习题课时间：11月9日

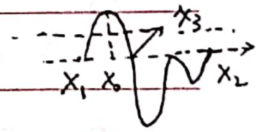
主要内容：函数导函数，高阶导数，Darboux定理.

1. 设$f(x)$为区间I上的可微函数，满足微分方程$f'(x)=g(f(x))$，其中g是在f的值域上有定义的函数. 证明：f一定是单调函数.

证：反证. 若$f(x_1)=f(x_2)$，$x_1<x_2$. 且$\exists\, x_0\in(x_1,x_2)$

$$f(x_0)=\max_{x\in[x_1,x_2]} f(x) > f(x_2).$$

(排除常值函数)



则$\exists\, x_3>x_0$，使$\forall x\in(x_0,x_3)$，有

$$f(x_2)<f(x)\leq f(x_0).$$

从而$\forall x\in(x_0,x_3)$，$\exists\, x^*\in(x,x_0]$，s.t.

$$f(x^*)=f(x).$$

① 若$f'(x^*)\geq 0$，则$f'(x)=f'(x^*)\geq 0$ ✓

② 若$f'(x^*)<0$，则f在x^*附近递减.

从而$\exists\, y\in(x^*,x_0)$，s.t.

$$f(y)<f(x^*)\leq f(x_0).$$

又知$\exists\, x^{**}\in(y,x_0]$，s.t. $f(x^{**})=f(x^*)=f(x)$.

记：$\phi(x)=\sup\{x'\in(x_1,x_0]\mid f(x')=f(x)\}$.

则$f(\phi(x))=f(x)$. (连续性)

由上知，若$f'(x^*)<0$，其中$x^*\in(x_1,x_0)$，$f(x^*)=f(x)$，则$\exists\, x^{**}\in(x^*,x_0)$，s.t. $f(x^{**})=f(x^*)=f(x)$，故$f'(\phi(x))\geq 0$.

从而 $f'(x)=f'(\phi(x))\geq 0$.

(特别地，若 $\phi(x)=x_0$，我们知道 $f'(x_0)=0$ 也成立)。

综上，$\forall x\in(x_0,x_3)$，$f'(x)\geq 0$

故 $f(x_3)\geq f(x_0)$

而由 $f(x_0)>f(x_2)$，知我们可选取 x_3，使 $f(x_3)<f(x_0)$.

从而产生矛盾! □

2、设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上二阶可导，且存在常数 $\beta\in(0,1)$，使得：

$$\lim_{x\to b^-}(b-x)^\beta f''(x)=c\in\mathbb{R}.$$

证明：可以补充定义 $f(b)$，使得 $f(x)\in C^1[a,b]$.

证：(注意此题不一定是 $\frac{0}{0}$ 型，所以不可以直接使用洛必达法则)。

只需证 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)$ 存在且有限。

此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续（满足 Lipschitz 性质），$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，且 $f'(b^-)=\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)$（Lagrange 中值定理），知 $f(x)\in C^1[a,b]$.

反证：

① 若 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=\infty$，由 Darboux 定理，知 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=+\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=-\infty$. 不妨设 $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)=+\infty$（即 $c\geq 0$），则

$$\left|f'(b-\tfrac{x}{2})-f'(b-x)\right|=\frac{x}{2}\left|f''(\xi)\right| \quad (x>0，充分小)$$

$$\leq\left|(b-\xi)f''(\xi)\right| \quad (\xi\in(b-\tfrac{x}{2},b-x)).$$

$$= (b-\xi)^{1-\beta} \left| (b-\xi)^{\beta} f''(\xi) \right|$$

$$\le \alpha^{1-\beta} (|c|+1).$$

当 $\alpha>0$ 充分小时.

$$\Rightarrow f'(b-\tfrac{\alpha}{2^k}) \le f'(b-\alpha) + (|c|+1) \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{\alpha}{2^l}\right)^{1-\beta}$$

(M 与 k 无关). $< M < +\infty$. $\left(0<\frac{1}{2^{1-\beta}}<1\right)$

与 $\lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$ 矛盾!

同理 $\lim_{x\to b^-} f'(x) = -\infty$ 亦不可!

② 若 $\lim_{x\to b^-} f'(x)$ 不存在. 由 Darboux 定理, 知存在

$$-\infty < l < L < +\infty.$$

及 $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subseteq (a,b)$, 知 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = b$,

且 $f'(x_n) = l$, $f'(y_n) = L$, $\forall n$.

此时由 Cauchy 中值定理, 存在 ξ_n 在 x_n 与 y_n 之间, 有

$$\left| \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{(b-x_n)^{1-\beta} - (b-y_n)^{1-\beta}} \right| = \left| \frac{f''(\xi_n)}{-(1-\beta)(b-\xi_n)^{-\beta}} \right| \to \left| -\frac{c}{1-\beta} \right| < +\infty.$$

但

$$\text{左边} = \left| \frac{l-L}{(b-x_n)^{1-\beta} - (b-y_n)^{1-\beta}} \right| \to +\infty \quad (n\to\infty).$$

矛盾!

综合 ① ② 即得欲证命题成立. $\square$

3. 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(a) = f'(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$,

使成立

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

证. 令 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & a<x\le b\\ f'(a) & x=a.\end{cases}$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$(a,b]$ 上可微，且

$$F'(x)=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{x-a},\quad x\in(a,b]$$

由 Darboux 定理，$F'(x)$ 在 (a,b) 上有介值性，知若结论不成立，则必有 $F'(x)>0$ 或 $F'(x)<0$ 恒成立.

不妨设 $F'(x)>0$（否则用 $-f$ 代替 f）

则 $F(x)$ 严格单调递增，有

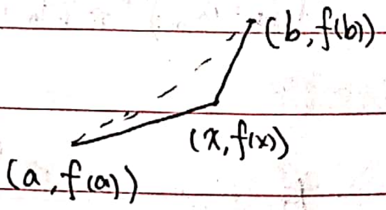
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

$\forall\ a<x<b$.

我们断言：$\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，$\forall\ a<x<b$. (*)

事实上，由

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\to C$$



$$=\underbrace{\frac{b-x}{b-a}}_{\lambda}\cdot\underbrace{\frac{f(b)-f(x)}{b-x}}_{A}+\underbrace{\frac{x-a}{b-a}}_{1-\lambda}\cdot\underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{B}$$

$\therefore\ C=\lambda A+(1-\lambda)B,\quad C>B$

$\Rightarrow\ C<\lambda A+(1-\lambda)C\ \Rightarrow\ A>C.$

从而断言成立. 在(*)式中令 $x\to b^-$，得

$$f'(a)\ge\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(a), \quad f'(a)=f'(b),$$

矛盾！故原命题成立。 □

4. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，又有 $c\in(a,b)$ 使成立 $f'(c)=0$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，满足

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{b-a}.$$

证：令 $g(x)=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}$

则

$$g'(x)=\left(f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}\right)e^{-\frac{x}{b-a}}$$

（辅助函数的找法："关于 $f'(\xi)=p(\xi)f(\xi)$ 型"：

希望寻找到 $F(x)$, $\eta(x)$，使

$$F'(x)=(f'(x)-p(x)f(x))\eta(x)$$

考虑到：$(f\eta)'=f'\eta+f\eta'$，只需

积分因子法

$$\eta'(x)=-p(x)\eta(x)$$

$$\Rightarrow \eta(x)=e^{-\int p(x)dx}$$

$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$

$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$

$\ln|y|=-\int p(x)$

$y=e^{-\int p(x)}$

$$F(x)=f\eta=f(x)e^{-\int p(x)dx}$$

（同样方法找下上题的辅助函数？）

本题中：$f \rightsquigarrow f(x)-f(a)$，$p(x)=\frac{1}{b-a}$

$$\Rightarrow \eta(x)=e^{-\frac{x}{b-a}},\quad F(x)=(f(x)-f(a))e^{-\frac{x}{b-a}}\text{)}$$

由Darboux定理知，若结论不成立，则 $g'(x)$ 恒大于0，或恒小于0。

不妨设 $g'(x)>0$，$\forall x\in(a,b)$。（否则用 $-f$ 代替 f）

则 $g(x)$ 严格递增。从而

$$g(x)\geq\lim_{x\to a^+}g(x)=0.$$

即 $f(x)\geq a$，$\forall a<x<b$。

但 $g'(c)=\Big(\underbrace{f'(c)}_{=0}-\underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{b-a}}_{>0}\Big)e^{-\frac{c}{b-a}}$

<0。

矛盾！故原命题成立。 □

5. 设 $f\in C^\infty(-\infty,+\infty)$ 为偶函数。证明：存在 $g\in C^\infty[0,+\infty)$，使：$f(x)=g(x^2)$，$\forall x\in\mathbb{R}$。

证：令 $g(x)=f(\sqrt{x})$，$\forall x\in[0,+\infty)$。只需证 $g(x)$ 在 $x=0$ 处光滑。

1). 首先由 f 为偶函数，我们断言：$f^{(n)}(0)=0$，若 n 为奇数。

事实上，对 $\forall n\in\mathbb{N}$，我们有：

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}h^l}{h^n}\quad ①$$

由洛必达法则，将 h 替换为 $-h$：

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\lim_{h\to0}\frac{f(-h)-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}(-h)^l}{h^n}\quad ②$$

①-②，得：

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(h)-f(-h)}{2}-\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{2k+1}h^{2k+1}}{h^n}$$

从而若 f 为偶函数，且 n 为奇数，由上并结合数学归纳法，即得 $f^{(n)}(0)=0$.

ii). 归纳证明 $g(x)$ 在 $x=0$ 处光滑，且：

(*) $$g^{(k)}(0)=\frac{k!}{(2k)!}f^{(2k)}(0),\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

同样类似于①式，我们有：

$$\begin{aligned}
\frac{g^{(k)}(0)}{k!}&=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-\sum\limits_{l=0}^{k-1}\frac{g^{(l)}(0)}{l!}h^l}{h^k}\\
&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-\sum\limits_{l=0}^{k-1}\frac{g^{(l)}(0)}{l!}h^{2l}}{h^{2k}} && h\rightsquigarrow h^2\\
&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-\sum\limits_{l=0}^{k-1}\frac{f^{(2l)}(0)}{(2l)!}h^{2l}}{h^{2k}} && (\text{归纳假设：(*)对 } 1\le l\le k-1 \text{ 成立})\\
&=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-\sum\limits_{l=0}^{2k-1}\frac{f^{(l)}(0)}{l!}h^{l}}{h^{2k}} && (\text{由 i)})\\
&=\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} && (\text{①式}).
\end{aligned}$$

即 $g^{(k)}(0)=\frac{k!}{(2k)!}f^{(2k)}(0)$. ($k=0$ 显然成立)

完成了归纳证明.

综上：$g(x)=f(\sqrt{x})$ 为 $[0,+\infty)$ 上光滑函数 □

$f(x)=g(x^2)=f(-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

①式说明了一列趋于某个点的点列逐渐决定了该点处它的导数值，若这数列极限已存在（或①式右边极限存在）

注：本题中 i) 亦可用带 Peano 余项的 Taylor 展开来证明。ii) 也亦可，但需要更谨慎一些。（本质是一样的）

*6. 设 $f(t,x)$ 于 $[0,1]\times\mathbb{R}$ 上连续，并且关于 x 严格递减。则方程：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

满足初值条件 $x(0)=0$ 的解在区间 $[0,1]$ 上唯一。

证：若不唯一，假设 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 为两不同解。

① $\sup\{t\in[0,1]: x_1(t)=x_2(t)\}=1$.

否则设 $0<T<1$，有

$T=\sup\{t\in[0,1]: x_1(t)=x_2(t)\}\Rightarrow x_1(T)=x_2(T)$.

则 $\exists\, T'$，$T<T'<1$，使 $x_1(T')\neq x_2(T')$，不妨设 $x_1(T')>x_2(T')$.

从而由 Lagrange 中值定理，知 $\exists\, T''\in(T,T')$，使

$$0<\frac{(x_1-x_2)(T')-(x_1-x_2)(T)}{T'-T}$$

$$=\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right)(T'')$$

$$=f(T'',x_1(T''))-f(T'',x_2(T''))$$

由 f 关于 x 严格递减，知 $x_1(T'')<x_2(T'')$

结合 $x_1(T')>x_2(T')$，由介值定理，知必 $\exists\, T^*\in(T',T'')$，即 $T<T^*<1$，使 $x_1(T^*)=x_2(T^*)$

而这与 T 的定义矛盾！即断言成立。

②. $S:=\{t\in[0,1]: x_1(t)=x_2(t)\}$. 则 S 不在 $[0,1]$

中科国察.

由 x_1, x_2 连续性知其成立.

③. 由②, 设 $[c,d] \subseteq [0,1] \setminus S$. 记

$$t_1 = \sup\{t \in S : t < c\}$$

$$t_2 = \inf\{t \in S : t > d\}$$

其中由①知 t_2 是良好定义的. 则 $x_1(t) - x_2(t)$ 在 (t_1, t_2) 上不变号.

不妨设 $x_1(t) > x_2(t)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$.

则 $f(t, x_1(t)) < f(t, x_2(t))$, $\forall t \in (t_1, t_2)$, 由 f 关于 x 严格递减.

从而 $\frac{dx_1}{dt}(t) < \frac{dx_2}{dt}(t)$, $\forall t \in (t_1, t_2)$.

由中值定理: $\exists \xi \in (t_1, t_2)$, 使

$$0 = \frac{(x_1 - x_2)(t_1) - (x_1 - x_2)(t_2)}{t_1 - t_2} = \left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right)(\xi) < 0.$$

矛盾! (或直接用单调性)

故假设不成立. 原命题成立. □

注: 本部分内容应作为2018-2019对应部分内容的补充材料. 更详细更核心的内容请参见2018-2019教案对应内容.