习题课时间：10月29日

主要内容：上、下极限，序列极限的总结回顾

一、Cauchy收敛准则相关问题

1. 设从某个数列 $\{a_n\}$ 定义：

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\quad y_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|,\qquad (n \in \mathbb{N}_+).$$

若数列 $\{y_n\}$ 收敛，证明数列 $\{x_n\}$ 也收敛。

证：若 $\{y_n\}$ 收敛，由Cauchy收敛准则，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in \mathbb{N}_+$，使 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbb{N}_+$，有：

$$|y_{n+p} - y_n| < \varepsilon,$$

即

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

而

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

即

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon,$$

从而由Cauchy收敛准则，知 $\{x_n\}$ 也收敛。 □

注：①若 y_n 收敛，称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 绝对收敛。
②若 y_n 发散，x_n 收敛，称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 条件收敛。

2. 设 $\{a_n\}$ 是一个正的递增数列，证明：若数列 $B_n := \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k} - 1\right)$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必有界。

证：假设 $\{a_n\}$ 无界，即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

令 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} - 1$，则对 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$p \in \mathbb{N}_+$，有：

$$b_n + \cdots + b_{n+p} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} + \cdots + \frac{a_{n+p} - a_{n+p-1}}{a_{n+p-1}}$$

$$\geq \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+p}} + \cdots + \frac{a_{n+p} - a_{n+p-1}}{a_{n+p}}$$

$$= \frac{a_{n+p} - a_n}{a_{n+p}} = 1 - \frac{a_n}{a_{n+p}}$$

由于 $\{a_n\}$ 无界，对任意 n，存在 p，使得 $\dfrac{a_n}{a_{n+p}} < \dfrac{1}{2}$.

即 $|B_{n+p} - B_{n-1}| > \dfrac{1}{2}$. 与 $\{B_n\}$ 为 Cauchy 列矛盾！

故 $\{a_n\}$ 必有界. □

思考题：若 $\{a_n\}$ 有界，是否 $\{B_n\}$ 必收敛？

二、序列上、下极限.

1. 设 $\{a_n\}$ 为正数列，证明：

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

证：记 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = B$.

① $0 < A < +\infty$，则由定义，对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}_+$，对 $\forall n \geq N$，有：

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant A-\varepsilon. \qquad (0<\varepsilon<A)$$

则 $\frac{a_{N+p}}{a_N} = \frac{a_{N+p}}{a_{N+p-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \geqslant (A-\varepsilon)^p$

从而 $\sqrt[N+p]{a_{N+p}} \geqslant (A-\varepsilon)^{\frac{p}{N+p}} a_N^{\frac{1}{N+p}} \to A-\varepsilon \ (p\to\infty)$

即有 $\varliminf_{p\to\infty} \sqrt[N+p]{a_{N+p}} \geqslant A-\varepsilon. \Rightarrow \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant A-\varepsilon.$

令 $\varepsilon\to 0$，即有 $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geqslant A.$

② $A=0$，结论显然.

③ $A=+\infty$. 即 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$

$\forall M>0$，存在 $N\in \mathbb{N}_+$，$n\geqslant N$ 时，有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 2M.$$

则 $\frac{a_{N+p}}{a_N} = \frac{a_{N+p}}{a_{N+p-1}} \cdots \frac{a_{N+1}}{a_N} \geqslant (2M)^p$

从而 $\sqrt[N+p]{a_{N+p}} \geqslant (2M)^{\frac{p}{N+p}} a_N^{\frac{1}{N+p}} \to 2M \ (p\to+\infty)$

故 n 充分大时，有 $\sqrt[n]{a_n} \geqslant M.$ $(\forall M>0)$

由定义，有 $\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty.$

综合①②③，得 $\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$

同理可证. $\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \varlimsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$. 另一个不等式显然成立.

□

推论1：$\{a_n\}$为正数列，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

推论2：$\{a_n\}$为正数列，若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

$\{a_n\}$为正数列，若$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. （D'Alembert 判别法）.

（Cauchy 判别法：$a_n\geq 0$，且$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$. 则

i). $q<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

ii). $q>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

思考题：Cauchy 判别法与 D'Alembert 判别法，哪一个更强？

2. 设$a_n>0$，求证：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geq 1.$$

证：假设该结论不成立，则存在N，当$n\geq N$时，有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)<1$$

此即：

$$\frac{a_n}{n}-\frac{a_{n+1}}{n+1}>\frac{1}{n+1}\qquad n=N,N+1,\cdots$$

从而:

$$\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+p}}{N+p}=\left(\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+1}}{N+1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_{N+p-1}}{N+p+1}-\frac{a_{N+p}}{N+p}\right)$$

$$>\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+p}$$

即 $\frac{a_N}{N}>\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+p}\to+\infty\quad(p\to\infty)$.

矛盾! □

*3. 数列 $\{x_n\}$ 满足: $\frac{1}{2}\leq x_1,\ x_2\leq 2$, $x_n=\frac{2}{x_{n-1}+x_{n-2}}$. 求证: $\{x_n\}$ 收敛.

证: 由数学归纳法, 可证: $x_n\in[\frac{1}{2},2]$, $\forall n\in\mathbb{N}_+$.

① 设 $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n=a$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=b$. 则 $\frac{1}{2}\leq a\leq b\leq 2$.

$$\frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\Rightarrow \min\{x_{n-1},x_{n-2}\}\leq\frac{1}{x_n}\leq\max\{x_{n-1},x_{n-2}\}.$$

故 $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\max\{x_{n-1},x_{n-2}\}=\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

即 $\frac{1}{a}\leq b$, $ab\geq 1$.

同理: $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\geq\underline{\lim}_{n\to\infty}\min\{x_{n-1},x_{n-2}\}=\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$

即 $\frac{1}{b}\geq a$, $ab\leq 1$, 故 $ab=1$.

②. 现在设 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k+2}\}$ 使 $x_{n_k+2}\to b$.

通过不断取子列而收敛子列, 可以假设数列 $\{x_{n_k+1}\}$, $\{x_{n_k}\}$, $\{x_{n_k-1}\}$ 均收敛, 且:

$$x_{n_k+1}\to l_1,\quad x_{n_k}\to l_2,\quad x_{n_k-1}\to l_3.$$

则由

$$\frac{2}{x_{n_k+2}} = x_{n_k+1} + x_{n_k}, \quad \frac{2}{x_{n_k+1}} = x_{n_k} + x_{n_k-1}$$

得:

$$l_1 + l_2 = \frac{2}{b}, \quad l_2 + l_3 = \frac{2}{l_1}$$

另一方面，有 $a \leq l_1, l_2, l_3 \leq b$.

由: $2a \leq l_1 + l_2 = \frac{2}{b} = 2a$, $\Rightarrow l_1 = l_2 = a$.

代入 $l_2 + l_3 = \frac{2}{l_1} \Rightarrow l_3 = \frac{2}{a} - a = 2b - a \geq b$.

而 $l_3 \leq b \Rightarrow l_3 = b$.

从而 $l_2 = \frac{2}{l_1} - l_3 = \frac{2}{a} - b = 2b - b = b$.

故 $a = l_2 = b$.

由 a, b 定义，$\{x_n\}$ 收敛. □

三、书上习题

33. 证明：若非负有界序列 $\{x_n\}$ 对任何序列 $\{y_n\}$ 都有下列等式之一成立：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n + y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (x_n y_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

则序列 $\{x_n\}$ 收敛.

证：反证法．假设 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{n_k}\}$、$\{x_{m_k}\}$ 满足 $x_{n_k} \to \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = B$, $x_{m_k} \to \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = A$, $0 \leq A < B$.

令 $y_n = \begin{cases} x_{m_k} + B, & 若 n = m_k 对某个 k, \\ -x_n, & 反之. \end{cases}$

则：

$$x_n+y_n=\begin{cases}2x_{m_k}+B, & n=m_k,\ \exists k\\ 0, & n\neq m_k\ \forall k.\end{cases}$$

$$x_ny_n=\begin{cases}x_{m_k}^2+Bx_{m_k} & n=m_k,\ \exists k\\ -x_n^2 & n\neq m_k,\ \forall k\end{cases}$$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=2A+B$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=A+B$.

若第一个式子成立，则 $2A+B=B+A+B\Rightarrow A=B$，矛盾！

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=A^2+AB$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=A+B$

若第二个式子成立，则 $A^2+AB=B(A+B)\Rightarrow A^2=B^2$，由 $A,B\geq 0$，知 $A=B$，也矛盾！

故必有 $\{x_n\}$ 收敛 $\square$

35. 设序列 $\{x_n\}$ 有界，且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$$

再设 $l=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 和 $L=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，试证明 $[l,L]$ 中任意一个数都是此序列的一个子列的极限（极限点：$\overline{\{x_n\}}=[l,L]$）

证：$l=L$ 时显然，下设 $l<L$.

任取 $a\in(l,L)$，$\varepsilon>0$ 充分小时，有 $[a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2}]\subset(l,L)$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，知存在 N，$n\geq N$ 时，有 $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$.

由 l,L 定义，知存在 $n_1,n_2\geq N$，$n_1<n_2$，使

$x_{n_1} \in (l, a-\frac{\varepsilon}{2})$，$x_{n_2} \in (a+\frac{\varepsilon}{2}, L)$.

类似于习题课教案3中最后一题，由 $|x_{n+1}-x_n| < \varepsilon$ ($n_1 \leq n \leq n_2 - 1$)，知必存在 n，$n_1 < n < n_2$，使 $x_n \in (a-\frac{\varepsilon}{2}, a+\frac{\varepsilon}{2})$.

取一系列递减的 $\varepsilon_k \to 0$，并不断向后地如上取 $x_{n_k} \in (a-\frac{\varepsilon_k}{2}, a+\frac{\varepsilon_k}{2})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = a$. 即 a 为 $\{x_n\}$ 的一个子列的极限. □.

37. 设序列 $\{x_n\}$ 满足：对任意 $n, m \in \mathbb{N}$，有：

$$0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m$$

证明序列 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 存在极限.

证：先固定 $p \in \mathbb{N}_+$，则 $\forall n \in \mathbb{N}$，可写成 $n = kp + i$，其中 $k \in \mathbb{N}_+$，$i = 0, 1, \cdots, p-1$. 则：

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{kp+i}}{kp+i} \leq \frac{k x_p + x_i}{kp+i}$$

$$\leq \frac{k x_p + x_i}{kp} \leq \frac{x_p}{p} + \frac{\max\limits_{0\leq i\leq p-1}\{x_i\}}{kp}.$$

令 $k \to +\infty$，并将 i 取遍 $0, 1, \cdots, p-1$，知

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leq \frac{x_p}{p}$$

上式对 $\forall p \in \mathbb{N}_+$ 成立. 从而

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \leq \inf_{p\in\mathbb{N}_+} \frac{x_p}{p} \leq \varliminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$$

从而 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\inf\frac{x_n}{n}$. □

补充题：

1. 若数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，且 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 收敛，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$.

证：由 Cauchy 收敛准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$n>N$ 时，$\forall p$ 有

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon.$$

特别地取 $p=n$，由 $\{a_n\}$ 递减，得：

$$na_{2n}\leq a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\varepsilon$$

故得 $\lim\limits_{n\to\infty}2na_{2n}=0$. 而 $(2n+1)a_{2n+1}\leq 2na_{2n}+a_{2n+1}$，及 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$. □

思考题 ①若去掉 $\{a_n\}$ 递减这个条件，只要求 $a_n>0$，该论是否仍然成立？

② 逆命题是否成立？

*推广：若数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，且 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}n^{\alpha}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha+1}a_n=0$

2. 设 $b>a>0$，$d>0$，且

$$x_n=\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)(b+2d)\cdots(b+nd)}$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

证：$\{x_n\}$ 单调递减有下界，故设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 由 Stolz 定理：

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{n x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} [n x_n - (n-1) x_{n-1}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[n \frac{a+nd}{b+nd} x_{n-1} - (n-1) x_{n-1} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(a-b+d)+b}{b+nd} x_{n-1}$$

$$= \frac{a-b+d}{d} x$$

从而 $x = \frac{a-b+d}{d} x$，$b>a$，$d>0$，即得 $x=0$. $\square$

推论：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$.

猜想：$x_n \sim C(b+nd)^{-\frac{b-a}{d}}$ $(n\to\infty)$，$C>0$ 常数.

推论：$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ 收敛当且仅当 $b-a>d$.

3. 设 $a>0$，$d>0$，$b>a+d$，令

$$x_n = \frac{a(a+d)\cdots(a+nd)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}$$

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{b-a-d}$.

证. 记 $A_n = x_n(a+(n+1)d)$，则

$$A_{n-1} - A_n = x_n(b-a-d) \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

记 $A_{-1}=a$，$x_{-1}=1$.

则两边求和，有：

$$A_{-1}-A_n=(b-a-d)S_n$$

$$a-A_n=(b-a-d)S_n$$

$$A_n=\frac{a(a+d)\cdots(a+(n+1)d)}{b(b+d)\cdots(b+nd)}$$

$$=a\,\frac{(a+d)[(a+d)+d]\cdots[(a+d)+nd]}{b\,(b+d)\cdots(b+nd)}$$

由于 $b>a+d$，由第2题，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b-a-d}\left(a-\lim\limits_{n\to\infty}A_n\right)=\frac{a}{b-a-d}$. $\square$

*推论：由 Bernoulli 不等式 $(b-a>d)$：

$$\frac{a+kd}{b+kd}=1-\frac{b-a}{b+kd}=1+\frac{b-a}{d}\left(-\frac{d}{b+kd}\right)$$

$$\le\left(1-\frac{d}{b+kd}\right)^{\frac{b-a}{d}}=\left(\frac{b+(k-1)d}{b+kd}\right)^{\frac{b-a}{d}}$$

$$\Rightarrow x_n\le\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b+d}\cdots\frac{b+(n-1)d}{b+nd}\right)^{\frac{b-a}{d}}=\left(\frac{a}{b+nd}\right)^{\frac{b-a}{d}}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x_k=\frac{a}{b-a-d}$，得：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(b+nd)^{\frac{b-a}{d}}}\ge\frac{a^{1-\frac{b-a}{d}}}{b-a-d}$$

特别地，$b=2$，$d=1$，$\alpha=b-a\in(1,2)$，有 $\zeta(\alpha)\ge 1+\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)^{\alpha-1}}$.