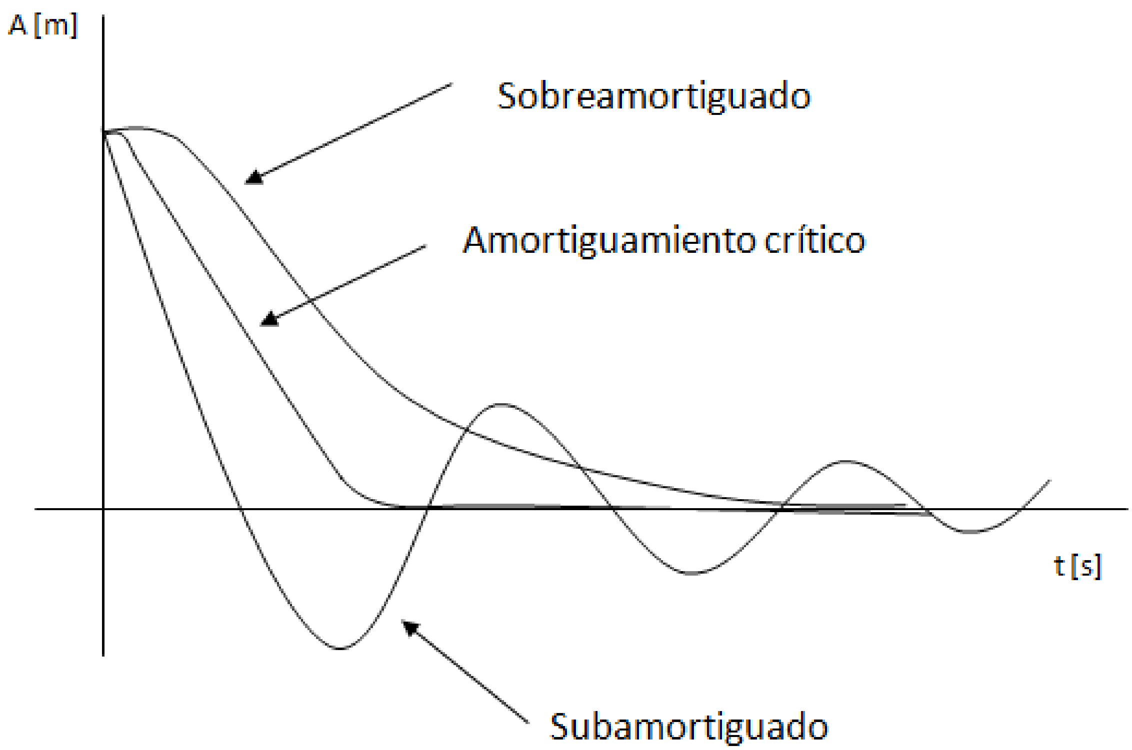
3.- Raices de ecuaciones lineales

3.1.- Presentación del problema

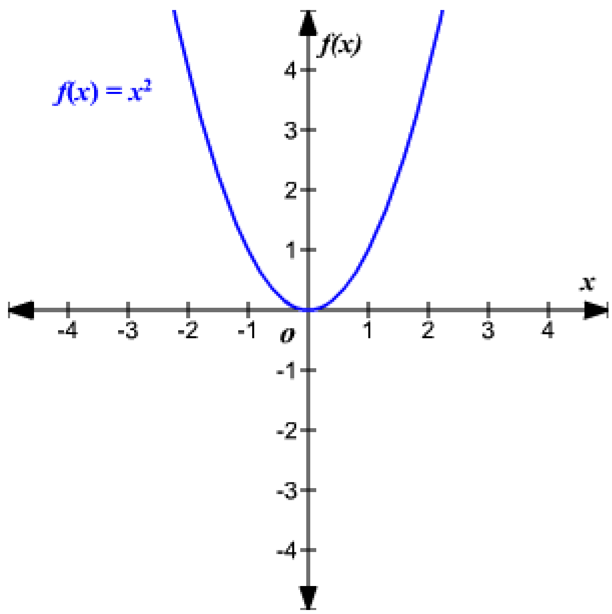
En muchos problemas de ingeniería tenemos la necesidad de encontrar una o varias raíces de funciones. Por ejemplo si estamos diseñando un sistema amortiguado de un automóvil, nos va a interesar saber en qué posición están ubicado los nodos (raíces de la función que gobierna el problema)



En este capítulo nos abocaremos a estudiar algunos métodos que intentan resolver este problema.

3.2.- METODO DE LA BISECCIÓN

Si observamos la gráfica anterior, vemos que la gráfica de la función sub amortiguado tiene claramente varias raíces. Vemos que en cada una de ellas hay un cambio de signo en la función. En la primera raíz pasa de positiva a negativa, en la segunda pasa de negativa a positiva y así va ocurriendo en cada raíz. Es decir en cada raíz observamos un cambio de signo en la función. Esto sucede en la mayoría de las funciones, excepto cuando la raíz es múltiple de orden par, donde tenemos una raíz pero no hay cambio de signo en la función. Por ejemplo en la función x^2



Si volvemos al sistema sub amortiguado del ejemplo, vamos a tener que en el intervalo [a;b], figura 3, hay un cambio de signo en la función, esto quiere decir que tendremos:

$$\boldsymbol{f(a)f(b) < 0}$$

Cuando esta condición es verdadera, decimos que al menos hay una raiz en dicho intervalo, siempre que la función sea continua en él. Se debe tener cuidado porque si el intervalo es grande puede que tengamos más de una raíz, figura 4. En un caso como este lo que conviene es achicar el intervalo, hasta que quede una sola raíz. La pregunta es ¿hasta cuando achico el intervalo?. Eso dependerá del estudio que esté haciendo y de la experiencia adquirida, no es lo mismo estudiar un sistema amortiguado que por ejemplo un especto sismico como el que se muestra en la figura 5.

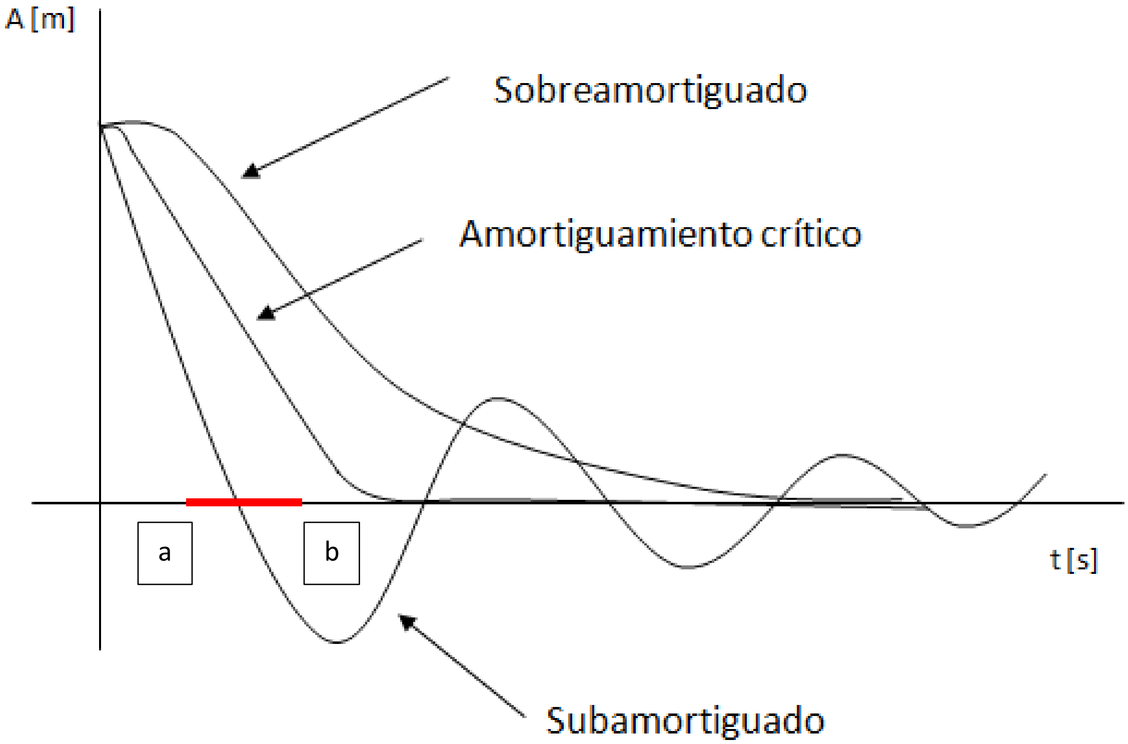

A [m]
Sobreamortiguado
Amortiguamiento crítico
a
b
t [s]
Subamortiguado

Fig. 3

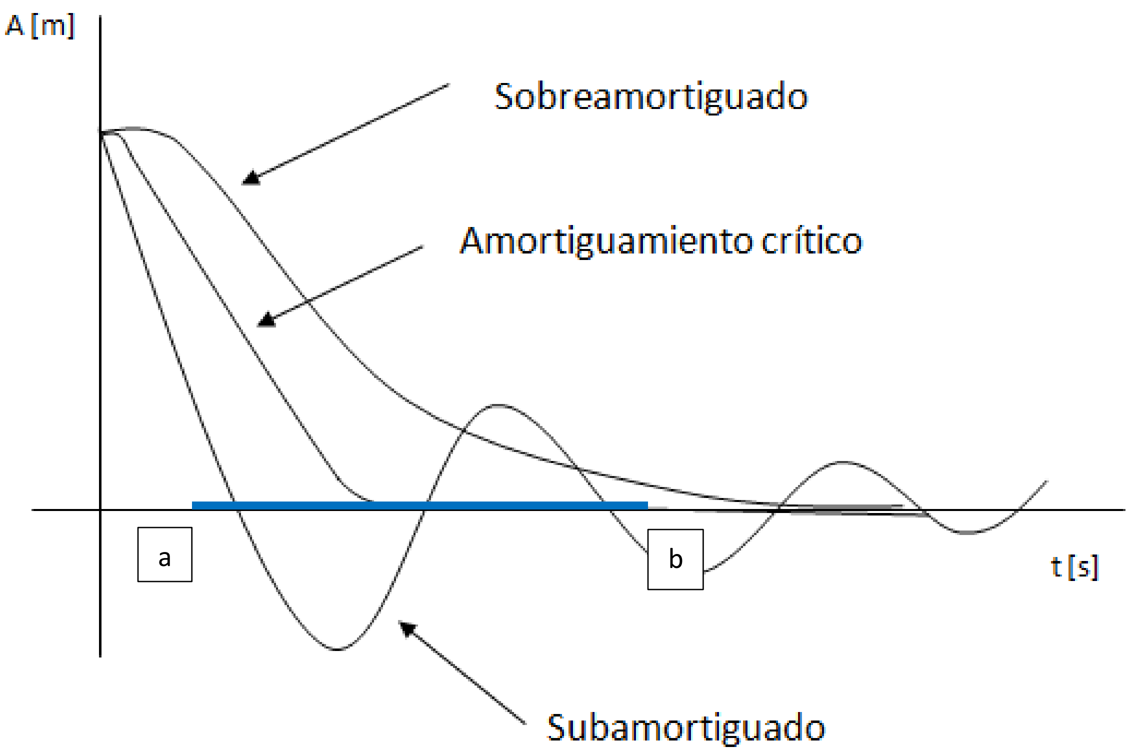

A [m]
Sobreamortiguado
Amortiguamiento crítico
a
b
t [s]
Subamortiguado

Fig. 4

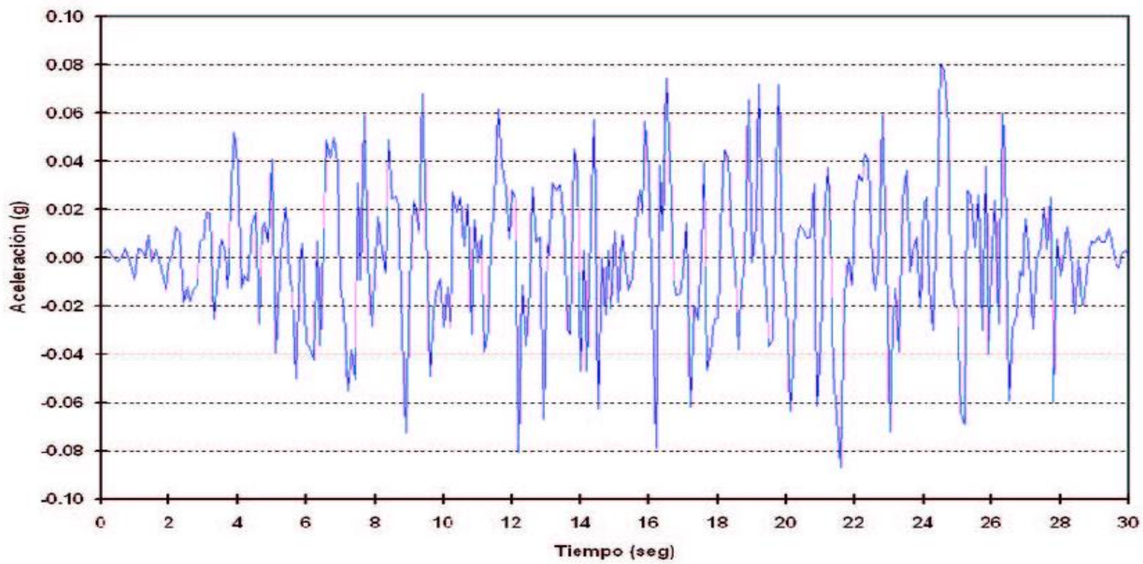


Fig. 5

Observemos que el algoritmo de la bisección es útil para encontrar intervalos donde hay raíces. Cuando uno no sabe dónde están las raíces debemos tomar un intervalo apropiado al problema objeto de estudio y "barrer" el domino, como se muestra en la figura 6

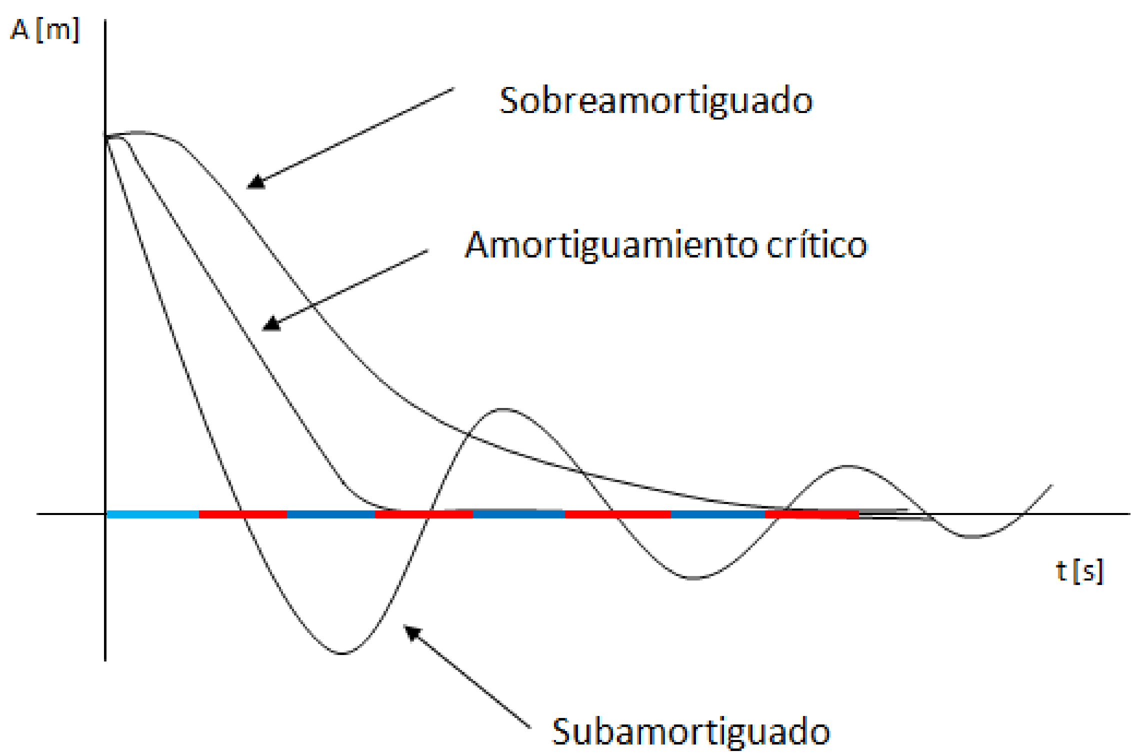


Fig. 6

Esta es la primera propiedad del método de la bisección, me sirve para detectar intervalos donde hay raíces.

La segunda propiedad del método es que me permite calcular el valor de la raíz particionando el intervalo a la mitad y verificando de qué lado está la raíz usando su algoritmo.

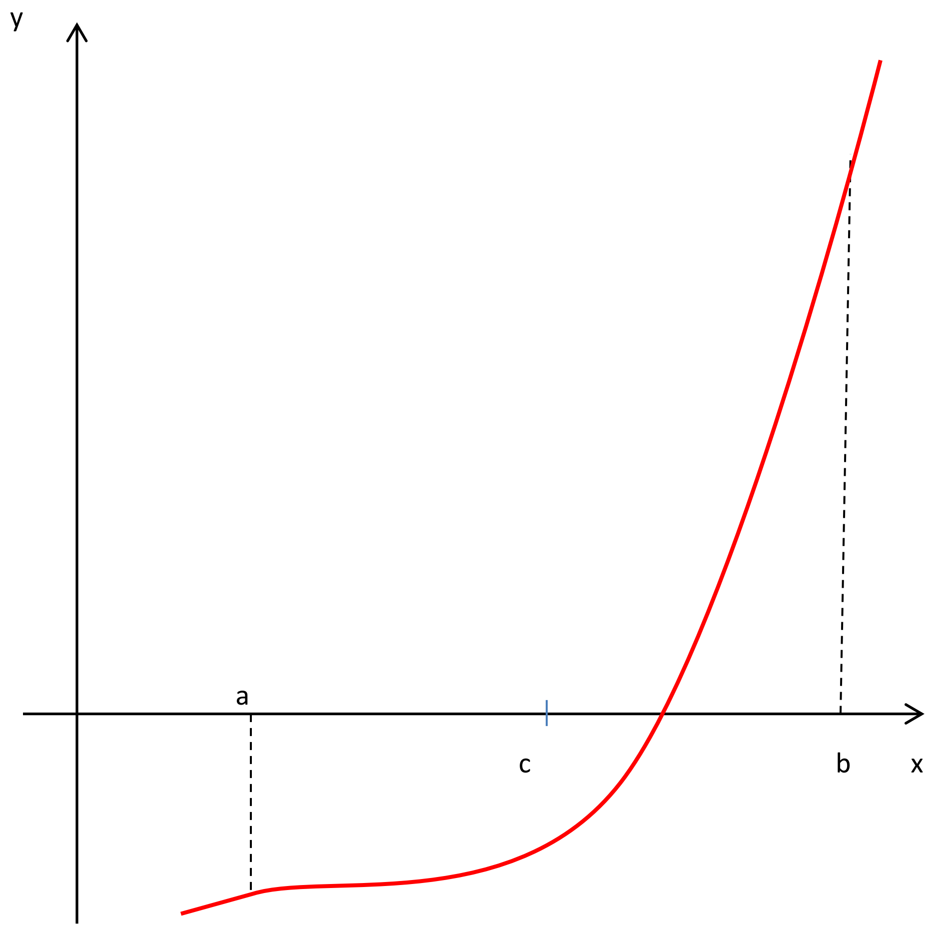


Fig. 7

Calculando la mitad del intervalo y llamándole a ese valor **c**, tendremos:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

Y aplicando el algoritmo de la bisección en **[a;c]**, tendremos:

$$f(a)f(c) < 0$$

Si esta operación es cierta, significa que la raíz está entre **a** y **c**, por lo tanto en una nueva aproximación, **b** tomaría el valor de **c** y volveríamos a realizar una nueva iteración.

Si esta operación no es cierta (caso de la figura 7), significa que la raíz está entre **c** y **b**, por lo tanto en una nueva aproximación, **a** tomaría el valor de **c** y volveríamos a realizar una nueva iteración.

Esta metodología se repite hasta que **c** se estabilice en un valor, de tal manera que diremos que **c** es la raíz de la función.

¿Hasta cuándo deberemos iterar?. El mecanismo de parada en este método puede ser o por un número predeterminado de iteraciones o hasta que **c** entre dentro de un error, también predeterminado. Gráficamente se puede ver el proceso en la figura 8:

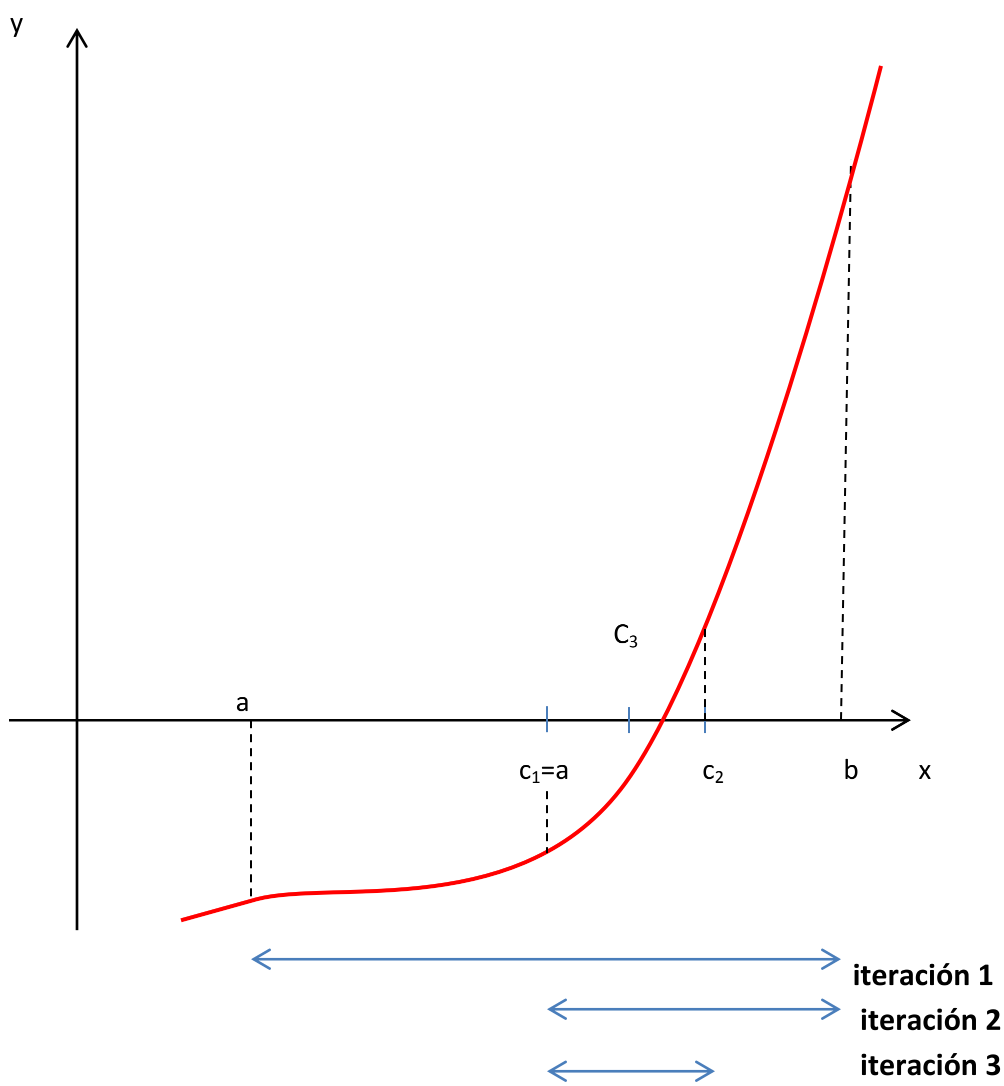
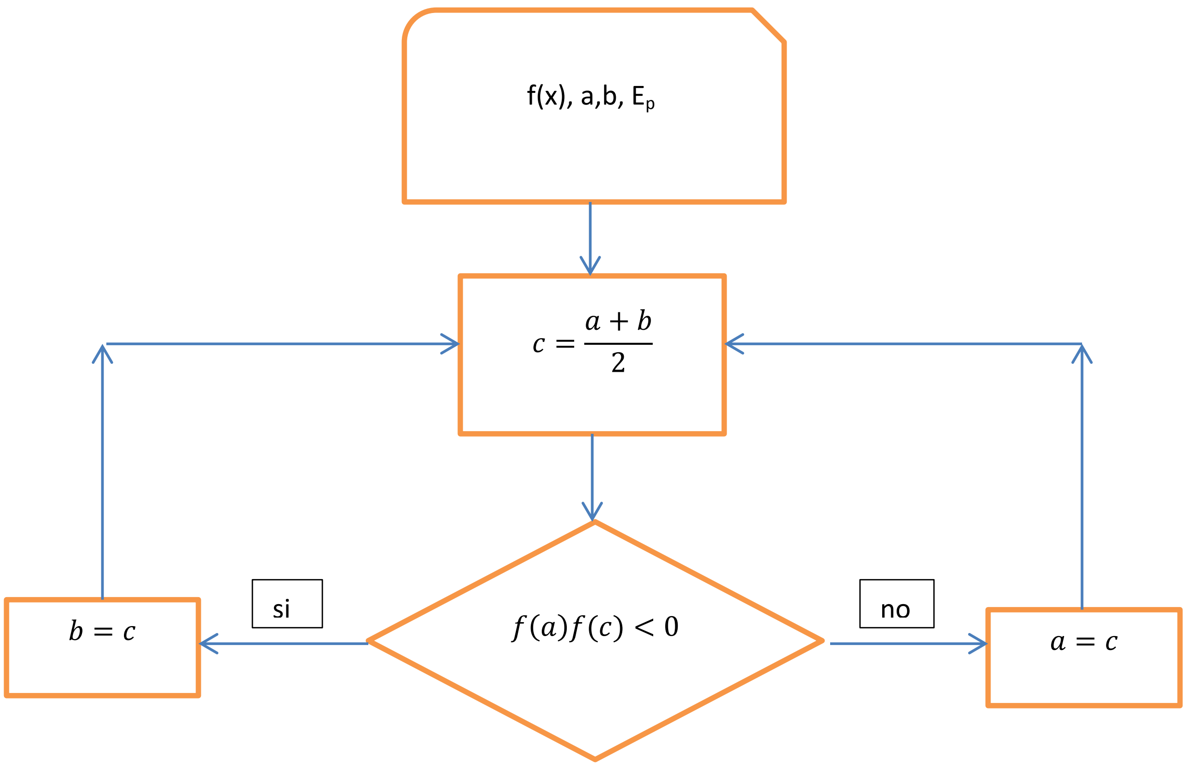


fig.8

Resumiendo, el esquema sería:



El diagrama de flujo precedente es elemental y el alumno deberá completarlo con más detalles, incluido el análisis del error.

Veamos un ejemplo numérico. Tomemos el primer ejercicio de la guía de trabajos prácticos: Encontrar la primera raíz positiva y calcularla, tomando un error permitido de $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-3}}$

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-x} - x}$$

Lo primero que debemos hacer es proponer un intervalo y hacer un "barrido" en el dominio positivo de la función:

X_i	$F(x_i)$	
0,0000	1,0000	(+)
0,4000	0,2703	(+)
0,8000	-0,3506	(-)

intervalo

Con ese intervalo encontrado, y usando el algoritmo de la bisección, calcularemos el valor numérico de la raíz para el error límite dado.

a	b	c	f(a)	f(c)	F(a)f(c)	|E|
0,4000	0,8000	0,6000	0,2703	-0,0512	<0	-
0,4000	0,6000	0,5000	0,2703	0,1065	>0	0,1000
0,5000	0,6000	0,5500	0,1065	0,0269	>0	0,0500
0,5500	0,6000	0,5750	0,0269	-0,0123	<0	0,0250
0,5500	0,5750	0,5625	0,0269	0,0073	>0	0,0125
0,5625	0,5750	0,5688	0,0073	-0,0026	<0	0,0063
0,5625	0,5688	0,5657	0,0073	0,0023	>0	0,0031
0,5657	0,5688	0,5673	0,0023	-0.0002	<0	0,0016
0,5657	0,5673	0,5665	0,0023	0,0010	>0	0,0008

$|E| < \varepsilon$

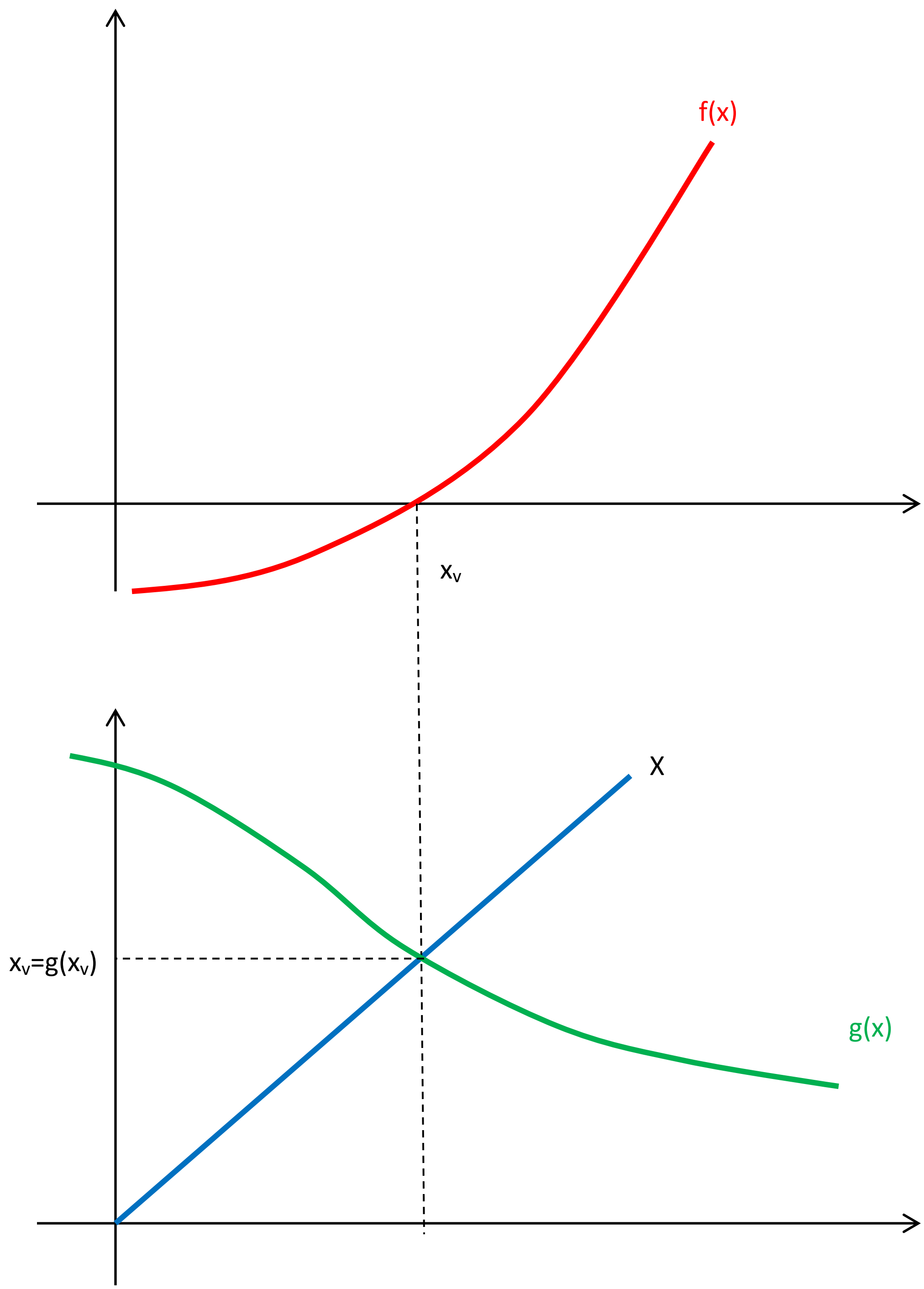
R
A
I
Z

VENTAJAS: Alto grado de convergencia, confiable, muy útil para encontrar intervalos donde hay raíces. Fácil programación.

INCONVENIENTES: No es apto para raíces múltiples de orden par ya que no hay cambio de signo, convergencia lenta.

3.3.- METODO DE PUNTO FIJO

El segundo método que abordaremos es el método de punto fijo, el que consiste en cambiar el problema de encontrar una raíz en encontrar un punto donde se corta una función llamada g(x) con la función identidad justo en el mismo punto donde se produce la raíz buscada:

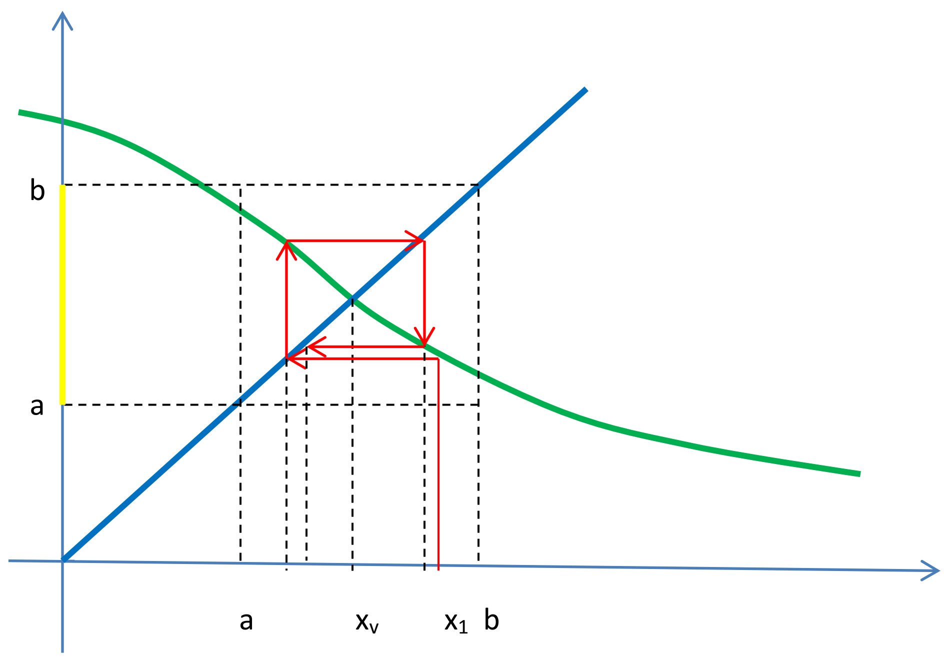


x_v

En el punto de encuentro tenemos que se cumple:

$$\boldsymbol{x_v = g(x_v)}$$

Supongamos que por el método de la Bisección detectamos el intervalo donde tenemos la raíz de la función f(x). en ese intervalo, si tenemos un punto fijo (punto de intersección entre x y g(x)), tendremos:



Entonces si lo expresamos con una fórmula recurrente tendremos:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = g(x_i)}$$

El tema es encontrar una g(x) que tenga un punto fijo en **[a;b]**. Como hacemos para buscar esa **g(x)**, hay varias formas:

a) Despejándola de **f(x)**, por ejemplo:

$$\boldsymbol{f(x) = x + \sin x}$$

En la raíz tendremos que:

$$f(x) = 0$$

Entonces:

$$f(x) = x + \sin x = 0$$

$$x = -\sin x$$

Por lo tanto:

$$g(x) = -\sin x$$

b) Sumando o restando a ambos miembros:

$$f(x) = x + \sin x$$

$$f(x) = x + \sin x = 0$$

$$x + \sin x + x = 0 + x$$

$$x = 2x + \sin x$$

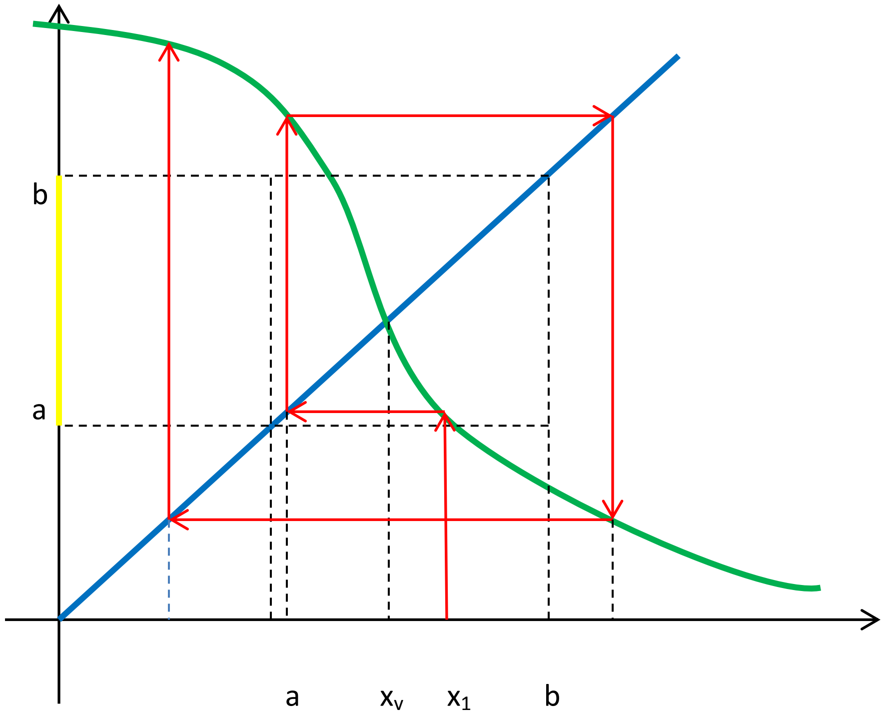
Entonces:

$$g(x) = 2x + \sin x$$

c) Proponiendo una g(x)

Obviamente esto no es fácil y la dificultad del método radica en esta circunstancia. Con la práctica se adquiere la "destreza".

Pero la cosa no es tan simple, podemos proponer un sin número de funciones **g(x)**, pero no todas tienen un punto fijo dentro del intervalo **[a;b]**, y no todas convergen a la raíz que estamos buscando. Observemos el siguiente ejemplo:



Como ven, la secuencia, al contrario del ejemplo anterior, diverge, alejándose de la solución.

Por lo tanto, cuando elegimos una **g(x)** por cualquiera de las formas explicadas, deberemos verificar que para la raíz buscada, tenga convergencia.

Sabemos que el primer ejemplo gráfico converge, y en este último, diverge. ¿Qué diferencia hay entre una y otra g(x)?, analicemos ambos gráficos:

a) En el primer gráfico vemos que la gráfica de **g(x)** tiene una pendiente más suave (menos pronunciada) que en el segundo gráfico.
b) En el primer gráfico, vemos que todas las imágenes de **g(x)** producidas en el intervalo **[a;b]**, caen dentro del intervalo **[a;b]** (el ubicado en el eje de las Y, marcado de amarillo).

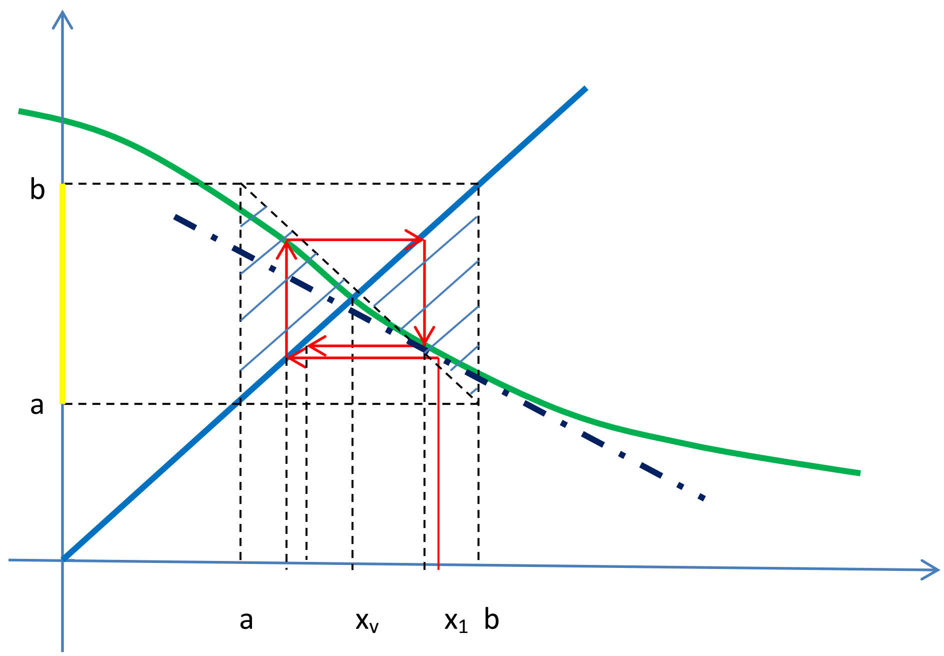
Esta última observación nos lleva a concluir la primera razón de convergencia:

I) $\boldsymbol{g(x)} \in [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ (el amarillo)

La primera observación nos conduce a la segunda razón de convergencia:

II) $|g'(\varepsilon)| \leq 1$ con $\varepsilon \in [a; b]$ y ε maximice a la derivada

Veamos en más detalle esto en el gráfico para entenderlo:



Veamos un ejemplo numérico para afirmar lo aprendido:

Tomemos el mismo ejercicio que vimos en el método de la Bisección:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Si realizamos una búsqueda por Bisección:

X_i	$F(x_i)$	
0,0000	1,0000	(+)
0,4000	0,2703	(+)

intervalo

0,8000	-0,3506	(-)

Por despeje propondremos una g(x):

$$x = e^{-x}$$

Por lo tanto g(x) será:

$$g(x) = e^{-x}$$

Analicemos las dos condiciones de convergencia:

I) $g(0{,}400) = e^{-0{,}400} = 0{,}6703$

$g(0{,}800) = e^{-0{,}800} = 0{,}4493$

Están dentro del intervalo [0,400;0,800] VERIFICA!!

II) $g'(x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$

En este caso la función g'(x) es creciente, entonces el valor de ε que maximiza a dicha derivada en [a;b] es el extremo inferior a:

$$\varepsilon = a = 0{,}400$$

Entonces:

$$|g'(0{,}400)| = 0{,}6703 < 1$$ VERIFICA!!

Por lo tanto la g(x) propuesta va a converger. Estamos en condiciones de aplicar el método usando la fórmula recurrente vista:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

$$x_{i+1} = e^{-x_i}$$

i	**x_i**	**$g(x_i)$**	**|E|**
0	0,4000	0,6703	-
1	0,6703	0,5116	0,2703
2	0,5116	0,5995	0,1587
3	0,5995	0,5491	0,0879
4	0,5491	0,5775	0,0504
5	0,5775	0,5613	0,0284
6	0,5613	0,5705	0,0162
7	0,5705	0,5652	0,0092
8	0,5652	0,5682	0,0053
9	0,5682	0,5665	0.0030
10	0,5665	0,5675	0,0017
11	0,5675	0,5669	0,0010
12	0,5669	0,5673	0,0006

$|E|<\varepsilon$

RAÍZ

VENTAJAS: Rápida convergencia, fácil de programar, se puede partir de un valor próximo sin importar de qué lado está la raíz (método abierto)

INCONVENIENTES: Dificultad para encontrar una g(x) convergente, puede, bajo ciertas circunstancias, quedar en un lazo anidado, no llegando a la solución.

3.4.- METODO DE NEWTON – RAPHSON

Veremos ahora un tercer método alternativo que demostraremos a partir del polinomio de Taylor y gráficamente para su mejor interpretación:

Supongamos que expandimos un polinomio de Taylor en torno al punto X_{i+1}

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_{i+1})}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_{i+1})}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n$$

Asumiendo que $f(x_{i+1}) \sim 0$ ya que x_{i+1} es la supuesta raíz, tomamos hasta el término de la primera derivada, haciendo un truncamiento y despreciando los términos de orden superior, tendremos:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) = 0$$

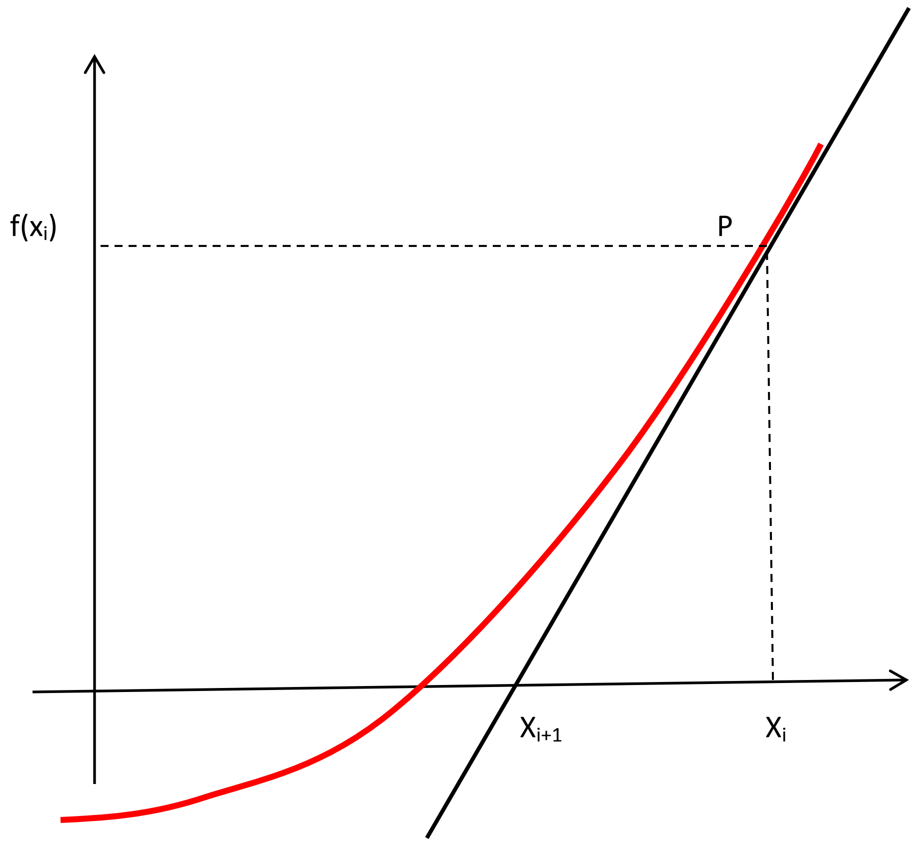
Y despejando X_{i+1} como supuesta raíz, nos queda:

$$0 - f(x_i) = f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_{1+1} - x_i$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Y esta es la fórmula recurrente del método de Newton Raphson. Esta expresión puede deducirse gráficamente de la siguiente manera:



Si analizamos el triángulo rectángulo formado por los puntos X_{i+1}, P, X_i, tendremos:

$$f'(x_i) \sim \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Despejando de aquí a X_{i+1}, nos queda:

$$f'(x_i)(x_i - x_{i+1}) = f(x_i)$$

$$(x_i - x_{i+1}) = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Multiplicando ambos miembros por (-1)

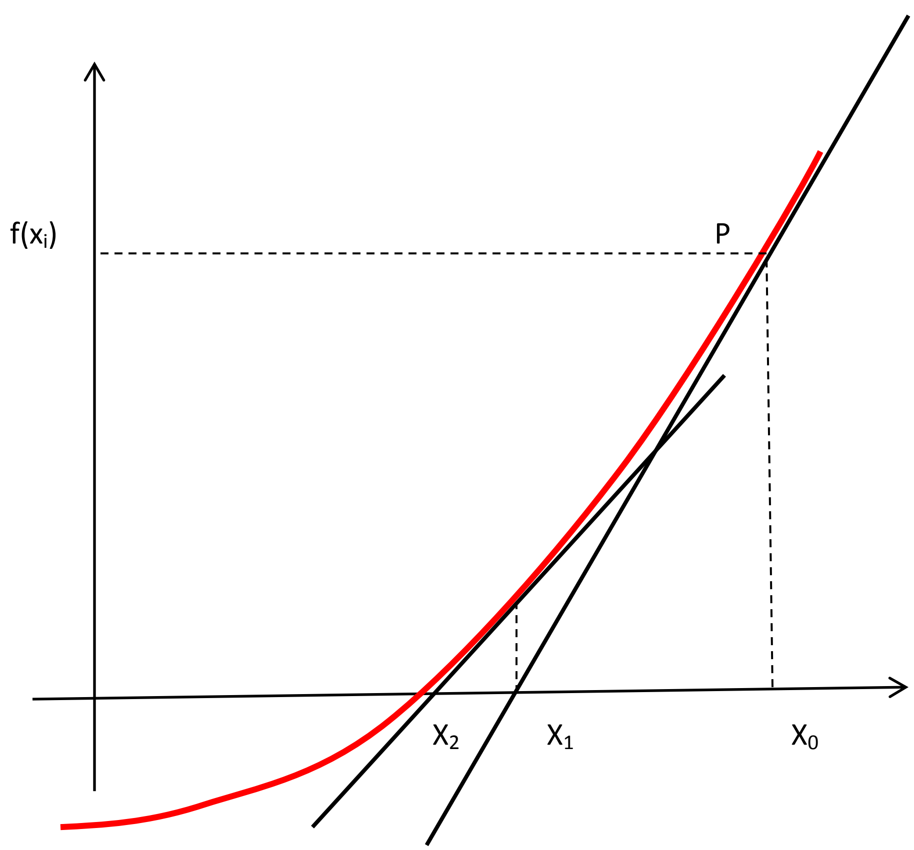
$$(-1)(x_i - x_{i+1}) = (-1)\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} - x_i = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que es la misma expresión que dedujimos del polinomio de Taylor.

Gráficamente cómo funcionaría este método:



Realicemos el ejercicio que ya hicimos con los otros dos métodos:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

i	X_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	|E|
0	0,4000	0,2703	-1,6703	-
1	0,5618	0,0084	-1.5702	0,1618
2	0,5671	0,0001	-1,5672	0,0053
3	0,5672			0,0001

$|E|<\varepsilon$

R
A
Í
Z

Si comparamos las expresiones del método de punto fijo y este tendremos:

$$\boldsymbol{x_{i+1} = g(x_i)}$$

$$\boldsymbol{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Concluimos que:

$$\boldsymbol{g(x_i) = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Es decir que el método de Newton Rapshon, “ES” un método de punto fijo.

VENTAJAS: tiene un alto grado de convergencia, pero puede en algunas ocasiones divergir, es un método rápido, lo que lo hace el método más usado en la ingeniería.

INCONVENIENTES: al usar la recta tangente para predecir el próximo valor en curvas “planas” como las logarítmicas, pueden presentar problemas de convergencia. Cuando las funciones son muy complejas, encontrar su derivada es una tarea tediosa.

3.5.- MÉTODO DE LA SECANTE

Para cuando obtener la derivada, se transforma en una tarea tediosa, podemos, mediante el teorema del valor medio, sustituirla por su aproximación, cometiendo un pequeño error que se suma a los otros estudiados.

$$f'(x_i) \sim \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

Y remplazando

en la expresión de Newton Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

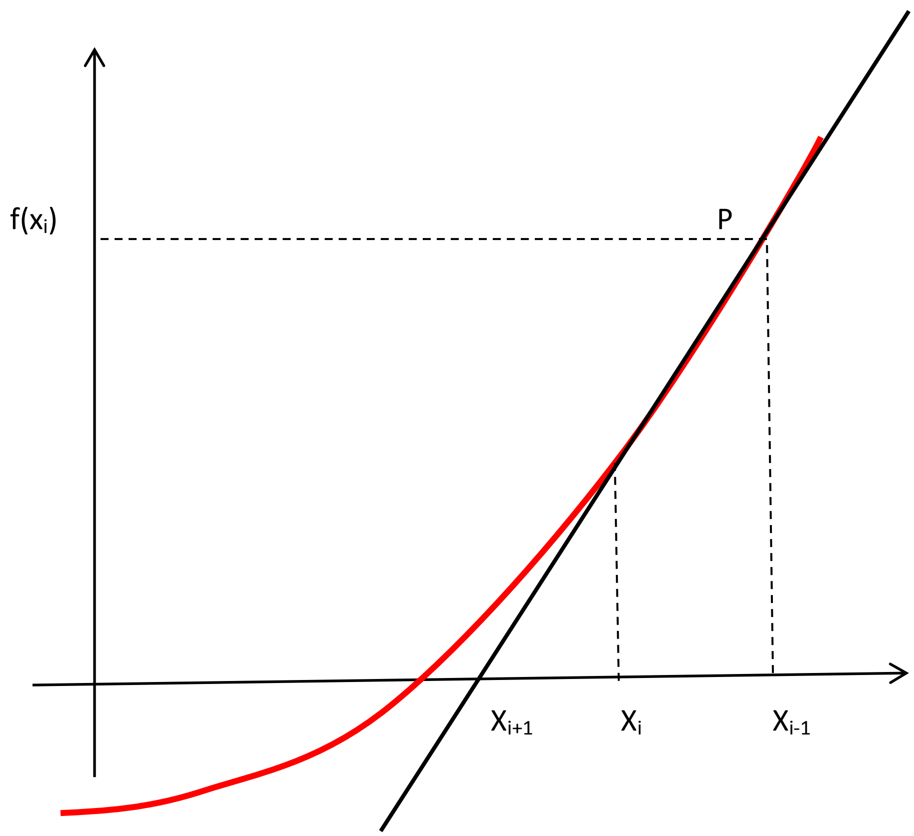
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}}$$

Acomodándola, queda:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

De esta manera no aparece en la expresión la función derivada. Nótese que usamos dos puntos de partida, y como es un método abierto, no importa si la raíz está entre estos dos puntos. Es indistinto.

La diferencia desde el punto de vista gráfico, con el método de Newton Raphson, es que en lugar de trabajar con la derivada (recta tangente a la función en el punto), lo hace con una recta secante (recta que corta a la función en dos puntos).



Veamos el ejemplo que venimos aplicando en los sucesivos métodos:

$$f(x) = e^x - x$$

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$\|E\|$
0	0,4000	0,2703	-
1	0,8000	-0,3607	-
2	0,5713	-0,0065	0,2287
3	0,5671	0,0001	0,0042
4	0,5672	0,0001	0,0001

$|E|<\varepsilon$

RAÍZ