ，那么 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

13.1.3.5.2. 点列收敛则点列有界

若点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 则点列是有界的，下证
用 $\delta - N$ 语言改写点列收敛，即 $\forall \delta > 0, \exists N > 0, \text{s.t. } \forall n > N, \boldsymbol{x}_n \in U(\boldsymbol{a}, \delta)$ 。于是取 $\delta = \|\boldsymbol{a}\|, R = \max\{\|\boldsymbol{x}_1\|, \|\boldsymbol{x}_2\|, \ldots, \|\boldsymbol{x}_N\|, 2\|\boldsymbol{a}\|\}$ ，则一定有 $\|\boldsymbol{x}\| \leq R$ ，也就是 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset U(\boldsymbol{0}, R)$ 。

13.1.3.5.1. 点列收敛则满足运算

若两个点列 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{b}$ ，则根据序列极限性质可得

- 线性：取两个数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ，一定有 $\alpha\boldsymbol{x}_n + \beta\boldsymbol{y}_n \to \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}$ ，因为 $\alpha\boldsymbol{x}_i^n + \beta\boldsymbol{y}_i^n \to \alpha\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{b}_i, \forall 1 \leq i \leq d$
- 点乘： $\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ ，因为 $\boldsymbol{x}_i^n\boldsymbol{y}_i^n \to \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_i, \forall 1 \leq i \leq d$

13.1.4. 集合的聚点

13.1.4.1. 集合的聚点

设集合 $E \subset \mathbb{R}^d, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ ，如果 $\forall \delta > 0 \in \mathbb{R}$ 都有 $U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E \neq \varnothing$ ，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点。记集合 E 全部聚点的集合为导集 E' .

13.1.4.2. 聚点的性质

若 $\boldsymbol{a}$ 是集合 E 的聚点，那么在 $\boldsymbol{a}$ 的任意邻域都有无穷多个集合中的点。下证
$\forall \delta > 0$ ，由于 $\boldsymbol{a}$ 是集合 E 的聚点，由定义 $\exists \boldsymbol{x}_1 \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E$ ，于是取 $\delta_1 = \mathrm{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1) < \delta$ ，再由定义 $\exists \boldsymbol{x}_2 \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta_1) \cap E$ ，同理一直取下去得到一列点 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是无限的且互不相同。

13.1.4.3. 聚点的充要条件

设集合 $E \subset \mathbb{R}^d, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ ，则 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点 $\Leftrightarrow$ E 中存在互不相同的点列 $\{x_n\}\text{s.t. } \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ 。下证

- 充分性：点列互不相同，则最多有一个元素与 $\boldsymbol{a}$ 相同，也就是 n 充分大时没有元素 $\boldsymbol{a}$ 相同。 $\forall \delta > 0$ ，由于 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ ，则 $\exists N \in \mathbb{R}, \text{s.t. } \forall n > N, d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_n) < \delta$ ，那么显然有 $U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E \neq \varnothing$ ，所以 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点。
- 必要性： $\forall \delta > 0$ ，由于 $\boldsymbol{a}$ 是集合 E 的聚点，取 $\delta_1 = \min\{\delta, 1\}$ ，由定义 $\exists \boldsymbol{x}_1 \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta_1) \cap E$ ，于是取 $\delta_2 = \min\{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_1), \dfrac{1}{2}\}$ ，一直取下去，归纳 $\delta_n = \min\{\mathrm{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}_{n-1}), \dfrac{1}{n}\}\text{s.t. } \exists \boldsymbol{x}_n \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta_n) \cap E$ ，从而 $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ 。

13.1.4.4. 球形邻域和方形邻域等价

在定义中， $U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E \Leftrightarrow N_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E$ ，后者在证明中略有优势。

- 充分性： $U_\circ(\boldsymbol{a},\delta)\supset N_\circ(\boldsymbol{a},\dfrac{\delta}{\sqrt{2}})$
- 必要性： $U_\circ(\boldsymbol{a},\delta)\subset N_\circ(\boldsymbol{a},\delta)$

13.1.5. 开集和闭集

13.1.5.1. 空间的划分

给定一个集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，则这个集合将整个 $\mathbb{R}^d$ 划分为三部分

- 内部：对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ 如果 $\exists\delta>0\text{ s.t. }U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\subset E$ ，则称 $\boldsymbol{x}$ 是集合 E 的内点。全体内点的集合称为 E 的内部，记 E°
- 外部：对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ 如果 $\forall\delta>0\text{ s.t. }U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\cap E=\varnothing$ ，也就是 $U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\subset E^c$ ，则称 $\boldsymbol{x}$ 是集合 E 的外点。其中 E 的补集 $E^c=\mathbb{R}^d\setminus E$ 。 全体外点的集合称为 E 的外部，记 $(E^c)^\circ$
- 边界：既非内点又非外点则称边界点，等价于条件 $\forall\delta>0\text{ s.t. }U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing,U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\cap E^c=\varnothing$ 。全体边界点的集合称为 E 的边界，记 ∂E . $\boldsymbol{x}\in\partial E$ 更等价于 $\boldsymbol{x}\in\partial E^c$
  注意到上述三个部分两两不交且并起来为全空间 $\mathbb{R}^d$ ，也就是空间被划分为三部分
  $\mathbb{R}^d=E^\circ\sqcup(E^c)^\circ\sqcup\partial E$

13.1.5.2. 开集

13.1.5.2.1. 开集

给定一个非空集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，如果 E 中的点都是 E 的内点，即 $E^\circ=E$ 则称 E 是一个开集，约定 $\varnothing$ 是开集。
注意到 d=1 时开区间都是开集，而任意开集都可以表示为至多可数个不交开区间的并，下证
设开集 $E\subset\mathbb{R}$ ，由于 E 是开集，则 $\forall x\in E,\exists\delta>0,\text{ s.t. }(x-\delta,x+\delta)\subset E$ ，则 $E=\bigcup_{x\in E}(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 。由于上述区间有相交，则设 $a_x=\inf\{a\mid(a,x]\in E\},b_x=\sup\{b\mid[x,b)\in E\}$ ，则有 $(a_x,x]\in E,[x,b_x)\in E$ 。对 $(a_x,b_x)\in E$ ，这些集合或重合或不交，若交则与 inf 或 sup 矛盾。那么 $E=\bigcup_{x\in E}(a_x,b_x)$ 是不交开区间的并，写成 $E=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda,b_\lambda)$ 。在每个区间内 $\exists r_\lambda\in(a_\lambda,b_\lambda)\cap\mathbb{Q}$ ，再记 $Q_\Lambda=\{r_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ ，于是 r 可以看作一个映射 $Q_\Lambda\mapsto\{(a_\lambda,b_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ ，故可数。

13.1.5.2.2. 开集的性质

- 全空间 $\mathbb{R}^d$ 是开集
- 任意多开集的并是开集，无论是否可数。下证
  取一个开集族 $O_\lambda,\lambda\in\Lambda$ ，则对 $\forall\boldsymbol{x}\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda,\exists\lambda\in\Lambda,\text{ s.t. }\boldsymbol{x}\in O_\lambda$ ，对这一个开集 $\exists\delta>0,\text{ s.t. }U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\subset O_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ ，故 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ 是开集.
- 有限多个开集的交是开集

13.1.5.3. 闭集

13.1.5.3.1. 闭集

给定一个集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，如果 E^c 是开集，则 E 称为闭集，约定 $\varnothing$ 是闭集。注意到 d=1 时闭区间都是闭集。
若 $\partial E\subset E$ ，则 E 是闭集，下证
三个条件 $\partial E\subset E,E^\circ\subset E,E\cap(E^c)^\circ=\varnothing$ ，那么前两个得到 $E\supset E^\circ\sqcup\partial E$ ，第三个结合全空间的划分得到 $E\subset E^\circ\sqcup\partial E$ ，那么 $E=E^\circ\sqcup\partial E$ ，再代入全空间的划分得到 $E^c=(E^c)^\circ$ ，也就是闭集的定义：补集是开集.

13.1.5.3.2. 闭集的性质

- 全空间 $\mathbb{R}^d$ 是闭集

- 任意多闭集的交是闭集，无论是否可数
- 有限多个闭集的并是闭集

13.1.5.4. 闭包

13.1.5.4.1. 闭包

给定一个集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，记 $\bar{E}=E\cup\partial E$ ，称为 E 的闭包。等价定义是 $\bar{E}=E^\circ\cup\partial E=E\cup E'$ 。下证后者
设 $\boldsymbol{x}\in E'\setminus E$ ，由于 $\boldsymbol{x}$ 是聚点，则 $\forall\,\delta>0,U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing$ ，并且有 $\boldsymbol{x}\notin E\supset E^\circ$ ，于是 $\forall\,\delta>0,U(\boldsymbol{x},\delta)\cap E^c\neq\varnothing$ ，也就是 $\boldsymbol{x}\in\partial E$ 。
设 $\boldsymbol{x}\in\partial E\setminus E$ ，由于 $\boldsymbol{x}$ 是边界点，则 $\forall\,\delta>0,U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\cap E\neq\varnothing$ ，并且有 $\boldsymbol{x}\notin E\supset E^\circ$ ，于是 $\forall\,\delta>0,U_\circ(\boldsymbol{x},\delta)\cap E^c\neq\varnothing$ ，也就是 $\boldsymbol{x}\in E'$ 。
于是有 $E'\setminus E=\partial E\setminus E$ ，得到 $E\cup\partial E=E\cup E'$ 。下证前者
由于 $E^\circ\subset E$ ，于是 $E^\circ\cup\partial E\subset E\cup\partial E$ ，观察全空间的划分，加上 $E\cap(E^c)^\circ=\varnothing$ ，于是 $E\subset E^\circ\sqcup\partial E$ ，那么 $E\cup\partial E=E^\circ\cup\partial E$.

13.1.5.4.2. 闭包判定闭集

给定一个集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，则 E 是闭集 $\Leftrightarrow\overline{E}=E$ ，下证

- 充分性： $E=\bar{E}=E^\circ\cup\partial E$ ，代入全空间的划分得到 $E^c=(E^c)^\circ$ ， E^c 是开集，那么 E 是闭集
- 必要性： E 是闭集则 E^c 是开集，那么 $(E^c)^\circ=E^c$ ，于是全空间的划分 $\mathbb{R}^d=E^\circ\sqcup E^c\sqcup\partial E$ ，所以 $E=E^\circ\cup\partial E=\bar{E}$
  推论： E 是闭集 $\Leftrightarrow$ 若有一列点 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset E$ ，且 $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\boldsymbol{a}$ ，那么 $\boldsymbol{a}\in E$ 。下证
- 充分性：任意收敛列 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{a}$ 导出 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点，于是 $E'\subset E$ ，进而 $\overline{E}=E'\cup E=E$.
- 必要性： E 是闭集，那么 $E=\overline{E}=E\cup E'$ ，推出 $E'\subset E$. 对收敛列 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{a}$ ，如果 $\exists\,n_0,\text{ s.t. }\boldsymbol{a}_{n_0}=\boldsymbol{a}$ 则自然有 $\boldsymbol{a}\in E$ ；如果 $\forall\,n,\boldsymbol{x}_n\neq\boldsymbol{a}$ 则 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的聚点，也就是 $a\in E'\subset E$.

13.1.6. $\mathbb{R}^d$ 中的基本定理

13.1.6.1. 完备性

13.6.1.1. 柯西列

设一列点 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset\mathbb{R}^d$ ，若 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,N>0,\text{ s.t. }\forall\,n,m>N,\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m)<\epsilon$ ，则称 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为柯西列.

13.6.1.2. 完备性

设 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，若 E 中的柯西列都收敛且极限在 E 中，则称 E 为完备的。

13.6.1.3. $\mathbb{R}^d$ 是完备的

任给 $\mathbb{R}^d$ 中的柯西列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ ，即 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,N>0,\text{ s.t. }\forall\,n,m>N,\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m)<\epsilon$ ，那么 $\forall\,1\leq i\leq d$ 同样有 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_i^n,\boldsymbol{x}_i^m)<\epsilon$ ，代表着分量在 $\mathbb{R}$ 中收敛。由于 $\mathbb{R}$ 是完备的，那么 $\forall\,1\leq i\leq d,x_i^n\to x_i\in\mathbb{R}$ ，于是 $\boldsymbol{x}_n\to(x_1,x_2,\ldots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ ，也就是 $\mathbb{R}^d$ 是完备的。

13.6.1.4. 闭集是完备的

集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ 是完备的 $\Leftrightarrow$ 集合 E 是闭集，由 13.1.5.4.2. 闭包判定闭集证：

- 充分性： $\mathbb{R}^d$ 是完备的，则 E 中的柯西列都收敛且极限 $x\in\mathbb{R}^d$ ，而 E 是闭集则 $x\in E$ ，得到 E 是完备的.
- 必要性： E 是完备的，则其中的收敛序列都是柯西列，由于极限也在其中，则 E 是一个闭集.

13.6.1.5. 度量空间的柯西列

对任意的度量空间 (X,d) ，都可以用其距离函数定义

- 其上的柯西列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 满足 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,N>0,\ \text{s.t.}\ \forall\,n,m>N,\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m)<\epsilon$
- 点列收敛：点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 和点 $\boldsymbol{a}$ 满足 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,N>0,\ \text{s.t.}\ \forall\,n>N,\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{a})<\epsilon$
- 完备性：其上的柯西列都收敛且极限在这个空间中

  例如 $(-1,1)$ 在 2-范数定义下不完备，但在双曲度量下完备，即 $\mathrm{d}(x,y)=\ln\dfrac{1+|\dfrac{x+y}{1-xy}|}{1-|\dfrac{x-y}{1-xy}|}$.

13.1.6.2. 闭集套定理

13.1.6.2.1. 直径

设非空集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，定义 E 的直径 $\operatorname{diam}E=\sup\limits_{x,y\in E}\{\mathrm{d}(x,y)\}$.

13.1.6.2.2. 闭集套定理

设一列非空闭集 $\{F_n\}\subset\mathbb{R}^d$ 满足 $F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots\supset F_n\supset F_{n+1}\supset\cdots$ 且 $\operatorname{diam}F_n\to0$ ，则 $\bigcap\limits_{n\geq1}F_n$ 为单点集，下证

任取一列 $\boldsymbol{x}_n\in F_n$ ，由于 $\operatorname{diam}F_n\to0$ 则 $\forall\,\epsilon>0,\exists\,N>0,\ \text{s.t.}\ \forall\,n>N,\operatorname{diam}F_n<\epsilon$ ，那么对 $\forall\,m>n$ 有 $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}_m)\leq\operatorname{diam}F_n<\epsilon$ ，也就得到 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 是柯西列。

而 $\mathbb{R}^d$ 是完备的，则 $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^d$ ，又因为 $\{F_n\}$ 是闭集列，则 $\forall\,n\geq1,\boldsymbol{a}\in F_n$ ，也就有 $\boldsymbol{a}\in\bigcap\limits_{n\geq1}F_n$.若另有 $\boldsymbol{a}'\in\bigcap\limits_{n\geq1}F_n$ ，则有 $\mathrm{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}')\leq F_n<\epsilon$ ，也就是 $\mathrm{d}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}')\to0$ ，故 $\bigcap\limits_{n\geq1}F_n$ 是一个单点集.

13.1.6.3. 聚点原理

13.1.6.3.1. Bolzano-Weierstrass 定理

$\mathbb{R}^d$ 中的有界点列必有收敛子列，下证

设一列点 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset\mathbb{R}^d$ ，有界则 $\exists\,M>0,\ \text{s.t.}\ \forall\,n\geq1,|\boldsymbol{x}_n|\leq M$ ，那么 $\forall\,1\leq i\leq d,|x_i^n|\leq M$ ，于是 $\forall\,1\leq i\leq d,\exists\,\{x_i^{n_k}\}\to\boldsymbol{a}_i\in\mathbb{R}$ ，所以取 $\{x_{n_k}\}=\{(x_1^{n_k},x_2^{n_k},\ldots,x_d^{n_k})\in\{\boldsymbol{x}_n\}\}$ 是一列收敛子列.

13.1.6.3.2. 聚点原理

推论： $\mathbb{R}^d$ 中的有界无穷集合必有聚点.

证明：只需依次取收敛子列

13.1.6.4. 紧性

13.1.6.4.1. 开覆盖

设集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，一族开集 $O_\lambda,\lambda\in\Lambda$ ，如果 $E\subset\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ 则称 $\{O_\lambda\}$ 为 E 的一族开覆盖。如果 $\#\Lambda<\infty$ 则称这是一个有限开覆盖.

13.1.6.4.2. 子覆盖

设 $O_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 是集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ 的开覆盖，而 $\Gamma\subset\Lambda$ 使 $O_\gamma,\gamma\in\Gamma$ 是 E 的开覆盖，则称 $O_\gamma,\gamma\in\Gamma$ 是 $O_\lambda,\lambda\in\Lambda$ 的子覆盖.

13.1.6.4.3. 紧性 compact

设集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ ，如果 E 的任意开覆盖都有有限子覆盖，则称 E 为紧的.

- 有限集合一定是紧集
- 有限个紧集的并仍是紧集

13.1.6.4.4. 欧式空间中紧性的刻画

$\mathbb{R}^d$ 中的紧集 $\Leftrightarrow$ 有界闭集，下证

- 充分性：反设 E 不是紧集，则 $\exists \{O_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$ 没有有限子覆盖。由于 E 是有界集，则 $\exists\, M > 0,\ \text{s.t.}\ E \subset [-M, M]^d = Q_0$ ，将 Q_0 等分为 2^d 个直径为 M 的带边小空间，则至少有一个小空间和 E 的交没有限子覆盖，记其中一个为 Q_1 ，继续分割得到一列空间 $Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_n \supset Q_{n+1} \supset \cdots$ 满足 $Q_n \cap E$ 不能被有限子覆盖，且 $\operatorname{diam} Q_n = \dfrac{M}{2^n} \to 0$ ，那么由 13.6.2. 闭集套定理得到 $\bigcap\limits_{n\geq 1} (Q_n \cap E) = \{\boldsymbol{a}\}$ 是一个单点集，那么 $\exists\, \delta > 0,\ \text{s.t.}\ U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset O_\lambda$ ，于是 $\exists\, N, \forall\, n > N, Q_n \subset U(\boldsymbol{a}, \delta) \subset O_\lambda$ ，与此空间不能被有限覆盖矛盾，则 E 是紧集.
- 必要性：
  - $E \subset \mathbb{R}^d$ 是紧集，则 $E \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} U(\mathbf{0}, n) = \mathbb{R}^d$ 且 $\exists\, n_1 < n_2 < \cdots < n_m,\ \text{s.t.}\ E = \bigcup\limits_{1\leq i\leq m} U(\mathbf{0}, n_i) = U(\mathbf{0}, n_m)$ ，故 E 有界.
  - 反设 E 不是闭集，则取 $\boldsymbol{a} \in E' \setminus E \neq \varnothing$ ，则 $\bigcup\limits_{n\geq 1} \left[\mathbb{R}^d \setminus \overline{U(\boldsymbol{a}, \frac{1}{n})}\right] = \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{a}\}$ 是 E 的一族开覆盖，而是紧集，则 $\exists\, n_1 < n_2 < \cdots < n_m,\ \text{s.t.}\ E \subset \bigcup\limits_{1\leq i\leq m} \left[\mathbb{R}^d \setminus \overline{U(\boldsymbol{a}, \frac{1}{n_i})}\right] = \mathbb{R}^d \setminus \overline{U(\boldsymbol{a}, \frac{1}{n_m})}$ ，与 $\boldsymbol{a}$ 是聚点矛盾，则 E 是一个闭集.

13.2. 多元函数与向量函数的极限

13.2.1. 多元函数

13.2.1.1. 多元函数

13.2.1.1.1. 映射

设两个非空集合 X, Y ，如果有一个对应法则 f 使 $\forall\, x \in X$ 都有唯一的 $y \in Y$ 与之对应，则称 f 是 X 到 Y 的一个映射，记 $y = f(x)$ 为 f 在 x 处的取值， $\{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$ 为 f 的值域.

13.2.1.1.2. 多元函数

设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^d$ ，若 $f : E \mapsto \mathbb{R}$ 为映射，则称 f 是一个 d 元函数。其图像为 $\mathrm{G}(f) = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid \boldsymbol{x} \in E\} \subset E \times \mathbb{R}$ 。

13.2.1.2. 多元函数的极限

13.2.1.2.1. 多元函数的极限

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 以及函数 $f : E \mapsto \mathbb{R}$ ，取 $\boldsymbol{a} \in E'$ ，如果 $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \text{s.t.}\ \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0,\ \text{s.t.}\ \forall\, \boldsymbol{x} \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E$ 都有 $|f(\boldsymbol{x}) - A| < \epsilon$ ，则称当 $\boldsymbol{x}$ 在 E 中趋向于 $\boldsymbol{a}$ 时， $f(\boldsymbol{x})$ 以 A 为极限，记 $f(\boldsymbol{x}) \to A, \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \in E$ 或 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\in E, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A$.这一定义包含单侧极限、双侧极限的定义。

13.2.1.2.2. 多元函数的极限性质

- 极限存在则唯一
- 满足四则运算（要求定义域相同或取交）
- 极限存在则局部有界
- 满足夹逼法则（由于值域在 $\mathbb{R}$ 中，要求定义域相同或取交）
- $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\in E, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = A \Leftrightarrow \forall \{\boldsymbol{x}_n\} \subset E \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} f(\boldsymbol{x}_n) = A$

13.2.1.3. 无穷小量和无穷大量

13.2.1.3.1. 无穷小量

如果 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = 0$ ，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 是无穷小量，记 $f(\boldsymbol{x}) = o(1), \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}$.

13.2.1.3.2. 无穷大量

设 $E \subset \mathbb{R}^d$ 以及函数 $f : E \mapsto \mathbb{R}$ ，取 $\boldsymbol{a} \in E'$ ，如果 $\forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, \epsilon > 0, \forall\, \delta > 0,$ s.t. $\exists\ \boldsymbol{x} \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E$ 都有 $|f(\boldsymbol{x}) - A| \geq \epsilon$ ，则称当 $\boldsymbol{x}$ 在 E 中趋向于 $\boldsymbol{a}$ 时， $f(\boldsymbol{x})$ 以 $+\infty$ 为极限，记 $f(\boldsymbol{x}) \to +\infty, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \in E$ 或 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\in E, \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = +\infty$.此时称 $f(\boldsymbol{x})$ 是无穷大量.

13.2.1.4. 累次极限

13.2.1.4.1. 累次极限

设 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 $N_\circ((\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0), \delta_0)$ 上有定义，如果 $\forall\, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < \delta_0$ 都有 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{y})$ ，且 $\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} \phi(\boldsymbol{y}) = A$ ，则称 A 为 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的累次极限，记 $A = \lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

13.2.1.4.2. 累次极限与普通极限

设 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 在 $N_\circ((\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0), \delta_0)$ 上有定义， $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = A$ ，如果 $\forall\, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0, \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{y})$ ，则有 $A = \lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} \phi(\boldsymbol{y}) = \lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ，下证

$\forall\, \epsilon > 0$ ，由 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = A$ ，则

$\exists\, 0 < \delta < \delta_0,$ s.t. $\forall\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0| < \delta, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0), |f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - A| < \dfrac{\epsilon}{2}$ ，又有

$\forall\, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0, \lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{y})$ ，则在上一个式子令 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ ，于是 $|\phi(\boldsymbol{y}) - A| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ ，也就是

$\lim\limits_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{y}_0} \phi(\boldsymbol{y}) = A$.

13.2.2. 向量函数

13.2.2.1. 向量函数

设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ ，若 $f : E \mapsto \mathbb{R}^n$ 为映射，也就是 $\boldsymbol{x} \in E \to \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ，相当于两个向量之间的对应关系为
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$ ，等价于一系列函数 $y_i = f_i(\boldsymbol{x})$ 。

13.2.2.2 向量函数的极限

设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ ， $f : E \mapsto \mathbb{R}^n$ ，一点 $\boldsymbol{a} \in E'$ 。
如果 $\exists\, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n,$ s.t. $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0,$ s.t. $\forall\, \boldsymbol{x} \in U_\circ(\boldsymbol{a}, \delta) \cap E, |f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}| < \epsilon$ ，则称 $\boldsymbol{x}$ 在 E 中趋向于 $\boldsymbol{a}$ 的时候， $f(\boldsymbol{x})$ 以 $\boldsymbol{A}$ 为极限，记作 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}$.

注意到 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in E} f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \forall\, 1\le j\le n, \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}_j$ ，向量函数可以写为多元函数的形式.
设另一个非空集合 $D\subset E, \boldsymbol{a}\in D'$ ，那么有 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in D} f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$.

13.3. 多元连续函数

13.3.1. 函数的连续

13.3.1.1. 向量函数的连续点

设非空集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ ， $f:E\mapsto\mathbb{R}^n$ ，一点 $\boldsymbol{a}\in E$ 。

- $\boldsymbol{a}\in E'$ ，如果 $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{a})$ ，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续
- $\boldsymbol{a}\in E\setminus E'$ 也即 $\boldsymbol{a}$ 是 E 的孤立点，规定 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{a}$ 处连续
  上述定义 $\Leftrightarrow \forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\, x\in U(\boldsymbol{a},\delta)\cap E, |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})|<\epsilon$.

13.3.1.2. 向量函数的连续性

设设非空集合 $E\subset\mathbb{R}^m$ ， $f:E\mapsto\mathbb{R}^n$ ，如果对 $D\subset E$ ， D 上的每一个点都连续，则称 $f(\boldsymbol{x})$ 在 D 上连续.

13.3.1.3. 复合函数的连续

设非空集合 $E\subset\mathbb{R}^m, f:E\mapsto\mathbb{R}^n, g:f(E)\mapsto\mathbb{R}^l$ 都连续，则 $g\circ f:E\mapsto\mathbb{R}^l$ 也连续.

13.3.2. $\mathbb{R}^d$ 中集合的连通性

13.3.2.1. $\mathbb{R}^d$ 中集合中的道路

设连续映射 $f:[a,b]\mapsto E\subset\mathbb{R}^d$ ，则称 f 为 E 中的一条道路 path（连续曲线），连接了 $f(a)$ 和 $f(b)$ 。

13.3.2.2. $\mathbb{R}^d$ 中集合的连通性

设非空集合 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，如果 $\forall\, x,y\in E$ ，都有 E 中一条连接 x 和 y 的道路，则称 E 为道路连通的。

13.3.2.3. 区域和凸性

称 $\mathbb{R}^d$ 中连通的开集为区域 domain，其闭包称为闭区域。
设 $\Omega\in\mathbb{R}^d$ 为一个区域，如果 $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega, t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{y}\in\Omega, \forall\, 0\le t\le 1$ ，则称 Ω 为凸区域。

13.3.3. 连续函数的性质

13.3.3.1. 紧集的连续像是紧集

设紧集 $E\subset\mathbb{R}^d$ ，若 $f:E\mapsto\mathbb{R}^m$ 连续，则 $f(E)$ 也是紧集。下证

- 有界性：由连续函数的局部有界性， $\forall\,\boldsymbol{x}\in E, \exists\,\delta_x>0, M_x>0,\ \text{s.t.}\ \forall\, x'\in U(\boldsymbol{x},\delta_x), |f(\boldsymbol{x}')|<M_x$ ，而 $E\subset\bigcup U(\boldsymbol{x},\delta_x)$ ，由于 E 是紧集，则有有限开覆盖 $E\subset\bigcup U(\boldsymbol{x}_k,\delta_{x_k})$ ，取 $M=\max\{M_{x_1},M_{x_2},\dots,m_{x_k}\}$ ，得到 $|f(\boldsymbol{x})|<M$.
- 闭性：取 $\boldsymbol{y}_k\in f(E), \boldsymbol{y}_k\to\boldsymbol{y}_*(k\to\infty)$ ，那么有 $\boldsymbol{x}_k\in E, f(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{y}_k$ ，由 E 的有界性，则有一列 $\boldsymbol{x}_{k_1},\boldsymbol{x}_{k_2},\dots$ ，令 $\lim_{i\to inf}\boldsymbol{x}_{k_i}=\boldsymbol{x}_*$ ，则由 E 的闭性， $\boldsymbol{x}_*\in E$ ，再由 f 的连续性，
  $\lim_{i\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{k_i})=f(\boldsymbol{x}_*)\in f(E)$ ，也就是 $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{y}_*\in E$.
  推论：紧集的连续像有最大值和最小值

13.3.3.2. 连通集的连续像是连通集

设连通集 $E \subset \mathbb{R}^d$ ，若 $f: E \mapsto \mathbb{R}^m$ 连续，则 $f(E)$ 也是连通集。下证
道路 $g: [a, b] \mapsto E$ 是连续的，则复合 $f \circ g: [a, b] \mapsto f(E)$ 也是连续的，正是 $f(E)$ 中的一条道路.

13.3.4. 一致连续性

13.3.4.1. 一致连续性

设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ ， $f: E \mapsto \mathbb{R}^n$ ，如果 $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in E$ ，只要 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2| < \delta$ 则有 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| < \epsilon$ ，则称 f 在 E 上一致连续。

13.3.4.2. 紧集上的连续函数一致连续

设紧集 $E \subset \mathbb{R}^d$ ，若 $f: E \mapsto \mathbb{R}^m$ 连续，则 f 一致连续。下证
反设 f 不一致连续，则 $\exists\, \epsilon_0 > 0, \forall\, \delta = \dfrac{1}{k} > 0, \exists\, \boldsymbol{x}_{1,k}, \boldsymbol{x}_{2,k} \in E$ 满足 $|\boldsymbol{x}_{1,k} - \boldsymbol{x}_{2,k}| < \delta = \dfrac{1}{k}$ 但是 $|f(\boldsymbol{x}_{1,k}) - f(\boldsymbol{x}_{2,k})| > \epsilon_0$ 。由 E 的紧性，设一列 $\boldsymbol{x}_{1,k} \to \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_{2,k} \to \boldsymbol{x}_2$ ，则 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \in E$ ，与 $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| > \epsilon_0$ 矛盾，故 f 一致连续。

13.3.5. 同胚映射

13.3.5.1. 同胚映射

设非空集合 $E \subset \mathbb{R}^m$ ， $f: E \mapsto \mathbb{R}^n$ ，如果 f 为单射，则 f 有逆映射 $f^{-1}: f(E) \mapsto E$ ，如果进一步有 f, f^{-1} 都连续，则称 f 是从 E 到 $f(E)$ 的同胚映射。