习题课时间：

主要内容：导函数应用，不定积分.

1. 微分方程：

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=r(x), & x\in(a,b) \\ y(a)=A \\ y(b)=B \end{cases}$$

其中 $q(x)<0$，A，B 为常数. 如果这个方程有 $[a,b]$ 上有连续解，则解必是唯一的.

证：假设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为满足该方程的两个连续解.

令 $y_0(x)=y_1(x)-y_2(x)$，则 y_0 满足：

$$\begin{cases} y_0''+p(x)y_0'+q(x)y_0=0 \\ y_0(a)=0 \\ y_0(b)=0 \end{cases}$$

欲证 $y_0(x)\equiv 0$，只需证：$M:=\max\limits_{x\in[a,b]} y_0(x)=0$，及 $m:=\min\limits_{x\in[a,b]} y_0(x)=0$.

假设 $M=y_0(x_1)>0$ $(x_1\in(a,b))$ 则 $y_0'(x_1)=0$，故有：

$$y_0''(x_1)+q(x_1)y_0(x_1)=0$$

又 $q(x_1)<0$，$y_0(x_1)>0 \Rightarrow y_0''(x_1)>0$，但又由 $y_0'(x_1)=0$，知此时 x_1 为 $y_0(x)$ 的严格极小值点，这与 x_1 为 $y_0(x)$ 的最大值点矛盾！

故 $M=0$. 同理 $m=0$.

即 $y_0(x)\equiv 0$，$y_1(x)\equiv y_2(x)$. 原方程解唯一. □

注：如上做法被称为"极值原理"。

思考题：微分方程

$$\begin{cases} y'' + p(x)y + q(x)y = r(x), \quad x \in (a,b). \\ y(a) = A \\ y(b) = B, \end{cases}$$

其中 $q(x) \le 0$. 问此方程是否一定有解和唯一性?
$(p(x), q(x), r(x) \in C[a,b])$.

练习题：设 $y(x)$ 为微分方程

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in (a,b) \\ y(a) = A \\ y(b) = B \end{cases}$$

而连续解. 其中 $p(x), q(x), r(x) \in C[a,b]$, $q(x) < 0$.
则:

$$\|y\|_{C^0[a,b]} := \max_{x\in[a,b]} |y(x)| \le \max\left\{A, B, \left\|\frac{r(x)}{q(x)}\right\|_{C^0[a,b]}\right\}.$$

练习题：微分方程

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \quad x \in (a,b) \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0 \end{cases}$$

无连续解，若 $r(x) > 0$, $q(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$.

2. 设 $P_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$，$n\in\mathbb{N}_+$.

(1) 当 n 为偶数时，$P_n>0$.

(2) 当 n 为奇数时，P_n 有唯一的实零点.

(3) P_{2n+1} 的实零点记为 x_n，则 $\{x_n\}$ 递减趋于 $-\infty$.

证：(1) $x\geq 0$ 时，显然 $P_{2n}(x)>0$

$x<0$ 时，由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：

$$e^x=P_{2n}(x)+\frac{e^\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1},$$

其中 $\xi\in(x,0)$. 则由 $e^x>0$，有

$$P_{2n}(x)>-\frac{e^\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}>0.$$

(2). P_1 显然满足此结论. $P'_{2n+1}(x)=P_{2n}(x)>0$，从而 $P_{2n+1}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上严格递增. 又 $P_{2n+1}(x)$ 为奇次多项式，从而其在 $\mathbb{R}$ 上有唯一零点.

(3) ① 首先证明：$x_{n+1}<x_n<0$.

$x_n<0$ 显然.

而
$$\begin{aligned}x_{n+1}<x_n &\iff P_{2n+3}(x_{n+1})<P_{2n+3}(x_n)\\ &\iff 0<P_{2n+3}(x_n)\\ &\iff 0<P_{2n+1}(x_n)+\frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1+\frac{x_n}{2n+3}\right)\\ &\iff 0<\frac{x_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1+\frac{x_n}{2n+3}\right)\\ &\iff x_n>-(2n+3).\end{aligned}$$

下用数学归纳法证明：$x_n>-(2n+3)$.

$x_0=-1>-3$.

假设 $x_k > -(2k+3)$，$k \in \mathbb{N}$.

则 $P_{2k+1}(-(2k+5)) < P_{2k+1}(-(2k+3)) < P_{2k+1}(x_k) = 0$.

且 $\frac{(-(2k+5))^{2k+2}}{(2k+2)!}\left(1+\frac{-(2k+5)}{2k+3}\right) < 0$.

故 $P_{2k+3}(-(2k+5)) < 0$，而 $P_{2k+3}(x_{k+1}) = 0$，即知 $x_{k+1} > -(2k+5)$.

从而有 $x_n > -(2n+3)$，且 $x_{n+1} < x_n < 0$.

② $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

由带 Lagrange 余 Taylor 公式：

$$e^x = P_{2n+1}(x) + \frac{e^{\xi}}{(2n+2)!}x^{2n}$$，ξ 在 0 与 x 之间，

对 $\forall x \in \mathbb{R}$. 特别地，令 $x = x_n$，有

$$e^{x_n} = \frac{e^{\xi}}{(2n+2)!}x_n^{2n} \leqslant \frac{x_n^{2n}}{(2n+2)!}$$

而 $x_n > -(2n+3)$，故

$$x_n^{2n} \geqslant (2n+2)!\, e^{-(2n+3)}$$

$$x_n \leqslant -\left((2n+2)!\, e^{-(2n+3)}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

$$= -\sqrt[2n]{(2n+2)!}\; e^{-(1+\frac{3}{2n})}$$

其中：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2n+2}\ln k}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\ln(2n+2)+\ln(2n)\right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{(2n+2)!} = +\infty.$$

而 $\lim_{n\to\infty} e^{-(1+\frac{3}{2n})} = e^{-1}$，故知 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. □

3. 证明：对 $\forall\, n \in \mathbb{N}_+,\ x \in \mathbb{R}$，有
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k} \geq -1.$$

证：只需考虑 $x \in [0,\pi]$. 记
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k}.$$

则
$$S_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \sin kx$$
$$= \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x - \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$

则
$$S_n'(x) + S_{n+1}'(x) = \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos(n-\frac{1}{2})x - 2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{2\cos nx\cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \leq 0,$$

$\forall x \in [0,\pi]$.

从而 $S_n(x) + S_{n+1}(x)$ 在 $(0,\pi]$ 上递减. 故
$$S_n(x) + S_{n+1}(x)$$
$$\geq S_n(\pi) + S_{n+1}(\pi)$$
$$= \left(-1 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$
$$+ \left(-1 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\right)$$
$$\geq -2 + \frac{1}{n} \qquad (\forall n).$$

即 $2S_n(x) - \frac{\cos nx}{n} \geq -2 + \frac{1}{n}$

$\Rightarrow S_n(x) \geq -1, \quad \forall x \in (0, \pi]$.

$x=0$ 时结论显然成立. □

练习题: $S_n(x)$ 同上, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \min_{0\le x\le \pi} S_n(x) = -\ln 2.$$

练习题: 对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $x \in (0,\pi)$, 证明:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0.$$

(提示: 用数学归纳法).

4. 练习题 (自我练习). 计算以下不定积分:

(1) $\int x^2 f^{(n)}(x)\,dx \quad (n\geq 2)$. (2) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

(3) $\int \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} \quad (n\in\mathbb{N}_+)$. (4) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx$

(5) $\int x \arctan x \ln(1+x^2)\,dx$ (6) $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^3} \quad (a,b\in\mathbb{R})$.

(7) $\int \frac{dx}{1+x^4}$.