习题课时间：12月31日

主要内容：不定积分的计算。　　新年快乐！

1. $\int |x|\,dx$.

解. 设 $F'(x) = |x|$. 即

$$F'(x) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \quad (x \geqslant 0)$; $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C_2 \quad (x < 0)$

由 F 连续性，有 $C_1 = C_2$.

从而：$\int |x|\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)\,x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. □

2. $\int x f^{(n)}(x)\,dx$

解: $\int x f^{(n)}(x)\,dx = \int x\,df^{(n-1)}(x)$

$= x f^{(n-1)}(x) - \int f^{(n-1)}(x)\,dx$

$= x f^{(n-1)}(x) - f^{(n)}(x) + C$ □

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

解：令 $\sqrt{e^x-1}=t$，则 $x=\ln(1+t^2)$

$dx=\frac{2t}{t^2+1}$. 从而

$$\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt$$

$$=\int\frac{2}{t^2+1}dt$$

$$=2\arctan t+C.$$

$$=2\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$ □

4. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x\,dx$

解：$\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x\,dx=\int e^x\,dx-\int\frac{4}{x}e^x\,dx+\int\frac{4}{x^2}e^x\,dx$

而 $\int\frac{4}{x^2}e^x\,dx=-4\int e^x\,d\frac{1}{x}$

$$=-\frac{4}{x}e^x+4\int\frac{1}{x}\,de^x$$

$$=-\frac{4}{x}e^x+\int\frac{4}{x}e^x\,dx$$

从而 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x\,dx=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x.$ □

5. $\int\frac{1}{1+x^4}\,dx.$

解：令 $M(x)=\int \frac{dx}{1+x^4}$，$N(x)=\int \frac{x^2 dx}{1+x^4}$，则有

$$M(x)-N(x)=\int \frac{1-x^2}{1+x^4}dx=-\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=-\int \frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C.$$

$$M(x)+N(x)=\int \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\int \frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

从而 $M(x)=\frac{1}{2}[(M(x)+N(x))+(M(x)-N(x))]$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C.$$

□

6. $\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^3}$.

解. ① $a=b$. 则 $\int \frac{dx}{(x+a)^5}=-\frac{1}{4}(x+a)^{-4}+C$

② $a \neq b$. 由

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)$$

得：

$$\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^3} = \frac{1}{b-a}\int \frac{1}{(x+a)(x+b)^2}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right)dx$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} - \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)} - \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)^2}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)^2} - \int \frac{dx}{(x+b)^3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^2}\left(\frac{1}{b-a}\left(\int \frac{dx}{(x+a)^2} - \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{2}{b-a}\left(\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} - \int \frac{dx}{(x+b)^2}\right) + \frac{1}{2}(x+b)^{-2}\right)$$

$$= \frac{1}{(b-a)^3}\left(-\frac{1}{x+a} - 3\frac{1}{b-a}\left(\ln(x+a) - \ln(x+b)\right)\right.$$

$$\left. - 2\frac{1}{x+b}\right) + \frac{1}{2(b-a)^2}(x+b)^{-2} + C$$

$$= -\frac{4}{(b-a)^4}\ln\frac{x+a}{x+b} - \frac{1}{(b-a)^3}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{2}{x+b}\right)$$

$$+ \frac{1}{2(b-a)^2}\cdot\frac{1}{(x+b)^2} + C \qquad \square$$

思考题：$\int \frac{dx}{(x+a)^m (x+b)^n} = ?$ $(m, n \in \mathbb{N}_+)$.

7. $\int \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$, $n \in \mathbb{N}_+$.

解：$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} - \int x \, d\frac{1}{\sqrt[n]{1+x^n}}$

$$= \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \frac{n x^{n-1}}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + \int \frac{(1+x^n)-1}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} dx$$

$$= \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + \int \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}} - \int \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + C \qquad \square$$

8. $\int x \arctan x \ln(1+x^2) dx$

解：$\int x \arctan x \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \arctan x \, dx^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - \arctan x - (x - \arctan x)\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right) + C.$$

$$\int x \arctan x \ln(1+x^2)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\, d\left((x^2+1)\arctan x - x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right)\ln(1+x^2)$$

$$- \int \left((x^2+1)\arctan x - x\right)\frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right)\ln(1+x^2) - \int\left(x\arctan x - \frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right)\ln(1+x^2)$$

$$- \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right) + x - \arctan x + C$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2+1)\arctan x - x\right)\left(\ln(1+x^2) - 1\right) + x - \arctan x + C.$$

□

9. $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\, dx$

解: $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\, dx = \int -\frac{1-\ln x}{1-\frac{1}{x}}\, d\frac{1}{x-\ln x}$

$$= \int \frac{x(1-\ln x)}{1-x}\, d\frac{1}{x-\ln x}$$

$$= \frac{x(1-\ln x)}{(1-x)(x-\ln x)} - \int \frac{1}{x-\ln x}\, d\frac{x(1-\ln x)}{1-x}$$

$$= \frac{x(1-\ln x)}{(1-x)(x-\ln x)} - \int \frac{1}{\cancel{x-\ln x}} \cdot \frac{\cancel{x-\ln x}}{(1-x)^2}\, dx$$

$$= \frac{x(1-\ln x)}{(1-x)(x-\ln x)} - \frac{1}{1-x} + C$$

$$= \frac{\ln x}{x-\ln x} + C. \qquad \square$$

注：求不定积分的一个很好的习惯就是求完之后反过来求导检验一下。

一定要记得常数项 C！

10. 设 Q 是 n 次多项式，且有 n 个相异实根 x_i，$i=1,\cdots,n$。又设 p 是与 Q 不可约的 m 次多项式，且 $m<n$，证明：

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{Q'(x_i)} \ln|x-x_i| + C.$$

证：$m<n$，由 Lagrange 插值公式，有：

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(P(x_i) \prod_{k\neq i} \frac{x-x_k}{x_i-x_k} \right)$$

由题意，设 $Q(x) = c(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，$c\neq 0$。

则：$Q'(x_i)=C\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)$，故：

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(P(x_i)\frac{\frac{Q(x)}{x-x_i}}{Q'(x_i)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}\cdot\frac{1}{x-x_i}$$

从而 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(x_i)}{Q'(x_i)}\ln|x-x_i|+C$ □

最后祝大家新年快乐，期末考试顺利！

给大家的"新年礼物"：

最近在遍历论课上学到的Furstenberg的一个著名例子中用到的两个引理：

1. 数列$\{S_j\}$，$\{t_j\}$满足$0<t_j<S_j$，且$\lim_{j\to\infty}S_j=0$.
则存在$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，以及递增正整数列：$n_0<n_1<\cdots\cdots$，
使$t_{n_j}\le|1-e^{2\pi i n_j\alpha}|\le S_{n_j}$，$\forall j\ge 0$.

（证明参考以前的：$\forall(p,q)\subset(0,1)$，$\exists x$，$\{x^n\}\in(p,q)$，$\forall n$）.

2. 设f是$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$连续函数，且$f(x+1)=f(x)$.
若$\exists n\in\mathbb{N}_+$，及$\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，使

$$\sum_{j=0}^{n-1}f(x+j\alpha)\equiv 0.$$

求证：$f(x) \equiv 0$.

提示：利用 $\{k\alpha - [k\alpha] : k \in \mathbb{N}_+\}$ 在 $(0,1)$ 中稠密性