习题课时间：11月19日

主要内容：期中考试题，导数的定义.

一、本班期中考试题.

1. 构造一个 $(0,1)$ 上函数，在有理数处不连续，在无理数处连续，且存在一个第二类间断点.

解：记 $(0,1)$ 中的所有有理数为 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$

令 $f(x) = \sum_{r_i<x} \frac{1}{2^i} \quad (0<x<1)$.

则 $\forall x \in (0,1)$，$f(x)$ 收敛，且 $0<f(x)<1$，$f(x)$ 递增.

① 设 $x_0 \in (0,1)$，$x_0 \notin \mathbb{Q}$：

指标小于某个指定正整数的 $(0,1)$ 中的有理数只有有限个（r_i 指标为 i），知 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$\exists \delta>0$，使区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中没有指标小于等于 n 的有理数（$x_0 \notin \mathbb{Q}$）.

则 $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$，$|f(x)-f(x_0)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$，

而 $\frac{1}{2^n} \to 0 \ (n\to\infty)$，知 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

② 设 $x_0 \in (0,1)$，$x_0 \in \mathbb{Q}$，设 $x_0 = r_k$，$k \in \mathbb{N}_+$.

同上，知 $\forall n>k, n\in\mathbb{N}_+$，$\exists \delta>0$，使 $(x_0-\delta, x_0)$ 中没有指标小于等于 n 的有理数，$[x_0, x_0+\delta)$ 中含有小于等于 n 的有理数有且仅有 $x_0 = r_k$ 自身. 同理得：

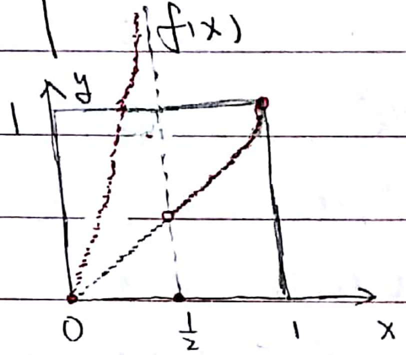
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2^k}$$

从而 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

且同理可知 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1$.

故令.

$$F(x)=\begin{cases}\tan\left(\frac{\pi}{2}f(2x)\right) & 0<x<\frac{1}{2}\\ 0 & x=\frac{1}{2}\\ f(x) & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$$



则 $F(x)$ 以 $\frac{1}{2}$ 为第二类间断点，且在 $(0,1)$ 中的有理数处不连续，无理数处连续。 □

2. 用有限覆盖定理证明有限闭区间上连续函数必取得最大值。

证：设 $f(x)\in C[a,b]$，若结论对 f 不成立，设 M 为 $f(x)$ 上确界。

则 $\forall x_0\in[a,b]$，$f(x_0)<M$。

由 f 连续性，知 $\forall x_0\in[a,b]$，存在 $\delta_{x_0}>0$，及 $M_{x_0}<M$，知 $\forall x\in(x_0-\delta_{x_0},\ x_0+\delta_{x_0})\cap[a,b]=U_{x_0}$（或将 $f(x)$ 在 a,b 两端稍微连续延拓出去），有 $f(x)\le M_{x_0}<M$。

则 $\{U_x : x\in[a,b]\}$ 构成 $[a,b]$ 的开覆盖。

由有限覆盖定理，存在有限子覆盖，记为 $U_{x_1}, U_{x_2},\cdots,U_{x_n}$，则由上知，$\forall x\in[a,b]$，$f(x)\le\max\{M_{x_1},M_{x_2},\cdots,M_{x_n}\}<M$，与 M 为 f 的上确界矛

盾！ $\square$

注：① $\{f^{-1}((-\infty, M-\frac{1}{n})) : n\in\mathbb{N}_+\}$ 构成 $[a,b]$ 的开覆盖，有限覆盖定理 $\Rightarrow \exists n_0$，使 $f(x) < M-\frac{1}{n_0}$，$\forall x\in[a,b]$，与 M 为上确界矛盾！ $\square$

② 连续函数 $\Leftrightarrow$ 开集的原像是开集
$\Leftrightarrow$ 闭集的原像是闭集.

③ 开集 $E\subset\mathbb{R}$：$\forall x\in E$，$\exists\delta>0$，$(x-\delta, x+\delta)\subset E$.
闭集 $F\subset\mathbb{R}$；F^c 为开集. 或 $\forall\{x_n\}\subset F$，$x_n\to x\in\mathbb{R}$，则 $x\in F$.

④. 相对开集：$[a,b]$ 中相对开集：I 为 $\mathbb{R}$ 中开集，则 $I\cap[a,b]$ 为 $[a,b]$ 中相对开集.（诱导拓扑）

3. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界，连续但不一致连续，则 $\exists\eta\in\mathbb{R}$，使 $f(x)=\eta$ 在 (a,b) 中有无穷多解.

证：由例 3.3.9：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 均存在. 对 $f\in C(a,b)$.

又 $f(x)$ 有界，知 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 必有一个不存在. 不妨设 $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ 不存在. 即

$$\varliminf_{x\to b-} f(x) = A < B = \varlimsup_{x\to b-} f(x),\quad (-\infty<A,\ B<+\infty)$$

（第三章习题29题）.

设 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset(a,b)$，$x_n\to b$，$y_n\to b\ (n\to\infty)$. 且 $f(x_n)\to A$，$f(y_n)\to B\ (n\to\infty)$ 则对 $\forall\eta$，$A<\eta<B$，$\exists N$，

使 $\forall n>N$，有 $x_n<\eta$，$y_n>\eta$.

则由 $f(x)$ 连续，由介值定理，$\exists z_n\in(a,b)$，z_n 在 x_n，y_n 之间，使 $f(z_n)=\eta$ $(n=N+1,N+2,\cdots)$

而 $x_n,y_n\to b$ $(n\to\infty)$，由夹逼原理，知 $z_n\to b$ $(n\to\infty)$，从而 $\{z_{N+1},z_{N+2},\cdots\}$ 为无穷多个 $f(x)=\eta$ 的解.

$(\forall\eta\in(A,B))$ □

二、课后习题.

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有定义，$f'(0)$ 存在，求

$$\lim_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)-nf(0)\right]$$

解：由 $f'(0)$ 存在，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，有 $\forall\ 0<x\leq\frac{1}{n}$，

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-f'(0)\right|<\varepsilon$$

即：
$$f'(0)+\varepsilon<\frac{f(x)-f(0)}{x}<f'(0)+\varepsilon$$

令 $x=\frac{k}{n^2}\leq\frac{1}{n}$ $(k=1,2,\cdots,n)$，有

$$f'(0)-\varepsilon<\frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)}{\frac{k}{n^2}}<f(0)+\varepsilon$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(f'(0)-\varepsilon)<\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}(f'(0)-\varepsilon)\qquad<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(f'(0)-\varepsilon)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}f'(0)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)\right) = \frac{f'(0)}{2}. \qquad \square$$

二、隔壁班期中考试题.

1.(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

解：$u = \cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}$，$v = x^2$

$$(u-1)v = \left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}-1\right)x^2$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x^2}} + \frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \to -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2} \quad (x\to\infty).$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e^{\frac{1}{2}} \qquad \square$$

1.(3). $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(\pi n!e)$.

解：$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}$，$\frac{n}{n+1}<\theta_n<1$.

$$\pi n!e = \pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!\,n}\right)$$

$$= \pi(1+n+\underbrace{n(n-1)+\cdots+n!+n!}_{\text{偶数},\ n\geq 2}) + \frac{\theta_n}{n}\pi$$

$$\Rightarrow \sin(\pi n!e) = (-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\theta_n}{n}\pi\right), \quad \frac{\pi}{n+1}<\frac{\theta_n}{n}\pi<\frac{\pi}{n}.$$

n 偶数，$n\sin(\pi n!e)\to -\pi$

n 奇数，$n\sin(\pi n!e)\to \pi$

$\{n\sin(\pi n!e)\}$ 发散. $\square$

2.(3). 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上均一致连续，且 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$. 问是否 $f(x)g(x)$ 一定在 $[0,+\infty)$ 上一致连续？

解：不一定！ $f(x)=x+1$， $g(x)=\frac{1}{x+1}\cos x^2$.

$g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0 \Rightarrow g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.（第三章第40题）

$f(x)$ 显然一致连续.

而 $f(x)g(x)=\cos x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续（第三章第37题(2)）. □.

4. 假设 $g(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，$g(0)=1$，$g(1)=0$. 如果存在一个定义在 $[0,1]$ 的连续函数 $h(x)$ 使得 $g(x)+h(x)$ 单调上升. 证明：$g(x)$ 可以取到 0 与 1 之间的任一实数.

证：任取 $\eta\in(0,1)$，假设 $g(x)=\eta$ 没有解.

令 $a_1=0$，$b_1=1$，则 $g(a_1)>\eta>g(b_1)$.

假设 a_k, b_k 已选取，使 $a_k<b_k$，$g(a_k)>\eta>g(b_k)$. 考虑 $\frac{a_k+b_k}{2}$. 若 $g(\frac{a_k+b_k}{2})<\eta$，令 $a_{k+1}=a_k$，$b_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$；若 $g(\frac{a_k+b_k}{2})>\eta$，令 $a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}$，$b_{k+1}=b_k$.

由此得到区间套 $[a_n,b_n]$，a_n 递增，b_n 递减，$b_n-a_n\to0$. $g(a_n)>\eta>g(b_n)$，$\forall n$.

由区间套定理，设 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=x_0\in(0,1)$. 则由 $g(x)+h(x)$ 单调上升.

$$\eta+h(a_n)<g(a_n)+h(a_n)\le g(x_0)+h(x_0)$$
$$\le g(b_n)+h(b_n)<\eta+h(b_n)$$

而 h 连续，知 $h(a_n)\to h(x_0)$，$h(b_n)\to h(x_0)$. 从而令 $n\to\infty$，有 $\eta+h(x_0)\le g(x_0)+h(x_0)\le \eta+h(x_0)$，即 $g(x_0)=\eta$，矛盾！ □

6. 设 $f\in C[0,1]$，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(1)}{n}=M$$

事实上：左边的极限正是 $\int_0^1 f(x)dx$.

$\Leftrightarrow$ g 可积，$g\ge 0$. $\int_0^1 g(x)=0$ g 在所有连续点上取 0

其中 M 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值. 证明：$f(x)\equiv M$.

证：假设 $\exists\, x_0\in[0,1]$，$f(x_0)<M$，则 $\exists\,\delta_0, \varepsilon_0>0$，使 $\forall x\in(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\cap[0,1]$，有 $f(x)<M-\varepsilon_0$.

对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，记 $\#_n=\#(\{0,\frac{1}{n},\cdots,1\}\cap(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)\cap[0,1])$，则由抽屉原理，知：$\#_n\ge[\frac{\delta_0}{\frac{1}{n}}]=[\delta_0 n]$

对于 $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists N$，使 $n>N$ 时，有

$$\frac{f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(1)}{n+1}\ge M-\varepsilon_1$$

而由上，知 $f(0)+f(\frac{1}{n})+\cdots+f(1)\le \#_n(M-\varepsilon_0)+(n+1-\#_n)M=(n+1)M-\#_n\varepsilon_0$

故有：$(n+1)M-\#_n\varepsilon_0\ge(n+1)(M-\varepsilon_1)$

$$(n+1)\varepsilon_1\ge\#_n\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1\ge\frac{\#_n}{n+1}\varepsilon_0\ge\frac{[\delta_0 n]}{n+1}\varepsilon_0\quad(\forall n>N)$$

$$\varepsilon_1\ge\frac{\delta_0 n-1}{n+1}\varepsilon_0\to\delta_0\varepsilon_0\quad(n\to\infty)$$

故取 $\varepsilon_1<\delta_0\varepsilon_0$，即得矛盾. □

7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上最小正周期为 $\mu\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$ 的连续函数. 求证: $\{f(n)\}$ 发散.

证: 由 $\frac{1}{\mu}\in\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$, 知 $\left\{\{n\frac{1}{\mu}\}=n\frac{1}{\mu}-[n\frac{1}{\mu}]: n\in\mathbb{N}_+\right\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密.

而 $f(n)=f(\mu\cdot[n\frac{1}{\mu}]+\mu\{n\frac{1}{\mu}\})$

$=f(\mu\{n\frac{1}{\mu}\})$.

设 $\{n_k\}$, $\{n_k'\}$, 使:

$\{n_k\frac{1}{\mu}\}\to a$, $\{n_k'\frac{1}{\mu}\}\to b$, $k\to\infty$

其中 $a, b\in[0,1]$, 且 $f(a\mu)\neq f(b\mu)$.

若不存在这样的 a, b, 则 f 恒为常数, 无最小正周期, 矛盾!

从而由 f 连续, $f(n_k)=f(\mu\{n_k\frac{1}{\mu}\})\to f(a\mu)$, $f(n_k')=f(\mu\{n_k'\frac{1}{\mu}\})\to f(b\mu)$, 且 $f(a\mu)\neq f(b\mu)$.

即得 $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散.

(事实上 $\{f(n)\}$ 在 Range $f(x)$ 中稠密) $\square$

值域

2. (4) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且 $|f(x)|$ 一致连续, 问 $f(x)$ 是否一致连续?

解: 是! 由 $|f(x)|$ 一致连续, 知 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, 使 $\forall\, x_1, x_2\in\mathbb{R}$, 且 $|x_1-x_2|<\delta$, 有 $\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big|<\frac{\varepsilon}{2}$.

下面分三种情况:

① $f(x_1), f(x_2)\geqslant 0$, 有 $|f(x_1)|=f(x_1)$, $|f(x_2)|=f(x_2)$, 从而 $|f(x_1)-f(x_2)|=\big||f(x_1)|-|f(x_2)|\big|<\frac{\varepsilon}{2}$.

② $f(x_1), f(x_2) \le 0$，有 $|f(x_1)| = -f(x_1)$，$|f(x_2)| = -f(x_2)$.
从而 $|f(x_1) - f(x_2)| = \big||f(x_2)| - |f(x_1)|\big| < \frac{\varepsilon}{2}$.

③ $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 中一个大于等于0，一个小于等于0：

则由 f 连续，介值定理，知存在 ξ，在 x_1, x_2 之间，使 $f(\xi) = 0$. 从而 $|x_1 - \xi| \le |x_1 - x_2| < \delta$，$|x_2 - \xi| < \delta$. 故 $\big||f(x_1)| - |f(\xi)|\big| < \frac{\varepsilon}{2}$，$\big||f(x_2)| - |f(\xi)|\big| < \frac{\varepsilon}{2}$. 即 $|f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$，$|f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$，从而由绝对值不等式：$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1)| + |f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

综上①②③，由定义知 $f(x)$ 一致连续. □

注：
$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) := \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$，$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

f 连续 $\Leftrightarrow$ $f^+(x), f^-(x)$ 均连续.

f 连续，则 f 一致连续 $\Leftrightarrow$ $f^+(x), f^-(x)$ 均一致连续 $\Leftrightarrow$ $|f(x)|$ 一致连续.

5. 设 $f(x)$ 是定义在整个实数轴上的连续函数. 证明：函数方程 $f(f(x)) = -x^3 + \sin(x^2 + \ln(1+|x|))$ 不可能有连续解.

证. 假设存在 $f(x)$ 满足题意. 由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(f(x)) = \infty$，

下证 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$.

否则存在 $\{x_n\}$, $|x_n|\to+\infty\ (n\to\infty)$, 但 $f(x_n)\in[-A,A]\ (\forall n)$, 对某个 $A>0$. 则由 f 连续 $\Rightarrow$ f 在 $[-A,A]$ 上有界, 知 $\{f(f(x_n))\}$ 有界. 但由 $\lim_{x\to\infty} f(f(x))=\infty$, 及 $\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$, 知 $\lim_{n\to\infty}|f(f(x_n))|=+\infty$, 矛盾!

再证必有 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$.

否则存在 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_n\to+\infty$, $b_n\to+\infty\ (n\to\infty)$, 使 $f(a_n)\to+\infty$, $f(b_n)\to-\infty$. 取充分大 n, 使 $f(a_n)>0$, $f(b_n)<0$, 即知存在 c_n 在 a_n, b_n 之间, 使 $f(c_n)=0$. 由夹逼原理, 又知 $\lim_{n\to\infty} c_n=+\infty$, 与 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ 矛盾!

同理, 必有 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 或 $-\infty$.

① 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 则 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$, 矛盾!

② 若 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, 则 $\lim_{x\to-\infty} f(f(x))=-\infty$, 矛盾!

③ 若 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, 则 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))=+\infty$, 矛盾!

综上, 即得. 不存在满足题意的连续函数. □