习题课时间：10月19日
主要内容：Cauchy收敛准则；上下极限.

一. Cauchy收敛准则

1. 设数列$\{a_n\}$单调递减趋于零，且$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$收敛，证明：$\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

证：$\forall\varepsilon>0$，由Cauchy收敛准则，$\exists N\in\mathbb{N}_+$，对$\forall p\in\mathbb{N}_+$，有

$$a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}<\varepsilon.$$

由$\{a_n\}$递减，知

$$pa_{N+p}\leq a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_{N+p}<\varepsilon$$

即 $$0\leq(N+p)a_{N+p}\leq Na_{N+p}+\varepsilon.$$

由于 $\lim_{p\to\infty}Na_{N+p}=0$，故令$p\to\infty$，有

$$0\leq\varliminf_{n\to\infty}na_n\leq\varlimsup_{n\to\infty}na_n\leq\varepsilon.$$

由ε任意性，令$\varepsilon\to0^+$，即有

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0$$ □

思考题：① 若去掉“$\{a_n\}$递减”这个条件，只要求“$a_n\geq0$”，结论是否仍然成立？

② 逆命题是否成立？

练习题：1). 若非负数列$\{a_n\}$满足：$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$收敛，$\{na_n\}$单调递减趋于零. 求证：$\lim_{n\to\infty}na_n\ln n=0$.

ii). 若非负数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，且 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} a_k$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1} a_n = 0$.

二. 上、下极限.

2. 已知正数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ 满足 $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$, $n \geq 1$.

求证：$\lim_{n\to\infty} c_n$ 存在并求出该极限.

证：① $\{c_n\}$ 有界.

任取 $M>4$，且 $c_0 < M$, $c_1 < M$. 其中 $M>4 \Rightarrow 2\sqrt{M} < M$.

假设 $c_n < M$, $c_{n-1} < M$，则 $c_{n+1} < 2\sqrt{M} < M$. 从而由数学归纳法知 $c_n < M$.

② $l := \varliminf_{n\to\infty} c_n$，则 $l > 0$.

由 $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}} \geq \sqrt{c_n}$，知

$$c_n \geq c_{n-1}^{\frac{1}{2}} \geq \cdots \geq c_0^{\frac{1}{2^n}}$$

从而 $l = \varliminf_{n\to\infty} c_n \geq \lim_{n\to\infty} c_0^{\frac{1}{2^n}} = 1$

③ $L := \varlimsup_{n\to\infty} c_n$，则 $L = l = 4$.

由 $c_{n+1} = \sqrt{c_n} + \sqrt{c_{n-1}}$ 得：

$$\varlimsup_{n\to\infty} c_{n+1} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{c_n} + \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt{c_{n-1}} \Rightarrow L \leq 2\sqrt{L}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} c_{n+1} \geq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt{c_n} + \varliminf_{n\to\infty} \sqrt{c_{n-1}} \Rightarrow l \geq 2\sqrt{l}.$$

又 $L \geq l > 0$，知 $L \leq 4 \leq l \Rightarrow L = l = 4$.

即 $\lim_{n\to\infty} c_n$ 存在且 $\lim_{n\to\infty} c_n = 4$. □

三、Stolz 定理的应用

3. 定义数列 $\{a_n\}$：

$$0<a_1<1, \quad a_{n+1}=a_n(1-a_n), \quad n\geq 1$$

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(1-na_n)}{\ln n}=1$.

证：(1) 归纳可证：$0<a_{n+1}<a_n<1$.

知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则 $a=a(1-a)$，

即 $a=0$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.

另一方面，$a_{n+1}=a_n(1-a_n)$，得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n}.$$

从而由 Stolz 定理：

$$\lim_{n\to\infty}(na_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}} \quad \left(\frac{1}{a_n}\nearrow+\infty\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{1-a_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=1.$$

(2) $$\frac{n(1-na_n)}{\ln n}=(na_n)\cdot\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}$$

由(1)知只需证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}=1$.

再由Stolz定理:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}-n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}-1}{\ln(n+1)-\ln n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1-a_n}-1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{1-a_n}}{\frac{1}{n}}\qquad\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n a_n)\qquad(1-a_n\to 1\ (n\to\infty)).$$

$$=1.\qquad\square$$

注：由(2)，有

$$a_n=\frac{1}{n}-\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\qquad(n\to\infty)$$

<u>练习题</u>：定义数列$\{x_n\}$：

$$x_1>0,\qquad x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n},\quad n\geq 1.$$

试给$\{x_n\}$建立类似如上结论并证明.

习题课时间：10月19日
主要内容：N个等价的实数原理，自然对数底数 e.

一、自然对数底数 e

1. 记 $H_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$，用 k_n 表示使得 $H_k \geq n$ 的最小下标，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$

证：$H_n = \ln n + \gamma + \alpha_n$，其中 γ 为欧拉常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ $(\alpha_n > 0)$.

① 由 $H_{k_n} \geq n$，$\ln k_n + \gamma + \alpha_{k_n} \geq n$

$$\Rightarrow k_n \geq e^{n-\gamma-\alpha_{k_n}}$$

$(n\geq 2)$

② 由 k_n 的最小性，$H_{k_n-1} < n$

$$\Rightarrow \ln(k_n-1)+\gamma+\alpha_{k_n-1} < n$$

$$\Rightarrow k_n < 1+e^{n-\gamma-\alpha_{k_n-1}} < 1+e^{n-\gamma}$$

由①②，得

$$\frac{e^{n+1-\gamma-\alpha_{k_{n+1}}}}{1+e^{n-\gamma}} \leq \frac{k_{n+1}}{k_n} \leq \frac{1+e^{n+1-\gamma}}{e^{n-\gamma-\alpha_{k_n}}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$e \qquad\qquad\qquad\qquad e$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{k_n} = 0$ $(\lim\limits_{n\to\infty}k_n = +\infty)$，即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_{n+1}}{k_n} = e.$$ □

二、区间套定理

2. $[a,b]$ 上递增函数 f 满足：$f(a)\geq a$，$f(b)\leq b$，则必存在 $x\in[a,b]$，使 $f(x)=x$.

证：若 $f(a)=a$，或 $f(b)=b$，结论成立.

否则 $f(a)>a$，$f(b)<b$.

考虑 $\frac{a+b}{2}$：若 $f(\frac{a+b}{2})=\frac{a+b}{2}$，结论成立．否则若 $f(\frac{a+b}{2})<\frac{a+b}{2}$，则记 $a_1=a$，$b_1=\frac{a+b}{2}$；

若 $f(\frac{a+b}{2})>\frac{a+b}{2}$，则记 $a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=b$.

依此类推：若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})=\frac{a_k+b_k}{2}$，则结论成立．否则若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})<\frac{a_k+b_k}{2}$，记 $a_{k+1}=a$，$b_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$；

若 $f(\frac{a_k+b_k}{2})>\frac{a_k+b_k}{2}$，记 $a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$，$b_{k+1}=b$.

$(k\in\mathbb{N}_+)$.

这样我们得到一系列递一包含的区间 $[a_k,b_k]$，且 $f(a_k)>a_k$，$f(b_k)<b_k$．$(k\in\mathbb{N}_+)$ 又 $|a_{k+1}-b_{k+1}|=\frac{1}{2}|a_k-b_k|$，知 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-a_k)=0$．由区间套定理，$\exists\, x\in[a,b]$，使 $x\in[a_k,b_k]$，$\forall\, k\in\mathbb{N}_+$．且 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}b_k=x$.

又由 f 递增，知对 $\forall\, k\in\mathbb{N}_+$，$f(x)>f(a_k)>a_k$，$f(x)<f(b_k)<b_k$，令 $k\to\infty$，即有 $f(x)=x$. $\square$

（二分法）.

*练习题：假设 $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，$g(0)=1$，$g(1)=0$，如果存在一个定义在 $[0,1]$ 上的连续函数 $h(x)$

使得 $g(x)+h(x)$ 单调上升，证明：$g(x)$ 可以取到 0 与 1 之间的任一实数.

（隔壁某班老师的期中考试题）.

3. 对于任意区间 $[p,q]$，$0\le p<q\le 1$，均存在 $x\in\mathbb{R}$，使得 $\{x^n\}\in[p,q]$ 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 成立.（小数部分）

证：选择 $m\in\mathbb{N}$ 使得实数 $a=m+p$，和 $b=m+q$ 满足：

$$a(q-p)\geq 2$$

显然，此时对于所有 $y\in[a,b]$，有 $\{y\}\in[p,q]$.

由上述不等式可得 $b^2-a^2\geq a(b-a)\geq 2$. 因此，区间 $[a^2,b^2]$ 包括一个形如 $[m_1+p,\ m_1+q]$ 的区间（$m_1\in\mathbb{N}$），记 $[a_1,b_1]\subset[a^2,b^2]$ 为满足

$$a_1^2=m_1+p,\quad b_1^2=m_1+q$$

的区间. 显然对于所有 $y\in[a_1,b_1]$，有 $\{y^2\}\in[p,q]$.

此时对于区间 $[a_1^3,b_1^3]$，有

$$b_1^3-a_1^3\geq a_1(b_1^2-a_1^2)\geq a(q-p)\geq 2.$$

同理可得到一个区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]\subset[a,b]$，使 $\forall\, y\in[a_2,b_2]$，有 $\{y^2\}\in[p,q]$.

继续操作下去得到一系列逐个包含的区间 $[a_k,b_k]$，$k=3,4,\cdots$，使得 $\forall\, y\in[a_k,b_k]$，均有 $\{y^k\}\in[p,q]$.

而对 $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots[a_k,b_k]\supset\cdots$ 用区间套定理，知 $\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$ 非空，假设 $x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[a_k,b_k]$，则 $x_n\in[a_n,b_n]$ $\forall n\in\mathbb{N}$，即 $\{x^n\}\in[p,q]$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}$ 成立． □

（先打大区间再缩小回去的方法）．

* 练习题：设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上连续函数，且每个 $x_0>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx_0)=0$．

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

（本题是曾经期中考试题）．