习题课时间：

主要内容：数列极限的定义与基本性质

1.（Toeplitz 定理）

设 $n, k \in \mathbb{N}_+$ 时，$t_{nk} \geq 0$，且 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，$\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$。如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k,$$

则有 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

证. 由 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$，可不妨设 $a=0$，否则考虑数列 $\{a_n - a\}$.

若 $a_n \equiv 0$，结论显然成立.

对 $\forall \varepsilon > 0$，

① 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，取 $N_1 \in \mathbb{N}_+$，使 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$

② 由 $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$，取 $N_2 \in \mathbb{N}_+$，使 $n > N_2$ 时，有

$$0 \leq t_{nk} < \frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{l=1}^{N_1} |a_l|\right)}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, N_1\}.$$

现在我们考虑 $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ 时，有：

$$\begin{aligned}
|x_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} t_{nk} a_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_1} t_{nk}|a_k| + \sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk}|a_k| \\
&< \sum_{k=1}^{N_1} \left(\frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{l=1}^{N} |a_l|\right)}\right)|a_k| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^{n} t_{nk}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. □

推论 1：设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

① $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a ;$$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n^2} = \frac{a}{2} ;$$

③ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = a ;$$

④ $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{l=1}^{n} l^k a_l = \frac{a}{k+1} . \quad (k \in \mathbb{N})$$

推论 2.（课后习题第5题）. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a ,$$

其中 $p_k > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$.

注：取

$$t_{nk} = \frac{p_{n+1-k}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

即可.

推论 3.（$\frac{*}{\infty}$ 型 Stolz 定理）.

设 $\{b_n\}$ 是严格递增于 $+\infty$ 的数列，如果：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A.$$

注：取

$$t_{nk}=\frac{b_{k+1}-b_k}{b_{n+1}-b_1}\quad(k=1,\cdots,n)$$

即可.

思考题：Toeplitz 定理中：① 如果 $a=+\infty$（或 $-\infty$），结论是否依然成立？

② 若将 "$\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1$" 改为 "$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}=1$"，结论是否依然成立？

并由此考虑以下问题：

i). 设 $0<\lambda<1$，$a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，则：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+\lambda a_{n-1}+\lambda^2a_{n-2}+\cdots+\lambda^n a_0)=\frac{a}{1-\lambda}.$$

ii). 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$，$\lim_{n\to\infty}y_n=\beta$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=\alpha\beta.$$

2. 设 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$n\in\mathbb{N}_+$，数列 $\{A_n\}$ 收敛. 又有一个严格递增的正数数列 $\{p_n\}$，且为无穷大量. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0.$$

证. 由 Abel 分部求和公式：

$$\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=\sum_{k=1}^{n-1}A_k(p_k-p_{k+1})+A_np_n.$$

即：

$$\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=A_n-\frac{\sum_{k=1}^{n-1}A_k(p_{k+1}-p_k)}{p_n}$$

其中若设 $\lim_{n\to\infty}A_n=A$，由 Stolz 定理.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}A_k(p_{k+1}-p_k)}{p_n}\qquad(p_n\nearrow,\ \to+\infty)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}(p_n-p_{n-1})}{p_n-p_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}A_{n-1}=A.$$

从而：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}\sum_{k=1}^{n}p_ka_k=A-A=0. \qquad\square$$

注："严格递增"可改为"递增"，考虑重新使用 Toeplitz 定理.（或去掉"不严格增"项）.

3. 记：

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}.$$

则 $\{S_n\}$ 收敛当且仅当 $\alpha > 1$.

证：① $\alpha \le 0$ 时，$S_n \ge n$，自然发散.

② $0 < \alpha \le 1$ 时：

由：

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha} \ge \frac{n}{(2n)^\alpha} = \frac{1}{2^\alpha} n^{1-\alpha} \ge \frac{1}{2^\alpha},$$

得

$$S_{2n} \ge S_n + \frac{1}{2^\alpha}.$$

即：$S_{2^n} \ge S_1 + \frac{1}{2^\alpha} n \to +\infty \quad (n \to \infty)$.

从而 $\{S_n\}$ 发散.

③ $\alpha > 1$ 时，显然 $\{S_n\}$ 是递增数列，只需证明其有上界.

考虑：

$$\frac{1}{(2^k)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^\alpha}$$

$$\le \frac{1}{(2^k)^\alpha} \cdot 2^k = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k.$$

即 $S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1} \le \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$

从而 $S_{2^k-1} = S_1 + (S_{2^2-1} - S_1) + \cdots + (S_{2^k-1} - S_{2^{k-1}-1})$

$$\le 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \cdots + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

注意到，对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$\exists k$，s.t. $2^k-1 \geq n$，则

$$S_n \leq S_{2^k-1} < \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1}.$$

即 $\{S_n\}$ 有上界。

从而 $\alpha>1$ 时，$\{S_n\}$ 收敛。 □

4. 设 $\alpha \in \mathbb{R}$，求：

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n+1^\alpha}+\frac{1}{n+2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n+n^\alpha}\right)}_{S_n}.$$

解. ① $\alpha<1$ 时：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+n^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow\ 1}{\frac{n}{n+n^\alpha}} \leq S_n \leq \underset{\downarrow\ 1}{\frac{n}{n+1}}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$.

② $\alpha=1$ 时.

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$，自行查阅课本.

③ $\alpha>1$ 时，取 β，s.t. $1<\beta<\alpha$.

$$0<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}=\sum_{k=1}^{[\sqrt[\beta]{n}]}\frac{1}{n+k^\alpha}+\sum_{k=[\sqrt[\beta]{n}]+1}^{n}\frac{1}{n+k^\alpha}$$

$$\leq \frac{[\sqrt[\beta]{n}]}{n}+\frac{n-[\sqrt[\beta]{n}]}{n^{\alpha/\beta}} \leq \frac{1}{n^{1-1/\beta}}+\frac{1}{n^{\alpha/\beta-1}} \to 0\ (n\to\infty).$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. □