习题课时间：11月26日

主要内容：

一、作业问题：

等价无穷小代换不能用于加减！（复合视情况可以）

例：$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(2^x-1)-(3^x-1)}{(3^x-1)-(4^x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln2-x\ln3}{x\ln3-x\ln4}$

$a^x-1\sim x\ln a$

$(a>0,\ a\neq1)$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln2-\ln3}{\ln3-\ln4}$ ×

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\frac{2}{3})^x-1}{1-(\frac{4}{3})^x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln\frac{2}{3}}{-x\ln\frac{4}{3}}=\frac{\ln2-\ln3}{\ln3-\ln4}$ ✓

否则：

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$ ×

事实上：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}$.

二、课后习题

17. 设在 $x=1$ 处有 $\frac{d}{dx}f(x^2)=\frac{d}{dx}f^2(x)$，求证：$f'(1)=0$ 或

$f(1)=1$.

证. 由复合函数求导法则:

$$(f(x^2))'\big|_{x=1} = 2xf'(x^2)\big|_{x=1} = 2f'(1)$$

$$(f^2(x))'\big|_{x=1} = 2f(x)f'(x)\big|_{x=1} = 2f(1)f'(1).$$

从而 $2f'(1)=2f(1)f'(1) \Leftrightarrow f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$. $\square$

28. (2) 用反函数求导法则计算:

$(\operatorname{arcsinh} x)'$, $(\operatorname{arccosh} x)'$, $(\operatorname{arctanh} x)'$

$(\operatorname{arccoth} x)'$, $(\operatorname{arcsinh}(\tanh x))'$.

解. ① $(\sinh x)'=\cosh x \Rightarrow (\operatorname{arcsinh} x)' = 1/\cosh(\operatorname{arcsinh} x)$

而 $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \Rightarrow \cosh x=\sqrt{1+\sinh^2 x}$

$$\Rightarrow (\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

(事实上, $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$(\operatorname{arcsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.)

② $(\cosh x)'=\sinh x$. $\Rightarrow (\operatorname{arccosh} x)' = 1/\sinh(\operatorname{arccosh} x)$

$\sinh x=\sqrt{\cosh^2 x-1}$

$$\Rightarrow (\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x>1).$$

③ $(\tanh x)' = -\dfrac{1}{\cosh^2 x} \Rightarrow (\operatorname{arctanh} x)' = -\cosh^2(\operatorname{arctanh} x)$

$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1 \Rightarrow \cosh^2 x-\cosh^2 x\tanh^2 x=1$

$$\Rightarrow \cosh^2 x = \frac{1}{1-\tanh^2 x}$$

$\Rightarrow (\operatorname{arctanh} x)' = -\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{x^2-1}$. $(-1<x<1)$.

④. $(\coth x)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} \Rightarrow (\operatorname{arccoth} x)' = -\sinh^2(\operatorname{arccoth} x)$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \sinh^2 x \coth^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\Rightarrow \sinh^2 x = \dfrac{1}{\coth^2 x - 1}$

$\Rightarrow (\operatorname{arccoth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(x<-1$ 或 $x>1)$

⑤. $(\operatorname{arcsinh}(\tanh x))' = \operatorname{arcsinh}'(\tanh x)(\tanh x)'$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tanh^2 x}}\left(-\frac{1}{\cosh^2 x}\right).$$

$$= -\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x + \sinh^2 x}} \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\cosh x\sqrt{\cosh 2x}} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

注：一定要注意定义域！一定要注意定义域！一定要注意定义域！(重要的事情说三遍).

补充内容.

1. 判断做法是否有问题：

$y = \dfrac{x}{\sin x}$，求 $y'(x)$. $(x \neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z})$.

解1. $\ln y = \ln x - \ln\sin x$ ✗

$\Rightarrow y'/y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{x\cos x}{\sin^2 x}$ $(x\neq n\pi, n\in\mathbb{Z})$

解2： $|y| = |x|/|\sin x|$

$\ln|y| = \ln|x| - \ln|\sin x|$

$\Rightarrow y'/y = \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}$

$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sin x} - \frac{x\cos x}{\sin^2 x} \quad (x \neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z}).$

√

练习：求 $y'(x)$

$y = \frac{(1+x^2)\, x^{\sin x}}{\sqrt[3]{x^4}\,\sin^7 x}$

$(x>0,\ x\neq n\pi,\ n\in\mathbb{Z})$

2. 令 $a_1 < \cdots < a_n$ 为 n 次多项式 $f(x)$ 的根，$b_1 < \cdots < b_{n-1}$ 为 $f'(x)$ 的根．求 $\sum_{i,j}(b_i - a_j)^{-1}$.

解．由题意，可设 $f(x) = c(x-a_1)\cdots(x-a_n)$，$c\neq 0$.

则 $f'(x) = c(x-a_2)\cdots(x-a_n) + \cdots + c(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})$

$= c(x-a_1)\cdots(x-a_n)\left(\frac{1}{x-a_1} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}\right)$

其中 $x \neq a_1, \cdots, a_n$.

设对某个 b_i，$\exists\, a_j$，使 $b_i = a_j$.

则 $0 = f'(b_i) = c(b_i - a_j)\left[\sum_{l\neq j}\prod_{k\neq j,l}(b_i - a_k)\right]$

$+ \prod_{k\neq j}(b_i - a_k)$

$= \prod_{k\neq j}(a_j - a_k) \neq 0 \quad (\forall k\neq j,\ a_k\neq a_j).$

矛盾！ 从而可令 $x = b_i$ $(i=1,\cdots,n-1)$，有

$0 = f'(b_i) = c(b_i-a_1)\cdots(b_i-a_n)\left(\frac{1}{b_i-a_1} + \cdots + \frac{1}{b_i-a_n}\right)$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{b_i-a_j} = 0 \quad (i=1,\cdots,n-1).$

故 $\sum_{i,j}\frac{1}{b_i-a_j} = 0.$ □

3. $f(x)=(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$x_i\neq x_j\,(i\neq j)$.

$g(x)=x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_0$.

证明：$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}=1$.

证：$f'(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x-x_1)\cdots\widehat{(x-x_i)}\cdots(x-x_n)=\prod_{k\neq i}(x-x_i)$.

$\Rightarrow f'(x_j)=\displaystyle\prod_{k\neq j}(x_j-x_k)\quad(j=1,\cdots,n)$.

令 $h(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(g(x_j)\prod_{k\neq j}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)$ (Lagrange插值)

则 $h(x_j)=g(x_j)\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

而 h, g 均为 $(n-1)$ 次多项式（至多），从而 $h(x)=g(x)$.

故由 $g(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(g(x_j)\prod_{k\neq j}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}\right)$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}\prod_{k\neq j}(x-x_k)\right).$$

比较两边 x^{n-1} 项系数，得 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{g(x_j)}{f'(x_j)}=1$. □

4. 求和：$S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\left(\frac{x}{2^k}\right)$. $(x\neq m\pi,\ m\in\mathbb{Z})$.

解：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k}=-\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right|\right)'$

$$=-\left(\ln\left|\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|\right)'$$

$$=-\left(\ln\left|\frac{\sin x}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right|\right)'$$

$$= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x. \quad \square$$

推论：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \cot x \quad (x \neq m\pi, m\in\mathbb{Z})$.

5. 求证：在 $\mathbb{R}$ 上不存在可导函数 f，使其满足：

$$f\circ f(x) = x^2 - 3x + 3$$

证：考虑 $f(f(x)) = x$ 的解.

$f(f(x)) = x \iff x^2 - 3x + 3 = x \iff x = 1$ 或 3.

则必有 $f(1) = 3$，$f(3) = 1$ 或 $f(1) = 1$，$f(3) = 3$

（数学分析习题课教程(2)延伸问题四）.

从而由 $f(f(x)) = x^2 - 3x + 3$，有 $f'(f(x))f'(x) = 2x - 3$

① $f(1) = 3$，$f(3) = 1$：$f'(3)f'(1) = -1$，且 $f'(1)f'(3) = 3$.

则 $[f'(1)f'(3)]^2 = -3$，矛盾！

② $f(1) = 1$，$f(3) = 3$：令 $x = 1$，$f'(1)f'(1) = -1$，矛盾！

故不存在这样的 f. $\square$