习题课时间：9月17日

主要内容：n个常用不等式

一、三角不等式

定理：对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$，有：

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|.$$

证明：首先由绝对值定义，有

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|, \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

两式相加，得

$$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|.$$

即

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|.$$

另一方面，由上式亦有：

$$\begin{aligned}|x| &= |x+y-y| \\ &\leqslant |x+y| + |-y| \\ &= |x+y| + |y|\end{aligned}$$

得

$$|x+y| \geqslant |x|-|y|.$$

调换 x, y 顺序，有

$$|x+y| \geqslant |y|-|x|$$

此即

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y|.$$

从而得

$$||x|-|y|| \le |x+y| \le |x|+|y|.$$

再将 y 替换为 $-y$，就得到：

$$||x|-|y|| \le |x-y| \le |x|+|y|. \qquad \square$$

二. 伯努利（Bernoulli）不等式.

定理：对任意 $n \in \mathbb{N}_+$，$x > -1$，有：

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

注：此不等式可以推广为：

$$(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x \quad (\alpha \ge 1,\ x > -1)$$

$$(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x \quad (0 \le \alpha < 1,\ x > -1)$$

交由同学们用高中所学知识验证. $f(x)=(1+x)^\alpha-(1+\alpha x)$ $(x>-1)$

证明：① $x \ge 0$ 时：

由二项式定理，

$$(1+x)^n = 1+C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$\ge 1+C_n^1 x$$

$$= 1+nx \quad (x \ge 0,\ n \in \mathbb{N}_+).$$

② $-1 < x < 0$ 时：

我们首先证明这样一个推广结论：

引理：设 $n \in \mathbb{N}_+$，$0 < x_i < 1$ $(1 \le i \le n)$，则有

$$(1-x_1)\cdots(1-x_n) \ge 1-x_1-\cdots-x_n.$$

引理证明：数学归纳法，$n=1$ 时显然.

假设对 $n=k\,(k\in\mathbb{N}_+)$，结论成立。

则 $n=k+1$ 时：

$$(1-x_1)\cdots(1-x_k)(1-x_{k+1})$$

$$\geq (1-x_1-\cdots-x_k)(1-x_{k+1})$$ 归纳假设，$0<x_{k+1}<1$

$$= 1-x_1-\cdots-x_k-x_{k+1}+(x_1+\cdots+x_k)x_{k+1}$$ $x_i>0\,(\forall i)$

$$\geq 1-x_1-\cdots-x_k-x_{k+1}.$$

从而由数学归纳法，引理成立。

回到原题，令 $x_i=-x\ (1\leq i\leq n)$，即得 $(1+x)^n\geq 1+nx$ 对 $-1<x<0$ 成立。

综合 ①② 知定理成立。 $\square$.

二、均值不等式.

<u>定理</u>：对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$a_i>0\ (\forall 1\leq i\leq n)$，有

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$

<u>注1</u>. 令 $A_n=\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)$，$G_n=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$.

A_n 称为 $a_1,\ldots,a_n$ 的算术平均值，G_n 称为几何平均值.

若再令：

$$H_n=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

$$Q_n=\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

H_n 称为调和平均值，Q_n 称为平方平均值.

则有：

$$H_n \le G_n \le A_n \le Q_n.$$

其中 $H_n \le G_n$ 可由 $G_n \le A_n$ 推出：

由 $G_n \le A_n$，有：

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot\cdots\cdot a_n}}$$

即：$\frac{1}{H_n} \ge \frac{1}{G_n} \Leftrightarrow H_n \le G_n$.

另一方面：

$$A_n \le Q_n \Leftrightarrow (a_1+\cdots+a_n)^2 \le n(a_1^2+\cdots+a_n^2)$$
$$\Leftrightarrow (n-1)(a_1^2+\cdots+a_n^2) \ge 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j$$
$$\Leftrightarrow \sum_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)^2 \ge 0.$$

证明：介绍一种特殊的归纳法. 向前一向后归纳法.
分三步证明这个不等式：

① 不等式对 $n=1, 2$ 成立.

② 不等式对 $n=2^k$ ($k\in \mathbb{N}_+$) 均成立（普通数学归纳法）.

③ 不等式对 n 成立，则对 $n-1$ 亦成立.

① $n=1$ 显然. $n=2$ 就是基本不等式.

② $k=1$ 由① 已知成立. 现假设 $n=2^k$ 时成立，当 $n=2^{k+1}$ 时：

由归纳假设，有

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}}$$

及：

$$\frac{a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

两式相加，并用基本不等式 $(n=2)$，有

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1\cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

$$\geq 2\cdot\sqrt[2^{k+1}]{a_1\cdots a_{2^k}a_{2^k+1}\cdots a_{2^{k+1}}}$$

即

$$\frac{a_1+\cdots+a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{a_1\cdots a_{2^{k+1}}}$$

即知 $n=2^{k+1}$ 时不等式亦成立。

此时由数学归纳法，即得 ① 中欲证结论。

③. 假设不等式对 n 成立。

$(n-1)$：对 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 添加一项 $\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}$，由上述归纳假设：

$$a_1+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n} \geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}}$$

或记为：

$$(n-1)A_{n-1}+A_{n-1} \geq n\left(G_{n-1}^{n-1}A_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

化简，得

$$A_{n-1} \geqslant \left(G_{n-1}^{n-1} A_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$A_{n-1}^{n} \geqslant G_{n-1}^{n-1} A_{n-1}$$

$$A_{n-1}^{n-1} \geqslant G_{n-1}^{n-1}$$

$$A_{n-1} \geqslant G_{n-1}.$$

最后，我们结合①②③，即知原不等式对所有正整数 n 都成立。 □

注2：幂平均值不等式：

对任意固定 $a_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，记：

$$M_p=\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

对 $\forall p>0$.

则有如下幂平均值不等式成立，

$$M_p \leqslant M_q \quad (0<p\leqslant q).$$

而以后会证明的事实：

$$\lim_{p\to+\infty} M_p = \max\{a_1,\cdots,a_n\}$$

$$\lim_{p\to0^+} M_p = G_n = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

所以有时候会将如上分别记为 M_∞ 与 M_0.

四. 柯西(Cauchy)不等式

定理. $\forall n\in\mathbb{N}_+$，$a_i, b_i\in\mathbb{R}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，有：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

证明：通过证明拉格朗日（Lagrange）恒等式来得到这个结果：

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

事实上：

RHS ← 右边 $= \sum_{1\le i,j\le n} a_i^2 b_j^2 - \sum_{1\le i<j\le n}\left(a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}(a_i b_i)(a_j b_j).$$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 =$ 左边 → LHS $\square$.

思考题：一二三四这些不等式中，每个的等号成立等价条件是什么？

延伸介绍：

① Hölder 不等式：

$\forall\, n\in\mathbb{N}_+$，$a_i, b_i\in\mathbb{R}$ $(1\le i\le n)$，$1<p,q<\infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有：

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

（$p=q=2$ 时，此即 Cauchy 不等式）

② Minkowski 不等式：

$\forall n \in \mathbb{N}_+$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$, $1 < p < \infty$ 有:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Hölder不等式与Minkowski不等式以及它们的级数、积分形式将在实变函数论、泛函分析等课程时常接触到。

推荐参考书:

Hardy - Littlewood - Polya 著《不等式》(Inequalities).