习题课时间：11月5日.

主要内容：函数极限定义与基本计算.

一、广义极限.

①. $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$：$\forall M>0$，$\exists \delta>0$，使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>M$.

*. $\forall \{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

②. $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$ ($\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$)：$\forall M>0$，$\exists \delta>0$，使 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有 $f(x)>M$.

*. $\forall \{x_n\}$，$x_n$ 递增趋于 $x_0$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

③ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$：$\forall M>0$，$\exists A\in\mathbb{R}$，使 $x>A$ 时，有 $f(x)>M$.

*. $\forall \{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

④ $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$：$\forall M>0$，$\exists A>0$，使 $|x|>A$ 时，有 $f(x)>M$.

*. $\forall \{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} |x_n|=+\infty$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=+\infty$.

**. $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

⑤ $\lim_{x\to-\infty} f(x)\neq+\infty$：$\exists M_0>0$，使得 $\forall A<0$，$\exists x<A$，有 $f(x)\le M_0$.

*. $\exists \{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$，有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)<+\infty$.

**. $\exists \{x_n\}$，$M_0>0$，$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$，有 $f(x_n)\le M_0$ 对 $\forall n\in\mathbb{N}_+$.

***. $\exists \{x_n\}$，$\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty$，有 $\overline{\lim_{n\to\infty}} f(x_n)<+\infty$. ……

注：要特别注意 $\lim\limits_{x\to\infty}$ 要同时考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}$，且极限必须相等.（或等价于 $\lim\limits_{x\to 0} f(\frac{1}{x}) = \cdots$）

二、课后习题

8. 求下列极限.

(9). $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(n\arccos x)}{x}$ （n为奇数）.

(10). $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

解：(9). 设 $x=\sin\theta$，则 $x\to 0$ 转化为 $\theta\to 0$. 且：

$x = \sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$，$\arccos x = \frac{\pi}{2}-\theta$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(n\arccos x)}{x}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(n(\frac{\pi}{2}-\theta))}{\sin\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos(k\pi+\frac{\pi}{2}-n\theta)}{\theta} \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} \qquad n=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{(-1)^k \cos(\frac{\pi}{2}-n\theta)}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin n\theta}{n\theta}\cdot n$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

(10). $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) - \sin n\pi$

$$= 2\cos\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{2}\pi \sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi.$$

扫描全能王 创建

而 $\left|\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi\right| \le \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi = \frac{\pi}{2(\sqrt{n^2+1}+n)} \le \frac{\pi}{4n}$.

从而 $\left|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})\right| \le 2\cdot\frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{2n} \to 0 \ (n\to\infty)$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = 0$. □

思考题：① $\forall n\in\mathbb{N}_+$, $\cos(nx) = f_n(\cos x)$. 其中 $f_n(x)$ 为一个 $n$ 次整系数多项式.

Chebyshev 多项式

事实上，由

$$\cos(nx) + \cos((n-2)x) = 2\cos((n-1)x)\cos x.$$

从而 $f_n(x) = 2x f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)$. $(n\geq 3)$.

$f_1(x) = x$. $f_2(x) = 2x^2-1$.

特别地，$f_n(x)$ 常数项为 0，$n$ 为奇数时.

$f_n(x)$ 常数项为 $(-1)^{\frac{n}{2}}$，$n$ 为偶数时.

$f_n(x)$ 一次项系数为 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$，$n$ 为奇数时

(数学归纳法).

$\cos(n\arccos x) = f_n(x) = x^2 g(x) + (-1)^{\frac{n-1}{2}}nx$, $g$ 为多项式，$n$ 为奇数时.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(n\arccos x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(xg(x) + (-1)^{\frac{n-1}{2}}n\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}n.$$

另有推论：i). 若 $\cos\theta$ 为有理数，则 $\cos(n\theta)$ 为有理数. $\forall n\in\mathbb{Z}$ (同样 $\sin\theta\in\mathbb{Q} \Rightarrow \sin(n\theta)\in\mathbb{Q}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$).

* ii). 若 $\cos n\theta$ 为有理数，对某个 $n\in\mathbb{N}_+$，则 $\cos\theta$ 为代数数（某个有理系数多项式的根）.

* ii)'. 对任意 $\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$，$\cos(\frac{p}{q}\pi)$ 为代数数.

** iii). $\cos(\frac{p}{q}\pi)$ 对 $0<\frac{p}{q}<1$ 的有理数 $\frac{p}{q}$，当且仅当 $\frac{p}{q}=\frac{1}{6}$ 或 $\frac{1}{3}$ 时为有理数：

②. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(\sqrt{k^2+1}\pi)=+\infty$. ?

12. 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上严格单调下降，证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

证：假设结论不成立，则存在 $M>a$，及 $\{x_n\}$ 子列 $\{x_{k_n}\}$，使 $x_{k_n}\leqslant M$，$\forall n\in\mathbb{N}_+$.

从而由 $f(x)$ 严格单调下降，得 $f(x_{k_n})\geqslant f(M)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 知 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f(x_n)\geqslant f(M)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 矛盾！ $\square$

16. 证明：$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$ 有一个存在时，另一个也存在，而且两者相等；问是否 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f(x^2)$ 一定同时存在？

证：① $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在：$\forall\varepsilon>0$，设 $0<\delta<1$，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，$\forall|x|<\delta$. $A=\lim\limits_{x\to0}f(x)$，则 $\delta<1$. $|x|<\delta\Rightarrow|x^3|<|x|<\delta\Rightarrow|f(x^3)-A|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$.

② $\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$ 存在：$\forall\varepsilon>0$，设 $0<\delta<1$，使 $|f(x^3)-A'|<\varepsilon$，$\forall|x|<\delta^{\frac{1}{3}}$，则对 $\forall|x|<\delta$，有 $|x^{\frac{1}{3}}|<\delta^{\frac{1}{3}}$，从而 $|f((x^{\frac{1}{3}})^3)-A'|<\varepsilon$，即 $|f(x)-A'|<\varepsilon$.

从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=A'$，其中 $A':=\lim\limits_{x\to0}f(x^3)$

③ 不一定. 同理可证 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 存在时, $\lim\limits_{x\to0} f(x^2)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x\to0} f(x^2)=\lim\limits_{x\to0} f(x)$. 但反之不成立. 例如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}, \quad f(x)=\{x\}.$$

$$(-\delta,\delta)\longrightarrow(-\delta^3,\delta^3) \quad \text{是一一的.}$$
$$x\longmapsto x^3$$

但 $x\mapsto x^2$ 在 0 附近 没有这种性质. □

三. 补充题.

1. 求极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}_+$.

解: 由 $(q-1)(1+q+\cdots+q^{m-1})=q^m-1$, 得:

$$\left[(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1\right]\cdot\left[1+(1+nx)^{\frac{1}{m}}+\cdots+(1+nx)^{\frac{m-1}{m}}\right]=nx.$$

$$\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\frac{n}{1+(1+nx)^{\frac{1}{m}}+\cdots+(1+nx)^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{n}{1+(1+nx)^{\frac{1}{m}}+\cdots+(1+nx)^{\frac{m-1}{m}}}=\frac{n}{m}$$

同理 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\dfrac{m}{n}$

两式相减: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+nx)^{\frac{1}{m}}-(1+mx)^{\frac{1}{n}}}{x}=\dfrac{n}{m}-\dfrac{m}{n}$. □

2. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$，$\forall x\in\mathbb{R}$

解：$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}$ $(x\neq 0)$

$= \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}$

$= \cdots$

$= \frac{1}{2^n}\sin x$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2^n}\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\dfrac{\sin x}{x}$

$= \dfrac{\sin x}{x}$. 而 $x=0$ 时，显然极限为 1. $\square$

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$，$n\in\mathbb{N}_+$.

解：$1-\cos x\cdots\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(\cos x\cdots\cos kx - \cos x\cdots\cos(k+1)x)$

$\cos x\cdots\cos kx - \cos x\cdots\cos kx\cos(k+1)x$

$= \cos x\cdots\cos kx\,(1-\cos(k+1)x)$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$,

得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdots\cos kx\,(1-\cos(k+1)x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(k+1)x}{x^2} = \dfrac{(k+1)^2}{2}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos x\cdots\cos nx}{x^2} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdots\cos kx - \cos x\cdots\cos(k+1)x}{x^2}$

$= \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{2} = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$. $\square$

4. 对任何 $n\in\mathbb{N}_+$，$A_n\subset[0,1]$ 是有限集，且 $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$，$i,j\in\mathbb{N}_+$，定义函数：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & 若\ x\in A_n\ ;\\ 0, & 若\ x\in[0,1]\ 但不在任何\ A_n\ 中.\end{cases}$$

对任何 $x_0\in(0,1)$，求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

解：假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq 0$，则存在 $x_n\to x_0$，$f(x_n)>\varepsilon_0$ 对某个 $\varepsilon_0>0$ 恒成立.

设 $k=[\frac{1}{\varepsilon_0}]+1>\frac{1}{\varepsilon_0}$，则 $f(x_n)>\varepsilon_0>\frac{1}{k}$，从而由题意，$x_n\in\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}A_i$，由 $A_i$ 均为有限集，得 $\bigcup\limits_{i=1}^{k-1}A_i$ 为有限集，而 $\{x_n\}$ 为无限集，矛盾！

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\forall x_0\in(0,1)$. □.

5. 设 $f$，$g$ 是周期函数，且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$，证明：$f(x)\equiv g(x)$.

证：假设存在 $a\in\mathbb{R}$，$f(a)\neq g(a)$，记 $\varepsilon=|f(a)-g(a)|$.

设 $A\in\mathbb{R}$，使 $x>A$ 时，有 $|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取 $m,n\in\mathbb{N}_+$，使 $a+mT_1>A$，$a+nT_2>A$，其中 $T_1,T_2$ 分别为 $f,g$ 的正周期.

则 $|f(a+mT_1)-g(a+mT_1)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow |f(a)-g(a+mT_1)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad ①$$

且 $|f(a+nT_2)-g(a+nT_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow |f(a+nT_2)-g(a)|<\frac{\varepsilon}{3} \qquad ②.$$

又 $a+mT_1+nT_2>A$，得.

$$|f(a+mT_1+nT_2)-g(a+mT_1+nT_2)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

即 $|f(a+nT_2)-g(a+mT_1)|<\frac{\varepsilon}{3}$ ③

由①②③及绝对值不等式：

$$|f(a)-g(a)| \le |f(a)-g(a+mT_1)|+|g(a+mT_1)-f(a+nT_2)| + |f(a+nT_2)-g(a)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon，\text{矛盾！}$$

故必有 $f(x)\equiv g(x)$. □

6. 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

证：(对比课后习题15题)：$\forall\varepsilon>0$，由题设，存在 $\delta>0$，使 $0<|x|<\delta$ 时，有：

$$\frac{|f(x)-f(\frac{x}{2})|}{|x|}<\frac{\varepsilon}{4},$$

又由 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，知存在 $N$，$n>N$，有 $|f(\frac{x}{2^n})|<\frac{\varepsilon}{2}|x|$，

从而 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\frac{|f(x)-f(\frac{x}{2})+\cdots+f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})+f(\frac{x}{2^n})|}{|x|}$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(\frac{x}{2^{k-1}})-f(\frac{x}{2^k})|}{|\frac{x}{2^{k-1}}|}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{|f(\frac{x}{2^n})|}{|x|}.$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

从而由定义，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. □