Linear Algebra Basics

LanBian QianQ

Huazhong University of Science and Technology
Computer Science and Technology Department

August 21, 2024

在我们开始之前

线性代数，Linear Algebra。
理工科专业学生必修。
研究对象：向量，向量空间，线性变换和有限维的线性方程组。
OI 中应用：矩阵加速，高斯消元、线性基。
请避开一切以行列式开始的教材。
系统学习线性代数，推荐 MIT 网课：
https://www.bilibili.com/video/BV16Z4y1U7oU

向量

一个 n 维向量 V 可以简单理解为 n 个数排列在一起。例如，下面是一个 3 维向量。

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

用 V_i 表示向量 V 的第 i 个元素。

向量点积

两个 n 维向量 p, q，$p \cdot q$ 称为向量的点积运算，运算结果为一个实数。

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i$$

例如，$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，$q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，
$p \cdot q = 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 2 + 4 + 9 = 15$。

矩阵

一个 $n \times m$ 的矩阵 A 可以被简单理解为 n 行 m 列的数排列在一起，记作 $A_{n \times m}$。
例如，下面是一个 2×3 的矩阵

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

也可以用中括号

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵同型

有矩阵 $A_{n_1 \times m_1}$ 和 $B_{n_2 \times m_2}$。

当且仅当 $\begin{cases} n_1 = n_2 \\ m_1 = m_2 \end{cases}$，称矩阵 A 与矩阵 B 同型。

用 $A_{i,j}$ 表示矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。

方阵

矩阵 $A_{n\times m}$，如果 $n=m$，则称 A 为 n 阶方阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

例如，上面是一个三阶方阵。

单位矩阵

对于一个方阵，从左上角到右下角的对角线，称为主对角线。
从右上角到左下角的对角线，称为从对角线。
单位矩阵 E 是这样一个矩阵：

- E 是一个方阵
- E 的主对角线上元素均为 1
- E 其他元素均为 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例如，上面是一个三阶单位矩阵 E_3。

加法

矩阵加法应用于同型矩阵 A, B。
假设 $A+B=C$，C 与 A, B 同型，$C_{i,j}=A_{i,j}+B_{i,j}$。
例如，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

减法

矩阵减法应用于同型矩阵 A, B。
假设 $A - B = C$，C 与 A, B 同型，$C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}$。
例如，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

转置

转置是针对单个矩阵 $A_{n \times m}$ 的运算。
用 A^T 表示转置后得到的矩阵，A^T 是一个 $m \times n$ 的矩阵。

$$A^T_{i,j} = A_{j,i}$$

例如，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$。
则 $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$。

数乘

数乘是实数 k 与矩阵 A 相乘得到 kA。
矩阵大小不变，每个位置上的元素都乘以 k。
形式化地，记 $kA=B$，有 $B_{i,j}=kA_{i,j}$。
例如，$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，$k=0.5$。

$$kA=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 1.5\\ 2 & 2.5 & 3\end{pmatrix}$$

矩阵乘法

请注意，矩阵乘法不满足乘法交换律。
假设有 $A_{n\times s}$ 与 $B_{t\times m}$ 两个矩阵。
可以计算 AB 的结果，当且仅当 $s=t$，得到一个 $n\times m$ 的矩阵。
AB 称为 A 右乘上 B。

矩阵乘法

假设 $A_{n\times s} \times B_{s\times m} = C_{n\times m}$。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$C_{i,j}$ 的值，与矩阵 A 的第 i 行、矩阵 B 的第 j 列有关。
矩阵 A 的第 i 行、矩阵 B 的第 j 列，均可以看作 s 维向量。

$$C_{i,j} = A_i \cdot B_j^T$$

矩阵乘法

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵 C：2×2。

$C_{1,1} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

$C_{1,2} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 12$

$C_{2,1} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$

$C_{2,2} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的性质

$$E \times A = A \times E = A$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$kAB = (kA)B$$

例题 - B2105 矩阵乘法

矩阵 A 的大小为 $n \times m$，矩阵 B 的大小为 $m \times k$，计算 $A \times B$ 的结果。

矩阵的幂

在实数领域中，a^k 表示将实数 a 连乘 k 次。
$A_{n\times m}$ 想要能够连乘，必须满足矩阵乘法条件。得到 $n=m$。
只有方阵才能计算幂。
推广到矩阵，用 A^k 表示矩阵 A 连乘 k 次。A 是 n 阶方阵。

矩阵快速幂

回顾实数的快速幂算法，其原理在于指数的二进制拆分。

$$k = \sum B_i \times 2^i (B_i \in \{0, 1\})$$

$$a^k = a^{\sum B_i \cdot 2^i} = \prod B_i \times a^{2^i}$$

全部运算法则同样适用于矩阵。将普通快速幂中全部乘法换为矩阵乘法，即为矩阵快速幂。

例题 - P3390 矩阵快速幂

给定 n 阶方阵 A 与指数 k，计算 A^k。
对 10^9+7 取模。

常系数齐次线性递推

假设有数列 $\{f\}$，f_i 表示数列的第 i 项。

$$f_i = a_1 \cdot f_{i-1} + a_2 \cdot f_{i-2} + \cdots + a_k \cdot f_{i-k}$$

称 f 满足 k 次常系数齐次线性递推。
斐波拉契数列 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$。

矩阵加速

斐波拉契数列 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$。
用矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

容易发现 A 是一个 2 阶方阵。

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

矩阵加速

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法计算公式，

$$\begin{cases} f_i = A_{1,1} \cdot f_{i-1} + A_{1,2} \cdot f_{i-2} \\ f_{i-1} = A_{2,1} \cdot f_{i-1} + A_{2,2} \cdot f_{i-2} \end{cases}$$

容易得到 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

即，

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

矩阵加速

继续展开，

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \times \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

方阵 A 的 $n-2$ 次幂可以在 $\mathcal{O}(\Sigma^3 \log n)$ 的时间复杂度求出。其中 Σ 是 A 的阶。

矩阵加速

试一试

$$f_i = a \cdot f_{i-1} + b \cdot f_{i-2} + c$$

求出矩阵加速矩阵。

提示：$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ c \end{bmatrix}$

矩阵加速

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ c \end{bmatrix}$$

例题 - P1939 矩阵加速（数列）

$f_i = f_{i-1} + f_{i-3}$， $f_1 = f_2 = f_3 = 1$

求 $f_n \bmod 10^9 + 7$

例题分析

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ f_{i-3} \end{bmatrix}$$

$A_{1,x}$ 对应 f_i，$f_i = f_{i-1} + f_{i-3}$，$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$。
$A_{2,x}$ 对应 f_{i-1}，$f_{i-1} = f_{i-1}$，$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。
$A_{3,x}$ 对应 f_{i-2}，$f_{i-2} = f_{i-2}$，$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$。

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ f_{i-3} \end{bmatrix}$$

例题分析

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} \times \begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵

N 个节点、M 条边组成的图 G，可用邻接矩阵 $A_{N\times N}$ 表示其连通性。
设 $A_{i,j}$ 表示 $i\to j$ 的边数。$A_{i,j}$ 可以理解为经过一条边，$i\to j$ 的方案数。
考察矩阵 A^2 的运算过程

$$A^2_{i,j}=\sum_{p=1}^{N}A_{i,p}\cdot A_{p,j}$$

取 $p=k$，$A_{i,k}\cdot A_{k,j}$ 的含义?
乘法原理，$i\to k\to j$ 的方案数。
$A^2_{i,j}$ 可以理解为经过两条边，$i\to j$ 的方案数。
大胆猜测 $A^w_{i,j}$ 的含义为恰好经过 w 条边，$i\to j$ 的方案数。

例题 - P5789 [TJOI2017] 可乐

加里敦星球的人们特别喜欢喝可乐。因而，他们的敌对星球研发出了一个可乐机器人，并且放在了加里敦星球的 1 号城市上。

这个可乐机器人有三种行为：停在原地，去下一个相邻的城市，自爆。它每一秒都会随机触发一种行为。

现在给加里敦星球城市图，在第 0 秒时可乐机器人在 1 号城市，问经过了 t 秒，可乐机器人的行为方案数是多少？

$1 \leq n, m \leq 100$，$1 \leq t \leq 10^9$

例题分析

若初始图中 $i \to j$ 有边，则 $A_{i,j} = 1$。
停在原地：$\forall i \in [1, N]$，建边 $i \to i$。
爆炸：$\forall i \in [1, N]$，建边 $i \to 0$，0 只有自环的出边，表示爆炸了就去 0 号点转圈。

$A^t_{i,j}$ 表示恰好 t 秒由 i 到 j 的方案数，$\sum\limits_{i=0}^{N} A^t_{1,i}$ 即为答案。

方程组

在小学时我们接触了一元一次方程

$$ax = b(a \neq 0)$$

解得 $x = \frac{b}{a}$

一元一次方程作为最基本的方程，可以直接求解。

初中时引入二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

同时，引入了消元的重要思想。
上式乘以 $\frac{a_2}{a_1}$ 得 $a_2x + b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}y = c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}$。
下式减去，得 $(b_2 - b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1})y = c_2 - c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}$。
x 在该方程中被消去，直接解一元一次方程可以得到 $y = \frac{c_2 - c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}}$，带回上式可以解出 x。

方程组

解更高元的方程组同样遵循消元的基本思想。
以三元方程组为例

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

将 1 式分别乘以 $\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}$，用 2 式、3 式分别减去它们，就可以在 2 式和 3 式中消去未知量 x。
这样，三元一次方程组就转化为了含有未知量 y, z 的二元一次方程组，继续消元，最终会得到一元一次方程。

增广矩阵

n 元一次方程组，将方程组的系数与常数写成一个 $n \times (n+1)$ 的矩阵。
例如方程组

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ x+2y+z=10 \end{cases}$$

可写为矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

观察消元过程增广矩阵的变化
用方程的第二行，减去两倍的第一行；用方程的第三行，减去第一行。

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ -y-z=1 \\ y=8 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

第二行乘以 -1。

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z=-1 \\ y=8 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

第三行减去第二行。

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z=-1 \\ -z=9 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

增广矩阵

第三行乘以 -1。

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z=-1 \\ z=-9 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

此时解出 z，不断反代可解出全部未知量。

增广矩阵

增广矩阵是系数与常数的矩阵，一切方程组变换都可以直接在增广矩阵中进行。
将系数矩阵化为上三角矩阵，即可解出一未知数，反代可解全部未知数。

Gauss 消元

因为我们绕开了行列式与 Cramer 法则，前面的理论体系并不完备。
将一行乘以 k、一行减去另一行等操作称为初等矩阵变换。
Guass 消元的过程就是模拟初等矩阵变换过程，将增广矩阵变换为上三角矩阵的过程。

Gauss-Jordan 消元

Gauss 消元将增广矩阵变换为上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} & b_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan 消元将增广矩阵变换为单位矩阵与系数

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

Gauss 消元需回代求未知量，Gauss-Jordan 消元无需回代求其他未知量。

Gauss-Jordan 消元的步骤

以下是在 Gauss 消元中应用的三种初等行变换

- 用一非零的数 k 乘以某一整行（1）
- 把一行的 k 倍加到另一行（2）
- 互换任意两行的位置（3）

步骤如下

- 枚举主元 x，依次消去第 $1 \sim N$ 个未知量
- 找到 $A_{p,x} \neq 0$ 的第 p 行，$p \geq x$
- 交换第 x 行与第 p 行（3）
- 将交换后的第 x 行乘以 $\dfrac{1}{A_{p,x}}$ （1）
- 用第 x 行消去其他所有行的变元 x（2）

Gauss-Jordan 消元的步骤

枚举主元 x，依次消去第 $1 \sim N$ 个未知量

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

首先消去第一个未知量（第一列），枚举找到 $A_{?,1} \neq 0$ 的一行，选择第一行，不需要交换。
用第一行消去第二行、第三行的第一个未知量。此后，除第一行以外，第一列均为 0。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan 消元的步骤

枚举到 $x = 2$，消去第二个未知量（第二列），枚举找到 $A_{?,2} \neq 0$ 的一行，只有第三行，与第二行交换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

用第二行消去第一行、第三行的第二个未知量

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

此后，第二列只有第二行不为 0。

Gauss-Jordan 消元的步骤

枚举到 $x = 3$，消去第三个未知量（第三列），枚举找到第三行，不需要交换。第三行乘 -1。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

用第三行消去第三个未知量

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

全部未知量被消去，系数矩阵为单位矩阵，解得 $x_1 = -5, x_2 = 8, x_3 = -1$。

Gauss-Jordan 消元

当消去变量 x 时，找不到 $A_{p,x} \neq 0$ 怎么办？
这个方程组要么无解，要么无穷解。
最终会形成如下结构

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 0 & & & b_i \\ & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

$b_i = 0$ 则无穷解，$b_i \neq 0$ 则无解。

例题 - P3389 高斯消元法

给定一个线性方程组，对其求解。

$$
\begin{cases}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\cdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n
\end{cases}
$$

Q&A

That's all. Thank you!

Q&A