习题课时间：12月24日.

主要内容：函数凹凸性；微分理论的复习.

一. 函数凹凸性的应用.

1. 求证：$0<x<\frac{\pi}{4}$，则 $(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$.

证：只需证：$\ln\cos x-\tan x\ln\sin x>0$.

由 $\ln x$ 为凹函数，知对 $\forall$ 正数 $a\neq b$, $0<\lambda<1$. 有

$$\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)>\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$$

若 $\lambda a+(1-\lambda)b=\cos x$；$\lambda=\tan x$，$a=\sin x$，

可解出 $b=\sin x+\cos x$.（$b>a$），从而

$$\ln\cos x>\tan x\ln\sin x+(1-\tan x)\ln(\sin x+\cos x).$$

而 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$1-\tan x>0$，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>1$.

故：$\ln\cos x-\tan x\ln\sin x>0$. 得证！ □.

2. 假设 $a_n\le\cdots\le a_2\le a_1$，$f(x)$ 在 $[a_n,a_1]$ 上为凸函数，证明：

$$\sum_{k=1}^{n}f(a_{k+1})a_k\le\sum_{k=1}^{n}f(a_k)a_{k+1}$$

其中 $a_{n+1}=a_1$.

证：$n=1,2$ 时 情况均显然成立.

假设 $n>2$，$\{a_n\}$ 为一递减数列. 令

$$S_n=(f(a_n)a_1-f(a_1)a_n)+\sum_{k=1}^{n-1}(f(a_k)a_{k+1}-f(a_{k+1})a_k).$$

而由 f 凸性，有

$$f(a_n)=f\Big(\frac{a_n-a_{n+1}}{a_1-a_{n+1}}a_1+\frac{a_1-a_n}{a_1-a_{n+1}}a_{n+1}\Big)$$

$$\le \frac{a_n - a_{n+1}}{a_1 - a_{n+1}} f(a_1) + \frac{a_1 - a_n}{a_1 - a_{n+1}} f(a_{n+1})$$

即：$(a_{n+1} - a_1) f(a_n) + (a_n - a_{n+1}) f(a_1) + (a_1 - a_n) f(a_{n+1}) \geq 0$

从而 $S_{n+1} - S_n \geq 0$. 而 $S_2 \geq 0$，故 $S_n \geq 0$，$\forall\ n \geq 2$.

从而结论成立． □

2. 微分方程解的唯一性．

1. 微分方程：

$$\begin{cases} y'' + p(x) y' + q(x) y = r(x), & x \in (a,b) \\ y(a) = A, \\ y(b) = B. \end{cases}$$

其中 $q(x) < 0$，A, B 为常数，如果这个方程有 $[a,b]$ 上有连续的解，则解必是唯一的．

证：假设 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均为满足如上条件的解

令 $y_0(x) = y_1(x) - y_2(x)$，则 y_0 满足：

$$\begin{cases} y_0'' + p(x) y_0' + q(x) y_0 = 0 \\ y_0(a) = 0 \\ y_0(b) = 0. \end{cases}$$

欲证 $y_0(x) \equiv 0$，只需证 $M := \max\limits_{x \in [a,b]} y_0(x) = 0$，$m :=$ $\min\limits_{x \in [a,b]} y_0(x) = 0$．

假设 $M = y_0(x_1) > 0$，则 $y_0'(x_1) = 0$．故有：

$$y_0''(x_1) + q(x_1) y_0(x_1) = 0$$

又 $q(x_1) < 0$，$y_0(x_1) > 0 \Rightarrow y_0''(x_1) > 0$．但由 $y_0'(x_1) = 0$，

那此时 x_1 为 $y_0(x)$ 的严格极小值点，这与 x_1 为 $y_0(x)$ 的最大值点矛盾！

故只能有 $M=0$.

同理可知 $m=0$. 故 $y_0(x)\equiv 0$, $y_1(x)\equiv y_2(x)$

即原方程的解唯一. □

（极值原理）

2. 用 $a\le x\le b$, $\alpha\le y\le\beta$ 表示平面上的矩形 R. 设 ϕ 是定义在 R 上的实函数. 所谓初值问题

$$y'=\phi(x,y),\quad y(a)=c\quad(\alpha\le c\le\beta)$$

的解，按照它的定义来说，是 $[a,b]$ 上的一个可微函数，它合于 $f(a)=c$, $\alpha\le f(x)\le\beta$, 而且

$$f'(x)=\phi(x,f(x))\quad(a\le x\le b)$$

试证，如果有一个常数 A，只要 $(x,y_1)\in R$, $(x,y_2)\in R$，就必定有：

$$|\phi(x,y_1)-\phi(x,y_2)|\le A|y_1-y_2|.$$

那么初值问题的解是唯一的.

证：假设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 均为如上问题的解，则：

$$f_1'(x)-f_2'(x)=\phi(x,f_1(x))-\phi(x,f_2(x))$$

$$f_1(a)=f_2(a)=c$$

令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$, $x\in[a,b]$. 则 $F(a)=0$. 且

$$\begin{aligned}|F'(x)|&=|\phi(x,f_1(x))-\phi(x,f_2(x))|\\&\le A|f_1(x)-f_2(x)|\\&=A|F(x)|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |F'(x)F(x)| \le A|F^2(x)|$$

令 $G(x)=F^2(x)\ge 0$，则 $G'(x)=2F'(x)F(x)\le 2AF^2(x)$
$=2AG(x)$. $\Rightarrow \left(e^{-2Ax}G(x)\right)'=\left(G'(x)-2AG(x)\right)\cdot e^{-2Ax}\le 0$

故 $e^{-2Ax}G(x)\le e^{-2Aa}G(a)=e^{-2Aa}F^2(a)=0$

$\Rightarrow G(x)\le 0$，又 $G(x)\ge 0$，故 $G(x)\equiv 0$.

从而 $F(x)\equiv 0$，$f_1(x)\equiv f_2(x)$.

即原初值问题的解唯一. □

注：以后会证明，满足如上条件的初值问题在局部上是必有解的（Picard 序列方法）.

三. 补充内容

1. 若 $f(x)$ 为开区间 I 上的连续函数，则 f 为 I 上凸函数当且仅当：对 $\forall x\in I$，

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\ge 0.$$

证. f 为凸函数时显然有该式成立.

反过来，我们先证一个引理.

引理：若 f 为 I 上连续函数但不为凸函数，则 $\exists y\in I$，$c\in\mathbb{R}$，及 $\varepsilon>0$，使 $|h|$ 充分小时，有：

$$f(y+h)\le f(y)+ch-\varepsilon h^2.$$

引理证明：由于：f 为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall J=[a,b]\subset I$，J 上线性函数 g，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，有 $f(x)\le g(x)$，

$\forall x \in J$.

反过来，由于 f 不为凸函数，知存在 $J=[a,b]\subset I$，g 为 J 上线性函数，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，但有 $\max_{x\in J}(f-g)>0$. 从而 $\exists\, \varepsilon>0$，使

$$f_\varepsilon(x) := f(x)-g(x)+\varepsilon(x-a)(x-b)$$

满足：$\max_{x\in J} f_\varepsilon(x)>0$. 而 $f_\varepsilon(a)=f_\varepsilon(b)=0$. 设 $y\in J$，使 $f_\varepsilon(y)=\max_{x\in J} f_\varepsilon(x)$. 故

$$f(x)-g(x)+\varepsilon(x-a)(x-b) =: f_\varepsilon(x)$$
$$\le f_\varepsilon(y)=f(y)-g(y)+\varepsilon(y-a)(y-b)$$

$\forall x\in J$，记 $x=y+h$，则由 g 为线性函数：$g(x)=g(y)+kh$，$k=g'(x)$.

从而有：

$$f(x)\le f(y)+(k+\varepsilon(a+b-2y))h-\varepsilon h^2,$$

只要 $y+h\in J$. 故 $c=k+\varepsilon(a+b-2y)$ 满足要求.

原题证明：假设 $f(x)$ 不为 I 上凸函数，则由引理，$\exists\, y\in I$，$c\in\mathbb{R}$，$\varepsilon>0$，使 $|h|$ 充分小时：

$$f(y+h)\le f(y)+ch-\varepsilon h^2.$$

同时有：$f(y-h)\le f(y)-ch-\varepsilon h^2$

$$故\quad \frac{f(y+h)+f(y-h)-2f(y)}{h^2}\le -2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varlimsup_{h\to 0}\frac{f(y+h)+f(y-h)-2f(y)}{h^2}\le -2\varepsilon<0$$

与题设矛盾！故 f 为 I 上凸函数 $\square$

推论：若 f 为 I 上连续函数，且对 $\forall x \in I$，有

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=0.$$

则 f 为 I 上线性函数

证：由上述推论，知 f 与 $-f$ 均为 I 上凸函数，从而 f 为 I 上线性函数。

小结论：① 若 u_1, u_2 为开区间 I 上凸函数，则对 $\forall \alpha, \beta \geq 0$，$\alpha u_1 + \beta u_2$ 亦为 I 上凸函数。

② 若 u 为 $I \to J$ 上凸函数，φ 为 $J \to \mathbb{R}$ 上递增凸函数，则 $\varphi \circ u$ 为 I 上凸函数。

2. 若 u_1, u_2 为 I 上正函数，且 $\log u_1$，$\log u_2$ 均为凸函数，则 $\log(u_1+u_2)$ 亦为 I 上凸函数。

证：$\forall [a,b] \subset I$，设 g 为 $[a,b]$ 上线性函数，使

$$\log(u_1(a)+u_2(a)) = g(a)$$

$$\log(u_1(b)+u_2(b)) = g(b)$$

$$\Rightarrow (u_1(a)+u_2(a))e^{-g(a)} = (u_1(b)+u_2(b))e^{-g(b)} = 1.$$

另一方面，$\log u_1$，$\log u_2$ 凸，g 为线性函数 $\Rightarrow$ $\log u_1 - g$，$\log u_2 - g$ 均在 $[a,b]$ 上凸，

小结论② $\Rightarrow$ $e^{\log u_1 - g}$，$e^{\log u_2 - g}$ 凸，即 $u_1 e^{-g}$，$u_2 e^{-g}$ 凸。

小结论① $\Rightarrow$ $(u_1+u_2)e^{-g}$ 在 $[a,b]$ 上凸

而 $(u_1+u_2)e^{-g}=1$ 在 a,b 处. 故对 $\forall x\in[a,b]$, 有 $(u_1(x)+u_2(x))e^{-g(x)}\le 1$, 即 $\log(u_1+u_2)\le g$.

从而 $\log(u_1+u_2)$ 为 I 上凸函数. □

推论: 若 $f_1,\cdots,f_n$ 为 I 上凸函数, $\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$, 则 $\log(\lambda_1 e^{f_1}+\cdots+\lambda_n e^{f_n})$ 为 I 上凸函数.

(类似形式的函数在多复变函数论中有重要应用).

3. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $g(x)=\dfrac{e^2 x}{e^{1/x}}$ $(x\neq 0)$, 其中 e 为自然对数底数.

(1) 求 $f(x)-g(x)$ 的最小值.

(2) 若直线 $y=kx+m$ 与 $y=g(x)$ 的图象在第一象限有不止一个交点, 求证: $0<k<e^2$, $-k<m<0$.

解. (1) 易见有 $f(1)=g(1)=e$. 下证对任意 $x\neq 0$, 均有 $f(x)\geq g(x)$.

$x<0$, 这显然成立. $x>0$ 时, 这等价于:

$$e^{x^2+\frac{1}{x}}\geq e^2 x$$

$$x^2+\frac{1}{x}\geq \ln x+2.$$

令 $h(x)=x^2+\frac{1}{x}-\ln x+2$ $(x>0)$

则 $h'(x)=2x-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(x-1)(2x^2+2x+1)$.

易知 $0<x<1$ 时, $h'(x)<0$; $x>1$ 时, $h'(x)>0$.

从而 $h(x)\geq h(1)=0$ $(x>0)$. 即 $f(x)\geq g(x)$. $(x>0)$

综上 $f(x)-g(x)$ 最小值在 $x=1$ 处取得, 最小值为 0.

(2) 证: 令: $\phi(x)=\dfrac{e^2 x}{e^{1/x}}-kx-m$. $(x>0)$.

则 $\phi'(x) = e^2 \dfrac{1+\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} - k$

由令 $\varphi(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$ $(x>0)$，则 $\varphi'(x) = -\dfrac{x}{e^x} < 0$ $(x>0)$

即 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，$\varphi(0)=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$，

知 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上值域为 $(0,1)$.

从而 $\phi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，且在 $(0,+\infty)$ 上值域为 $(-k, e^2-k)$

由题设知 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有两零点，

从而 $\phi'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上必有零点.

即有 $-k<0<e^2-k$，$0<k<e^2$.

此时假设正实数 x_0 满足上述的 $\phi'(x_0)=0$，

由 $\phi'(x)$ 递增知这样的 x_0 是唯一的.

则 $\phi(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上递减，$(x_0,+\infty)$ 上递增

由 $\phi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至少有两零点（实际上至多也只有两个）. 知必有 $\phi(x_0)<0$.

即 $m > \dfrac{e^2 x_0}{e^{1/x_0}} - kx_0$

又由 $\phi'(x_0)=0$ 得：$e^2 \dfrac{1+\frac{1}{x_0}}{e^{1/x_0}} - k = 0$

$$\Rightarrow e^{1/x_0} = e^2 \frac{x_0+1}{kx_0}$$

带入即得：$m > \dfrac{kx_0^2}{x_0+1} - kx_0 = -k\dfrac{x_0}{x_0+1} > -k$.

又 $\lim\limits_{x\to0+0}\phi(x) = -m$，而应有 $\lim\limits_{x\to0+0}\phi(x)>0$.

故 $-m>0$，即 $m<0$. $\square$