习题课时间：11月2日

主要内容：连续函数的性质、一致连续函数.

1. 设 $f\in C(0,+\infty)$，且每个 $x_0>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx_0)=0$.

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证：反证.

①假设存在 $\{x_n\}\subset(0,+\infty)$，$x_n$ 递增趋于 $+\infty$，使 $|f(x_n)|>\varepsilon_0$，对某个 $\varepsilon_0>0$ 成立 $(\forall n\in\mathbb{N}_+)$.

则由 $f\in C(0,+\infty)$，知对每个 $x_n$，存在 $\delta_n>0$，使得 $\forall x\in(x_n-\delta_n, x_n+\delta_n)$，有 $|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$.

② 对 $x_1$，有区间 $[a_1,b_1]\subset(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$，使 $\forall x\in[a_1,b_1]$，$|f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$.

③ 假设 $[a_l,b_l]$ 已选取好，$(l\in\mathbb{N}_+)$，满足：存在某个 $k_l\in\mathbb{N}_+$，及 $n_l\in\mathbb{N}_+$，使

$$\boxed{[k_la_l, k_lb_l]\subset(x_{n_l}-\delta_{n_l}, x_{n_l}+\delta_{n_l})}$$

其中由上知 $k_1=n_1=1$，满足上述条件.

选取 $x_{n_{l+1}}$，使

$$\boxed{x_{n_{l+1}}>\frac{a_lb_l}{b_l-a_l}}$$ (由 $x_n\to+\infty$ 知存在性).

$$\Leftrightarrow \frac{x_{n_{l+1}}}{a_l}-\frac{x_{n_{l+1}}}{b_l}>1$$

$\Rightarrow \exists k_{l+1}\in\mathbb{N}_+$，使

$$\frac{x_{n_{l+1}}}{a_l} > k_{l+1} > \frac{x_{n_{l+1}}}{b_l}$$

即 $\frac{x_{n_{l+1}}}{k_{l+1}} \in (a_l, b_l)$.

故可选取区间 $\quad \frac{x_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}$

$$[a_{l+1}, b_{l+1}] \subset [a_l, b_l] \cap \left(\frac{x_{n_{l+1}} - \delta_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}, \frac{x_{n_{l+1}} + \delta_{n_{l+1}}}{k_{l+1}}\right)$$

此时对 $\forall x \in [a_{l+1}, b_{l+1}]$，有

$$k_{l+1} x \in (x_{n_{l+1}} - \delta_{n_{l+1}}, x_{n_{l+1}} + \delta_{n_{l+1}})$$

即有 $|f(k_{l+1} x)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$，且 $[a_{l+1}, b_{l+1}] \subset [a_l, b_l]$.

④ 对 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_l, b_l] \supset \cdots$ 用闭区套定理，得 $\exists x_0 \in [a_l, b_l]$，$\forall l \in \mathbb{N}_+$.

从而由①②③，有 $|f(k_l x_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2}$，$\forall l \in \mathbb{N}_+$.

但由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n x_0) = 0$，矛盾!

故假设不成立，即有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. $\quad \square$

2. $f: [a, b] \to [a, b]$ 为连续函数，考虑数列：

$$x_0 \in [a, b], \quad x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}_+$$

求证：$\{x_n\}$ 收敛当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

证：$\{x_n\}$ 收敛时，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$，由课后习题第二章35题，知 $[l, L]$ 中任意一个数都是 $\{x_n\}$ 的一个子列的极限，其中 $l = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$，$L = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

假设 $\{x_n\}$ 不收敛，即 $l < L$，下证对 $\forall a \in$

$[l, L]$，有 $f(a)=a$.

事实上，设 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{k_n}\}$ 有 $\lim_{n\to\infty} x_{k_n}=a$.

则有 $f$ 连续性，知 $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n})=f(a)$，即 $\lim_{n\to\infty} x_{k_n+1}=f(a)$，又 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，知 $\exists N$，使 $n>N$ 时，有.

$$|x_{k_n}-a|<\frac{\varepsilon}{3},\ |x_{k_n+1}-f(a)|<\frac{\varepsilon}{3}.\ |x_{k_n+1}-x_{k_n}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

其中 $\varepsilon=|f(a)-a|$. 则：

$$|f(a)-a|\le|f(a)-x_{k_n+1}|+|x_{k_n+1}-x_{k_n}|+|x_{k_n}-a|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon，矛盾！$$

从而 $f(a)=a$，$\forall a\in[l, L]$

由 $\forall a\in(l, L)$ 为 $\{x_n\}$ 聚点，知必存在 $n_0$，使 $l<x_{n_0}<L$.

则由 $x_{n_0}\in(l, L)$，结合前述，$x_{n_0+1}=f(x_{n_0})=x_{n_0}$，$\cdots$，$x_{n_0+k}=f(x_{n_0+k-1})=f(x_{n_0})=x_{n_0}$，$\forall k\in\mathbb{N}_+$.

从而 $\lim_{n\to\infty} x_n=x_{n_0}$. 与 $\{x_n\}$ 不收敛的假定矛盾！

从而必有 $l=L$，$\{x_n\}$ 收敛. □

3. 设函数 $f$ 在区间 $[0, n]$ 上连续 $(n\in\mathbb{N}_+)$，且有 $f(0)=f(n)$，其中 $n$ 是一个正整数. 证明：至少有 $n$ 对不同的 $(x; y)$，使得 $f(x)=f(y)$，同时 $y-x$ 为正整数.

证：归纳法. $n=1$ 时显然成立.

假设结论对 $n=k$ 成立，$k\in\mathbb{N}_+$.

则当 $n=k+1$ 时，考虑 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，$x\in[0, k]$. 则由介值定理，存在 $\xi\in[0, k]$，使

$$F(\xi)=\frac{1}{k+1}\left(F(0)+F(1)+\cdots+F(k)\right)$$
$$=\frac{1}{k+1}\left(f(k+1)-f(0)\right)=0$$

即 $f(\xi)=f(\xi+1)$. 数对 $(\xi,\xi+1)$ 满足题意.

再定义函数：$g(x)=f(\phi(x))$，其中

$$\phi(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le \xi \\ x+1 & \xi< x\le k \end{cases}$$

即去除 $f(x)$ 的 $(\xi,\xi+1]$ 段，并将剩余部分"拼接"起来. 由 $f(\xi)=f(\xi+1)$，知 $g(x)$ 为 $[0,k]$ 上连续函数，且 $g(0)=g(k)$.

对 $g(x)$ 用归纳假设，知存在 $k$ 对不同的 $(x_i,y_i)$ 使 $g(x_i,y_i)$，$y_i-x_i$ 为正整数，$1\le i\le k$.

从而由 $g$ 定义知，$(\phi(x_i),\phi(y_i))$ 满足 $f(\phi(x_i))=f(\phi(y_i))$，且 $\phi(y_i)-\phi(x_i)$ 为正整数，$1\le i\le k$.

这 $k$ 对加上 $(\xi,\xi+1)$ 这一对，总共 $k+1$ 对，即为所求.

从而由数学归纳法，结论对 $\forall n\in N_+$ 成立. □

思考题：若令 $F^*(x)=f(x+k)-f(x)$，$\forall\ 1\le k\le n$. 并将 $f$ 周期延拓到 $[0,nk]$ 上，类似如上可否完成上述定理的证明？(可能会需要绕一些弯子).

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数. 证明：不可能有

$$f(f(x))=-x^3+\sin(x^2+\ln(1+|x|)),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证：假设存在 $f(x)$ 满足题意，由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$，下证 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

否则存在 $\{x_n\}$，$|x_n|\to+\infty\ (n\to\infty)$，但 $f(x_n)\in[-A,A]\ (\forall n)$，对某个 $A>0$. 则由 $f$ 连续 $\Rightarrow$ $f$ 在 $[-A,A]$ 上有界，知 $\{f(f(x_n))\}$ 有界. 但由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(f(x_n))|=+\infty$，矛盾！

再证必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$.

否则存在 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$：$a_n\to+\infty$，$b_n\to+\infty\ (n\to\infty)$. 使 $f(a_n)\to+\infty$，$f(b_n)\to-\infty$. 取充分大 $n$，使 $f(a_n)>0$，$f(b_n)<0$，即知存在 $c_n$ 在 $a_n, b_n$ 之间，使 $f(c_n)=0$. 由介值原理，又知 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=+\infty$，这与 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 矛盾！

同理，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$.

此时：

① 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$，矛盾！

② 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))=-\infty$，矛盾！

③ 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$，矛盾！

综上，即得不存在满足题意的连续函数. □

思考题：此题结论可否推广到一些更高阶的迭代方程？

5. 设区间 $I$ 上的函数 $f(x)$ 满足：

i) 上有界：$\exists M>0$，使 $f(x)<M$，$\forall x\in I$；

ii) 上半连续：$\forall x_0\in I$，$\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)\le f(x_0)$.

则存在一列连续函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$，满足：

i) $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$x\in I$；

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$，$\forall x\in I$.

证：取 $f_n(x)=\sup\limits_{y\in I}\{f(y)-n|x-y|\}$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$x\in I$，

由 $f(x)$ 上有界，知 $f_n(x)$ 均为良好定义的函数.

① $f_n(x)$ 均为连续函数.

事实上，对 $\forall x_1, x_2\in I$，及 $\forall y\in I$，有

$(f(y)-n|x_1-y|)-(f(y)-n|x_2-y|)$

$=n(|x_2-y|-|x_1-y|)\le n|x_1-x_2|$.

即

$$f(y)-n|x_1-y|\le f_n(x_2)+n|x_1-x_2|$$

$$\Rightarrow\qquad f_n(x_1)\le f_n(x_2)+n|x_1-x_2|$$

对称地，有

$$f_n(x_2)\le f_n(x_1)+n|x_1-x_2|$$

即

$$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|\le n|x_1-x_2|$$

从而 $f_n$ 均一致连续，自然也连续.

② $f_n(x)\ge f_{n+1}(x)$，

由 $\forall y\in I$，有

$$f(y)-n|x-y|\ge f(y)-(n+1)|x-y|$$

即得.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0),\ \forall x_0 \in I$

$\forall \varepsilon>0$，由 $f(x)$ 上半连续，可取 $\delta>0$，使 $\forall y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap I$，有

$$f(y) < f(x_0)+\varepsilon$$

另一方面，可取 $N\in\mathbb{N}_+$，使 $\forall n>N$，有

$$M - n\delta < f(x_0). \quad (\text{其中 } f(x)<M, \forall x)$$

此时对 $\forall y\in I$，若 $|y-x_0|\geq\delta$，则

$$f(y)-n|x_0-y| \leq M-n\delta < f(x_0).$$

若 $|y-x_0|<\delta$，则

$$f(y)-n|x_0-y| \leq f(y) < f(x_0)+\varepsilon.$$

从而综上，知

$$f_n(x_0) = \sup_{y\in I}\{f(y)-n|x_0-y|\} < f(x_0)+\varepsilon$$

对 $\forall n>N$ 成立. 又

$$f_n(x_0) \geq f(x_0) - n|x_0-x_0| = f(x_0).$$

从而即知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

综合①②③，即知 $\{f_n(x)\}$ 满足要求. □

思考题 ① 对上有界和下半连续函数会有怎样的结论?

$$\varliminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

② 有没有其他的证明方法?

③ 如果去掉上有界的条件，结论是否仍然成立? 或是

否可能有稍弱的情況成立？(例如 $\forall [a,b] \subset I$，有 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上上有界 (局部上有界))。

④. 反过来，一列连续函数 $f_n(x)$ 若在 $I$ 上单调递减收敛到 $f(x)$，是否一定 $f(x)$ 为上半连续函数？

6. 对 $\forall x \in (0,1)$，将其表示成二进制小数 $x = 0.a_1a_2a_3\cdots$，其中 $a_i \in \{0,1\}$，$i=1,2,\cdots$. 其中对于有两种表示方法的数，我们选择有无穷多个 1 的那种表示方法. 令函数 $f: (0,1) \to [0,1]$ 为：

或：$a_n = [2^n x] - 2[2^{n-1}x]$

$$f(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

证明 $f$ 在 $\forall x \in (0,1)$ 处不连续，但 $f$ 具有介值性质 (亦称为 Darboux 性质)。

证：我们证明对任意 $(0,1)$ 中的非空开区间 $I$，$f$ 在 $I$ 上的值域 $f(I) = [0,1]$ 即可说明上述情况成立.

①. 考虑到 $I$ 中必包含某个区间 $\left(\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k}{2^{n_0+1}}\right)$，而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i}{n-n_0}$$

(即不需要考虑前面有限个位置的取值). 可知我们只需证明：$f(0,1) = [0,1]$ ...

②. $1 \in f((0,1))$. $f(\frac{1}{2}) = 1$.

③. $0 \in f((0,1))$.

取 $x = 0.a_1a_2\cdots$，其中：

$$a_i = \begin{cases} 1 & 若\ i = 2^k,\ k=1,2,\cdots \\ 0 & 其他, \end{cases}$$

则 $f(x) = 0$.

④. 设 $p, q$ 为互质正整数，$p<q$，则 $\frac{p}{q} \in f((0,1))$.

取 $x = 0.\underbrace{00\cdots0}_{q-p}\underbrace{11\cdots1}_{p}\underbrace{00\cdots0}_{q-p}\cdots$

（每 $q-p$ 个 0 后跟 $p$ 个 1）. 则 $f(x) = \frac{p}{q}$.

⑤. $\forall y \in (0,1)\setminus\mathbb{Q}$，$y \in f((0,1))$.

取一列有理数 $\frac{p_n}{q_n} \to y\ (n\to\infty)$. $p_n, q_n \in \mathbb{N}_+$，$(p_n, q_n) = 1$，$p_n < q_n$. 并取

$$x = 0.\underbrace{00\cdots0}_{q_1-p_1}\underbrace{11\cdots1}_{p_1}\underbrace{00\cdots0}_{q_2-p_2}\cdots$$

（其中每 $q_n - p_n$ 个 0 后跟 $p_n$ 个 1，再跟 $q_{n+1} - p_{n+1}$ 个 0，如此往复…）. 则

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{q_1 + q_2 + \cdots + q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = y,$$

由 Stolz 定理.

综上，即得证题设结论. □

思考题：可否构造一个 $\mathbb{R}$ 上函数，使得其在任意非空开区间上都取遍所有实数值？

练习题：证明 $\forall f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的函数可表为两个具 Darboux 性质的函数之差.（可见 Darboux 性质与连续性差距之大）.