习题课时间：1月4日

主要内容：罪孽深重的积分不等式.

一. 重要不等式

1. Cauchy-Schwarz 不等式.

$f(x), g(x) \in R[a,b]$，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

等号成立条件？

2. Young 不等式.

$y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格递增，连续，且 $f(0)=0$. 则
对 $\forall\, a>0,\ b>0$:

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(y)\,dy.$$

等号成立条件？

$f(x)=x^{p-1}$ 情形

$\Swarrow$

3. Hölder 不等式:

$f(x), g(x) \in R[a,b]$，$p,q>0$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立条件？

$\Downarrow$

4. Minkowski 不等式:

$f(x), g(x) \in R[a,b]$，$p\geq 1$，则:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

等号成立条件？

5. Jensen 不等式：

$f\in R[a,b]$，$m\le f(x)\le M$，φ 在 $[m,M]$ 上连续且为凸函数，则

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(f(x))\,dx.$$

6. Hardy 不等式.

$p>1$，$f\in C^1[0,a]$，$a>0$，且 f 递增，$f(0)=0$，$f'\in C[0,a]$，令 $F(x)=\frac{1}{x}f(x)$，$x\in(0,a]$，则：

$$\int_0^a |F(x)|^p\,dx\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^a (f'(x))^p\,dx.$$

一般都是见到 $a=+\infty$ 情形.

7. Steffensen 不等式.

$f,g\in C[a,b]$，$0\le g(x)\le 1$，$\forall x\in[a,b]$. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降，则

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le\int_a^{a+\lambda} f(x)\,dx$$

其中， $\lambda=\int_a^b g(x)\,dx$.

等号成立条件？…

练习题：确定集合：

$$\left\{\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx:\ f\in C[0,1],\ 0\le f(x)\le 1,\ \int_0^\pi f(x)\,dx=1\right\}$$

二. 利用多项式辅助函数.

多项式优点在于一定阶数导函数为常值.

1. 设 $f \in C^1[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$. 证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

证: $\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right)^2$

构造多项式

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)d\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)^2$$

分部积分

$$= \left(\left(\frac{1}{2}-x\right)f(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)f'(x)dx\right)^2$$

$$= \left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)f'(x)dx\right)^2$$

Cauchy-Schwarz.

$$\le \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}}(f'(x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\frac{1}{2}}(f'(x))^2 dx.$$

同理可得:

对称性.

$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right)^2 \le \frac{1}{24}\int_{\frac{1}{2}}^1 (f'(x))^2 dx.$$

从而有:

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 = \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx\right)^2.$$

$$\le 2\left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx\right)^2+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx\right)^2\right)$$

$$\le \frac{1}{12}\int_0^1 (f'(x))^2 dx. \qquad \square$$

思考题：上述系数 $\frac{1}{12}$ 是否为最佳？

练习题1：设 $f\in C^2[0,2]$，证明：

$$\int_0^2 (f''(x))^2 dx \ge \frac{3}{2}\left(f(0)-2f(1)+f(2)\right)^2.$$

提示：令 $g(x)=x-2(x-1)_+$，其中 $t_+=\max\{0,t\}$.
考虑积分：$\int_0^2 f''(x)g(x)dx$.

练习题2：设 $f\in C^n[0,1]$，$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$，$k=0,1,\dots,n-1$，则

$$\int_0^1 |f^{(n)}|^p \ge (2n+1)^{-\max(1,\frac{p}{2})}\left(\frac{(2n+1)!}{n!}\right)^p\left|\int_0^1 f\right|^p.$$

三. 变上限积分求导法.
当待证与积分上限没有很本质的关系时，经常可以使用.
1. 证明 Steffensen 不等式.
证：令 $F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(t)dt.$

$x \in [a,b]$.

联立易要求一定连续性（有时甚至可导性）但我们有逼近理论！

则 $F(a)=0$. 且：

$$F'(x) = f(x)g(x) - f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)g(x)$$

$$= \left(f(x) - f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)\right)g(x).$$

由于 $0 \le g(t) \le 1$，从而 $a+\int_a^x g(t)dt \le a+x-a = x$.

又 f 单调下降，故 $f(x) \le f\left(a+\int_a^x g(t)dt\right)$. 此时由 $g(x)\ge 0$，即有：

$$F'(x) \le 0 \quad (x\in(a,b)).$$

从而 $F(x)$ 单调下降，$F(x) \le F(a)=0$，$x\in[a,b]$.

特别地，$F(b)\le 0$，即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^{a+\lambda} f(x)dx.$$

试试用逼近理论推广到 $f,g\in R[a,b]$.

同理，令

$$G(x) = \int_{b-\int_x^b g(t)dt}^{b} f(t)dt - \int_x^b f(t)g(t)dt. \quad x\in[a,b].$$

可得左边不等式. □

注：此题亦可直接放缩证明，且只需 $f,g\in R[a,b]$.

四. 重积分方法.

此方法往往与"三"本质相同.

1.（Tschebyscheff 不等式）. 设 f, g 在 $[a,b]$ 上同增同减（即：若 $x<y$，则 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\ge 0$）.

又设 $p\in R[a,b]$，且为非负函数，证明：

$$\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(x)g(x)dx \le \int_a^b p(x)dx\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$$

证：由题意知，下述重积分非负：

$$\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)dxdy \geq 0.$$

展开：

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{D_1}\int_{D_2} f(x)g(y)dxdy\\ &=\int_{D_1}f(x)dx\int_{D_2}g(y)dy\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}\text{左边} = &\int_a^b p(x)f(x)g(x)dx\int_a^b p(y)dy\\ &-\int_a^b p(x)g(x)dx\int_a^b p(y)f(y)dy\\ &-\int_a^b p(x)f(x)dx\int_a^b p(y)g(y)dy\\ &+\int_a^b p(x)dx\int_a^b p(y)f(y)g(y)dy \geq 0\end{aligned}$$

整理即得欲证不等式. □

练习题：试用"三"或"四"中方法证明：

① 设 $f(x)\in C^1[0,1]$，$f(0)=0$，$0\le f'(x)\le \frac{1}{2}\beta^{\frac{1}{\beta-1}}$，其中常数 $\beta>1$，则

$$\int_0^1 (f(x))^{2\beta-1}dx \le \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^\beta.$$

（常见到 $\beta=2$ 时 of 此题）.

② 设 $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ 连续递减，则：

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

五、凑微分

应对条件为微分不等式或积分不等式的方法.

1. (Bellman-Gronwall 不等式)

设 a, b, c, f 为 $\mathbb{R}^+$ 上非负连续函数，且对 $\forall x \geq 0$,

$$f(x) \leq \int_0^x [a(t)f(t)+b(t)]dt + c(x).$$

证明:

$$f(x) \leq \left[\int_0^x b(t)dt + \max_{0\leq t\leq x} c(t)\right] e^{\int_0^x a(t)dt}. \quad (x\geq 0).$$

证: 令:

$$F(x) = \int_0^x [a(t)f(t)+b(t)]dt. \quad (x\geq 0).$$

则 $F'(x) = a(x)f(x)+b(x)$,

由题设, $f(x) \leq F(x)+c(x)$, 从而:

$$F'(x) \leq a(x)(F(x)+c(x))+b(x). \quad (x\geq 0).$$

再令:

$$G(t) = (F(t)+C)e^{-\int_0^t a(s)ds}$$ ← 不能直接用 $c(x)$ 转用常数.

$t\in[0,x]$, 其中 $C = \max_{0\leq t\leq x} c(t)$.

则:

$$G'(t) = [F'(t) - a(t)(F(t)+C)]e^{-\int_0^t a(s)ds}$$
$$\leq b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} \leq b(t) \quad (0\leq t\leq x).$$ ← a 非负.

而 $G(0)=C$. 两边积分, 有

$$G(x) \leq C + \int_0^x b(t)dt \quad (x\geq 0)$$

即

$$F(x)+C \leq \left(C+\int_0^x b(t)dt\right)e^{\int_0^x a(t)dt}$$

从而:

$$f(x) \leq F(x)+c(x) \leq F(x)+C \leq \left[\int_0^x b(t) + \max_{0\leq t\leq x} c(t)\right]e^{\int_0^x a(t)dt}. \quad \square$$

练习题：$u, v, w: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 均连续，常数 $u_0 > 0$，$0 \le p < 1$，$q = 1-p$。由不等式

$$u(x) \le u_0 + \int_0^x v(t)u(t)\,dt + \int_0^x w(t)u^p(t)\,dt$$

得到以下估计：

$$u(x)e^{-\int_0^x v(t)\,dt} \le \left(u_0^q + q\int_0^x w(t)\, e^{-q\int_0^t v(s)\,ds}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(例题：1+1=2
练习题：$\zeta(s)$ 非平凡零点实部为 $\frac{1}{2}$.
系列：_(:з」∠)_)

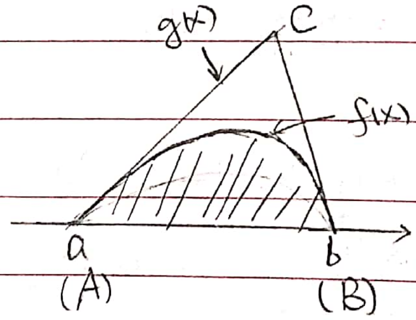
六、几何意义法

定积分与面积息息相关，故几何意义可辅助思考。

1. 设 f 为 $[a,b]$ 上的凹函数，且 $f(a) = f(b) = 0$，$f'_+(a) = \alpha > 0$，$f'_-(b) = \beta < 0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\alpha\beta\frac{(b-a)^2}{\beta-\alpha}.$$

证：



$f(x) \le g(x)$
$\Uparrow$
$f(x)$ 凹性

如上图，AC 斜率为 α，BC 斜率为 β，有

$$\int_a^b f(x)\,dx \le S_{\triangle ABC}.$$

计算 C 点坐标从而得到 $S_{\triangle ABC}$，即得证。 $\square$

练习题：设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的凹函数，且 $f(a)=f(b)=0$，又设 $\exists\, c\in(a,b)$，使 $f(c)=R>0$．（这里 a,b,R 均固定）．试用 a,b,R 表示出 $\int_a^b f(x)dx$ 取值范围．

七．离散化．

利用 Riemann 积分定义，将积分不等式转化为离散不等式来证明．

1．证明 Jensen 不等式．

证：由 φ 凸性，根据离散形式的 Jensen 不等式，有

$$(*)\quad \varphi\left(\frac{1}{n}\left(f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_n)\right)\right)\leq\frac{1}{n}\left(\varphi(f(\xi_1))+\cdots\varphi(f(\xi_n))\right).$$

这里取 $[a,b]$ 的 n 等分分划，且 $\xi_i\in\left[a+\frac{i-1}{n}(b-a),\ a+\frac{i}{n}(b-a)\right]$．$(i=1,\cdots,n)$．对此等分分划与取点：

$\int_a^b f(x)dx$ 对应 Riemann 和：$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot\frac{b-a}{n}=(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)$

$\int_a^b\varphi(f(x))dx$ 对应 Riemann 和：$(b-a)\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\varphi(f(\xi_i))$．

注意到 $\varphi\in C[m,M]$．$(\Rightarrow\ \varphi\circ f\in R[a,b])$，

在 $(*)$ 式两端令 $n\to\infty$，即得证． □

练习题．$f,\ p\in R[a,b]$，$m\leq f(x)\leq M$，$p(x)\geq 0$，$\int_a^b p(x)dx>0$，φ 在 $[m,M]$ 上连续且凸．证明：

$$\varphi\left(\frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b p(x)\cdot f(x)dx\right)\leq\frac{1}{\int_a^b p(x)dx}\int_a^b p(x)\varphi(f(x))dx$$

思考题：可否用离散化的方法证明四中 Tschebyscheff 不等式？

练习题：反过来用连续的 Jensen 不等式证明离散的 Jensen 不等式．