4.- SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1.- PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Muchos problemas de ingeniería se resuelven al plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo cuando se diseña una estructura espacial de hormigón armado, es necesario plantear la matriz de rigidez y resolverla para distintas acciones a las que están sometidas, gravedad, viento, sismo, etc. Cuando diseñamos un circuito eléctrico debemos plantear la matriz del circuito bajo las leyes de Kirchoff, y someterlo a distintas variaciones de fuentes para ver como varían las corrientes eléctricas en las distintas ramas del circuito. Como estos ejemplos hay muchos más.

Veremos a continuación tres de los tantos métodos que existen, dejando al alumno que investigue por su cuenta los demás métodos que por una cuestión de tiempo aquí no se presentan.

4.2.- MÉTODO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA:

Dada una matriz A, el método consiste en dos pasos, el primero reduce a esta matriz a una triangular superior, haciendo “0” todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal, esta operación se materializa realizando operaciones elementales de filas. Una vez triangulada la matriz A, se procede con la segunda instancia que es realizando una sustitución hacia atrás (despejes de los valores del vector X).

Nuestro problema consiste en resolver:

$$\boldsymbol{A\vec{x}} = \boldsymbol{\vec{b}}$$

Donde la matriz A es una matriz cuadrada de nxn, $\vec{x}$ es un vector de nx1 (vector incógnitas) y $\vec{b}$ el vector de términos independientes.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

Lo que podemos reescribir en notación matricial:

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} & & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} & & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots\ldots & a_{3n} & & b_3 \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots\ldots & a_{nn} & & b_n
\end{array}$$

Que se conoce con el nombre de matriz extendida porque a los coeficientes de la matriz A le agregamos el vector de los términos independientes.

4.2.1.- TRIANGULACIÓN DE LA MATRIZ “A” EXTENDIDA:

Mediante operaciones elementales de fila sistemáticas se van haciendo “0” los elementos que están por debajo de los elementos de la diagonal principal. Si a cada fila le damos un nombre, tendremos:

$$
\begin{array}{llllll}
E_1 = a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} & | & b_1 \\
E_2 = a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} & | & b_2 \\
E_3 = a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots\ldots & a_{3n} & | & b_3 \\
\quad . & & . \quad\quad . & . & & \\
\quad . & & \quad . \quad . & . & & \\
E_n = a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots\ldots & a_{nn} & | & b_n
\end{array}
$$

PASO 1: se harán cero todos los elementos que están debajo del elemento a_{11}, usando un operador:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$E_2{}^{(1)} = E_2{}^{(0)} - m_{21}E_1{}^{(0)}$$

Luego:

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

$$E_3{}^{(1)} = E_3{}^{(0)} - m_{31}E_1{}^{(0)}$$

Y así sucesivamente hasta que nos queda:

$$
\begin{array}{lllllll}
E_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots & a_{1n} & | \; b_1 \\
E^{(1)}{}_2 = & 0 & a^{(1)}{}_{22} & a^{(1)}{}_{23} & \dots\dots\dots & a^{(1)}{}_{2n} & | \; b^{(1)}{}_2 \\
E^{(1)}{}_3 = & 0 & a^{(1)}{}_{32} & a^{(1)}{}_{33} & \dots\dots\dots & a^{(1)}{}_{3n} & | \; b^{(1)}{}_3 \\
 & . & & . & . & . & \\
 & . & & & . \;\; . & . & \\
E^{(1)}{}_n = & 0 & a^{(1)}{}_{n2} & a^{(1)}{}_{n3} & \dots\dots\dots & a^{(1)}{}_{nn} & | \; b^{(1)}{}_n
\end{array}
$$

PASO 2: Se hacen nulos todos los elementos que están por debajo del elemento a_{22} con igual procedimiento:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}}$$

$$E_3{}^{(2)} = E_3{}^{(1)} - m_{32} E_2{}^{(1)}$$

Luego:

$$m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}$$

$$E_4{}^{(2)} = E_4{}^{(1)} - m_{42} E_2{}^{(1)}$$

Y así sucesivamente hasta que nos queda:

$$
\begin{array}{llllll}
E_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots\ a_{1n} & |\ b_1 \\
E^{(1)}_2 = & 0 & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & \dots\dots\dots\ a^{(1)}_{2n} & |\ b^{(1)}_2 \\
E^{(2)}_3 = & 0 & 0 & a^{(2)}_{33} & \dots\dots\dots\ a^{(2)}_{3n} & |\ b^{(2)}_3 \\
 & . & & . & . & . \\
 & . & & . & . & . \\
E^{(2)}_n = & 0 & 0 & a^{(2)}_{n3} & \dots\dots\dots\ a^{(2)}_{nn} & |\ b^{(2)}_n
\end{array}
$$

Se realizan (n-1) pasos hasta completar la triangulación de la matriz "A":

$$
\begin{array}{llllll}
E_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots\dots\dots\ a_{1n} & |\ b_1 \\
E^{(1)}_2 = & 0 & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & \dots\dots\dots\ a^{(1)}_{2n} & |\ b^{(1)}_2 \\
E^{(2)}_3 = & 0 & 0 & a^{(2)}_{33} & \dots\dots\dots\ a^{(2)}_{3n} & |\ b^{(2)}_3 \\
 & . & & . & . & . \\
 & . & & . & . & . \\
E^{(n-1)}_n = & 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots\ a^{(n-1)}_{nn} & |\ b^{(n-1)}_n
\end{array}
$$

4.2.2.- SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS:

Una vez triangulada la matriz "A", despejamos las incógnitas X desde la última ecuación hasta la primera:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

Luego se despeja X_{n-1}, X_{n-2}, y así sucesivamente Hasta despejar X_1 de la primera ecuación:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}$$

Con i=n-1,n-2,n-3,….,1.

Veamos un ejemplo:

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = 19,30$$

$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,40$$

La matriz extendida sería:

$$\begin{matrix} 3 & -0,1 & -0,2 & \color{red}{7,85} \\ 0,1 & 7 & -0,3 & \color{red}{19,30} \\ 0,3 & -0,2 & 10 & \color{red}{71,40} \end{matrix}$$

PASO 1:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,1}{3} = 0,0333$$

$$E_2 = E_2 - m_{21}E_1$$

$$a_{21} = 0,1 - 0,0333(3) = 0$$

$$a_{22} = 7 - 0,0333(-0,1) = 7,0033$$

$$a_{23} = -0,3 - 0,0333(-0,2) = -0,2933$$

$$b_2 = 19,30 - 0,0333(7,85) = 19,0386$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0,3}{3} = 0,1$$

$$a_{31} = 0,3 - 0,1(3) = 0$$

$$a_{32} = -0,2 - 0,1(-0,1) = -0,19$$

$$a_{33} = 10 - 0,1(-0,2) = 10,02$$

$$b_3 = 71,40 - 0,1(7.85) = 70,615$$

Con lo cual la matriz ampliada queda:

$$\begin{matrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & 19,0386 \\ 0 & -0,19 & 10,02 & 70,615 \end{matrix}$$

PASO 2:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-0,19}{7,0033} = -0,0271$$

$$a_{32} = -0,19 - (-0,0271)(7,0033) = 0$$

$$a_{33} = 10,02 - (-0,0271)(-0,2933) = 10,0121$$

$$b_3 = 70,615 - (-0,0271)(19,0386) = 71,1309$$

Con lo que la matriz extendida A queda:

$$\begin{matrix} 3 & -0,1 & -0,2 & 7,85 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 & 19,0386 \\ 0 & 0 & 10,0121 & 71,1309 \end{matrix}$$

Como ven es una matriz triangular superior. Realicemos la sustitución atrás para encontrar os valores de $\vec{X}$

$$x_3 = \frac{\mathbf{71,1309}}{\mathbf{10,0121}} = \mathbf{7,1044}$$

$$x_2 = \frac{\mathbf{19,0386 - (-0,2933}x\mathbf{7,1044)}}{\mathbf{7,0033}} = \mathbf{3,0161}$$

$$x_1 = \frac{\mathbf{7,85 - \left(-0,2}x\mathbf{7,1044 + \ (-0,1}x\mathbf{3,0161)\right)}}{\mathbf{3}} = \mathbf{3,1908}$$

Entonces el resultado sería:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,1908} \\ \mathbf{3,0161} \\ \mathbf{7,1044} \end{bmatrix}$$

Para verificar que es el resultado reemplazamos en el sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{3(3,1908) - 0,1(3,0161) - 0,2(7,1044) = 7,8499}$$

$$\mathbf{0,1(3,1908) + 7(3,0161) - 0,3(7,1044) = 19,3005}$$

$$\mathbf{0,3(3,1908) - 0,2(3,0161) + 10(7,1044) = 71,3980}$$

4.3.- MÉTODO DE GAUSS – SEIDEL

Otro método que veremos es el de Gauss – Seidel, éste deriva del método de Gauss Jacobi, mejorando la velocidad de convergencia, por esta razón directamente veremos éste, salteándolo al mencionado método que le da origen.

Es un método iterativo, que se basa en el principio de punto fijo. Las fórmulas recurrentes (iterativas) surgen de despejar una incógnita de cada ecuación:

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1}$$
$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2}$$
$$\boldsymbol{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3}$$
$$\boldsymbol{.\qquad\qquad\qquad .\qquad\quad .\quad\; .}$$
$$\boldsymbol{.\qquad\qquad\qquad\qquad .\quad\; .\quad\; .}$$
$$\boldsymbol{a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n}$$

Entonces de la primera ecuación despejo X_1:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}}$$

De la segunda despejamos X_2

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}}}$$

De a tercera ecuación despejo X_3:

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{b_3 - (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n)}{a_{33}}}$$

Y así sucesivamente hasta llegar a despejar X_n de la última ecuación.

Si observamos detenidamente estas expresiones, podemos deducir la fórmula recurrente (algoritmo):

$$\boldsymbol{x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j}{a_{ii}}}$$

Con i=1,2,3,…..,n

Este es el algoritmo de Gauss – Seidel, es de fácil programación. El mecanismo de parada es analizando el error paso a paso y comparándolo con un valor límite que lo impone el problema. Deben estar todos los errores dentro del valor límite para parar la sucesión.

Observen que también aquí se deberá tener cuidado con que no tengamos ningún elemento nulo en la diagonal principal.

Veamos un ejemplo numérico:

$$\boldsymbol{3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85}$$

$$\boldsymbol{0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = 19,30}$$

$$\boldsymbol{0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,40}$$

De la primera despejamos X_1:

$$\boldsymbol{x_1 = \frac{7,85 - (-0,1x_2 - 0,2x_3)}{3}}$$

De la segunda despejamos X_2:

$$\boldsymbol{x_2 = \frac{19,30 - (0,1x_1 - 0,3x_3)}{7}}$$

Y de la tercera despejamos X_3:

$$\boldsymbol{x_3 = \frac{71,40 - (0,3x_1 - 0,2x_2)}{10}}$$

Para arrancar el método, al igual que el método de punto fijo, debemos partir de un valor de $\vec{x}$ aproximado. Como la mayoría de las veces, este valor es desconocido, se parte de la solución trivial, $\vec{x} = (0{,}0{,}0, \ldots ,0)$

i	**X_1**	**$\lvert E_1 \rvert$**	**X_2**	**$\lvert E_2 \rvert$**	**X_3**	**$\lvert E_3 \rvert$**
0	0,0000	-	0,0000	-	0,0000	-
1	2,6167	2,6167	2,7198	2,7198	7,1159	7,1159
2	3,1817	0,5650	3,0167	0,2969	7,1049	0,0110
3	3,1909	0,0092	3,0161	0,0006	7,1046	0,0003
4	3,1908	0,0001	3,0160	0,0001	7,1046	0,0000

Valor inicial: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1 = \frac{7,85 - (-0,1x0 - 0,2x0)}{3} = 2,6167$$

$$x_2 = \frac{19,30 - (0,1x2,6167 - 0,3x0)}{7} = 2,7198$$

$$x_3 = \frac{71,40 - (0,3x2,6167 - 0,2x2,7198)}{10} = 7,1159$$

Primera iteración: $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 2,6167 \\ 2,7198 \\ 7,1159 \end{bmatrix}$

Así sucesivamente hasta que el último error entre dentro del permitido.

El resultado de la aplicación del método, es:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3{,}1908 \\ 3{,}0160 \\ 7{,}1046 \end{bmatrix}$$

Una vez encontrado el vector X, debemos verificarlo en el sistema original:

$$\mathbf{3(3,1908) - 0,1(3,0160) - 0,2(7,1046) = 7,8499}$$

$$\mathbf{0,1(3,1908) + 7(3,0160) - 0,3(7,1046) = 19,2997}$$

$$\mathbf{0,3(3,1908) - 0,2(3,0160) + 10(7,1046) = 71,4000}$$

4.4- MÉTODO DE LA LU

Si queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{b}]$$

Por propiedades algebraica de matrices, se puede sustituir la matriz **A** por:

$$[\boldsymbol{LU}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{b}]$$

Donde **L** es una matriz triangular inferior y **U** es una matriz triangular superior.

Si ahora aplicamos propiedad asociativa, nos queda:

$$[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{Ux}] = [\boldsymbol{b}]$$

Donde **[Ux]** es el producto de una matriz cuadrada por un vector, que da como resultado:

$$[\boldsymbol{U}][\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{y}]$$

Tal que:

$$[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{b}]$$

La ventaja del método es que con la última expresión despejamos **[y]** por una sustitución hacia adelante, y con la penúltima despejamos **[x]** mediante una sustitución hacia atrás.

Veamos como obtenemos la matriz **L** y **U**. A tal fin tomemos un sistema de 3x3 y veremos luego su generalización para un sistema de nxn.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & \boldsymbol{u_{11}} & \boldsymbol{u_{12}} & \boldsymbol{u_{13}} \\
 & & & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u_{22}} & \boldsymbol{u_{23}} \\
 & & & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u_{33}} \\
\hline
\boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\
\boldsymbol{l_{21}} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\
\boldsymbol{l_{31}} & \boldsymbol{l_{32}} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}}
\end{array}$$

Resolviendo la multiplicación tenemos:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$a_{11} = 1.u_{11} + 0 + 0$$

$$u_{11} = a_{11}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$a_{12} = 1.u_{12} + 0 + 0$$

$$u_{12} = a_{12}$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$a_{13} = 1.u_{13} + 0 + 0$$

$$u_{13} = a_{13}$$

Con lo que concluimos que la primera fila de la matriz U es la primera fila de la matriz A. Sigamos:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$a_{21} = l_{21}.u_{11} + 0 + 0$$

Y como:

$$u_{11} = a_{11}$$

Nos queda:

$$a_{21} = l_{21}.a_{11}$$

Y despejando:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Siguiendo con la multiplicación:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}$$

$$a_{22} = l_{21}.u_{12} + 1.u_{22} + 0$$

De donde despejamos:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

Y como:

$$u_{12} = a_{12}$$

Nos queda:

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}a_{12}$$

Siguiendo:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
$$

$$a_{23} = l_{21}u_{13} + 1.u_{23} + 0$$

Y como:

$$u_{13} = a_{13}$$

Nos queda:

$$a_{23} = l_{21}a_{13} + 1.u_{23}$$

Despejando:

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}a_{13}$$

Si observan con detenimiento, verán que la fila dos de la matriz **U** es igual a la segunda fila modificada de la matriz **A** según el algoritmo de Eliminación Gaussiana, ya que el elemento

$$l_{21} = m_{21}$$

Es decir, igual al modificador calculado con el algoritmo de Eliminación Gaussiana!!!!

Sigamos:

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 & & & 0 & u_{22} & u_{23} \\
 & & & 0 & 0 & u_{33} \\
\hline
1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
l_{21} & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
l_{31} & l_{32} & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}$$

$$a_{31} = l_{31}u_{11} + 0 + 0$$

Y como:

$$u_{11} = a_{11}$$

Queda:

$$a_{31} = l_{31}a_{11}$$

Y despejando:

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = m_{31}$$

No tiene sentido seguir con el cálculo de la multiplicación ya que a esta altura nos damos cuenta que los elementos l_{ij} de la matriz **L** son los modificadores m_{ij} de la eliminación Gaussiana. Y también queda en evidencia que la matriz **U** es la matriz **A** triangulada por el método de eliminación Gaussiana. En conclusión: "***EL ALGORITMO PARA CALCULAR LAS MATRICES LY U, ES EL ALGORITMO DE ELIMINACIÓN GAUSSIANA***"

La gran ventaja de este método, es que se aplica una sola vez la Eliminación Gaussiana y luego puede cambiarse cuantas veces quiera el vector de términos independientes **[b]**, que tan solo se realiza una sustitución hacia adelante para obtener **[y]**, y luego una sustitución hacia atrás para obtener el vector **[x]**. Esto es muy común en los problemas de ingeniería, por eso lo hace un método apto para nuestra disciplina.

Veamos el ejemplo que estamos desarrollando con cada método:

$$3x_1 - 0,1x_2 - 0,2x_3 = 7,85$$

$$0,1x_1 + 7x_2 - 0,3x_3 = 19,30$$

$$0,3x_1 - 0,2x_2 + 10x_3 = 71,40$$

Recordemos que al aplicar el método de Eliminación Gaussiana, obtuvimos:

$$m_{21} = 0,0333$$

$$m_{31} = 0,1000$$

$$m_{32} = -0,0271$$

Y la matriz A modificada:

$$\begin{matrix} \mathbf{3} & \mathbf{-0,1} & \mathbf{-0,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7,0033} & \mathbf{-0,2933} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10,0121} \end{matrix}$$

Entonces:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,0333} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,1000} & \mathbf{-0,0271} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-0,1} & \mathbf{-0,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{7,0033} & \mathbf{-0,2933} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{10,0121} \end{bmatrix}$$

PRIMER PASO:

$$[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{b}]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,0333} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0,1000} & \mathbf{-0,0271} & \mathbf{1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{7,85} \\ \mathbf{19,30} \\ \mathbf{71,40} \end{bmatrix}$$

Y realizando una sustitución hacia adelante:

$$\mathbf{1}.\boldsymbol{y_1} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{7,85}$$

$$\boldsymbol{y_1} = \mathbf{7,85}$$

$$\mathbf{0,0333}.\boldsymbol{y_1} + \mathbf{1}.\boldsymbol{y_2} + \mathbf{0} = \mathbf{19,30}$$

Despejando:

$$\boldsymbol{y_2} = \mathbf{19,30} - \mathbf{0,0333}.\boldsymbol{y_1}$$

Reemplazando

$$y_2 = 19,30 - 0,0333\,.\,7,85$$

$$y_2 = 19,0386$$

Finalmente:

$$0,1.y_1 - 0,0271.y_2 + 1.y_3 = 71,40$$

Despejando:

$$y_3 = 71,40 - 0,1y_1 + 0,0271.y_3$$

$$y_3 = 71,40 - 0,1\,.\,7,85 + 0,0271.19,0386$$

$$y_3 = 71,1309$$

Es decir:

$$y = \begin{bmatrix} 7,85 \\ 19,0386 \\ 71,1309 \end{bmatrix}$$

SEGUNDO PASO:

$$[U][x] = [y]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,0033 & -0,2933 \\ 0 & 0 & 10,0121 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,85 \\ 19,0386 \\ 71,1309 \end{bmatrix}$$

Y realizando una sustitución hacia atrás:

$$0 + 0 + 10,0121.x_3 = 71,1309$$

$$x_3 = \frac{71,1309}{10,0121} = 7,1045$$

$$\boldsymbol{x_3 = 7,1045}$$

$$\mathbf{0 + 7,0033.}\boldsymbol{x_2}\mathbf{ - 0,2933.}\boldsymbol{x_3}\mathbf{ = 19,0386}$$

Despejando:

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{\mathbf{19,0386 - (-0,2933.}\boldsymbol{x_3}\mathbf{)}}{\mathbf{7,0033}}$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{\mathbf{19,0386 - (-0,2933.\ 7,1045)}}{\mathbf{7,0033}} = \mathbf{3,0161}$$

$$\boldsymbol{x_2 = 3,0161}$$

Finalmente:

$$\mathbf{3.}\boldsymbol{x_1}\mathbf{ - 0,1.}\boldsymbol{x_2}\mathbf{ - 0,2.}\boldsymbol{x_3}\mathbf{ = 7,85}$$

Despejando:

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{7,85 - (-0,1.}\boldsymbol{x_2}\mathbf{ - 0,2.}\boldsymbol{x_3}\mathbf{)}}{\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{\mathbf{7,85 - (-0,1.\ 3,0161 - 0,2.7,1045)}}{\mathbf{3}} = \mathbf{3,1908}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 3,1908}$$

Resumiendo:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{3,1908} \\ \mathbf{3,0161} \\ \mathbf{7,1045} \end{bmatrix}$$

Realicemos la verificación de rigor:

$$\mathbf{3(3,1908) - 0,1(3,0161) - 0,2(7,1045) = 7,8499}$$

$$\mathbf{0,1(3,1908) + 7(3,0161) - 0,3(7,1045) = 19,3004}$$

$$\mathbf{0,3(3,1908) - 0,2(3,0161) + 10(7,1045) = 71,3990}$$

NÚMERO DE CONDICIÓN DE UNA MATRIZ

Sea un sistema de ecuaciones lineales;

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

En el que la solución obtenida después de usar algunos de los métodos es ***u***:

$$\boldsymbol{u = x}$$

Nos interesa saber qué modificaciones habrá en ***u*** si generamos un pequeño cambio en algún elemento de ***A*** o de ***b***.

Veamos que sucede si generamos una pequeña perturbación en un elemento de ***b*** para ver como incide en la solución ***u***:

$$\boldsymbol{A(u + \Delta u) = b + \Delta b}$$

Tal que:

$$\boldsymbol{A\Delta u = \Delta b}$$

Nos interesa ver el error relativo que se produce en ***u***, por lo tanto diremos:

$$\boldsymbol{\Delta u = A^{-1}\Delta b}$$

Si tomamos una norma vectorial y una matricial, y valiéndonos de las propiedades del álgebra vectorial, tendremos:

$$\|\Delta \boldsymbol{u}\| \leq \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \|\Delta \boldsymbol{b}\|$$

Por otro lado y con igual criterio, tendremos:

$$\|\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{u}\|$$

De donde:

$$\frac{\mathbf{1}}{\|\boldsymbol{u}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Por definición el error relativo está dado por:

$$\frac{\|\Delta \boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\| \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\| \frac{\|\Delta \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

Observemos que el error relativo de la solución, depende del valor del producto $\|\boldsymbol{A}\| \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|$. Cuanto más próximo a 1 esté más estable es la solución. A este producto se le llama "número de condición o condicionamiento" de la matiz ***A***.

$$\boldsymbol{cond}(A) = \|A\| \left\|\boldsymbol{A}^{-1}\right\|$$

En la práctica no importa tanto el valor numérico del número de condición, si no, el orden de magnitud del mismo, porque de él dependerán la cantidad de cifras significativas que tendremos. Es decir, si con cualquiera de los métodos que apliquemos, usamos un número de dígitos ***t***, y el número de condición es de orden ***p***, las cifras significativas serán ***(t-p).***

Veamos un ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0,835} & \mathbf{0,667} \\ \mathbf{0,333} & \mathbf{0,266} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{-266000} & \mathbf{667000} \\ \mathbf{333000} & \mathbf{-835000} \end{bmatrix}$$

Recordemos que la norma de una matriz se calcula con:

$$\|A\| = \begin{matrix} max \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Entonces:

$$0,835 + 0,333 = 1,168$$

$$0,667 + 0,266 = 0,933$$

$$\|A\| = 1,168$$

$$266000 + 333000 = 599000$$

$$667000 + 835000 = 1502000$$

$$\|A^{-1}\| = 1502000$$

Por lo tanto el número de condición es:

$$cond(A) = 1,168\,.\,1502000 = 1754336 = 1,7.\,10^{6}$$

Entonces si con cualquier método trabajamos con ocho dígitos **(t=8)** y el orden del número de condición es seis ***(p=6)***, la cantidad de cifras significativas que tendremos es:

$$n = t - p = 8 - 6 = 2$$

Lo mismo se puede razonar generando una perturbación en algún elemento de A. (razonamiento análogo).