习题课时间：10月26日.
主要内容：函数极限与函数连续.

一、函数极限

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$. ($n$为奇数).

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$. $(n\in\mathbb{N}_+)$

解: (1) 设 $x=\sin\theta$. $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. $|x|<1$.

则 $x\to 0 \Leftrightarrow \theta\to 0$. 且

$x=\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) \Rightarrow \arccos x=\frac{\pi}{2}-\theta$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(n(\frac{\pi}{2}-\theta))}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}-n\theta)}{\theta}\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} \qquad n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(-1)^k\cos(\frac{\pi}{2}-n\theta)}{\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin n\theta}{n\theta}\cdot n$$

$$=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n.$$

(2) $$1-\cos x\cdots\cos nx=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos x\cdots\cos(k-1)x-\cos x\cdots\cos kx\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\cos x\cdots\cos(k-1)x\,(1-\cos kx)$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

得 $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdots\cos(k-1)x\,(1-\cos kx)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\frac{k^2}{2}.$$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdots\cos nx}{x^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdots\cos(k-1)x\,(1-\cos kx)}{x^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1).$$ □

注 ① $\forall\, n\in\mathbb{N}$，$\cos nx=f_n(\cos x)$，其中 $f_n(x)$ 为一个 n 次整系数多项式.（f_n 或 $\frac{1}{2^{n-1}}f_n$ 称为 Chebyshev 多项式）

易知，有

$$f_n(x)=2xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\qquad(n\geq 2)$$

$$f_0(x)=1,\qquad f_1(x)=x.$$

利用数学归纳法，还可以知道：

i). $f_n(x)$ 首项系数为 2^{n-1} $(n\geq 1)$;

ii). $f_n(x)$ 常数项为0，n为奇数时;

ii). $f_n(x)$ 常数项为 $(-1)^{\frac{n}{2}}$，n为偶数时;

iii). $f_n(x)$ 一次项为 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$，n为奇数时.

因此，

$\cos(n\arccos x)=f_n(x)=x^2g(x)+(-1)^{\frac{n-1}{2}}nx$，其中n为奇数，$g(x)$为多项式.

故n为奇数时：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(xg(x)+(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n.$$

② 推论：i). 若 $\cos\theta$ 为有理数，则 $\cos n\theta$ 为有理数，$\forall n\in\mathbb{Z}$.

ii). 若 $\cos n\theta$ 为有理数，对某个 $n\in\mathbb{N}_+$，则 $\cos\theta$ 为代数数.

iii). 对 $\forall \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$，$\cos(\frac{p}{q}\pi)$ 为代数数.

iv). 若 $0<\frac{p}{q}<\frac{1}{2}$，$\cos(\frac{p}{q}\pi)$ 为有理数当且仅当 $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$.

2. 设 f, g 是周期函数，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.

证明：$f(x)\equiv g(x)$.

证：假定存在 $a\in\mathbb{R}$，$f(a)\neq g(a)$. 记 $\varepsilon=|f(a)-g(a)|$.

设 $A\in\mathbb{R}$，使 $x>A$ 时，有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

设 f, g 分别有正周期 T_1, T_2，取 $m, n \in \mathbb{N}_+$，使 $a+mT_1 > A$，$a+nT_2 > A$．则：

$$|f(a+mT_1) - g(a+mT_1)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(a) - g(a+mT_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ①$$

$$|f(a+nT_2) - g(a+nT_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(a+nT_2) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ②$$

又 $a+mT_1+nT_2 > A$，得

$$|f(a+mT_1+nT_2) - g(a+mT_1+nT_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow |f(a+nT_2) - g(a+mT_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad ③$$

由①②③：

$$\varepsilon = |f(a) - g(a)| \le |f(a) - g(a+mT_1)| + |g(a+mT_1) - f(a+nT_2)| + |f(a+nT_2) - g(a)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon，\text{矛盾！}$$

故必有 $f(x) = g(x)$． □

3．若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$．则 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$．

证．(对比课后习题15题) $\forall \varepsilon > 0$，由题设，$\exists \delta > 0$，使 $0 < |x| < \delta$ 时，有

$$\frac{|f(x) - f(\frac{x}{2})|}{|x|} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$，知对任意 $x \neq 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，使 $n > N$ 时，有：$|f(\frac{x}{2^n})| < \frac{\varepsilon}{2}|x|$．

此时有：$(\forall x,\ 0<|x|<\delta)$

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \frac{\left|f(x)-f(\frac{x}{2})+\cdots+f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})+f(\frac{x}{2^n})\right|}{|x|}$$

$(n>N)$ $$\le \sum_{k=1}^{n}\frac{\left|f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})\right|}{\left|\frac{x}{2^{k-1}}\right|}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{\left|f(\frac{x}{2^n})\right|}{|x|}$$

$$< \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即由定义：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.$ □

二. 连续函数

4. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\in C[a,b]$. 固定正整数 k, $1\le k\le n$. $g_k(x)$ 定义为 $f_1(x),\cdots,f_n(x)$ 按从小到大的顺序排序的第 k 个数.

证明：$g_k(x)\in C[a,b]$

证. ① 课后习题 24.

i). $f, g\in C[a,b] \Rightarrow \max\{f,g\}\in C[a,b]$.

ii). $f, g\in C[a,b] \Rightarrow \min\{f,g\}\in C[a,b]$.

② 由数学归纳法.

iii). $\max\{f_1,\cdots,f_{n-1},f_n\}=\max\{\max\{f_1,\cdots,f_{n-1}\},f_n\}$.

iv). $\min\{f_1,\cdots,f_{n-1},f_n\}=\min\{\min\{f_1,\cdots,f_{n-1}\},f_n\}$

③ 注意到.

v). $g_k=\min\limits_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\{\max\{f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_k}\}\}$

综合 i) ii) iii) iv) v)，即得证. □

5. 是否存在一个不恒为0的连续函数 $f: [0,+\infty) \to (-\infty,+\infty)$，满足：

$$f(4x) = f(2x) + f(x) \quad ?$$

解：存在. 对任意正数 x，把 x 写成二进制形式：

$$x = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \quad (n \in \mathbb{Z},\ a_k = 0,1)$$

(其中总写成无限小数形式).

设：

$$f(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{q^k} \quad (q>1 \text{ 待定})$$

则 $f(x)$ 收敛，且 $f(x)$ 连续. 事实上，若 $|x-x_0| < \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$，则 $|f(x)-f(x_0)| \le \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{1}{q^k} \to 0$ $(N \to +\infty)$.

此时：

$$f(4x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{q^{k-2}}, \quad f(2x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{q^{k-1}}.$$

$$f(4x) = f(2x) + f(x) \iff q^2 = q+1.$$

从而取 $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ 即可. □

扫描全能王 创建

1. 设 $f \in C(0,+\infty)$，且每个 $x_0>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx_0)=0$.

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证：反证.

①假设存在 $\{x_n\} \subset (0,+\infty)$，$x_n$ 递增趋于 $+\infty$，使 $|f(x_n)|>\varepsilon_0$，对某个 $\varepsilon_0>0$ 成立 $(\forall n \in \mathbb{N}_+)$.

则由 $f \in C(0,+\infty)$，知对每个 x_n，存在 $\delta_n>0$，使得 $\forall x \in (x_n-\delta_n, x_n+\delta_n)$，有 $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$.

② 对 x_1，有区间 $[a_1,b_1] \subset (x_1-\delta_1, x_1+\delta_1)$，使 $\forall x \in [a_1,b_1]$，$|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$.

③ 假设 $[a_l,b_l]$ 已选取好，$(l \in \mathbb{N}_+)$，满足：存在某个 $k_l \in \mathbb{N}_+$，及 $n_l \in \mathbb{N}_+$，使

$$\boxed{[k_l a_l, k_l b_l] \subset (x_{n_l}-\delta_{n_l}, x_{n_l}+\delta_{n_l})}$$

其中由上知 $k_1=n_1=1$，满足上述条件.

选取 $x_{n_{l+1}}$，使

$$\boxed{x_{n_{l+1}} > \frac{a_l b_l}{b_l-a_l}} \quad (\text{由 } x_n\to+\infty \text{ 知存在性}).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{n_{l+1}}}{a_l} - \frac{x_{n_{l+1}}}{b_l} > 1$$

$\Rightarrow \exists k_{l+1} \in \mathbb{N}_+$，使

$$\frac{x_{n_{l+1}}}{a_l} > k_{l+1} > \frac{x_{n_{l+1}}}{b_l}$$

即 $\frac{x_{n_{l+1}}}{k_{l+1}} \in (a_l, b_l)$.

故可选取区间

$\frac{x_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}$

$$[a_{l+1}, b_{l+1}] \subset [a_l, b_l] \cap \left(\frac{x_{n_{l+1}}-\delta_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}, \frac{x_{n_{l+1}}+\delta_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}\right)$$

此时对 $\forall x \in [a_{l+1}, b_{l+1}]$, 有

$$k_{l+1}x \in (x_{n_{l+1}}-\delta_{n_{l+1}}, x_{n_{l+1}}+\delta_{n_{l+1}})$$

即有 $|f(k_{l+1}x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, 且 $[a_{l+1}, b_{l+1}] \subset [a_l, b_l]$.

④ 对 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_l, b_l] \supset \cdots$ 用闭区套定理, 得 $\exists x_0 \in [a_l, b_l]$, $\forall l \in \mathbb{N}_+$.

从而由①②③, 有 $|f(k_l x_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$, $\forall l \in \mathbb{N}_+$.

但由题设 $\lim_{n\to\infty} f(nx_0) = 0$, 矛盾!

故假设不成立, 即有 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □