5. AJUSTE DE CURVAS

5.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA:

En muchas ocasiones en los problemas prácticos de la ingeniería, trabajamos con datos experimentales discretos, es decir que obtenemos, por medición un conjunto de puntos aislados que responden a una ley física específica. Por ende necesitaremos ajustar curvas para interpolar valores entre los medidos para predecir el comportamiento del fenómeno que estamos estudiando.

En este capítulo veremos varias formas de hacer esto, desde aproximar una simple línea recta hasta un complejo polinomio trazador, pasando por la interpolación polinomial.

5.2. REGRESIÓN LINEAL POR MÍNIMOS CUADRADOS:

Supongamos que tenemos un conjunto de pares ordenados que se alinean según una línea recta. Dicha recta se buscará tratando de minimizar los errores de la aproximación.

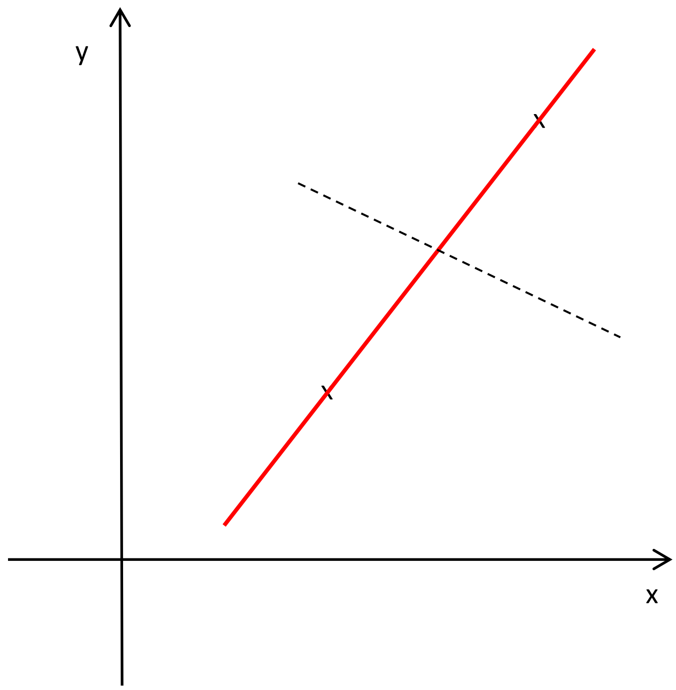
$$\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x + E}$$

Donde a_0 y a_1 son la ordenada al origen y la pendiente respectivamente de la recta, y E es el error entre el modelo y las observaciones.

La idea es minimizar la suma de todos los errores de todos los puntos:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)$$

Para minimizarlo, deberíamos derivarlo respecto a las variables a_0 y a_1. Esto no tiene sentido ya que en el caso de tan solo dos puntos la recta de menor error es la que une esos puntos, pero también cumplirían con esa condición, cualquier recta que pase por el punto medio de la línea que pasa por los dos puntos, menos una vertical, ya que no sería función.



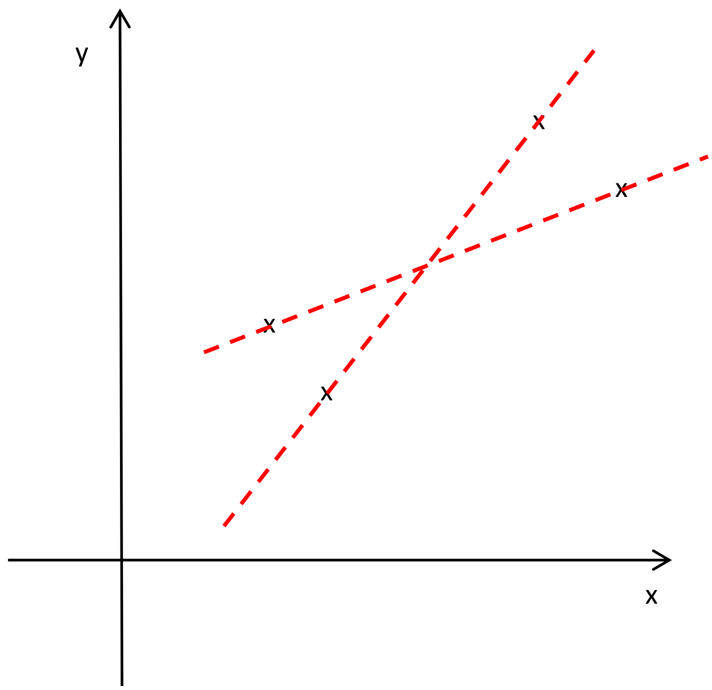
Como se ve en el gráfico, tendríamos infinitas rectas, es decir, infinitas soluciones.

Otro criterio sería minimizar los valores absolutos de los errores:

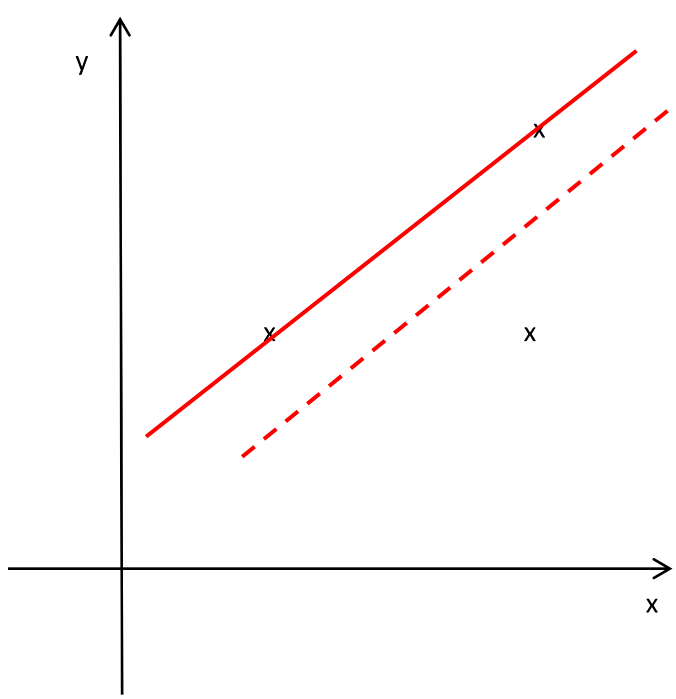
$$\sum_{i=1}^{n} |E_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a_0 - a_1 x_i|$$

Tampoco este criterio de una solución única como se muestra en el siguiente gráfico:

Si suponemos cuatro puntos, todas las líneas que pasen entre las líneas punteadas, éstas, cumplirían con esta condición, dando infinitas soluciones nuevamente:



Un tercer criterio es el criterio del "minimax" el cual escoge una línea que minimice el error máximo. Este criterio puede servir para muchos casos, pero puede presentar mala condición cuando uno de los valores por algún motivo se aparta mucho del resto:



Una técnica que no tiene ningún problema de los descritos, es la de minimizar el cuadrado del error:

$$\boldsymbol{S_r = \sum_{i=1}^{n} {E_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2}$$

Para simplificar la escritura, no pondremos los límites de las sumatorias.

$$\boldsymbol{\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1 x_i)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum [(y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i]}$$

Teniendo en cuenta que el mínimo se producirá cuando estas derivadas parciales, sean nulas y reagrupando los términos queda:

$$\boldsymbol{0 = \sum y_i - \sum a_0 - \sum a_1 x_i}$$

$$\boldsymbol{0 = \sum x_i y_i - \sum a_0 x_i - \sum a_1 {x_i}^2}$$

Considerando a:

$$\boldsymbol{\sum a_0 = n a_0}$$

Siendo n el número de pares ordenados, nos queda:

$$\boldsymbol{n a_0 + \sum x_i a_1 = \sum y_i}$$

$$\boldsymbol{\sum x_i a_0 + \sum {x_i}^2 a_1 = \sum x_i y_i}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, tendremos:

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$$

Veamos un ejemplo: tomemos el ejercicio 1.1.- de la guia de trabajos prácticos:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	0,5	2,5	2,0	4,00	3,5	6,0	5,50

Realizaremos la siguiente tabla:

X_i	**Y_i**	**X_i^2**	**X_iY_i**
1	0,50	1	0,50
2	2,50	4	5,00
3	2,00	9	6,00
4	4,00	16	16,00
5	3,50	25	17,50
6	6,00	36	36,00
7	5,50	49	38,50
28	**24**	**140**	**119,50**

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{7 \,.\, 119{,}50 - 28 \,.\, 24}{7 \,.\, 140 - (28)^2}$$

$$a_1 = 0,8393$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

$$\overline{y} = \frac{24}{7} = 3,4286$$

$$\overline{x} = \frac{28}{7} = 4$$

$$a_0 = 3,4286 - 0,8393 \,.\, 4$$

$$a_0 = \ 0,0714$$

Por lo tanto la línea recta que mejor aproxima a esos puntos es:

$$y = 0,8393x + 0,0714$$

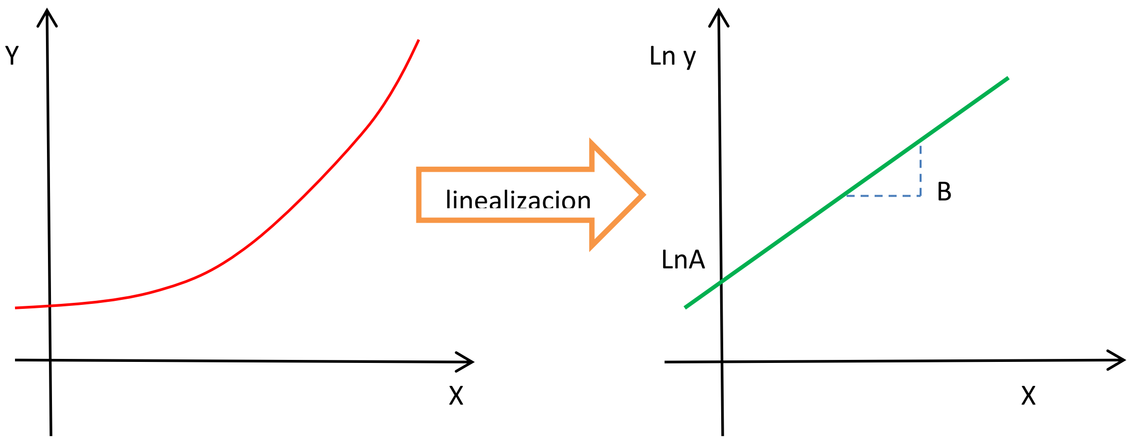
MODELOS NO LINEALES

Existen modelos matemáticos no lineales que aceptan linealización. Para estos modelos es aplicable la técnica de regresión lineal por mínimos cuadrados, previa "linealización" de dichos modelos. Veamos algunos:

a) MODELO EXPONENCIAL:

Matemáticamente tienen la siguiente expresión:

$$y = Ae^{Bx}$$



Entonces:

$$a_0 = Ln\ A$$

$$a_1 = B$$

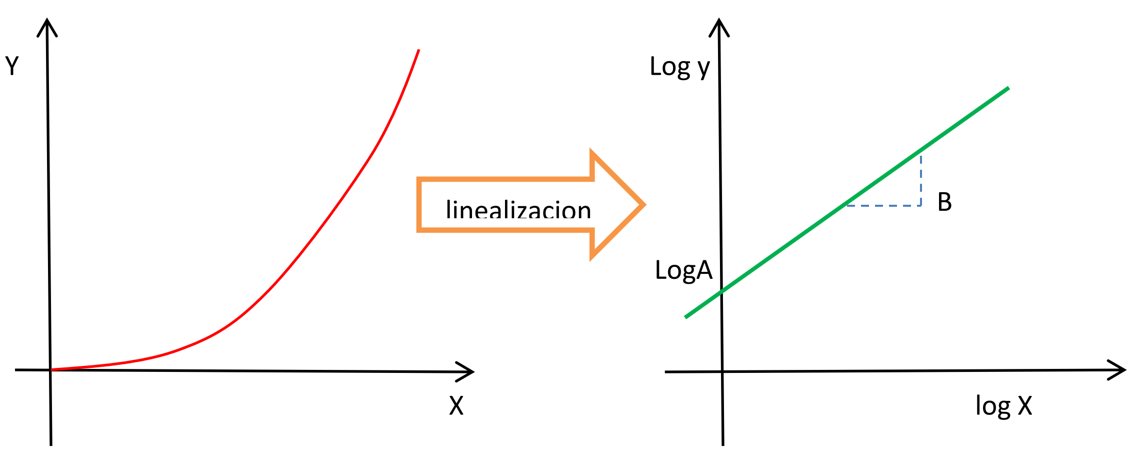
En el modelo lineal se deben cargar como datos los pares ordenados:

$$(x_i; Lny_i)$$

b) MODELO POTENCIAL:

Matemáticamente tienen la siguiente expresión:

$$y = Ax^B$$



Entonces:

$$a_0 = Log\ A$$

$$a_1 = B$$

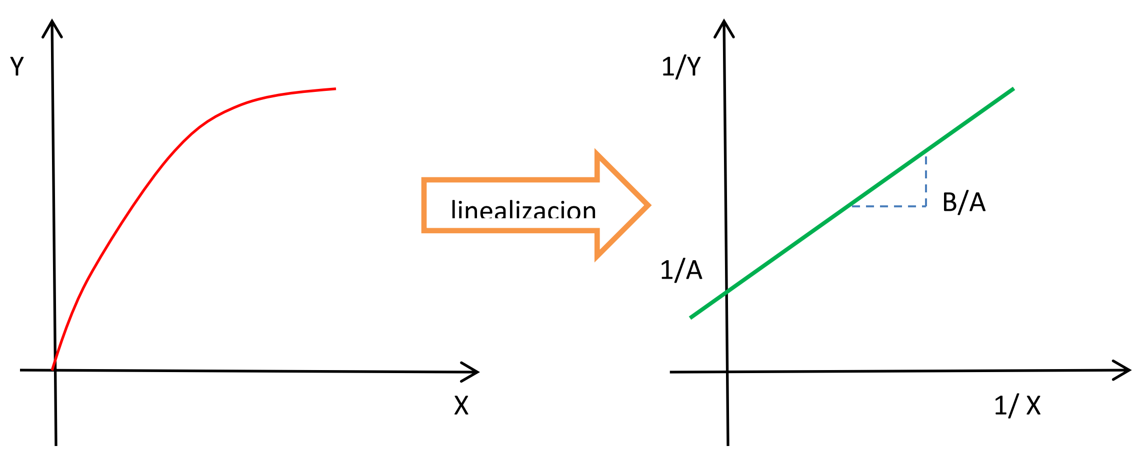
En el modelo lineal se deben cargar como datos los pares ordenados:

$$(logx_i; Logy_i)$$

c) MODELO DE CRECIMIENTO:

Matemáticamente tienen la siguiente expresión:

$$y = A\frac{x}{b + x}$$



Entonces:

$$a_0 = \frac{1}{A}$$

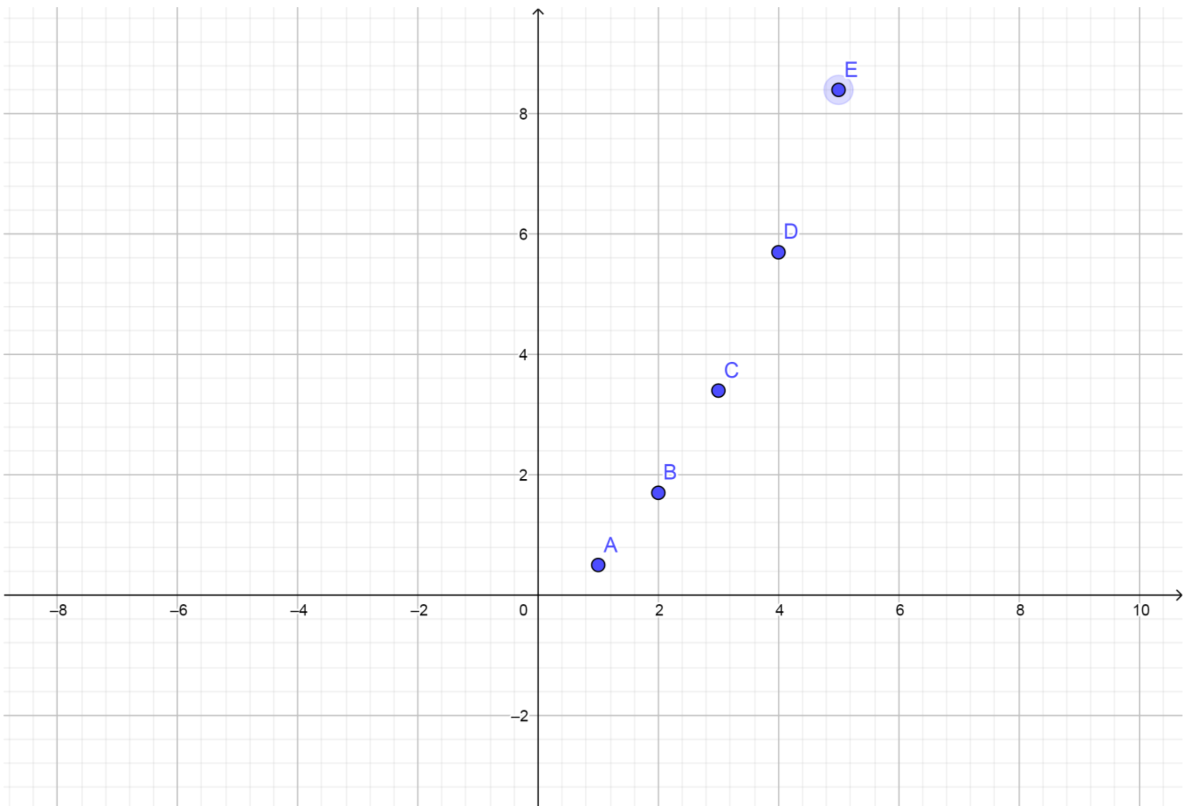
$$a_1 = \frac{B}{A}$$

En el modelo lineal se deben cargar como datos los pares ordenados:

$$\left(\mathbf{1}/\boldsymbol{x_i};\mathbf{1}/\boldsymbol{y_i}\right)$$

Veamos un ejemplo: Ejercicio 1.3 de la guía

X	1	2	3	4	5
Y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4



Vemos que los puntos no se alinean según una línea recta, sino que lo hacen según un modelo exponencial o potencial. Como se presta a dudas veamos ambos:

Modelo exponencial:

$$\boldsymbol{y = Ae^{Bx}}$$

X_i	Y_i	Ln Y_i	X_i^2	XiY_i
1	0,50	-0,6931	1	-0,6931
2	1,70	0,5306	4	1,0612
3	3,40	1,2238	9	3,6714
4	5,70	1,7405	16	6,9620
5	8,40	2,1282	25	10,6410
15		**4,9300**	**55,00**	**21,6425**

Y_i

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{5\,.(21,6425) - \ (15\,.4,93)}{5\,.(55) - \ (15)^2}$$

$$a_1 = 0,6853$$

$$\overline{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{y} = \frac{4.93}{5} = 0,9860$$

$$a_0 = \overline{y} - a_1\overline{x}$$

$$a_0 = 0,9860 - 0,6853\,.3$$

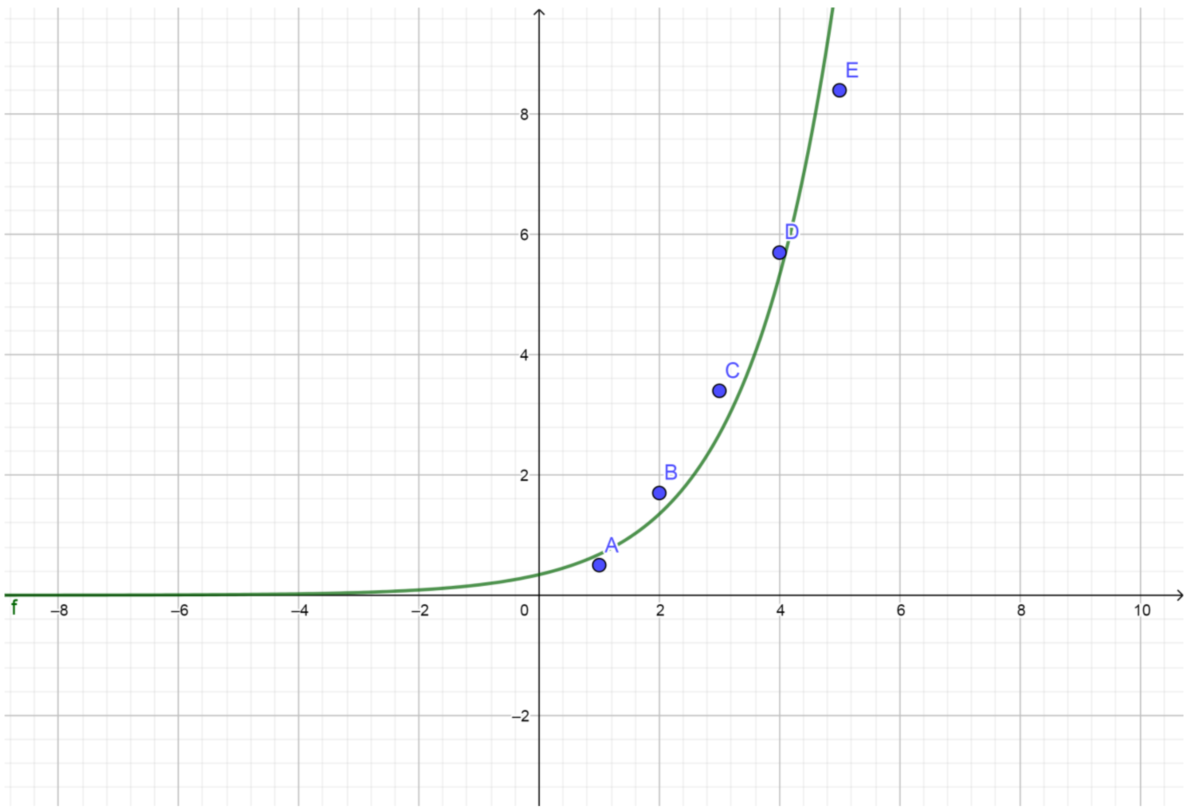
$$a_0 = -1,0699$$

$$B = a_1 = 0,6853$$

$$A = e^{-1,0699} = 0,3430$$

$$y = Ae^{Bx}$$

$$y = 0,3430e^{0,6853x}$$



Modelo Potencial:

$$y = Ax^B$$

X_i	Log X_i	Y_i	Log Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	0,0000	0,50	-0,3010	0,0000	0,0000
2	0,3010	1,70	0,2304	0,0906	0,0694
3	0,4771	3,40	0,5315	0,2276	0,2533
4	0,6021	5,70	0,7559	0,3625	0,4551
5	0,6990	8,40	0,9243	0,4886	0,6461
	2,0792		**2,1411**	**1,1693**	**1,4239**

X_i Y_i

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a_1 = \frac{5(1,4239) - (2,0792)(2,1411)}{5(1,1693) - (2,0792)^2}$$

$$a_1 = 1,7511$$

$$\bar{x} = \frac{2,0792}{5} = 0,4158$$

$$\bar{y} = \frac{2,1411}{5} = 0,4282$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}$$

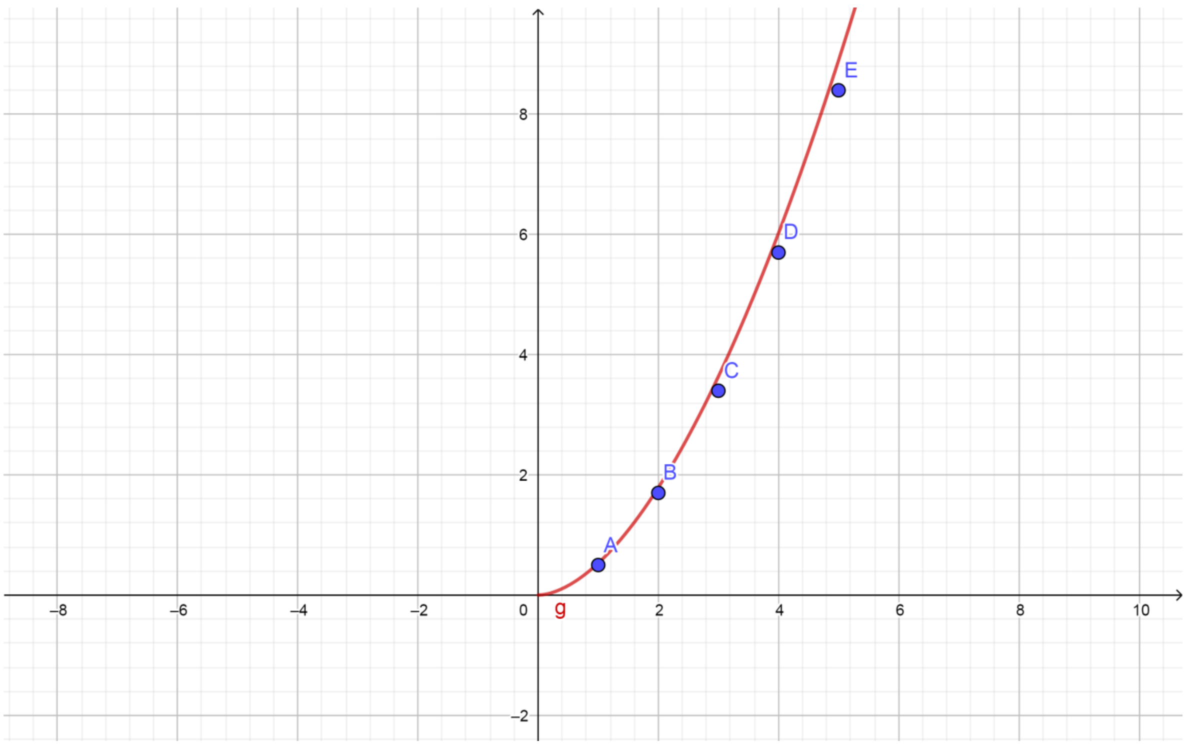
$$a_0 = 0,4282 - 1,7511(0,4158)$$

$$a_0 = -0,2999$$

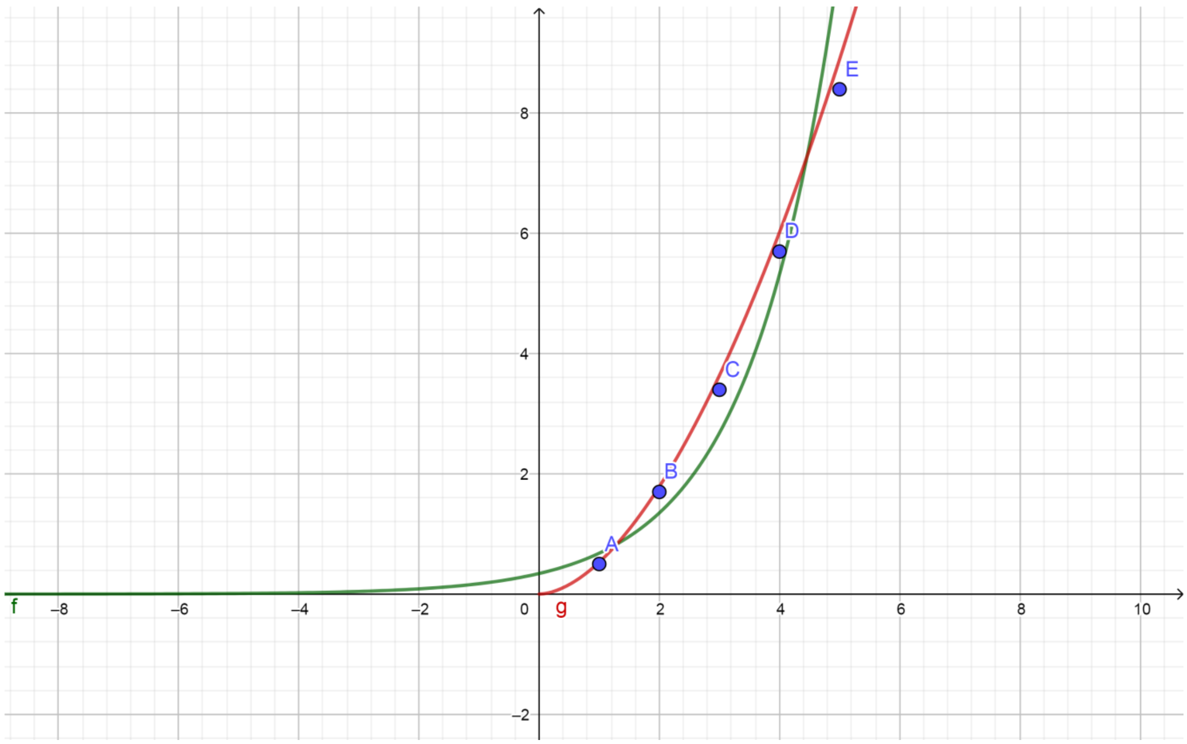
$$B = a_1 = 1,7511$$

$$A = 10^{-0,2999} = 0,5013$$

$$y = 0,5013x^{1,7511}$$



Si comparamos ambas, vemos que tenemos una mejor aproximación en el modelo potencial:

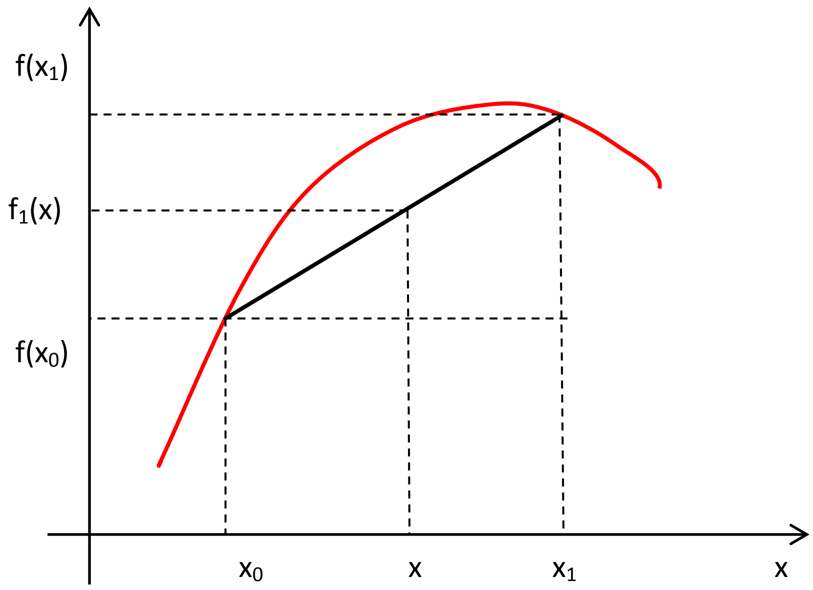


5.3. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE NEWTON:

Con frecuencia, debemos estimar valores intermedios de valores conocidos, una de las formas de hacerlo es a través de polinomios.

Hay varias formas de expresar un polinomio, una de las más usadas es la interpolación mediante diferencias divididas o polinomio de Newton. Veamos de una manera sencilla su deducción para entenderla y después realizaremos su generalización.

Supongamos que tenemos una función f(x) de la cual conocemos dos puntos, $f(x_1)$ y $f(x_2)$; para conocer cuanto vale la función para un valor x que se encuentra entre x_1 y x_2, lo podremos hacer, interpolando con una línea recta, como se muestra en la figura:



$$\frac{f_1(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)$$

Esta es la fórmula de interpolación lineal, en donde el cociente:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Es la pendiente de la recta que une los puntos $[x_0;f(x_0)]$ y $[x_1;f(x_1)]$ que es una aproximación de diferencia dividida finita a la primera derivada.

Observe que al interpolar estamos cometiendo un error, este se puede mejorar si en lugar de dos puntos tenemos tres y pasamos por ellos un polinomio de segundo grado:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1x - b_1x_0 + b_2x^2 + b_2x_0x_1 - b_2xx_0 - b_2xx_1$$

Agrupando los términos independiente, los términos lineales y cuadráticos, nos queda:

$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

De tal manera que:

$$a_0 = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1$$

$$a_1 = b_1 - b_2 x_0 - b_2 x_1$$

$$a_2 = b_2$$

Son dos formas equivalentes de expresar un polinomio de segundo grado que pasa por tres puntos.

Si retomamos la expresión:

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Podemos obtener los coeficientes b_0, b_1, y b_2 de la siguiente manera: si en la expresión anterior, sustituimos x por x_0, tendremos:

$$b_0 = f(x_0)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión general y valuando ahora en $x=x_1$, nos quedará:

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Sustituyendo ahora, b_0, b_1 en la expresión general y valuando x en x_2, nos quedará:

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Es decir, que podemos re escribir la formula general como:

$$f_2(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}(x - x_0)(x - x_1)$$

La que escribiremos de manera más simple:

$$f_2(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Es decir que llamamos:

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Que vimos que era una aproximación de diferencia finita a la primera derivada.

Y:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2 - x_1] - f[x_1 - x_0]}{x_2 - x_1}$$

Que es la diferencia finita de la segunda derivada. Si observamos la expresión obtenida:

$$f_2(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$$

Vemos que tiene la misma estructura que el polinomio de Taylor, si tomamos n puntos podremos generalizar esta expresión de la siguiente manera:

$$f_n(x) = f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0](x - x_0)(x - x_1) \dots . (x - x_{n-1})$$

La función real que gobierna el problema físico que estamos estudiando quedaría:

$$f(x) = f_n(x) + E$$

Siendo E el error de aproximación.

Veamos el ejercicio 1 de la guía de trabajos práctico 4:

X	0,0000	1,0000	2,0000	3,0000
Y	1,0000	2,7182	7,3891	20,0855

La tabla que construiremos para este caso, nos permite calcular las diferencias divididas:

X	**Y**			
X_0	Y_0	$f[X_1;X_0]$	$f[X_2;X_1;X_0]$	$f[X_3;X_2;X_1;X_0]$
X_1	Y_1	$f[X_2;X_1]$	$f[X_3;X_2;X_1]$	
X_2	Y_2	$f[X_3;X_2]$		
X_3	Y_3			

En esta tabla las diferencias divididas, están dadas por:

$$\boldsymbol{f[x_1;x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

$$\boldsymbol{f[x_2;x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

$$\boldsymbol{f[x_3;x_2] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}}$$

$$\boldsymbol{f[x_2;x_1;x_0] = \frac{f[x_2;x_1] - f[x_1;x_0]}{x_2 - x_0}}$$

$$\boldsymbol{f[x_3;x_2;x_1] = \frac{f[x_3;x_2] - f[x_2;x_1]}{x_3 - x_1}}$$

$$\boldsymbol{f[x_3;x_2;x_1;x_0] = \frac{f[x_3;x_2;x_1] - f[x_2;x_1;x_0]}{x_3 - x_0}}$$

X	Y			
0,0000	1,0000	1,7182	1,4764	0,8455
1,0000	2,7182	4,6709	4,0128	
2,0000	7,3891	12,6964		
3,0000	20,0855			

$$\boldsymbol{f_3(x) = f(x_0) + f[x_1; x_0](x - x_0) + f[x_2; x_1; x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3; x_2; x_1; x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 1,0000 + 1,7182(x - 0,0000) + 1,4764(x - 0,0000)(x - 1,0000) + 0,8455(x - 0,0000)(x - 1,0000)(x - 2,0000)}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 1,0000 + 1,7182x + 1,4764x(x - 1,0000) + 0,8455x(x - 1,0000)(x - 2,0000)}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 1,0000 + 1,7182x + 1,4764x^2 - 1,4764x + 0,8455x[x^2 - 2x - x + 2]}$$

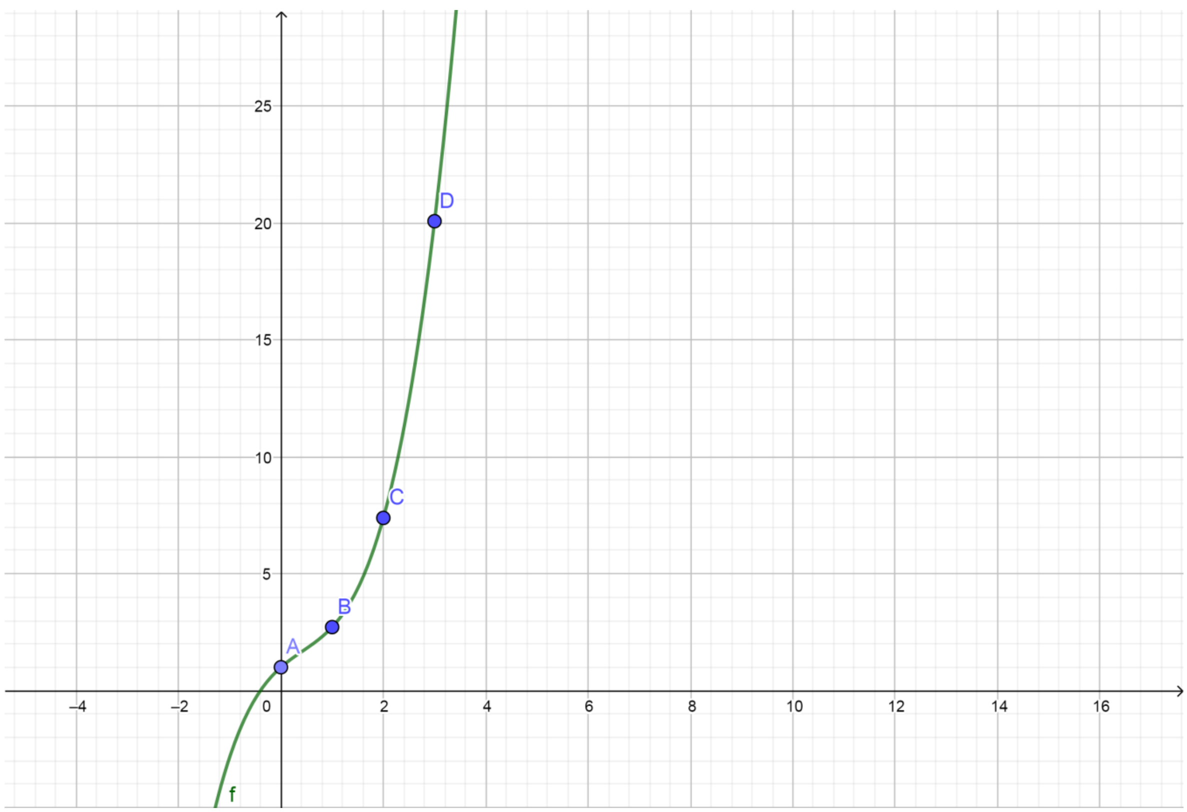
$$\boldsymbol{f_3(x) = 1,0000 + 1,7182x + 1,4764x^2 - 1,4764x + 0,8455x^3 - 2,5365x^2 + 1,6910x}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 1,0000 + {\color{red}1,7182x} + {\color{blue}1,4764x^2} - {\color{red}1,4764x} + {\color{green}0,8455x^3} - {\color{blue}2,5365x^2} + {\color{red}1,6910x}}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = 0,8455x^3 - 1,0601x^2 + 1,9328x + 1}$$

Verificación:

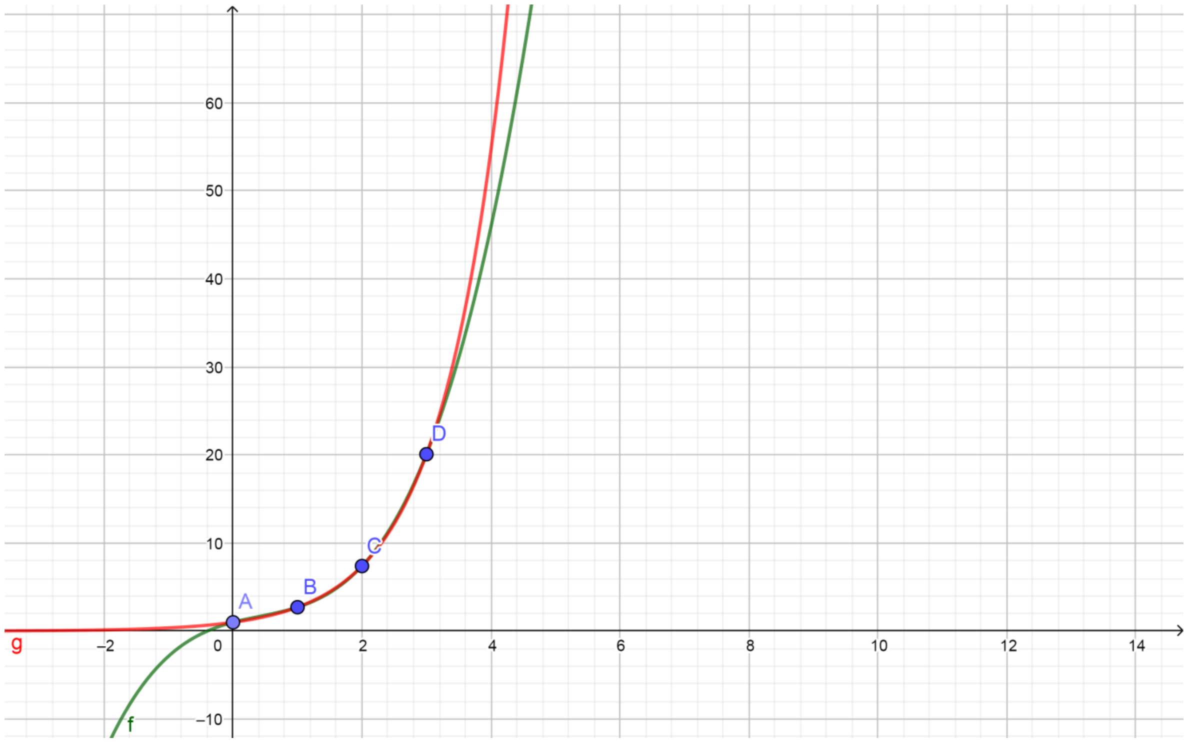
X_i	$f_3(X)$
0,0000	1,0000
1,0000	2,7182
2,0000	7,3892
3,0000	20,0860



Observemos que el polinomio "pasa por los puntos". Normalmente solo conocemos dichos puntos, la función real, no se conoce. Para que vean y entiendan como se aproxima el polinomio a una función real, transparentaremos dicha función que originó la tabla de los puntos dados como datos:

$$f(x) = e^x$$

Si la superponemos al polinomio de tercer grado obtenido, tendremos:



Observen como en el intervalo [0,0000 ; 1,0000], el polinomio se pega muy bien a la función real (e^x), pero fuera de dicho intervalo ya no.

5.4. POLINOMIO DE LAGRANGE

El polinomio de Lagrange es una reformulación del polinomio de Newton para no calcular las diferencias divididas. Este método también deriva del polinomio de Taylor, obteniéndose la siguiente expresión:

$$\boldsymbol{f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)}$$

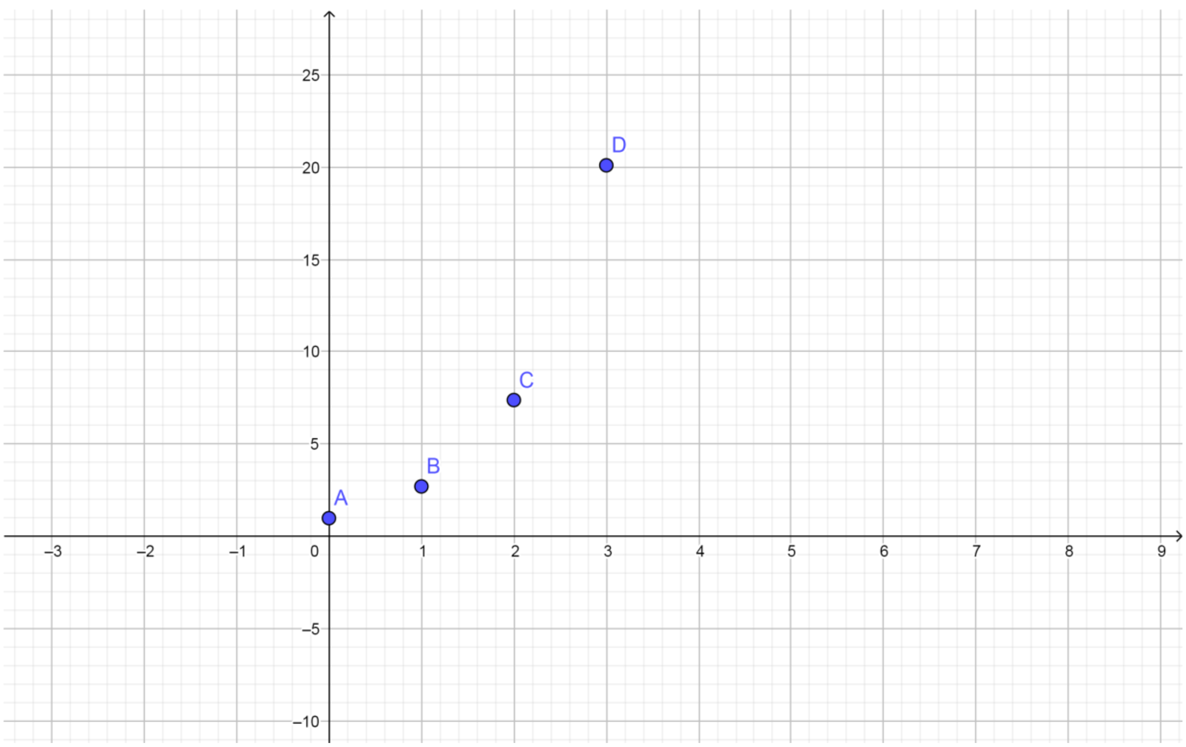
Donde $L_i(x)$ son polinomios que cumplen con ciertas condiciones:

$$\boldsymbol{L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}$$

Como el polinomio debe "pasar" por los $(x_i;y_i)$, los $L_i(x)$, deberán valer 1 al valuarlo en x_i, y 0 en los restantes x.

Veamos el primer ejercicio de la guía al igual que en el método anterior:

i	X	Y
0	0,0000	1,0000
1	1,0000	2,7182
2	2,0000	7,3891
3	3,0000	20,0855



i=0

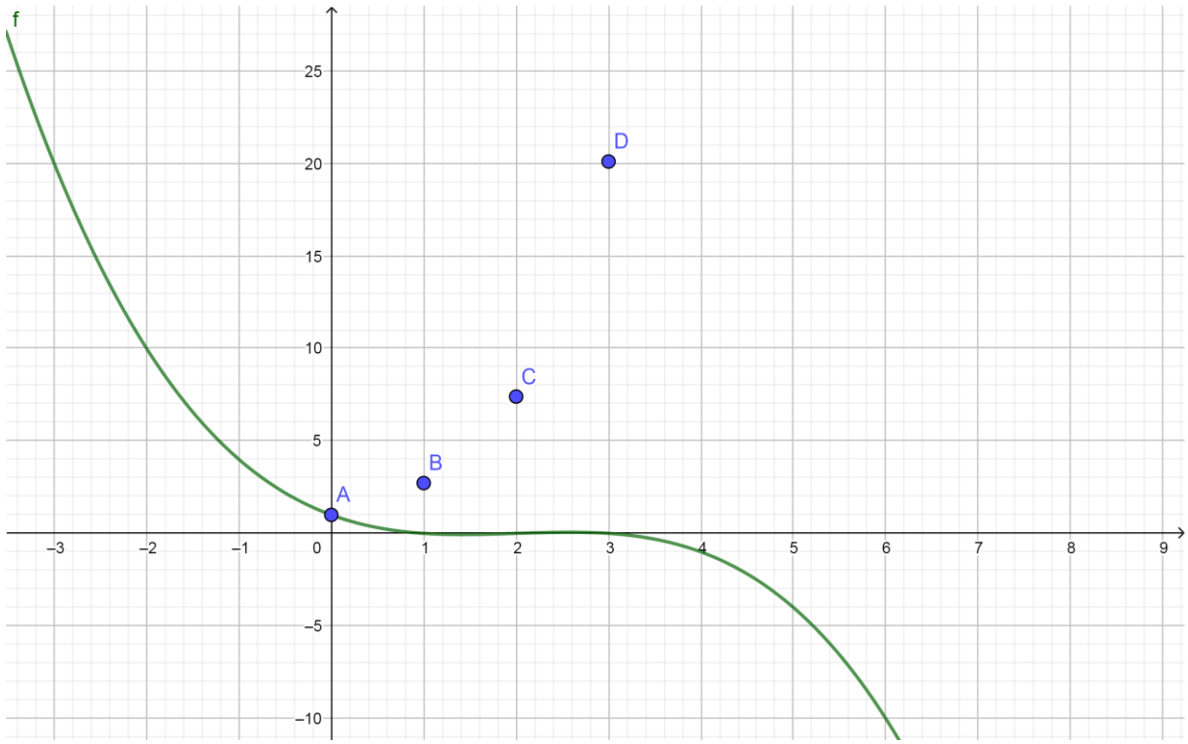
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3)}$$

$$L_0(x) = \frac{(x^2 - 2x - x + 2)(x - 3)}{-6}$$

$$L_0(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6}{-6}$$

$$L_0(x) = -0,16667x^3 + x^2 - 1,83333x + 1$$



i=1

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

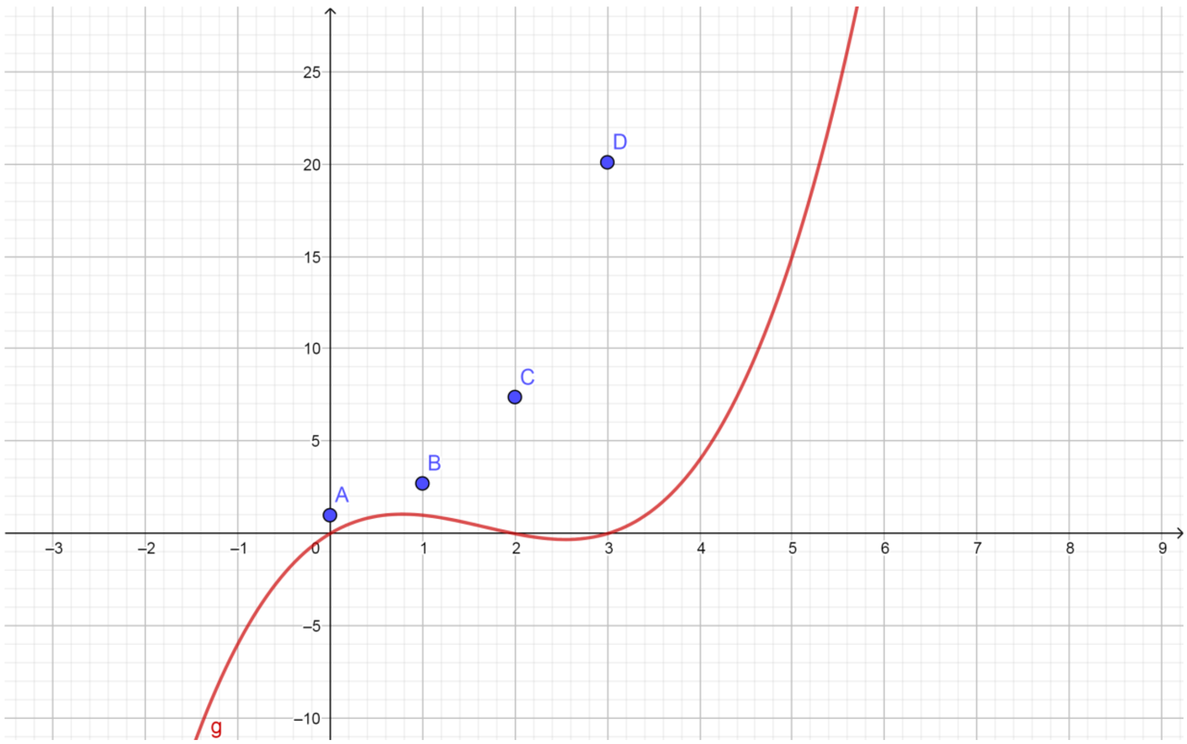
$$L_1(x) = \frac{(x - 0)(x - 2)(x - 3)}{(1 - 0)(1 - 2)(1 - 3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x^2 - 2x)(x - 3)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 2x^2 + 6x}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2}$$

$$L_1(x) = 0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x$$



i=2

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

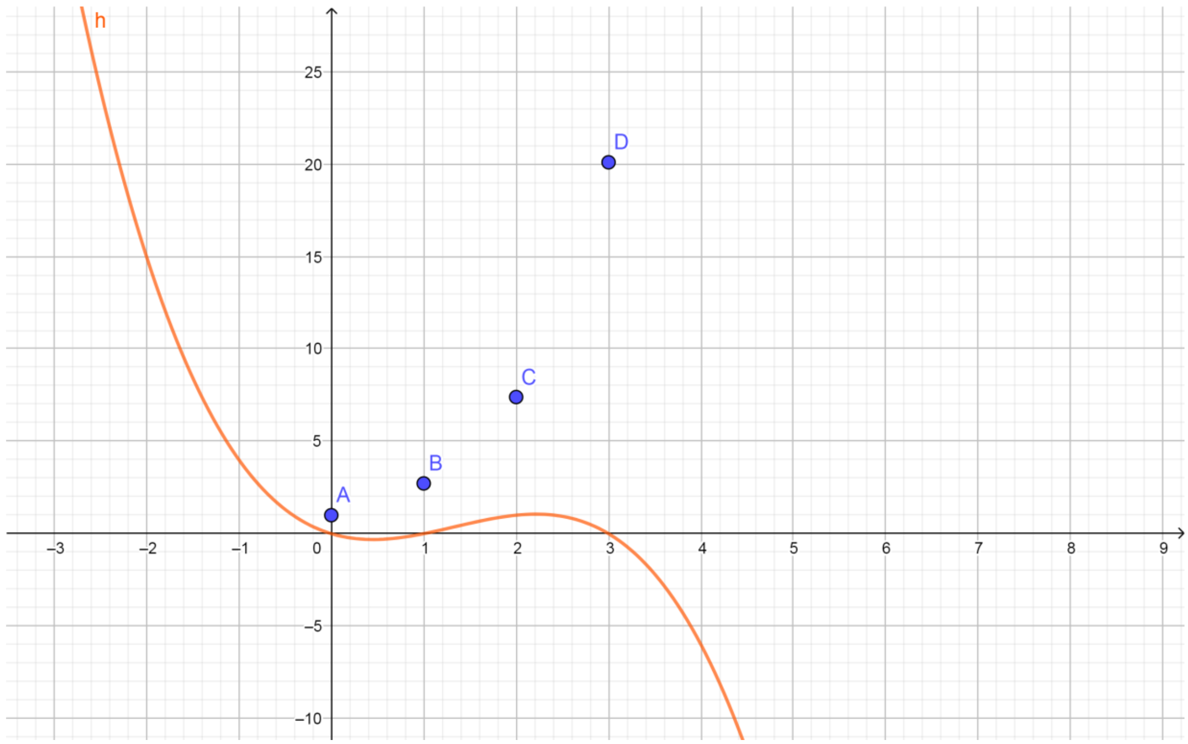
$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x^2-x)(x-3)}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{x^3-3x^2-x^2+3x}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{x^3-4x^2+3x}{-2}$$

$$L_2(x) = -0,50x^3+2x^2-1,5x$$



i=3

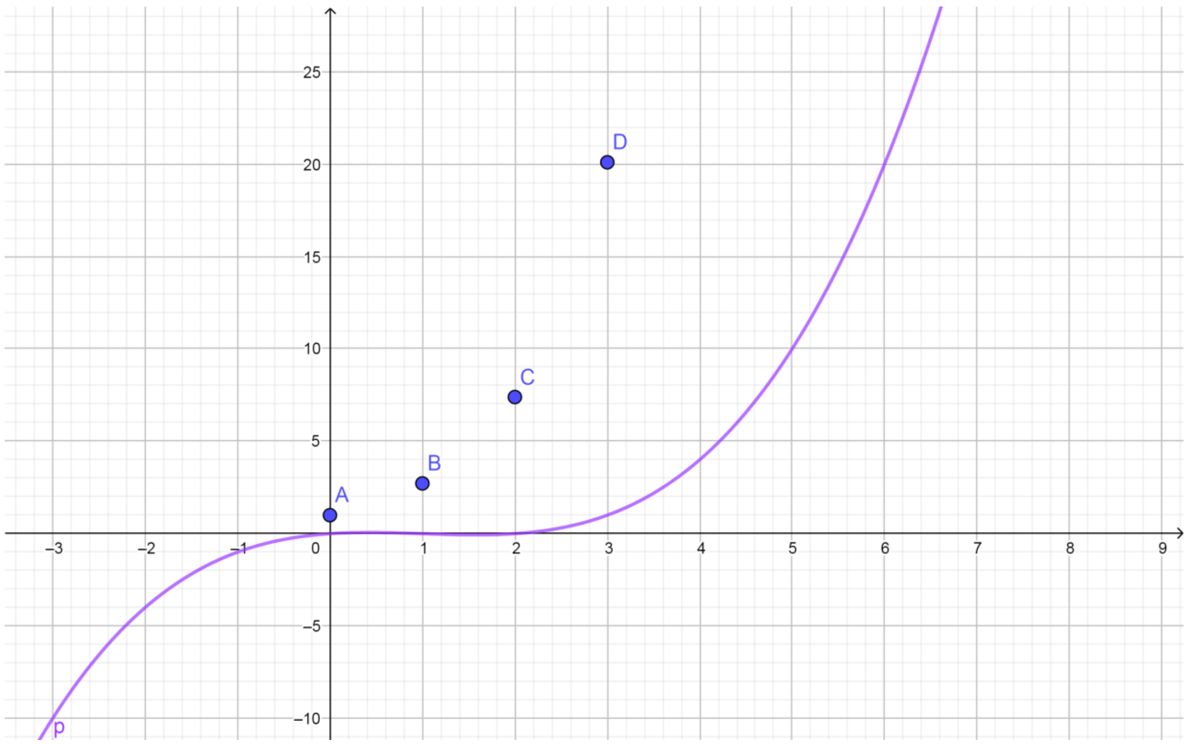
$$L_3(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - 0)(x - 1)(x - 2)}{(3 - 0)(3 - 1)(3 - 2)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x^2 - x)(x - 2)}{6}$$

$$L_3(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x}{6}$$

$$L_3(x) = 0,16667x^3 - 0,5x^2 + 0,33333x$$



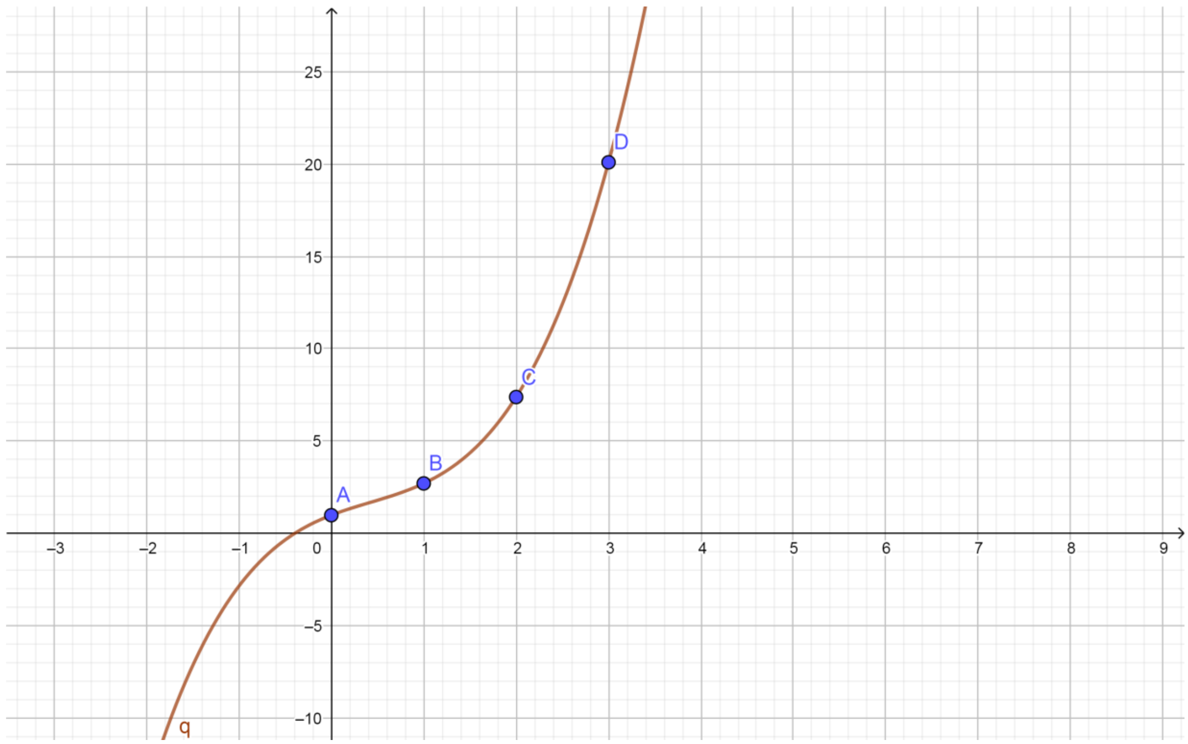
Teniendo los polinomios $L_i(x)$, podemos ensamblar el polinomio de Lagrange:

$$\boldsymbol{f_3(x) = L_0(x)y(x_0) + L_1(x)y(x_1) + L_2(x)y(x_2) + L_3(x)y(x_3)}$$

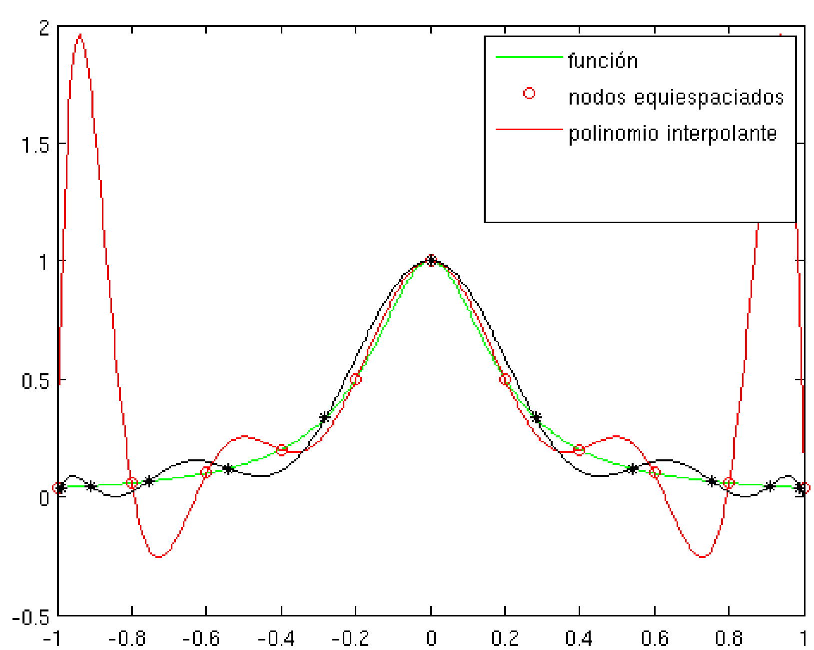
$$\boldsymbol{f_3(x) = (-0,16667x^3 + x^2 - 1,83333x + 1)1 + (0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x)2,7182 + (-0,50x^3 + 2x^2 - 1,5x)7,3891 + (0,16667x^3 - 0,5x^2 + 0,33333x)20,0855}$$

$$\boldsymbol{f_3(x) = -0,16667x^3 + x^2 - 1,83333x + 1 + 1,3591x^3 - 6,7955x^2 + 8,1546x - 3,69455x^3 + 14,7782x^2 - 11,08365x + 3,34765x^3 - 10,04275x^2 + 6,69510x}$$

$$\boxed{\boldsymbol{f_3(x) = 0,84553x^3 - 1,06005x^2 + 1,93272x + 1}}$$



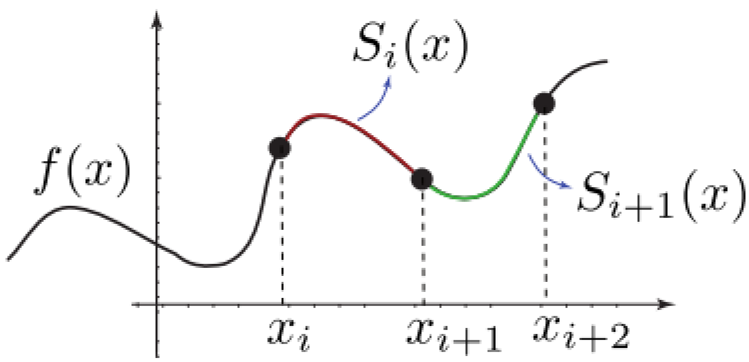
El problema de estos polinomios es que al tener muchos puntos, su grado es alto y presenta altas oscilaciones hacia los bordes del intervalo, generando en estas zonas mucho error como se ve en la siguiente figura:



5.5 TRAZADORAS CÚBICAS:

Para salvar el inconveniente de la ata oscilación en los bordes del intervalo, se usan las trazadoras. Este método consiste en pasar entre dos puntos un polinomio de n grados, dependiendo del valor de "n", es el nombre de la trazadora. Una de las más usadas en ingeniería son las trazadoras cúbicas dado que su aproximación es mas que suficiente en la mayoría de los casos.

Entonces el método que veremos consiste en hacer pasar un polinomio de tercer grado cada dos puntos:



Estos polinomios deberán reunir ciertas características que describiremos a continuación. La forma general de escribir este polinomio es:

$$\boldsymbol{S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_j(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3}$$

En él, si comparamos con el polinomio de Taylor, diremos que:

$$\boldsymbol{a_i = f(x_i)}$$

De tal manera que las incógnitas que tendremos serán: b_i, c_i y d_i; por lo tanto al ser n puntos, tendremos 3n incógnitas, por lo tanto deberemos plantear 3n ecuaciones. ¿de donde salen estas ecuaciones?, de las condiciones de bordes que hay entre polinomios, a saber:

a) La imagen entre el final de un polinomio y el comienzo del siguiente, debe ser la misma:

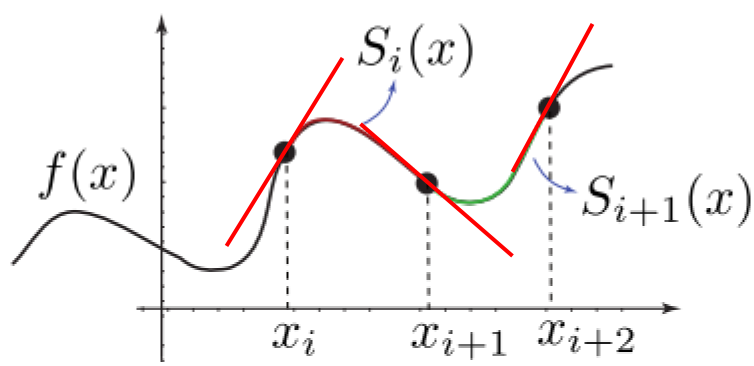
$$\boldsymbol{S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})}$$

Esta condición es para garantizar continuidad entre un polinomio y otro.

b) La derivada en el final de un polinomio deberá ser igual a la derivada del comienzo del siguiente polinomio:

$$\boldsymbol{S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})}$$

Esta condición es para que la transición entre polinomios sea con ugual pendiente:



c) La derivada segunda al final de un polinomio deberá ser igual a la derivada segunda al comienzo del siguiente polinomio:

$$\boldsymbol{S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})}$$

Esta condición es para que la transición sea con la misma curvatura.

Estas tres condiciones son aplicables a los puntos interiores del intervalo, no así en los puntos inicial y final del intervalo. Para completar el sistema de ecuaciones, deberemos condicional dichos punto, también llamados puntos de borde. Podemos plantear dos situaciones a saber:

1) Dejamos que los bordes se acomoden solos de acuerdo a las otras condiciones, esto se logra haciendo que las derivadas segundas en estos puntos sean nulas:

$$S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$$

De esta manera completamos el sistema de ecuaciones y tendremos una "**TRAZADORA CÚBICA NATURAL**".

2) Condicionamos la derivada de los bordes de acuerdo a las condiciones de borde del problema que estamos intentando resolver (en muchos problemas de ingeniería estos valores se conocen de antemano). Esto se logra haciendo:

$$S'_0(x_0) = valor\ dado$$

$$S'_{n-1}(x_n) = valor\ dado$$

De esta manera completamos el sistema de ecuaciones y tendremos una "**TRAZADORA CÚBICA CONDICIONADA**".

Realizar un algoritmo para ambos casos es relativamente complicado, veamos el dado en el libro de los profesores Richard L. Burden y J. Douglas Faires:

A) TRAZADORA CÚBICA NATURAL:

PASO 1

Para j=0,1,2,….,n-1 tomar:

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

PASO 2

Para j=1,2,3,…,n-1 tome:

$$\alpha_j = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

PASO 3

Tome: $l_0 = 1$; $\mu_0 = 0$; $z_0 = 0$

PASO 4

Para j=1,2,3,…,n-1 tome:

$$\boldsymbol{l_j = 2(x_{j+1} - x_{j-1}) - h_{j-1}\mu_{j-1}}$$

$$\boldsymbol{\mu_j = \frac{h_j}{l_j}}$$

$$\boldsymbol{z_j = \frac{\alpha_j - h_{j-1}z_{j-1}}{l_j}}$$

PASO 5

Tome: $\boldsymbol{l_n = 1;\ z_n = 0;\ c_n = 0}$

PASO 6

Para i=n-1,n-2,n-3,…,0

Tome:

$$\boldsymbol{c_i = z_i - \mu_i c_{i+1}}$$

$$\boldsymbol{b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+1} + 2c_i)}{3}}$$

$$\boldsymbol{d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}}$$

PASO 7

Armado de los polinomios.

Para i=0,1,2,….,n-1

$$\boldsymbol{S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3}$$

En los pasos 3,4,5 y parte del 6 se arma el sistema de ecuaciones y se resuelve.

Para ver como funciona el algoritmo, realicemos el ejercicio uno de la gía de trabajos prácticos:

i	X	Y
0	0,0000	1,0000
1	1,0000	2,7182
2	2,0000	7,3891
3	3,0000	20,0855

PASO 1

j	h_i
0	1,0000
1	1,0000
2	1,0000

PASO 2

j=1

$$\alpha_1 = \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{1}(7,3891 - 2,7182) - \frac{3}{1}(2,7182 - 1,0000)$$

$$\alpha_1 = 8,8581$$

j=2

$$\alpha_2 = \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{1}(20,0855 - 7,3891) - \frac{3}{1}(7,3891 - 2,7182)$$

$$\alpha_2 = 24,0765$$

PASO 3

Tomo: $l_0 = 1$; $\mu_0 = 0$; $z_0 = 0$

PASO 4

j=1

$$l_1 = 2(x_2 - x_0) - h_0\mu_0$$

$$l_1 = 2(2,0000 - 0,0000) - 1,0000\ 0,0000$$

$$l_1 = 4,0000$$

$$\mu_1 = \frac{h_1}{l_1}$$

$$\mu_1 = \frac{1,0000}{4,0000}$$

$$\mu_1 = 0,2500$$

$$z_1 = \frac{\alpha_1 - h_0 z_0}{l_1}$$

$$z_1 = \frac{8,8581 - 1,0000\ 0,0000}{4,0000}$$

$$z_1 = 2,2145$$

j=2

$$l_2 = 2(x_3 - x_1) - h_1\mu_1$$

$$l_2 = 2(3,0000 - 1,0000) - 1,0000\ 0,2500$$

$$l_2 = 3,7500$$

$$\mu_2 = \frac{h_2}{l_2}$$

$$\mu_2 = \frac{1,0000}{3,7500}$$

$$\mu_2 = 0,2667$$

$$z_2 = \frac{\alpha_2 - h_1 z_1}{l_2}$$

$$z_2 = \frac{24,0765 - 1,0000\ 2,2145}{3,7500}$$

$$z_2 = 5,8299$$

PASO 5

Tomo: $l_3 = 1;\ z_3 = 0;\ c_3 = 0$

PASO 6

i=2

$$c_{2=}z_2 - \mu_2 c_3$$

$$c_2 = 5,8299 - 0,2667\ 0,0000$$

$$c_2 = 5,8299$$

$$b_2 = \frac{(a_3 - a_2)}{h_2} - \frac{h_2(c_3 + 2c_2)}{3}$$

$$b_2 = \frac{(20,0855 - 7,3891)}{1,0000} - \frac{1,0000(0,0000 + 2\ 5,8299)}{3}$$

$$b_2 = 8,8098$$

$$d_2 = \frac{(c_3 - c_2)}{3h_2}$$

$$d_2 = \frac{(0,0000 - 5,8299)}{3\ 1,0000}$$

$$d_2 = -1,9433$$

i=1

$$c_1 = z_1 - \mu_1 c_2$$

$$c_1 = 2,2145 - 0,2500\ 5,8299$$

$$c_1 = 0,7570$$

$$b_1 = \frac{(a_2 - a_1)}{h_1} - \frac{h_2(c_2 + 2c_1)}{3}$$

$$b_1 = \frac{(7,3891 - 2,7182)}{1,0000} - \frac{1,0000(5,8299 + 2\ 0,7570)}{3}$$

$$b_1 = 2,2229$$

$$d_1 = \frac{(c_2 - c_1)}{3h_1}$$

$$d_1 = \frac{(5,8299 - 0,7570)}{3\ 1,0000}$$

$$d_1 = 1,6910$$

i=0

$$c_0 = z_0 - \mu_0 c_1$$

$$c_0 = 0,000 - 0,0000\ 0,7570$$

$$c_0 = 0,0000$$

$$b_0 = \frac{(a_1 - a_0)}{h_0} - \frac{h_1(c_1 + 2c_0)}{3}$$

$$b_0 = \frac{(2,7182 - 1,0000)}{1,0000} - \frac{1,0000(0,7570 + 2\ 0,0000)}{3}$$

$$b_0 = 1,4659$$

$$d_0 = \frac{(c_1 - c_0)}{3h_0}$$

$$d_0 = \frac{(0,7570 - 0,0000)}{3\ 1,0000}$$

$$d_0 = 0,2523$$

Ya estamos en condiciones de ensamblar los polinomios:

PASO 7

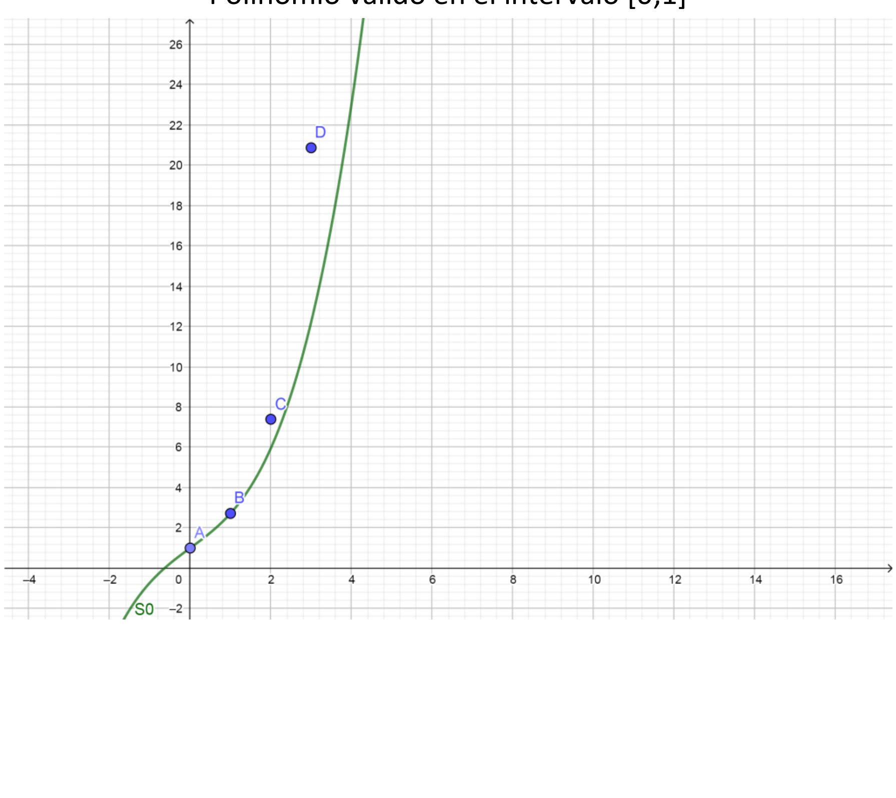
i=0

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$

$$S_0 = 1{,}0000 + 1{,}4659(x - 0{,}0000) + 0{,}0000(x - 0{,}0000)^2 + 0{,}2523(x - 0{,}0000)^3$$

$$s_0 = 1,0000 + 1,4659x + 0,2523\ x^3$$

Polinomio válido en el intervalo [0;1]



i=1

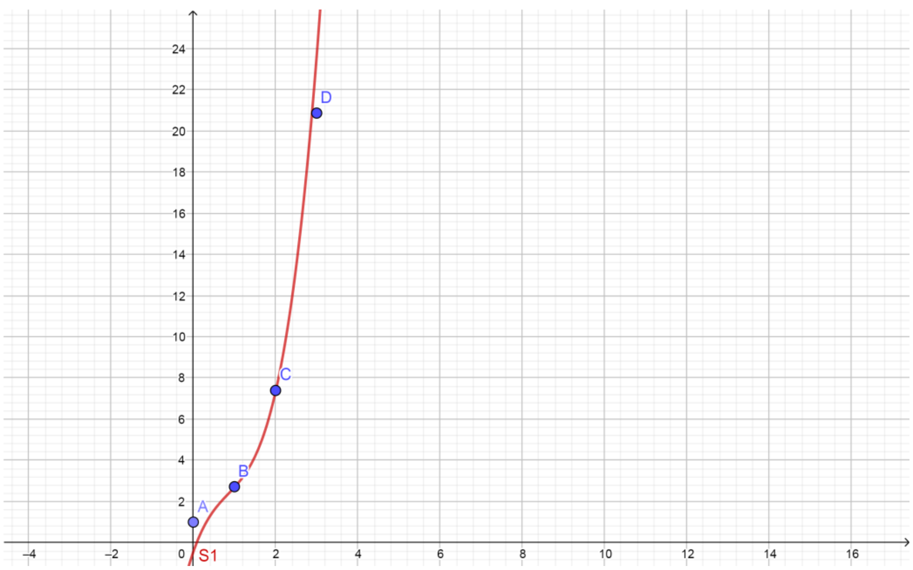
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$

$$S_1(x) = 2{,}7182 + 2{,}2229(x - 1{,}0000) + 0{,}7570(x - 1{,}0000)^2 + 1{,}6910(x - 1{,}0000)^3$$

Desarrollándolo, obtendremos:

$$\boldsymbol{S_1(x) = -0,4387 + 5,7819x - 4,3160x^2 + 1,6910x^3}$$

Polinomio válido en el intervalo [1;2]



i=2

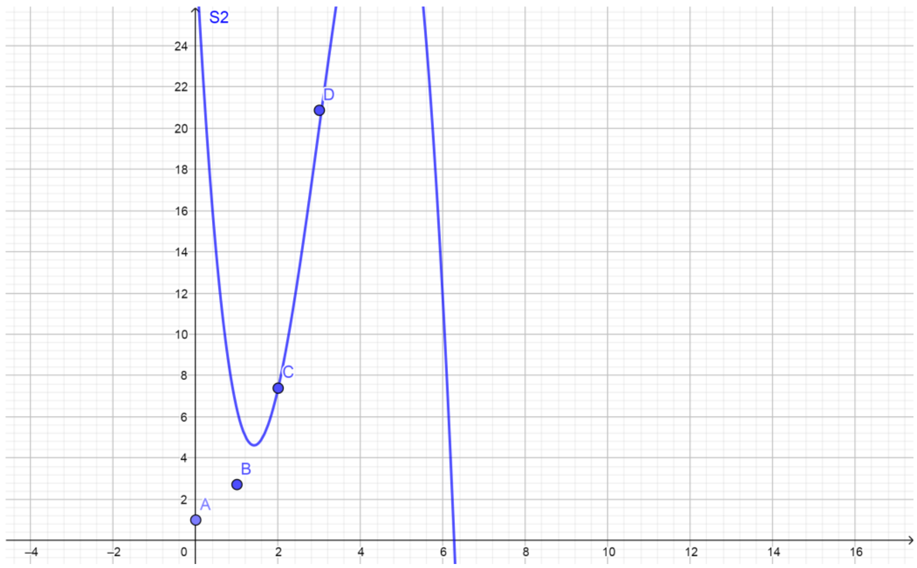
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

$$S_2(x) = 7{,}3891 + 8{,}8098(x - 2{,}000) + 5{,}8299(x - 2{,}0000)^2 - 1{,}9433(x - 2{,}0000)^3$$

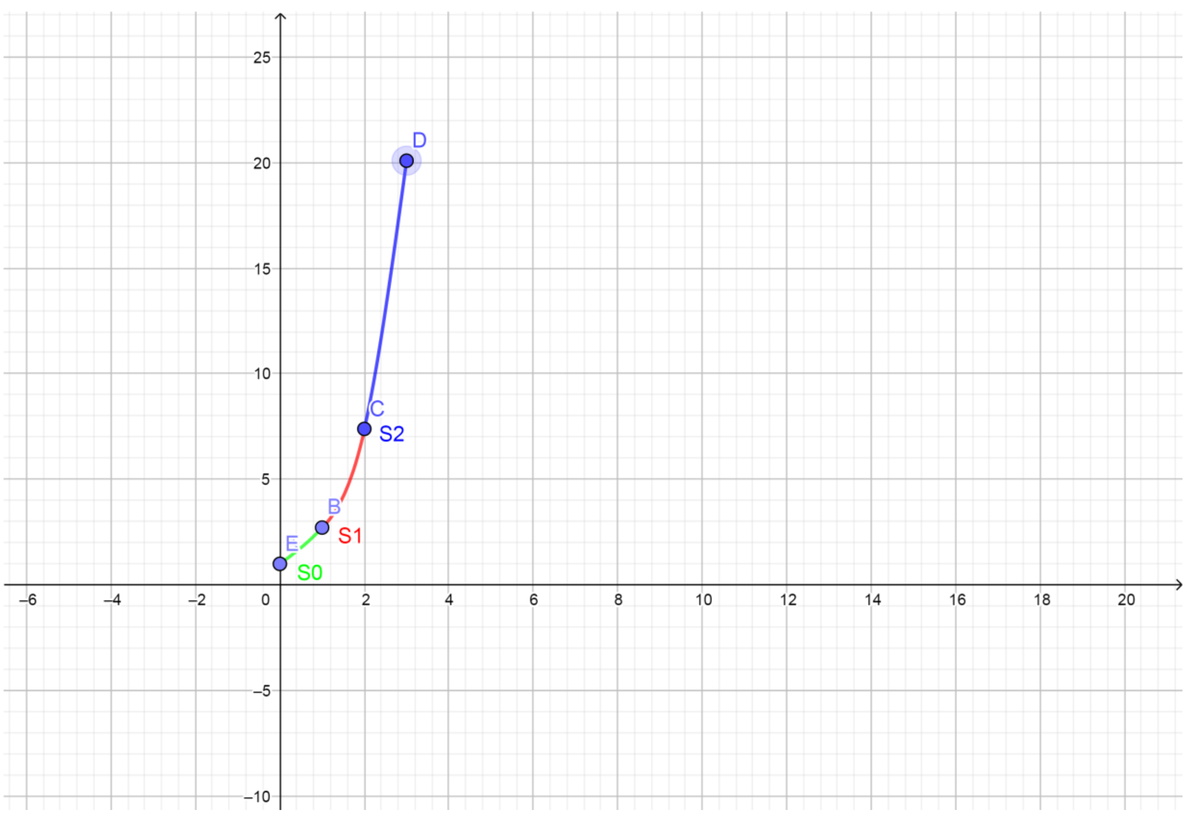
Desarrollándolo, obtendremos:

$$\boldsymbol{S_2(x) = 28,6355 - 37,8294x + 17,4897x^2 - 1,9433x^3}$$

Polinomio válido en el intervalo [2;3]



En definitiva si tomamos la porción de cada polinomio que me intresa, tendremos:



B) TRAZADOR CÚBICO CONDICIONADO

PASO 1

Para j=0,1,2,….,n-1 tomar:

$$h_j = x_{j+1} - x_j$$

PASO 2

Para j=1,2,3,…,n-1 tome:

$$\alpha_0 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3fp0$$

$$\alpha_n = 3fpn - 3\frac{(a_n - a_{n-1})}{h_{n-1}}$$

Donde fp0 = primera derivada en x_0, y fpn, primera derivada en x_n.

PASO 3

Para j=1,2,3,…,n-1

$$\alpha_j = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1})$$

PASO 4

Tome: $l_0 = 2h_0$; $\mu_0 = 0,5$; $z_0 = \frac{\alpha_0}{l_0}$

PASO 5

Para j=1,2,3,…,n-1 tome:

$$l_j = 2(x_{j+1} - x_{j-1}) - h_{j-1}\mu_{j-1}$$

$$\mu_j = \frac{h_j}{l_j}$$

$$z_j = \frac{\alpha_j - h_{j-1} z_{j-1}}{l_j}$$

PASO 6

Tome:

$$l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1})$$

$$z_n = \frac{(\alpha_n - h_{n-1} z_{n-1})}{l_n}$$

$$c_n = z_n$$

PASO 7

Para i=n-1,n-2,n-3,…,0

Tome:

$$c_i = z_i - \mu_i c_{i+1}$$

$$b_i = \frac{(a_{i+1} - a_i)}{h_i} - \frac{h_i(c_{i+1} + 2c_i)}{3}$$

$$d_i = \frac{(c_{i+1} - c_i)}{3h_i}$$

PASO 8

Armado de los polinomios.

Para i=0,1,2,….,n-1

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

En los pasos 4,5,6 y 7 se forma y resuelve el sistema de ecuaciones por el método de Factorización de Crout de sistemas lineales tridiagonales.