习题课时间：12月6日

主要内容：泰勒展开.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 阶可导，设

$$M_i=\sup\{|f^{(i)}(x)|: x\in(-\infty,+\infty)\}$$

$i=0,1,\cdots,n$. 则

(1) 若 M_0, M_n 有限，则 $M_1,\cdots,M_{n-1}$ 均有限.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(n)}(x)$ 均存在，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}(x)=0$, $k=1,2,\cdots,n$.

证：定义差分：

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x),\qquad x\in\mathbb{R}_+.$$

及高阶差分：

$$\Delta_h^2 f(x)=\Delta_h(\Delta_h f(x))=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$$

$$\cdots$$

$$\Delta_h^n f(x)=\Delta_h(\Delta_h^{n-1}f(x))$$

事实上：

$$\Delta_h^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x+kh)\qquad n\in\mathbb{N}_+.$$

另一方面，由带 Lagrange 余项的泰勒公式，对 $\forall k=1,\cdots,n-1$, $\exists\xi_k\in(x,x+h)$，使

$$f(x+kh)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}(kh)^i+\frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!}(kh)^n.$$

$$\Rightarrow \Delta_h^{n-1}f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^k\left(\sum_{i=0}^{n-2}\frac{f^{(i)}(x)}{i!}k^ih^i\right)\to S_1$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} \to S_2$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{n}\frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!}h^{n} \to S_3$$

由恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{i}=\begin{cases}0 & i=0,1,\cdots,n-2\\ (n-1)! & i=n-1\end{cases}$$

得:

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{i}\right)\frac{f^{(i)}(x)}{i!}h^{i}=0$$

$$S_2=\frac{(n-1)!}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)h^{n-1}=f^{(n-1)}(x)h^{n-1}$$

故有:

$$\Delta_h^{n-1}f(x)=f^{(n-1)}(x)h^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{n}\frac{f^{(n)}(\xi_k)}{n!}h^{n} \quad (*).$$

其中 $\xi_k\in(x,x+kh)$, $k=1,\cdots,n-1$.

特别地, 取 $h=1$, 记

$\Delta f(x)=\Delta_1 f(x)$, $\cdots$, $\Delta^{n-1}f(x)=\Delta_1^{n-1}f(x)$.

(*) 式变为:

$$\Delta^{n-1}f(x)=f^{(n-1)}(x)+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-1-k}C_{n-1}^{k}k^{n}f^{(n)}(\xi_k) \quad (**).$$

$\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}\in(x,x+(n-1)h)$.

(1) 由 $M_1, M_n<+\infty$, 及 (**) 式, 有: $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$|f^{(n-1)}(x)| \leq |\Delta^{n-1} f(x)| + \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} k^{n} |f^{(n)}(\xi_k)|$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k}\right) M_0 + \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} k^{n}\right) M_n,$$

即

$$M_{n-1} \leq 2^{n-1} M_0 + \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} k^{n}\right) M_n < +\infty$$

$\frac{n(n-1)}{2}$

如此继续递归，即知 $M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}$ 均有限.

(2) 首先由课后习题 3) 题，知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

(由洛必达法则).

同样由 (**) 式：

两边同时让 $x \to +\infty$，则 $\xi_k \to +\infty$ $(k=1, \cdots, n-1)$.

则

$$\lim_{x\to+\infty} f^{(n-1)}(x) = \lim_{x\to+\infty} \Delta^{n-1} f(x)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_{n-1}^{k}\right) \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

$$= (1-1)^{n} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

同样做递归，可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0,\ k=1,2,\cdots,n$. □

另证：选取 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 为 n 个两两不同的正数.

对 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall j=1, \cdots, n$. 由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：

$$f(x+h_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(x)}{i!} h_j^{i} + \frac{f^{(n)}(\xi_j)}{n!} h_j^{n}$$

其中 $\xi_j \in (x, x+h_j)$.

将其写成如下矩阵形式：

(*)
$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-1} \\ 1 & h_2 & \cdots & h_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_n & \cdots & h_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+h_1) - \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} h_1^n \\ f(x+h_2) - \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!} h_2^n \\ \vdots \\ f(x+h_n) - \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} h_n^n \end{pmatrix}$$

由 Vandermonde 行列式的值可知上式亦可写为：

(**)
$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \\ \vdots \\ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & h_1 & \cdots & h_1^{n-1} \\ 1 & h_2 & \cdots & h_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & h_n & \cdots & h_n^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x+h_1) - \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} h_1^n \\ f(x+h_2) - \frac{f^{(n)}(\xi_2)}{n!} h_2^n \\ \vdots \\ f(x+h_n) - \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} h_n^n \end{pmatrix}$$

由于 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ 两两不同.

(1). 由于 $h_1, h_2, \ldots, h_n$ 是固定选取的, 故由 (**) 式, 所以, $\exists\, C_k > 0$, 使 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有:

$$\left|\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right| \le C_k (M_0 + M_n), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

即 $\exists\, C > 0$, 使 $M_k \le C(M_0 + M_n)$, $k = 1, \ldots, n-1$.

即得证.

(2). 直接在 (**) 中令 $x \to +\infty$, 可知右边 $\to (0, 0, \ldots, 0)^T$,

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$, $(k = 1, \ldots, n-1)$, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = 0$. □

(或使用 Cramer 法则).

(另外证，或作为推广，或作为加强命题)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 n 次可导，$n\geq 2$，记

$$M_k=\sup\{|f^{(k)}(x)| \mid x\in(-\infty,+\infty)\}$$

$k=0,1,\cdots,n$，则

$$M_k\leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

推论：若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，M_n 有限，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$ $(k=1,2,\cdots,n-1)$. (Littlewood theorem)

(1(2) 可作为此推论的推论)

证：先证：$M_1\leq\sqrt{2M_0M_2}$.

由带 Lagrange 余项的 Taylor 公式：$\forall x\in\mathbb{R}$，$h\neq 0$.

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2 \quad ①$$

其中 ξ_1 在 x 与 $x+h$ 之间；

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2 \quad ②$$

① - ②，得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{1}{2}(f''(\xi_1)-f''(\xi_2))h^2$$

$$\Rightarrow\quad 2M_0\geq 2|f'(x)|h-\frac{1}{2}\cdot 2M_2h^2,\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\quad 2M_0\geq 2M_1h-M_2h^2$$

$$M_1\leq\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h$$

对一切 $h\in(0,+\infty)$ 成立，从而

$$M_1\leq\min_{h>0}\left(\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h\right)=\sqrt{2M_0M_2}.$$

将 $f(x)$ 换为 $f^{(k-1)}(x)$，即得

$$M_k\leq\sqrt{2M_{k-1}M_{k+1}},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

下面对 n 进行归纳证明：

$$M_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \quad k=1,2,\cdots,n-1$$

$n=2$ 时已证。现假设 n 时上述结论成立，证明 $(n+1)$ 时情形：

首先对 $k=n$：

$$M_n \le 2^{\frac{1}{2}} M_{n-1}^{\frac{1}{2}} M_{n+1}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(前述结论)}$$

$$\le 2^{\frac{1}{2}}\left(2^{\frac{n-1}{2}} M_0^{\frac{1}{n}} M_n^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} M_{n+1}^{\frac{1}{2}} \quad \text{(归纳假设)}.$$

$$= 2^{\frac{n+1}{4}} M_0^{\frac{1}{2n}} M_n^{\frac{n-1}{2n}} M_{n+1}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow M_n^{\frac{n+1}{2n}} \le 2^{\frac{n+1}{4}} M_0^{\frac{1}{2n}} M_{n+1}^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow M_n \le 2^{\frac{n}{2}} M_0^{\frac{1}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}.$$

而对 $k=1,2,\cdots,n-1$，有

$$M_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

$$\le 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} \left(2^{\frac{n}{2}} M_0^{\frac{1}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{k}{n}}$$

$$= 2^{\frac{k(n-k)}{2}+\frac{k}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}+\frac{k}{n(n+1)}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

$$= 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n+1}} M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

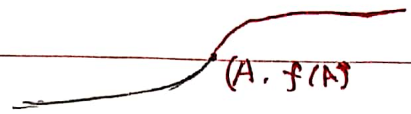
至此我们完成了归纳证明.

推论的证明：

对 $f(x)$ 加减常数不影响结论. 故不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

对 $\forall \varepsilon>0$，取 $A>0$，使 $\forall x\ge A$，有 $|f(x)|<\varepsilon$. 此时我们构造一个新函数：（中心对称延拓）.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \ge A \\ 2f(A)-f(2A-x) & x<A \end{cases}$$



可以验证 $f(x)\in C^n[A,+\infty) \Rightarrow \tilde{f}(x)\in C^n(-\infty,+\infty)$.

且设 $\tilde{M}_0,\cdots,\tilde{M}_n$ 为 $\tilde{f}(x)$ 对应题设的量，则有

$$\tilde{M}_0 \le 2\varepsilon.$$

$$\tilde{M}_n \le M_n$$

从而 $\tilde{M}_k \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}\tilde{M}_0^{1-\frac{k}{n}}\tilde{M}_n^{\frac{k}{n}} \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}\overset{\to 0\,(\varepsilon\to 0^+)}{(2\varepsilon)^{1-\frac{k}{n}}}M_n^{\frac{k}{n}}$. $(1\le k\le n-1)$

即对 $\forall x\ge A$，有

$$|f^{(k)}(x)| \le 2^{\frac{k(n-k)}{2}}(2\varepsilon)^{1-\frac{k}{n}}M_n^{\frac{k}{n}} \qquad (1\le k\le n-1)$$

即得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x)=0$, $(k=1,2,\cdots,n-1)$. □

思考题：①. 法3中的估计是否是最优的？

②. 法2中我们没有具体给出估计，是否有办法从中得到一个较为精确的估计？甚至得到法3中的估计？

③. 将 $(-\infty,+\infty)$ 换为有限区间 (a,b)，结论是否仍然成立？

④. 将 $(-\infty,+\infty)$ 换为有限区间 $[a,b]$，法3中的估计会发生什么变化？