习题课时间：11月30日

主要内容：洛必达法则.

1. 设 $f\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$，且 $f(\frac{1}{n})=0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$.

求证：$f^{(n)}(0)=0$，$\forall n\in\mathbb{N}$.

证：更一般地，设 $f\in C^{\infty}(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，$\{x_n\}\subseteq(a,b)\setminus\{x_0\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 若 $f(x_n)=0$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$，则 $f^{(n)}(x_0)=0$，$\forall n\in\mathbb{N}$.

事实上，$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$. 且由归纳法设：

$$f^{(k)}(x_0)=k!\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h-\cdots-\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}h^{k-1}}{h^k}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x_0)=k!\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)-f'(x_0)(x_n-x_0)-\cdots-\frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!}(x_n-x_0)^{k-1}}{(x_n-x_0)^k}$$

知 $f^{(k)}(x_0)=0$，$\forall k\in\mathbb{N}$.

特别地，$x_0=0$，$x_n=\frac{1}{n}$，即为原题. □

2. 计算极限：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x+\sin\frac{1}{x}}{\ln\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)-\sin\frac{1}{x}}$$

解：由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)=-\infty$.

而 $\sin\frac{1}{x}$ 有界，故只需求：

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{\to -\infty}{\ln x}}{\underset{\to -\infty}{\ln\left(\frac{\ln(1-x)}{\ln x}\right)}}$$

扫描全能王 创建

北京大学数学科学学院
School of Mathematical Sciences
Peking University

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln(-\ln(1-x)) - \ln(-\ln x)}$$ （注意负号）（也可以加绝对值）

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{(1-x)\ln(1-x)} - \frac{1}{x\ln x}}$$ （洛必达） $\boxed{\text{洛!}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{(1-x)\ln(1-x)\ln x}{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$ （$1-x\to 1$，$\ln(1-x)\sim -x$）

而 $\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x\ln x} = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)} = 1.$$

即所求极限为 1. □

3. 设 f 在 x_0 处有 n 阶导数，证明：

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0+kh)}{h^n}.$$

证：$\lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0+kh) = f(x_0) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k$

$= (1-1)^n f(x_0) = 0$

故由洛必达法则（$\frac{0}{0}$型），得

右边 $= \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot k f'(x_0+kh)}{n h^{n-1}}$ $\boxed{\text{洛!}}$

扫描全能王 创建

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot k^2 f''(x_0+kh)}{n^2 h^{n-2}} \qquad \boxed{\text{再洛!}}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot k^{n-1} f^{(n-1)}(x_0+kh)}{n!\, h} \qquad \boxed{\text{洛}(n-1)\text{次!}}$$

其中每一步成立的前提是:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^l = 0, \quad l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

(每一步都是 $\frac{0}{0}$ 型).

另外有:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^n = n!$$

而 $$\lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \cdot k^{n-1} f^{(n-1)}(x_0+kh)}{n!\, h} \qquad \boxed{\text{不能洛!}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^n \cdot \left(\frac{f^{(n-1)}(x_0+kh) - f^{(n-1)}(x_0)}{kh} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^n \right) f^{(n)}(x_0) \qquad (\text{导数定义})$$

$$= \frac{n!}{n!} f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \qquad \square$$

注: 不能保证 f 在 x_0 附近有 n 阶导(更不一定连续), 所以最后一步不能用洛必达法则, 而是用导数定义!

扫描全能王 创建

4. 设 $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$，且 $f(0)=0$. 若定义函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$$

证明：$g(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$.

证：显然 $g(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

归纳证明：$g(x)\in C^{n}(-\infty,+\infty)$，且 $g^{(n)}(0)=\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. $\forall n\in\mathbb{N}$. ($n=1$ 显然成立)

假设 $g(x)\in C^{n}(-\infty,+\infty)$，欲证 $g(x)\in C^{n+1}(-\infty,+\infty)$，只需证 $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n+1)}(x)$ 存在并有限.（Lagrange 中值定理）

由洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0} g^{(n+1)}(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\dfrac{(n+1)!}{k!}f^{(k)}(x)\,x^{k}}{x^{n+2}}$$

$f(0)=0$ 合理，可以洛！

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\dfrac{(n+1)!}{k!}f^{(k+1)}(x)\,x^{k}+\sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\dfrac{(n+1)!}{(k-1)!}f^{(k)}(x)\,x^{k-1}}{(n+2)x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n+2)}(x)\,x^{n+1}}{(n+2)\,x^{n+1}}=\frac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$$ 存在且有限.

从而 $g(x)\in C^{n+1}(-\infty,+\infty)$，且 $g^{(n+1)}(0)=\dfrac{f^{(n+2)}(0)}{n+2}$.

故 $g(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$，且 $g^{(n)}(0)=\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$，$\forall n\in\mathbb{N}$. □

5. 设 $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$ 为偶函数，则 $\exists\, g(x)\in C^{\infty}[0,+\infty)$，使 $f(x)=g(x^2)$.

证. 定义 $g(x)=f(\sqrt{x})$，$\forall x\geq 0$. 则 $g(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$

归纳证明. $g(x)\in C^{n}[0,+\infty)$，且 $g^{(n)}(0)=\dfrac{n!}{(2n)!}f^{(2n)}(0)$.

扫描全能王 创建

假设 $g(x)\in C^n[0,+\infty)$，同样只需证：

$$\lim_{x\to 0^+} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(0).$$

注意到：

$$g^{(n+1)}(x) = \left(\left(f(\sqrt{x})\right)'\right)^{(n)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})\right)^{(n)} \qquad (x>0)$$

记 $h(x)=\frac{f'(x)}{x}$ $h(0)=f''(0)$，则由 $f(x)$ 为偶函数，知 $f'(0)=0$，

又 $f'(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$，由第4题，知 $h(x)\in C^\infty(-\infty,+\infty)$.

又 f 为偶函数可知 $f'(x)$ 为奇函数，从而 $h(x)$ 亦为偶函数.

从而在归纳假设中，用 h 代替 f，有

$$\lim_{x\to 0^+}\left(h(\sqrt{x})\right)^{(n)} = \frac{n!}{(2n)!} h^{(2n)}(0)$$

$$= \frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{f^{(2n+2)}(0)}{2n+1} \quad \text{第4题结论.}$$

$$= 2\cdot\frac{(n+1)!}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(0)$$

即：$$\lim_{x\to 0^+} g^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(0).$$

综上，由数学归纳法，得证 $g(x)\in C^\infty[0,+\infty)$.

（且 $g^{(n)}(0)=\frac{n!}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \frac{1}{2^n\cdot(2n-1)!!} f^{(2n)}(0)$. □

扫描全能王 创建

推论：① 若 $f(x) \in C^\infty(-\infty,+\infty)$ 且为奇函数，则 $\exists\, g(x) \in C^\infty[0,+\infty)$，使 $f(x) = x\,g(x^2)$.

（$\dfrac{f(x)}{x} \in C^\infty(-\infty,+\infty)$ 且为偶函数）.

② $\cos(\sqrt{x}) \in C^\infty[0,+\infty)$，$e^{-\frac{1}{|x|}}$，$e^{-\frac{1}{\sqrt{|x|}}}$，$\cdots \in C^\infty(-\infty,+\infty)$

③ $\forall f(x) \in C^\infty(-\infty,+\infty)$，$\exists\, g_1, g_2 \in C^\infty[0,+\infty)$，使 $f(x) = g_1(x^2) + x\,g_2(x^2)$.

注：（参见 Lars Hörmander《The Analysis of Linear Partial Differential Operators I》. Exercise 1.1）

① $g(x) = f(\sqrt{x})$，$x \geq 0$，则

$$g^{(n)}(x) = \frac{2^{1-2n}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t^2)^{n-1} f^{(2n)}(t\sqrt{x})\,dt.$$

$\Rightarrow g \in C^\infty[0,+\infty)$.

② 由本书中定理 1.2.6（或 Borel's lemma），知 $\exists\, g_0 \in C^\infty(-\infty,+\infty)$，使

$$g_0^{(n)}(0) = \frac{n!}{(2n)!} f^{(2n)}(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

则 $f_1(x) := f(x) - g_0(x^2) \in C^\infty(-\infty,+\infty)$，且 $f_1^{(n)}(0) = 0$，$\forall n \in \mathbb{N}$. 只需说明 $f_1(\sqrt{x}) \in C^\infty[0,+\infty)$，则有 $g(x) = f(\sqrt{x}) \in C^\infty[0,+\infty)$.

（$f_1^{(n)}(0) = 0 \Rightarrow f_1(x) = o(x^N)$，$x \to 0$，$\forall N \in \mathbb{N}_+$

$\Rightarrow f_1(\sqrt{x}) = o(x^N)$，$x \to 0$，$\forall N \in \mathbb{N}_+$

结合 Bruno 公式归纳（或直接归纳）即得）.

可以令 g_0 为 N_n 次多项式（系数如前），类似地证明 $g \in C^n[0,+\infty)$，$\forall n$.
N_n 充分大 $(N_n \gg n)$
（这样就不需要 Borel's lemma）

来自 [illegible]

扫描全能王 创建

不妨假设 Borel's lemma 成立.

取②中 g_0, $f_1(x) := f(x) - g_0(x^2) \Rightarrow f_1^{(n)}(0) = 0, \forall n$.

则令 $g_1(x) := f_1(\sqrt{x})$, $x \geq 0$, 有:

$$f_1(x) = o(x^N), \quad x \to 0^+, \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow g_1(x) = o(x^N), \quad x \to 0^+, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

同样, 用 $f_1^{(k)}$ 代替 f_1, 可知

$$f_1^{(k)}(x) = o(x^N), \quad x \to 0^+, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

对 $\forall k \in \mathbb{N}$ 成立. 而由 Bruno 公式:

$$D^n(f_1 \circ g)(x) = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n} \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} (D^k f_1)(g(x)) \underbrace{\left(\frac{Dg(x)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{D^n g(x)}{n!}\right)^{k_n}}_{\text{分母有限 } x \text{ 次方}}$$

其中 $k = k_1 + \cdots + k_n$, $g(x) = \sqrt{x}$, f_1 如上. $(x \geq 0)$

如上我们知道:

$$(D^k f_1)(g(x)) = f_1^{(k)}(\sqrt{x}) = o(x^N), \quad x \to 0^+, \quad \forall N.$$

从而可得 $D^n(f_1 \circ g)(x) = o(x^N)$, $x \to 0^+$, $\forall N$. $(\forall n)$

即 $g_1^{(n)}(x) = o(x^N)$, $x \to 0^+$, $\forall N$. $(\forall n)$

特别地, $\lim\limits_{x \to 0^+} g_1^{(n)}(x) = 0$, $\forall n$.

由此得 $g_1(x) \in C^\infty[0, +\infty)$.

从而 $g(x) = f(\sqrt{x}) = g_1(x) + g_0(x) \in C^\infty[0, +\infty)$ $(x \geq 0)$ 即得证.

(如果取 g_0 是上述 g_0 的前充分多项数的多项式, 则后面各种 $\cdots = o(x^N)$, "$\forall N$ 成立" 改为 "充分大 N 成立" (N 跟随 n 选取, 且 $N \gg n$), 则可以不必使用 Borel's lemma)

扫描全能王 创建