习题课时间：12月21日

主要内容：定积分.

1. 对 $\forall x\in[0,1]$，记

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{p^n},\quad x_n\in\{0,1,\cdots,p-1\},$$

其中 $p\in\mathbb{N}_{\geq 2}$（这里若 x 有两种表达形式，取无限小数的那种）. 记函数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{q^n},$$

其中 $q\in\mathbb{N}$，$q\geq p$.（则函数 $f(x)$ 可积）. ↪ Lebesgue 定理.

试求：$\int_0^1 f(x)dx$.

解：由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，从而可取特殊分化：

$$\Delta_n:\ 0<\frac{1}{p^n}<\frac{p+1}{p^n}<\cdots<\frac{a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+1}{p^n}<\cdots<\frac{(p-1)(p^{n-1}+\cdots+1)+1}{p^n}<1$$

并取 $\xi_k=\frac{a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+1}{p^n}$，$\xi_0=0$.（$a_i\in\{0,1,\cdots,p-1\}$）.

注意到：

若

$$x=\frac{a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\cdots+a_{n-1}p+1}{p^n}$$

$$=\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{1}{p^n}$$

$$=\left(\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{0}{p^n}\right)+\frac{p-1}{p^{n+1}}+\frac{p-1}{p^{n+2}}+\cdots$$

则

$$f(x)=\left(\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{q^{n-1}}+\frac{0}{q^n}\right)+\frac{p-1}{q^{n+1}}+\frac{p-1}{q^{n+2}}+\cdots$$

$$=\left(\frac{a_1}{q}+\frac{a_2}{q^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{q^{n-1}}\right)+\frac{1}{q^n}\cdot\frac{p-1}{q-1}.$$

$a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$

则：

跳过细节

$$\sum_k f(\xi_k)\Delta_k = \sum_{a_i \in \{0,1,\cdots,p-1\}} \left(\frac{a_1}{q} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{1}{q^n}\cdot\frac{p-1}{q-1} \right) \frac{1}{p^{n-1}} + o(1)$$

$$= \sum_{a_i \in \{0,1,\cdots,p-1\}} \left(\frac{a_1}{q} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{q^{n-1}} \right) \frac{1}{p^{n-1}} + o(1).$$

$$= (1+\cdots+p-1)\left(\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^{n-1}}\right)\frac{1}{p^{n-1}}\cdot p^{n-2}$$ → 每个数字重复 p^{n-2} 次.

$$= \frac{p(p-1)}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{\frac{1}{q}\left(1-\left(\frac{1}{q}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{q}} \to \frac{p-1}{2(q-1)}$$

即 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{p-1}{2(q-1)}$. $\square$

注：事实上，此处取 x 的有限小数表达形式也不影响结果.（f 间断点为可数集）.
→ 有限小数集.

练习题：取 σ 为 $\{0, 1, \cdots, 9\}$ 的一个置换.

对 $x \in [0, 1]$，若

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{10^n}, \quad x_n \in \{0, 1, \cdots, p-1\}.$$

令：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(x_n)}{10^n}.$$

试求：$\int_0^1 f(x)\,dx$.

（另问：$f(x)$ 是否有可能在某些点处可导？）.

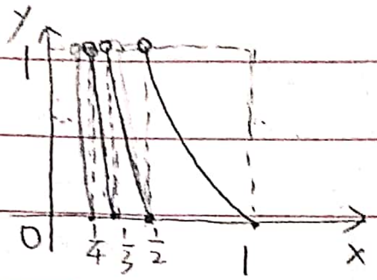
（这里干脆都取有限小数表达形式吧！）.

2. 求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}-\left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

解：令 $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，$x\in(0,1]$，$f(0)=0$.

则 $f(x)\in R[0,1]$.



且：
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}-\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$

另一方面：

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{x}-k\right)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{k}-\ln\frac{1}{k+1}-k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln(k+1)-\ln k-\frac{1}{k+1}\right)$$

而
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\ln(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

即 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln(k+1)-\ln k-\frac{1}{k+1}\right)$

$= 1-\gamma$.

其中 $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ 为欧拉常数.

即所求极限为：$1-\gamma$. □

练习题：设 $\alpha\in(0,1]$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{\alpha n}{k}\right]-\alpha\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\alpha\ln\alpha.$$

(思考题：若 $\alpha>1$ 呢？例如 $\alpha=2$).

3. 设 $f(x)\in R[a,b]$，$p_1,\cdots,p_n>0$，则对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$. 证明：存在 $x\in[a,b]$，使

$$p_1\int_x^{x_1}f(t)\,dt+\cdots+p_n\int_x^{x_n}f(t)\,dt=0.$$

证：由 $f(x)\in R[a,b]$，知 $\int_x^{x_1}f(t)\,dt,\cdots,\int_x^{x_n}f(t)\,dt$ 均为关于 x 的在 $[a,b]$ 上的连续函数. 令：

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}p_i\int_x^{x_i}f(t)\,dt\in C[a,b],$$

$\alpha_j=p_j/\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$，则 $\alpha_j>0$，$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1$.

而 $\sum_{j=1}^{n}\alpha_j g(x_j)=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}p_i}\left(\sum_{j=1}^{n}p_j\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\int_{x_j}^{x_i}f(t)\,dt\right)\right)$

$$= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \left(\sum_{i,j}^{n} p_i p_j \int_{x_j}^{x_i} f(t)\,dt \right)$$

由于 $\int_{x_i}^{x_i} f(t)\,dt = 0$，$\int_{x_j}^{x_i} f(t)\,dt + \int_{x_i}^{x_j} f(t)\,dt = 0$.
$(\forall i, j = 1, \cdots, n)$.

故
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_j \, g(x_j) = 0 .$$

又 $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. 故由介值定理，存 $\exists\, x \in [a,b]$，使 $g(x) = 0$，即

$$p_1 \int_{x}^{x_1} f(t)\,dt + \cdots + p_n \int_{x}^{x_n} f(t)\,dt = 0 . \quad \square$$