§11. Интервальные оценки.

Доверительные интервалы.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — выборка с ф-ей распределения $F(x;\theta)$, где θ — неизв. параметр. Предположим, что мы можем указать две ф-ции $\underline{\theta} = \underline{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ и $\overline{\theta} = \overline{\theta}(x_1, \dots, x_n)$ такие, что $\underline{\theta} < \overline{\theta}$ и при всех $x_1, \dots, x_n$

$$P\{\underline{\theta}(x_1, \dots, x_n) < \theta < \overline{\theta}(x_1, \dots, x_n)\} = 1 - 2\alpha ,$$

т.е. вер-ть того, что неизв. параметр θ попадает в интервал $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ равна $1-2\alpha$ и не зависит от θ.

<u>Определение 1</u>. Интервал $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ называется <u>доверительным интервалом</u> для неизв. параметра θ, соответствующий <u>доверительной вер-ти</u> $1-2\alpha$. При этом 2α наз-ся <u>доверительным уровнем</u>.

<u>Замечание</u>. Если $x_1, \dots, x_n$ — выборка из дискрет. распределения, то довер. интервал стр-ся так: $\underline{\theta}, \overline{\theta}$ выб-ся так, чтобы

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} \geq 1 - 2\alpha .$$

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, в общем случае описать точные выборочные распределения не удается. Но если они известны, то построить доверит. интервалы можно. Как мы видели, в случае выборки из нормального распределения точные выбор. распред. известны.

Итак, пусть $x_1, \dots, x_n$ - выборка из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Рассмотрим четыре случая оценок неизв. параметров a и σ^2.

I. Оценка неизвестного среднего при известной дисперсии.

Итак, пусть σ^2 - известный параметр норм. распр. Мы видели, что с. в.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

имеет нормальное распред. $N(a, \frac{\sigma^2}{n})$.

Тогда по Th-Фишера (~~[illegible]~~) с. в.

$$\frac{\bar{x} - a}{\sigma / \sqrt{n}}$$

имеет распред. $N(0, 1)$ и её распред. не зависит от a, что важно.

Откуда

$$P\left\{ \left| \frac{\bar{x} - a}{\sigma/\sqrt{n}} \right| < u_\alpha \right\} = 1 - 2\alpha ,$$

где u_α – решение ур-ния

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{u_\alpha}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \alpha .$$

Таким образом

$$P\left\{ \bar{x} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - 2\alpha ,$$

т.е. интервал $\left(\bar{x} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ явл-ся довер. интервалом для a с довер. вер-тью $1-2\alpha$.

II. Оценка неизвестного среднего при неизвестной дисперсии.

Более естественно, когда параметр σ^2 неизвестен. Из Сл-я 1 Т-ремы Фишера имеем, что с.в.

$$\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{m_2}} \cdot \sqrt{n-1}$$

имеет распред. Стьюдента с $(n-1)$ степ. свободы. Определим $t_{\alpha, n-1}$ как решение ур-ния

$$1 - S_{n-1}(t_{\alpha, n-1}) = \alpha ,$$

или $$P\{|t| < t_{\alpha, n-1}\} = 1 - 2\alpha,$$

где t – сл. вел-на, имеющая распр. Стьюдента с $(n-1)$ степ. свободы. Тогда

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - a}{\sqrt{m_2}}\sqrt{n-1}\right| < t_{\alpha, n-1}\right\} =$$

$$= P\left\{\bar{x} - t_{\alpha, n-1}\sqrt{\frac{m_2}{n-1}} < a < \bar{x} + t_{\alpha, n-1}\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}\right\} = 1 - 2\alpha,$$

т.е. $\left(\bar{x} - t_{\alpha, n-1}\sqrt{\frac{m_2}{n-1}},\ \bar{x} + t_{\alpha, n-1}\sqrt{\frac{m_2}{n-1}}\right)$ явл-ся доверит. интервалом для парам. a с довер. уров. 2α

III. Оценка неизвестной дисперсии при известном среднем.

Пусть теперь парам. a известен. Оценим σ^2.
С. в.

$$\chi_n^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2$$

имеет распред. χ^2 с n степенями свободы. Определим $x^2_{\alpha, n}$ как решение ур-ния

$$P\{\chi_n^2 > x^2_{\alpha, n}\} = \alpha.$$

Тогда

$$P\{x^2_{\alpha, n} < \chi_n^2 < x^2_{1-\alpha, n}\} = 1 - 2\alpha.$$

Обозначим $S^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - a)^2$. Тогда

$$P\left\{ \chi^2_{\alpha,n} < \frac{S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha,n} \right\} = 1 - 2\alpha.$$

Значит,

$$\left(\frac{S^2}{\chi^2_{1-\alpha,n}}, \frac{S^2}{\chi^2_{\alpha,n}} \right)$$

явл-ся доверит. интервалом для парам. σ^2.

IV. Оценка неизвестной дисперсии при неизвестном среднем.

Пусть парам. a неизвестен. Из Th-Фишера имеем, что с. в. $\frac{n \cdot m_2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Определим $\chi^2_{\alpha,n-1}$ также, как и в III. Тогда

$$P\left\{ \frac{n \cdot m_2}{\chi_{\alpha,n-1}} < \sigma^2 < \frac{n \cdot m_2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}} \right\} = 1 - 2\alpha.$$

Значит,

$$\left(\frac{n \cdot m_2}{\chi^2_{\alpha,n-1}}, \frac{n \cdot m_2}{\chi^2_{1-\alpha,n-1}} \right)$$

явл-ся доверит. интервалом для парам. σ^2 с доверит. вер-тью $1 - 2\alpha$.