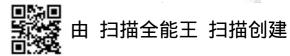
现识时间、9月17日
主要内容: D 个常用不等式
The state of the s
一、三角不等式
题 of ∀x, y ∈ IR, 有:
[1x-1y1] < 1x ± y1 < 1x1 + 1y1.
证明: 首先由绝对直急义, 有
$- x \in x \leq x $, $- y \leq y \leq y $.
商式相加, 得
$-(x + y) \leq x+y \leq x + y .$
PP.
1x+y1 < 1x1+1y1
另一方面,四上式亦有:
-1x1 = 1x + y - y1
= 1x+y1 + 1y1
1x+y1 > 1x1 - 1y1.
调换 x, y 顺序, 有
x+y = y - x
MEP
$ 1x1-1y1 \leq x+y $
从问得

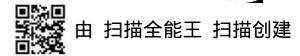


1x1 - 1y1 = 1x+x1 = 1x1+1y1
再将 4 增换为一岁, 京北得到:
11x1-1y1/ < 1x-y/ < 1x1+1y1.
二. 伯努利 (Bernoulli) 不等式.
定理、对任意 n ∈ IN+, x>-1, 有:
in the state of th
注:此不等式可以推广为:
$\frac{(1+x)^{\alpha} \ge 1+4x}{(1+x)^{\alpha} \ge 1+4x}$
$(1+\chi)^{\alpha} \leq 1+\alpha\chi (0 \leq \alpha < 1, \chi > -1)$
交由同学们用高中所学知识路证.于以一(+以)一(+以)
$(\gamma \geqslant -1)$
江州,のベンの時,
四十八个一、八个一个
= 1+ Nx (x≥0,, N∈ N+)
我们真它证明这样一个推广传泡。
引退.波nelN+, D<水i<1(léién)即有
$(1-\chi_1)\cdots(1-\chi_n) > 1-\chi_1-\cdots-\chi_n$
引起证明,数学目的法。 n=1时 图明



假设对 n=k(kelN+),你E成主.
121 N= K+1 107:
(1-X1) (1-Xk) (1-Xk+1)
> (1-1/2, -・・・・- 1/2 (1-2/41) 1月の様は、05/21/2
= 1- x1 xh - xh+1 + (x1++ xh) xh+1
$> 1-x_1-\cdots-x_k-x_{k+1}$
从面内数至旧城市、引起成立、
回到原题 / (1+χ) = -χ(sisn), 即得(1+χ) > 1+nχ
07 -/ < x < 0 \$\frac{1}{2}.
1支后回回新夏昭成立.
三. 均值不等式.
克雅· 对 Y N E IN+, Q:>0 (Y Isi = n). 有
$\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} \gg \sqrt{\alpha_1 \cdots \alpha_n}$
1 () () () () () () () () () (
$\frac{321}{2} \stackrel{?}{=} A_n = \frac{1}{n} (Q_1 + \dots + Q_n), G_n = \frac{1}{n} 1$
A、配为a、···· an的算术平均值,G、配为心对平均值。
表再全·
$H_{n} = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}$
$Q_n = Q_1^2 + \cdots + Q_n^2$
$\frac{1}{n}$

H,和为调和平均值, Qn和中方平均值.
双/有:
$H_n \in G_n \in A_n \in Q_n$.
其中 Hn = Gn 可由 Gn = An 相出:
BOS An TA
$\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n} > \frac{1}{\alpha_n}$
$\frac{\overline{Q_1} + \cdots + \overline{Q_n}}{n} > \overline{Q_1} \cdots \overline{Q_n}$
Pp: Hn > Gn \in Hn \le Gn.
等-方面:
$A_n \leq Q_n \Leftrightarrow (Q_1 + \dots + Q_n)^2 \leq n (Q_1^2 + \dots + Q_n^2)$
$(n-1)(Q_1^2+\cdots+Q_n^2) > 2\sum_{k=1}^{n}Q_k^2Q_1^2$
$= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\alpha_i^2 - \alpha_j^2)^2 \geq 0$
证明、介绍一种特殊的旧纳法、向前一面后归购法、
10一门上四十十五
□ 7 等式 対 n=1, 2 及立
一〇不等式对 N= 2k(k∈ (N+) 切成立 (普通数字归加法).
③不等我对几段主,12时11一个成立。
711 1111 127
D N=1 显然 N=> 就 是基本不善出
D R=1 DO 已知我主 现假语 n-1km xxx xxx
N= 2k+1 kg:



由旧纳假没,有
$Q_1 + \cdots + Q_{2k}$ $> 2k$
2^k
B:
azk+1 + ··· + azk+1 > zk
2^{k} $Q_{2^{k+1}}$ $Q_{2^{k+1}}$
而式相切,并用基本不等式(n=2),有
0, + · · · + Qzh+1 > zk
2°
- 2 - 2kH 0, 02k 0, 2k+1 ··· 02kH
- PP
$Q_1 + \cdots + Q_2 k + 1 $
2k+1
PAN N=2 ^H 的不等式亦成立。
此时的教育归如洁、即得自中临证法在
B. 123.13 7 12 4 5 7 12 3
(n-1): 27 a,, and = to tw - th and, to b
过归的假没
0,++ and + and + and n
$\Delta re + 0$: $(n-1) A_{n-1} + A_{n-1} = n(G_{n-1}^{n-1} A_{n-1})^{\frac{1}{n}}$
HA-1 HA-1

代简, 锋 (cont () n	
(七間, 種) An-1 > (Gn-1 An-1) n-1	
An-1 > Gn-1 An-1	
An-1 > Gn-1	
$A_{n-1} \geqslant G_{n-1}$	
最后,我们活会①图图,即知原不等式	对所有
正整数n都改立,	<u> </u>
A	
注2. 暑平均值不争我.	
对任意国定 Qi>0 (1 ≤ i ≤ n), 记:	1 12 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19 19
$\mathcal{M}_{P} = \left(\begin{array}{c} Q_{1}^{P} + \cdots + Q_{h}^{P} \end{array} \right) \stackrel{\perp}{P}$	
P	75
₩ 4 4 50.	
四 有如下幂平日值得式成立,	
$Mp \leq Mq (0$	
一一一从市会证明的事星	42.0
$\lim_{n \to \infty} M_p = \max \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$	
$M_{p} = G_{n} = G_{n}$	
所以有的孩务活的上分易)公为Man 自 Mo	
四. 树西 (Cardy)不等我	
$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{n} \in [N+, \alpha; b]}{\sqrt{2}} \in \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}^{2}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{2}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{2}}{\sqrt{2}}\right)$	N. O. S.
$(\overline{z}, \overline{z}, \overline{z}) = (\overline{z}, \overline{z}, \overline{z})$	



证明。通过证明拉格明日(Lagrange)恒等式来得到这个信息。

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i}b_{i}^{2}\right)^{2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i}^{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i}^{2}\right) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i}b_{j} - a_{j}b_{i}^{2})^{2}$$

事桌上:

RHS This =
$$\sum_{(ki,j \leq n)} a_i^2 b_j^2 - \sum_{(ki,j \leq n)} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_i)(a_j b_j)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i}b_{i}\right)^{2}=\overline{1}\overline{2}\overline{2}\longrightarrow LHS$$

思考题:一二三四这些不等式中,每个的等务成立等介条件具什么?

延伸介绍:

O Hölder 不等式:

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \ a_i, \ b_i \in \mathbb{R} \left(1 \leq i \leq n \right), \ | \langle P, q < \infty, | \rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

① Minkowsk: 不等的



V (K).	ai, bi E IR (Isism) < p< 00	南.
	$\frac{1}{n}$		か、か
(5) 10:-	+bip) = (\(\sum_{\text{1}} \arg \arg \)) + (2) bi	
(=1	(1=1	(=)	

Hölder得到5 Minkmuski不等到 W及它们的级数、股份的战格在吴变函数论、注函分析等课程时常接触到、

推荐参与书。

Hardy - Little wood - Polya 著 《不等式》 (Inequalities)