习题课时间：

主要内容：定积分计算、应用与可积性理论.

一、Cauchy 积分.

1、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，如果存在常数 I，使得对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对 $[a,b]$ 的任意分划 $P=\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$，只要 $\|P\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon.$$

则 $f\in R[a,b]$，且 $\int_a^b f\,dx = I$.

证：① Lebesgue 定理：有界函数 $f\in R[a,b] \Leftrightarrow$ f 的间断点集 $D(f)$ 为零测集.

② 记

$$\omega(x) = \varlimsup_{\delta\to 0^+}\{|f(x')-f(x'')| : x', x''\in B(x,\delta)\}.$$

则：i) $\forall t>0$，$\{x:\omega(x)<t\}$ 为开集

ii) x 为 f 连续点 $\Leftrightarrow$ $\omega(x)=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{D(f)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+}\{x:\omega(x)\geq \frac{1}{k}\}}$.

从而若 f 在 $[a,b]$ 上不 Riemann 可积，则存在 $\eta_0>0$，使 $G:=\{x\in[a,b]: \omega(x)\geq\eta_0\}$ 为闭集，且 G 有正测度（记为 $c>0$）.

此时 $\forall (s,t)\subset[a,b]$，若 $\exists x\in G$，使 $x\in(s,t)$，$(c,d)\cap G\neq\phi$.
则 f 在 (s,t) 上振幅：$\omega_{(s,t)}(f) > \frac{1}{2}\omega(x) \geq \frac{\eta_0}{2}$.

以下我们证明：存在 $[a,b]$ 两个足够"细"的分割 P_1, P_2，使得两者的 Cauchy 和的差 $> \frac{c\eta_0}{8}$.

作 $[a,b]$ 的 m 等分的等距分划 P_0.

考虑所有包含G中的点的P_0中的小区间（内点在G中或端点在G中）.

设其中一个这样的小区间 $[x_i, x_{i+1}]$.

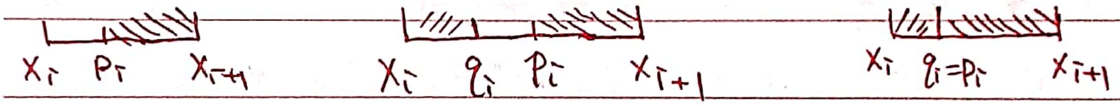
(1) 若 $x_i \notin G$，则存在最小的 $p_i \in (x_i, x_{i+1})$，$p_i \in G$（因为G是闭集），我们称 $[p_i, x_{i+1}]$ 为第一类小区间.

(2). 若 $x_i \in G$，则取 $q_i \in (x_i, x_{i+1})$，且满足

$$q_i - x_i < \frac{c}{2m},$$

我们称 $[x_i, q_i]$ 为第二类小区间.

进一步地，若 $q_i \notin G$，则存在最小的 $p_i \in (q_i, x_{i+1})$，$p_i \in G$，故又得到一个第一类小区间.



若 $q_i \in G$，取 $p_i = q_i$，$[p_i, x_{i+1}]$ 又为一第一类小区间.

i) 这样的两类小区间总共个数不超过 $2m$.

ii) 两类小区间包含了G中所有的点（最多除去b点）

注意到第二类小区间个数不超过m个，每个长度都小于 $\frac{c}{2m}$，故总长度 $< \frac{c}{2}$.

从而第一类小区间总长度 $> \frac{c}{2}$.

设 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的界为M，取

$$d = \min_i \left\{ p_i - x_i,\ x_{i+1} - p_i,\ \frac{c\eta_0}{32mM} \right\}$$

其中i取所有有 p_i 的那些 i.

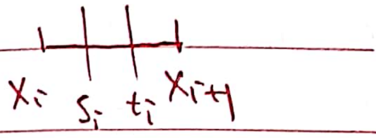
考虑每一个 $(p_i - d, p_i + d)$，由于 $p_i \in G = \{x : w(x) \geq \eta_0\}$，知 $\omega_{(p_i-d, p_i+d)}(f) > \frac{\eta_0}{2}$，即存在 s_i, t_i

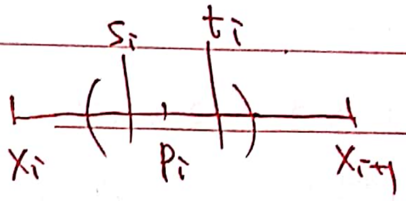
$\in (p_i-d,\ p_i+d)$，使

$$f(s_i)-f(t_i) > \frac{\eta_0}{2}.$$

下面构造 P_1 与 P_2.

P_1 为 P_0 所有分点并上所有 s_i，P_2 为 P_0 所有分点并上所有 t_i.





记 P_1 的 Cauchy 和为 S_1，P_2 的 Cauchy 和为 S_2，则 S_1 与 S_2 中不同的项为:

$$f(x_i)(s_i-x_i)+f(s_i)(x_{i+1}-s_i)$$

和

$$f(x_i)(t_i-x_i)+f(t_i)(x_{i+1}-t_i).$$

从这开始看需要什么样的条件!

从而

$$\begin{aligned} S_1-S_2 &= \sum_i f(x_i)(s_i-x_i)+f(s_i)(x_{i+1}-s_i) \\ &\quad - f(x_i)(t_i-x_i)-f(t_i)(x_{i+1}-t_i) \\ &= \sum_i f(x_i)(s_i-t_i) + (f(s_i)-f(t_i))(x_{i+1}-p_i) \\ &\quad + f(s_i)(p_i-s_i) - f(t_i)(p_i-t_i). \end{aligned}$$

其中:

$$\left|\sum_i f(x_i)(s_i-t_i)\right| < 2Mmd < \frac{c\eta_0}{16}.$$

$$\left|\sum_i f(s_i)(p_i-s_i)\right| < Mmd < \frac{c\eta_0}{32}.$$

$$\left|\sum_i f(t_i)(p_i-t_i)\right| < Mmd < \frac{c\eta_0}{32}.$$

而

$$\sum_i (f(s_i)-f(t_i))(x_{i+1}-p_i) > \frac{\eta_0}{2}\sum_i (x_{i+1}-p_i)$$

$$> \frac{c\eta_0}{4} \quad (\text{第一类小区间长度} > \tfrac{c}{2}\ \text{总})$$

故 $S_1-S_2>\frac{c\eta_0}{4}-\frac{c\eta_0}{16}-\frac{c\eta_0}{32}-\frac{c\eta_0}{32}=\frac{c\eta_0}{8}$，与m无关.

但由条件，当m充分大时，$|S_1-S_2|$ 应可充分小，矛盾！

从而必有 $f\in R[a,b]$. 此时由Riemann积分定义知 $\int_a^b f\,dx=I$. □

（从 $p_i\in D(f)$ 附近找函数值有一定差距的 s_i,t_i，（但 s_i,t_i 很接近，再反推发现需要 $\sum(x_{i+1}-p_i)$ 不太小而这样的条件，之后有的前面精细操作）.

思考题：第十二届大学生数学竞赛数学组A卷有这样的一个题目：

$[a,b]$ 上的划分 P：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}=b$，定义 $\|P\|=\max\limits_{0\le k\le n}(x_{k+1}-x_k)$. 对 $[a,b]$ 上函数 f，定义

$$S(f,P)=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(x_{k+1})-f(x_k)|^2}$$

若 $\lim\limits_{\|P\|\to0^+}S(f,P)$ 存在，则称曲线 $y=f(x)$ 可求长.

It证：若 f 满足Lipschitz条件，则 $y=f(x)$ 可求长.

现问：若任取 $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]$，$(k=0,\cdots,n)$

$$S'(f,P)=\sum_{k=0}^{n}\sqrt{|x_{k+1}-x_k|^2+|f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)|^2}$$

则若 f 可求长，是否一定有 $\lim\limits_{\|P\|\to0^+}S'(f,P)$ 存在？

二. DuBois-Reymond lemma.

2. 设 $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ 为连续函数，且对 $\forall \varphi \in C^1[a,b]$，满足 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，有

$$\int_a^b \left(f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x) \right) dx = 0.$$

证明：$f \in C^1[a,b]$，且 $f' = g$.

证： 引理： $\eta: [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，且对 $\forall \varphi \in C^1[a,b]$，满足 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，有

$$\int_a^b \eta(x)\varphi'(x)\,dx = 0,$$

则 f 为常值函数.

引理的证明： 取 $\varphi(x) = \int_a^x \eta(t)\,dt - \left(\int_a^b \eta(t)\,dt\right)\frac{x-a}{b-a}$

$$= \int_a^x \left(\eta(t) - \frac{\int_a^b \eta}{b-a} \right) dt.$$

则 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. 且 $\varphi'(x) = \eta(x) - \dfrac{\int_a^b \eta}{b-a}$.

$$\int_a^b \left(\eta(x) - \frac{\int_a^b \eta}{b-a} \right)^2 dx$$

$$= \int_a^b \eta^2(x)\,dx - \frac{2}{b-a}\left(\int_a^b \eta(x)\,dx\right)^2 + \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \eta(x)\,dx\right)^2$$

$$= \int_a^b \eta^2(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \eta(x)\,dx\right)^2$$

$$= \int_a^b \eta(x)\left(\eta(x) - \frac{\int_a^b \eta}{b-a} \right) dx$$

$$= \int_a^b \eta(x)\varphi'(x)\,dx = 0.$$

从而由 η 连续性，知

$$\eta(x) \equiv \frac{1}{b-a}\int_a^b \eta(t)\,dt.$$

原题的证明：取 $\eta(x) = f(x) - \int_a^x g(t)\,dt$

则对 $\forall \varphi \in C^1[a,b]$，$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$，有

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \eta(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_a^b \varphi'(x)\cdot\left(\int_a^x g(t)\,dt\right) dx \\
&= \int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b g(x)\cdot\varphi(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(f(x)\varphi'(x) + g(x)\varphi(x)\right) dx = 0.
\end{aligned}$$

（由分部积分公式及 $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.）

从而由引理：$f(x) - \int_a^x g(t)\,dt \equiv C$，即 $f(x) \in C^1[a,b]$，且 $f'(x) = g(x)$. □

注：将"$\varphi \in C^1[a,b]$"减弱为"$\varphi \in C^\infty[a,b]$"，上述结论依然成立.

练习题：(Weyl lemma) 设 $f \in C^2[a,b]$，且对 $\forall \varphi \in C^2[a,b]$，$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$ 的非负函数 φ，有：

$$\int_a^b f(x)\varphi''(x)\,dx \geq 0.$$

证明：$f(x)$ 为 $[a,b]$ 上凸函数.

（实际上结论对 $f \in C[a,b]$ 亦成立）.

三. 复合函数的可积性.

3. 证明：$\exists\, r(x) \in R[0,1]$，$f(x) \in C[0,1]$，使得 $r \circ f(x) \notin R[0,1]$.

证：取 $r(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. 下面构造 $f(x)$.

首先我们构造一个类 Cantor 集 C.

取 $0 < \lambda < \frac{1}{3}$. 将 $[0,1]$ 区间去掉中间 λ 长度的开区间 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)$.

然后剩余两个区间分别去掉中间两个长度为 λ^2 的开区间.

剩余四个区间再分别去掉中间四个长度为 λ^3 的开区间.

……

无穷进行下去，最终得到一个集合 C，则 C 为一个无内点闭集. $C = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$.

且测度：

$$m(C) = 1 - (\lambda + 2\lambda^2 + 2^2\lambda^3 + \cdots)$$
$$= 1 - \lambda \sum_{i=0}^{+\infty} (2\lambda)^i$$
$$= 1 - \lambda \frac{1}{1-2\lambda} = \frac{1-3\lambda}{1-2\lambda} > 0.$$

现设 $f(x): [0,1] \to [0,1]$:

若 $x \in C$，则 $f(x) = 0$.

若 $x \in [0,1] \setminus C$，则存在某个如上被去掉的开区间 I，使 $x \in I$. 设 $I = (\alpha, \beta)$，其中 $\alpha, \beta \in C$，

则令 $f(x) = (x - \alpha)(\beta - x)$，$\forall x \in I$
(≤ 1).

(注意到 $\forall x\in I$, $f(x)\le\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2\to 0$ $(\beta-\alpha\to 0)$).

可知 $f(x)\in C[0,1]$.

且有 $f([0,1])\subset[0,1]$, $\{x\mid f(x)=0\}=C$ 为上述类Cantor集.

从而 $f(x)$ 零点集无内点，且正测度.

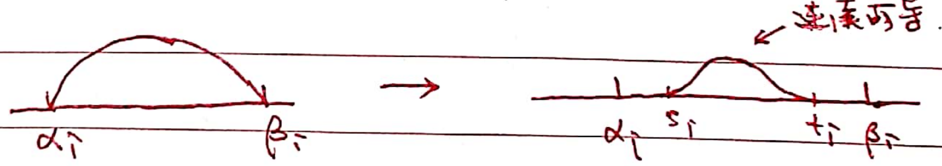
即 $r(f(x))$ 间断点集 $=\{x\mid f(x)=0\}=C$，为正测集.

故由Lebesgue定理，知 $r(f(x))\notin R[0,1]$. $\square$

注：亦可取 $r(x)$ 同上，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f_n(x)$，其中 $f_n(x)\in C[0,1]$，非负，一致有界，且 $f_n(x)\neq 0\iff x\in J_n$，这里 $J_n=\left(r_n-\frac{1}{4^n}, r_n+\frac{1}{4^n}\right)\cap(0,1)$，$\{r_n\}$ 为 $(0,1)$ 中有理数排成的序列.

练习题：证明存在 $[0,1]$ 上有界函数，且具有原函数，但在 $[0,1]$ 上不Riemann可积.

提示：对前述的函数略作修改.



$I_i=(\alpha_i,\beta_i)$　　　$I_i=(\alpha_i,\beta_i)$.

$x\in I_i$

$$\begin{cases}0\le f(x)\le(t_i-s_i)^2\\ \max\{|f'(x)|: x\in I_i\}=1\end{cases}$$

$f'(x)$ is OK.

思考题：是否可能有 $[0,1]$ 上有界函数，且具有原函数，但在 $[0,1]$ 的任意子区间上均不Riemann可积?