习题课时间：10月12日

主要内容：序列极限的计算.

一、作业题

5. 设 $\lim a_n = a$. 试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a.$$

其中 $p_k > 0$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0$.

证明：首先不妨设 $a=0$，否则考虑数列 $\{a_n - a\}$.

$a_n \equiv 0$ 情况显然成立.

① $\forall \varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$，取 N_1，使 $k > N_1$ 时，有 $|a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

② 由 $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{p_k}{p_1 + \cdots + p_k} = 0$，取 N_2，使 $k > N_2$ 时，有

$$\frac{p_k}{p_1 + \cdots + p_k} < \frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{l=1}^{N_1} |a_l|\right)}.$$

现在我们考虑当 $n \geq N_1 + N_2$ 时，有：

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n+1-k} a_k}{p_1 + \cdots + p_n} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n+1-k}}{p_1 + \cdots + p_n} |a_k|$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-k}}{p_1 + \cdots + p_n} |a_k|}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{p_{n+1-k}}{p_1 + \cdots + p_n} |a_k|}_{S_2}$$

$n-N_1+1 \sim n$

$$S_2 \le \underbrace{\max_{N_1+1\le k\le n} |a_k|}_{<\varepsilon/2} \cdot \underbrace{\sum_{k=N_1+1}^{n} \frac{p_{n+1-k}}{p_1+\cdots+p_n}}_{<1}$$

$$< \varepsilon/2$$

$n+1-k \ge n+1-N_1 > N_2$

$$S_1 \le \sum_{k=1}^{N_1} \frac{p_{n+1-k}}{p_1+\cdots+p_{n+1-k}} |a_k| \quad \text{(注意这地方的放缩)}$$

$$< \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\varepsilon}{2\left(\sum_{l=1}^{N_1} |a_l|\right)} |a_k|$$

$$= \frac{\varepsilon}{\cancel{2\left(\sum_{k=1}^{N_1} |a_k|\right)}} \cdot \cancel{\left(\sum_{k=1}^{N_1} |a_k|\right)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n+1-k}\, a_k}{p_1+\cdots+p_n} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n \ge N_1 + N_2).$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_1 a_n + \cdots + p_n a_1}{p_1+\cdots+p_n} = 0.$ □

$\Uparrow$

延伸拓展:

(Toeplitz定理). 设 $n,k\in\mathbb{N}_+$ 时 $t_{nk}\ge 0$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 令 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk} a_k$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$t_{nk} = \frac{p_{n+1-k}}{p_1+\cdots+p_n}$$

推论1: 设 $\lim a_n = a$, 则:

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a.$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k = a$ $\qquad \binom{n}{k} = C_n^k$

④ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} \sum\limits_{l=1}^{n} l^k a_l = ?$ $(k\in\mathbb{N})$ $\qquad \dfrac{a}{k+1}$

<u>推论2</u>：($\frac{\infty}{\infty}$型 Stolz 定理). 设$\{b_n\}$是严格递增于$+\infty$的数列，如果：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = A$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

<u>证明</u>. 取$\{t_{nk}\}$如下：

$$t_{nk} = \frac{b_{k+1}-b_k}{b_{n+1}-b_1} \quad (k=1,\cdots,n).$$

则$\{b_n\}$严格递增 $\Rightarrow t_{nk} > 0$. 且

$$\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = \frac{b_{n+1}-b_1}{b_{n+1}-b_1} = 1.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \Rightarrow \forall k$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 再设：

$$c_k = \frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} \quad (k=1,\cdots,n).$$

则 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} c_k = \frac{a_{n+1}-a_1}{b_{n+1}-b_1}$

由 Toeplitz 定理，知 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{nk} c_k = A$，即有
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n-a_1}{b_n-b_1} = A$.

$$\frac{a_n-a_1}{b_n-b_1} = \frac{\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_1}{b_n}}{1-\frac{b_1}{b_n}} \to A \quad (n\to\infty)$$

由 $b_n \to \infty\ (n\to\infty)$，知 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$. □

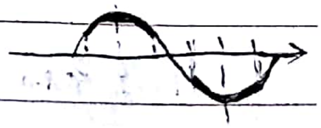
思考题：第5题1结论是否可以证明推论2（Stolz定理）.

9. 求证序列 $\{\cos n\}$ 极限不存在.

证法1：对 $k \in \mathbb{N}_+$，考虑区间 $[2k\pi-\frac{\pi}{3}, 2k\pi+\frac{\pi}{3}]$，区间长度为 $\frac{2\pi}{3} > 1$，从而该区间中必存在一个正整数，记为 n_k，且 $\cos n_k \geq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

同样考虑区间 $[(2k+1)\pi-\frac{\pi}{3}, (2k+1)\pi+\frac{\pi}{3}]$，其中存在一个整数，记为 n_k'，且 $\cos n_k' \leq -\frac{1}{2}$.

$\{\cos n\}$ 子列 $\{\cos n_k\}$，$\{\cos n_k'\}$
分别有 $\cos n_k \geq \frac{1}{2}$，$\cos n_k' \leq -\frac{1}{2}$，自然 $\{\cos n\}$ 是发散的.



证法2：设 $\lim_{n\to\infty} \cos n = A$，

则 $\lim_{n\to\infty} (\cos(n+2) - \cos n) = 0$.

而 $\cos(n+2) - \cos n = -2\sin 1 \sin(n+1)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sin n = 0$

∴ 再由 $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$

$n\to\infty$ 得：$A = A\cos 1 \Rightarrow A = 0$.

从而 $0 = \lim_{n\to\infty}(\cos^2 n + \sin^2 n) = 1$，矛盾！ $\square$

14. 求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$，其中：

$$x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} \qquad \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

解：我们证明：

$$x_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

事实上：

$$x_n^2 = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots 2n\cdot 2n}$$

$$(2n+1)x_n^2 = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\cdot\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}\right)$$

由于 $(2k-1)(2k+1) = 4k^2-1 \le 4k^2 = 2k\cdot 2k$.

即得 $\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n\cdot 2n}\right) \le 1$

从而 $(2n+1)x_n^2 \le 1$

$\Rightarrow x_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

(Wallis公式)：$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

15. 若序列$\{x_n\}$收敛，$\{y_n\}$发散，证明$\{x_n+y_n\}$必发散；问$\{x_ny_n\}$是否必定发散？若$\{x_n\}$和$\{y_n\}$均发散，问$\{x_n+y_n\}$和$\{x_ny_n\}$是否必定发散？若$\{x_ny_n\}$是无穷小量，问$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是否必定无穷小量？

解：① 若$\{x_n+y_n\}$收敛，则$y_n=(x_n+y_n)-x_n$亦收敛，矛盾！

② 不一定．例如$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=n \Rightarrow x_ny_n=1$．

③．$x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$　发散．

$x_n+y_n=0$，$x_ny_n=-1$　收敛．

④ $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2} & n\text{为奇数}\\ n & n\text{为偶数}\end{cases}$．

$y_n=\begin{cases} n & n\text{为奇数}\\ \frac{1}{n^2} & n\text{为偶数}\end{cases}$．

$x_ny_n=\frac{1}{n}$ 为无穷小量，但$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均发散．□

延伸拓展：

一、求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$，其中$|x|<1$．

解：$(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

$=\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

$=\frac{1}{1-x}(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^{n-1}})$

$=\cdots$

$=\frac{1}{1-x}(1-x^{2^n})\to\frac{1}{1-x}\ (n\to\infty)$．由于$|x|<1$．□

二. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，其中

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right).$$

解：
$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\right)\qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow\ \frac{k}{2n^2}\geqslant\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}\geqslant x_n\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\left(\frac{k}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{n+1}{4n}\geqslant x_n\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right).$$

夹逼收敛原理：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{4}$. □

三. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$. 求证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0.$$

证明：由 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k}-x_{2k-2})=0$，得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k}-x_2}{k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{(x_{2k}-x_{2k-2})+(x_{2k-2}-x_{2k-4})+\cdots+(x_4-x_2)}{k-1}$$
$$=0.$$

$$\Rightarrow\ \lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k}}{2k}=0.$$ 同理由 $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k+1}-x_{2k-1})=0$，得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{2k+1}-x_1}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(x_{2k+1}-x_{2k-1})+\cdots+(x_3-x_1)}{k}=0.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_{2k+1}}{2k+1} = 0$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n} = 0$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$. □

*四. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n > 0\ (\forall n \in \mathbb{N}_+)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, 其中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 求证: S_n 的小数部分 $\{S_n\} = S_n - [S_n]$ 在 $[0,1]$ 稠密. (即任意 $(p,q) \subset [0,1]$, $\exists\, n \in \mathbb{N}_+$, $\{S_n\} \in (p,q)$.)

证明: 取 ε_0 满足 $0 < \varepsilon_0 < q-p$, 对 $\forall (p,q) \subset [0,1]$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 知 $\exists N$, 使 $n > N$ 时, 有 $0 < a_n < \varepsilon_0$.

考虑 $\{S_N\}$, 若 $\{S_N\} \in (p,q)$, 则 N 满足题意.

否则不妨设 $\{S_N\} \in [0,p]$, 设 $S_N = m + \{S_N\}$, 其中 $m = [S_n] \in \mathbb{N}_+$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, 知必存在 $t \in \mathbb{N}_+$, 使 $S_{N+t} > m+q$. 即 $S_N \leq m+p < m+q < S_{N+t}$.

假设不存在 $n \in \mathbb{N}_+$, $N < n < N+t$, 使 $m+p < S_n < m+q$, 则必存在 $n_0 \in \mathbb{N}_+$, $N \leq n_0 < N+t$, 使: $S_{n_0} \leq m+p$, $S_{n_0+1} \geq m+q$. 此时有 $a_{n_0+1} = S_{n_0+1} - S_{n_0} \geq (m+q)-(m+p) = q-p > \varepsilon_0$. 但由 $n_0+1 > N$, 知 $a_{n_0+1} < \varepsilon_0$ 矛盾!

从而必存在 $n \in \mathbb{N}_+$. $N < n < N+t$, 使 $m+p < S_n < m+q$ $(m \in \mathbb{N})$. 即有 $\{S_n\} \in (p,q)$.

由 (p,q) 任意性, 知 $\{S_n\}$ 在 $[0,1]$ 中稠密. □

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n}$ (2012年全国高中数学联赛).