习题课时间：9月28日

主要内容：函数的基本性质

1. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义，且 $f(f(x))=x$.

问：这种函数 $f(x)$ 是否唯一？如若不是，请尽力多举出例子.

尝试描述出所有这样的函数 $f(x)$.

解：设 $\mathbb{R}=A\sqcup B\sqcup C$，其中 A 与 B 等势.

g 为 $A\to B$ 的双射. 定义

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & x\in A \\ g^{-1}(x) & x\in B \\ x & x\in C. \end{cases}$$

则 $f(f(x))=x$. 且所有 $f(x)$ 都可写成这种形式. □

*2. 若 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续函数，且 $f(f(x))=x$. 能否尝试更进一步地描述出 $f(x)$？

解：由介值定理，及 $f(x)$ 连续且为双射，知 $f(x)$ 必为严格单调函数.

此时 $f(x)$ 存在反函数，且 $f(x)=f^{-1}(x)$.

(1) $f(x)$ 单调递增，则必有 $f(x)=x$ （课后习题）.

(2) $f(x)$ 单调递减.

此时 $f(x)$ 有唯一的不动点，记为 x_0.

设 $\varphi(x)=f(x+x_0)-x_0$，则 $\varphi(x)$ 单调递减且

$\varphi(0)=0$.

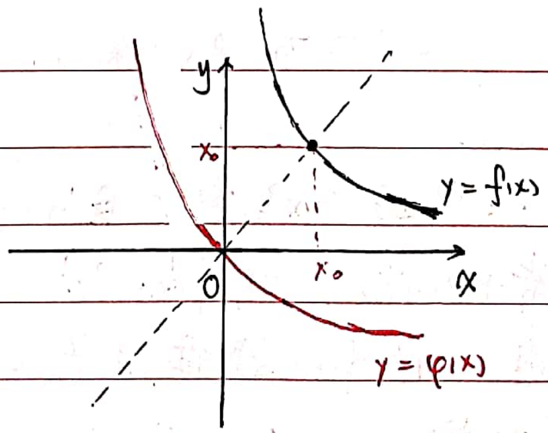
且由 $f(x)=f^{-1}(x)$，知 $\varphi(x-x_0)+x_0=\varphi^{-1}(x-x_0)+x_0$，即 $\varphi(x)=\varphi^{-1}(x)$.

（这样化归到不动点为 $x=0$ 的情况）

令 $g(x)=\varphi(x)\ (x\geq 0)$，则 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，连续，且 $g(0)=0$. 而

$$f(x)=\varphi(x-x_0)+x_0,\quad \varphi(x)=\begin{cases} g(x) & x\geq 0 \\ g^{-1}(x) & x<0. \end{cases}$$

反过来，对任一严格递减的连续且满足 $g(0)=0$ 的函数 $g(x)$，及任意 $x_0\in\mathbb{R}$（为不动点），都可生成一个满足 $f(f(x))=x$ 的连续的 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 函数 $f(x)$. □



* 思考题：如果再加上 $f(x)$ 可导的条件，可否对 $f(x)$ 做进一步的刻画？

Reference："$f(f(x))=x$ 的连续解和可导解"，謂謂，知乎.

*3. (1) 说明不存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的连续函数 $f(x)$，使

$$f(f(x)) = -x.$$

(2) 是否可以寻找到一个 $[-1, 1]$ 上的分段连续函数 $f(x)$，使

$$f(f(x)) = -x \ ?$$

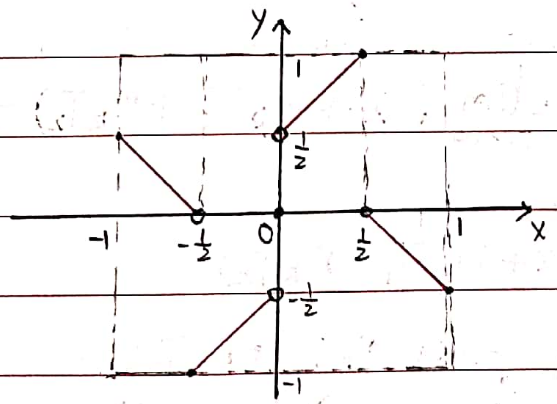
解：(1) f 依然是双射.

f 连续 + 双射 $\Rightarrow$ f 单调.

f 递增 $\Rightarrow$ $f(f(x))$ 递增，矛盾；

f 递减 $\Rightarrow$ $f(f(x))$ 递增，矛盾.

(2)



$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{1}{2} & x \in [-1, -\frac{1}{2}) \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 0) \\ 0 & x = 0 \\ x + \frac{1}{2} & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ -x + \frac{1}{2} & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$\square$

*思考题：是否存在 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 上分段连续函数 $f(x)$，满足 $f(f(x)) = -x$?

4. 设 $T_1, T_2 > 0$, $T_1/T_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)$ 满足:

$$f(x) = f(x+T_1) = f(x+T_2).$$

* (1). 若 $f(x)$ 连续, 则 $f(x)$ 必为常值函数.

(2) 是否存在非常值的满足这个条件的函数 $f(x)$?

解: (1) 由 $T_1/T_2 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 知集合

$A := \{ n + mT_1/T_2 : m, n \in \mathbb{Z} \}$

在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 即

$T_2 \cdot A = \{ mT_1 + nT_2 : m, n \in \mathbb{Z} \}$

亦在 $\mathbb{R}$ 上稠密.

$\forall x \in \mathbb{R}$, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} (x + m_kT_1 + n_kT_2) = 0$, 其中 $\{m_k\}, \{n_k\} \subseteq \mathbb{Z}$.

则
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x + m_kT_1 + n_kT_2) \\ &= \lim_{k\to\infty} f(x + m_kT_1 + n_kT_2) \\ &= f\left(\lim_{k\to\infty} (x + m_kT_1 + n_kT_2)\right) \quad (f\text{连续}) \\ &= f(0). \end{aligned}$$

即 f 为常值函数.

(2) 考虑 $\mathbb{R}$ 上的等价关系:

$x \sim y \iff x - y = mT_1 + nT_2$ 对某两个 $m, n \in \mathbb{Z}$ 成立.

(①. 自反性: $x \sim x$.

②. 对称性: $x \sim y, \Rightarrow y \sim x$.

③ 传递性: $x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$)

由此将 $\mathbb{R}$ 分为一系列等价类的无交并：

$$\mathbb{R} = \bigsqcup_{\alpha \in I} A_\alpha .$$

I → 指标集

此时只要 f 在每个固定的 A_α 上赋同样的值，即满足题设条件。这样的函数当然可以非常值。□

思考题：① 设 $T_1, T_2, \cdots, T_n > 0$，且在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，即若 $q_1, q_2, \cdots, q_n \in \mathbb{Q}$，且

$$q_1 T_1 + q_2 T_2 + \cdots + q_n T_n = 0,$$

则必有 $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$. 问是否存在 $\mathbb{R}$ 上函数 $f(x)$，满足：

$$f(x) = f(x+T_1) = f(x+T_2) = \cdots = f(x+T_n) ?$$

② 若 $\{T_n\}$ 是一个可数的无限集呢？甚至不可数呢？

（注：无限集 $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathbb{R}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，是指对 $\{T_\alpha\}$ 的任意有限子集 $\{T_{\alpha_1}, \cdots, T_{\alpha_n}\}$，它们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关）

练习题：设 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 为正整数，$f(x)$ 满足：

$$f(x) = f\left(x+\frac{1}{k_1}\right) = f\left(x+\frac{1}{k_2}\right) = \cdots = f\left(x+\frac{1}{k_n}\right)$$

则：

$$f(x) = f\left(x + \frac{1}{[k_1, k_2, \cdots, k_n]}\right),$$

其中 $[k_1, k_2, \cdots, k_n]$ 为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的最小公倍数.

** 5. $\mathbb{R}$上满足：

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

的函数 $f(x)$ 是否一定为线性函数：$f(x)=cx$，$c\in\mathbb{R}$？

解：在承认选择公理的前提下，

我们有以下结论：

$\mathbb{R}$在$\mathbb{Q}$上有一组Hamel基.

即：存在 $\mathcal{H}\subset\mathbb{R}$，满足：

① $1\in\mathcal{H}$，$0\notin\mathcal{H}$.

② $\mathcal{H}$中任意有限个元素在$\mathbb{Q}$上线性无关.

③ 任意实数都可以表示为$\mathcal{H}$中有限个元素的有理系数线性组合.

(从而$\mathbb{R}$可视为$\mathbb{Q}$上线性空间).

此时对$\forall x\in\mathbb{R}$，$\exists\, h_1,\cdots,h_n\in\mathcal{H}$，$q_1,\cdots,q_n\in\mathbb{Q}$，使得

$$x=q_1h_1+\cdots q_nh_n$$

由 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，知

$$f(x)=q_1f(h_1)+\cdots+q_nf(h_n) \quad \text{(留作练习)}.$$

反过来，我们只要确定了f在$\mathcal{H}$上取值，就可以得到f在$\mathbb{R}$上取值. 且容易验证这样定义的f是无矛盾的.

即对任意函数$g:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$，都存在唯一的满足题设的$f$，使得$\forall h\in\mathcal{H}$，有$f(h)=g(h)$.

这样的函数有可能是非线性函数. □

注：选择公理：

对于一个集合族 $X=\{S_i\}$，$i\in I$（I 为指标集），其成员 S_i 均不为空集，那么存在一个集合 $A=\{x_i\}$，使得 $x_i\in S_i$，$\forall i\in I$.

选择公理与 Zorn 引理，良序原理，Hamel 基存在性等是等价的.

选择公理与 ZF 公理体系是相互独立的.