洛谷网校 2024 进阶计划

线性代数基础

前言 矩阵的定义与 运算

矩阵加速 矩阵与图论

消元法

Q&A

Linear Algebra Basics

LanBian QianQ

Huazhong University of Science and Technology Computer Science and Technology Department

August 21, 2024

矩阵快速幂与 矩阵加速

/Cr | ////

消元法

08.4

1 前言

2 矩阵的定义与运算

3 矩阵快速幂与矩阵加速

4 矩阵与图论

5 消元法

6 Q&A

在我们开始之前

线性代数基础

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

E阵与图论

消元法

消兀法

线性代数, Linear Algebra。

理工科专业学生必修。

研究对象: 向量, 向量空间, 线性变换和有限维的线性方程

组。

OI 中应用: 矩阵加速, 高斯消元、线性基。

请避开一切以行列式开始的教材。

系统学习线性代数,推荐 MIT 网课:

https://www.bilibili.com/video/BV16Z4y1U7oU

向量

线性代数基础

览遍干秒

<u> 同</u>言

矩阵的定义与 运算

和年加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

一个 n 维向量 V 可以简单理解为 n 个数排列在一起。例如,下面是一个 3 维向量。

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

用 V_i 表示向量 V 的第 i 个元素。

向量点积

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂点

起阵加速

拓阵与图论

消元法

Q&A

两个 n 维向量 $p, q, p \cdot q$ 称为向量的点积运算,运算结果为一个实数。

$$p \cdot q = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot q_i$$

例如,
$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
, $q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $p \cdot q = 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 2 + 4 + 9 = 15$ 。

消元法

Q&A

一个 $n \times m$ 的矩阵 A 可以被简单理解为 n 行 m 列的数排列 在一起,记作 $A_{n \times m}$ 。例如,下面是一个 2×3 的矩阵

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

也可以用中括号

$$A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

矩阵同型

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂5 矩阵加速

矩阵加速

消元法

Q&A

有矩阵 $A_{n_1 \times m_1}$ 和 $B_{n_2 \times m_2}$ 。 当且仅当 $\begin{cases} n_1 = n_2 \\ m_1 = m_2 \end{cases}$,称矩阵 A 与矩阵 B 同型。 用 $A_{i,j}$ 表示矩阵 A 中第 i 行第 j 列的元素。

方阵

线性代数基础

览遍干秒

酮言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂 矩阵加速

矩阵加速 ·--··

矩阵与图说

消元法

Q&A

矩阵 $A_{n\times m}$, 如果 n=m, 则称 A 为 n 阶方阵。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

例如,上面是一个三阶方阵。

单位矩阵

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&P

对于一个方阵,从左上角到右下角的对角线,称为主对角线。 从右上角到左下角的对角线,称为从对角线。 单位矩阵 *E* 是这样一个矩阵:

- *E* 是一个方阵
- E 的主对角线上元素均为 1
- E 其他元素均为 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

例如,上面是一个三阶单位矩阵 E_3 。

矩阵的定义与 运算

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

矩阵加法应用于同型矩阵 A, B。 假设 A+B=C,C与 A, B 同型, $C_{i,j}=A_{i,j}+B_{i,j}$ 。 例如,有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

矩阵的定义与 运算

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

矩阵减法应用于同型矩阵 A, B。 假设 A - B = C, C 与 A, B 同型, C_{i,j} = A_{i,j} - B_{i,j}。 例如,有

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Q&A

转置是针对单个矩阵 $A_{n\times m}$ 的运算。 用 A^T 表示转置后得到的矩阵, A^T 是一个 $m\times n$ 的矩阵。

$$A_{i,j}^T = A_{j,i}$$

例如,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
。

则
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
。

矩阵与图论

IHJUIA

Q&A

数乘是实数 k 与矩阵 A 相乘得到 kA。 矩阵大小不变,每个位置上的元素都乘以 k。 形式化地,记 kA = B,有 $B_{i,j} = kA_{i,j}$ 。

例如,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
, $k = 0.5$ 。

$$kA = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 \\ 2 & 2.5 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

线性代数基础

阿库的宗义是

矩阵的定义与 运算

消元法

QQA

请注意,矩阵乘法不满足乘法交换律。

假设有 $A_{n\times s}$ 与 $B_{t\times m}$ 两个矩阵。

可以计算 AB 的结果,当且仅当 s = t,得到一个 $n \times m$ 的矩阵。

AB 称为 A 右乘上 B。

矩阵乘法

线性代数基础

矩阵的定义与 运算

起阵加速 5-25-5-5-2-3

矩阵与图ú

消兀法

Q&A

假设 $A_{n\times s} \times B_{s\times m} = C_{n\times m}$ 。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

 $C_{i,j}$ 的值,与矩阵 A 的第 i 行、矩阵 B 的第 j 列有关。 矩阵 A 的第 i 行、矩阵 B 的第 j 列,均可以看作 s 维向量。

$$C_{i,j} = A_i \cdot B_j^T$$

矩阵乘法

线性代数基础

览遍干秒

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与

矩阵与图论

治元法

1137012

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵 C: 2 × 2。

$$C_{1,1} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 12$$

$$C_{1,2} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 = 12$$

$$C_{2,1} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$$

$$C_{2,2} = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6$$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法的性质

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义与 运算

毎時 毎時 毎時 毎月

VELLIHVE

矩阵与图论

消元法

Q&A

$$E \times A = A \times E = A$$

$$A(BC) = (AB)C$$

$$kAB = (kA)B$$

例题 - B2105 矩阵乘法

线性代数基础

览遍干秒

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂点

矩阵 矩阵 上降 上降 上

担阵与图论

消兀法

Q&A

矩阵 A 的大小为 $n \times m$, 矩阵 B 的大小为 $m \times k$, 计算 $A \times B$ 的结果。

矩阵的幂

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵快速幂与

矩阵加速

矩阵与图论 消元法

Q&A

在实数领域中, a^k 表示将实数 a 连乘 k 次。

 $A_{n \times m}$ 想要能够连乘,必须满足矩阵乘法条件。得到 n = m。 **只有方阵才能计算幂。**

推广到矩阵,用 A^k 表示矩阵 A 连乘 k 次。A 是 n 阶方阵。

矩阵快速幂

线性代数基础

览遍干秒

則言

巨阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

在时上图》

消元法

Q&A

回顾实数的快速幂算法,其原理在于指数的二进制拆分。

$$\textit{k} = \sum \textit{B}_{\textit{i}} \times 2^{\textit{i}}(\textit{B}_{\textit{i}} \in \{0,1\})$$

$$a^k = a^{\sum B_i \cdot 2^i} = \prod B_i \times a^{2^i}$$

全部运算法则同样适用于矩阵。将普通快速幂中全部乘法换为矩阵乘法,即为矩阵快速幂。

例题 - P3390 矩阵快速幂

线性代数基础

览遍干秋

前言

阵的定义与

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

给定 n 阶方阵 A 与指数 k, 计算 A^k 。 对 $10^9 + 7$ 取模。

常系数齐次线性递推

线性代数基础

览遍干秋

則言

阵的定义与 質

矩阵快速幂与 矩阵加速

消元法

....

假设有数列 $\{f\}$, f_i 表示数列的第 i 项。

$$f_i = a_1 \cdot f_{i-1} + a_2 \cdot f_{i-2} + \cdots + a_k \cdot f_{i-k}$$

称 f 满足 k 次常系数齐次线性递推。 斐波拉契数列 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ 。

线性代数基础

览遍干秒

FERFARITAN

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

消元法

Q&A

斐波拉契数列 $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ 。 用矩阵可表示为

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

容易发现 A 是一个 2 阶方阵。

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

丽吉

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵加速

消元法

Q&A

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法计算公式,

$$\begin{cases} f_i = A_{1,1} \cdot f_{i-1} + A_{1,2} \cdot f_{i-2} \\ f_{i-1} = A_{2,1} \cdot f_{i-1} + A_{2,2} \cdot f_{i-2} \end{cases}$$

容易得到 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 即,

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义 <u>与</u>

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵加速

消元法

Q&A

继续展开,

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2} \times \begin{bmatrix} f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

方阵 A 的 n-2 次幂可以在 $\mathcal{O}(\Sigma^3 \log n)$ 的时间复杂度求出。 其中 Σ 是 A 的阶。

线性代数基础

览遍干秋

丽言

巨阵的定义与

矩阵快速幂与

矩阵加速

45位 500公

消元法

Q&A

试一试

$$f_i = a \cdot f_{i-1} + b \cdot f_{i-2} + c$$

求出矩阵加速矩阵。

提示:
$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ c \end{bmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秒

前言

阵的定义与

矩阵快速幂与

矩阵加速

消元法

Q&A

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ c \end{bmatrix}$$

例题 - P1939 矩阵加速 (数列)

线性代数基础

览遍干秋

前言

阵的定义与 ^質

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

WAY

例题分析

线性代数基础

览遍干秒

前言

矩阵的定义与 运管

矩阵快速幂与

矩阵加速

矩阵与图记

消元法

Q GET 1

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ f_{i-3} \end{bmatrix}$$

$$A_{1,\times}$$
 对应 f_i , $f_i = f_{i-1} + f_{i-3}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。 $A_{2,\times}$ 对应 f_{i-1} , $f_{i-1} = f_{i-1}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。 $A_{3,\times}$ 对应 f_{i-2} , $f_{i-2} = f_{i-2}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

$$\begin{bmatrix} f_i \\ f_{i-1} \\ f_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_{i-1} \\ f_{i-2} \\ f_{i-3} \end{bmatrix}$$

例题分析

线性代数基础

览遍干秒

前言

三阵的定义与 三管

矩阵快速幂与 矩阵加速

ACPTARAL

矩阵与图论

消元法

Q&A

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} \times \begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \\ f_1 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵

线性代数基础

览遍干秋

即日 矩阵的定义与

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论 消元法

Q&A

N 个节点、M 条边组成的图 G,可用邻接矩阵 $A_{N\times N}$ 表示其连通性。

设 $A_{i,j}$ 表示 $i \to j$ 的边数。 $A_{i,j}$ 可以理解为经过一条边, $i \to j$ 的方案数。

考察矩阵 A² 的运算过程

$$A_{i,j}^2 = \sum_{p=1}^N A_{i,p} \cdot A_{p,j}$$

取 p = k, $A_{i,k} \cdot A_{k,j}$ 的含义? 乘法原理, $i \to k \to j$ 的方案数。 $A_{i,j}^2$ 可以理解为经过两条边, $i \to j$ 的方案数。 大胆猜测 $A_{i,j}^w$ 的含义为恰好经过 w 条边, $i \to j$ 的方案数。

例题 - P5789 [TJOI2017] 可乐

线性代数基础

矩阵与图论

加里敦星球的人们特别喜欢喝可乐。因而,他们的敌对星球 研发出了一个可乐机器人,并且放在了加里敦星球的 1 号城 市上。

这个可乐机器人有三种行为:停在原地,去下一个相邻的城 市, 白爆。它每一秒都会随机触发一种行为。

现在给加里敦星球城市图,在第 0 秒时可乐机器人在 1 号城 市,问经过了 t 秒,可乐机器人的行为方案数是多少?

 $1 < n, m < 100, 1 < t < 10^9$

例题分析

线性代数基础

明言

矩阵快速幂与

矩阵加速

矩阵与图论 _{治于注}

O&A

若初始图中 $i \rightarrow j$ 有边,则 $A_{i,j} = 1$ 。

停在原地: $\forall i \in [1, N]$, 建边 $i \rightarrow i$ 。

爆炸: $\forall i \in [1, M]$, 建边 $i \to 0$, 0 只有自环的出边,表示爆炸了就去 0 号点转圈。

 $A_{i,j}^t$ 表示恰好 t 秒由 i 到 j 的方案数, $\sum_{i=0}^{N} A_{1,i}^t$ 即为答案。

方程组

线性代数基础

消元法

在小学时我们接触了一元一次方程

$$ax = b(a \neq 0)$$

解得 $x = \frac{b}{a}$ 一元一次方程作为最基本的方程,可以直接求解。

方程组

线性代数基础

消元法

初中时引入二元一次方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

同时,引入了消元的重要思想。
上式乘以
$$\frac{a_2}{a_1}$$
 得 $a_2x + b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}y = c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}$ 。
下式减去,得 $(b_2 - b_1 \cdot \frac{a_2}{a_1})y = c_2 - c_1 \cdot \frac{a_2}{a_1}$ 。

下式减去,得
$$(b_2-b_1\cdot\frac{a_2}{a_1})y=c_2-c_1\cdot\frac{a_2}{a_1}$$

x 在该方程中被消去,直接解一元一次方程可以得到

$$x$$
 在该方程中被消去,直接解一元一次方 $y = rac{c_2 - c_1 \cdot rac{a_2}{a_1}}{b_2 - b_1 \cdot rac{a_2}{a_1}}$,带回上式可以解出 x 。

方程组

线性代数基础

則言 矩阵的定义与 运算

^{运具} 矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

解更高元的方程组同样遵循消元的基本思想。 以三元方程组为例

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

将 1 式分别乘以 $\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_3}{a_1}$, 用 2 式、3 式分别减去它们,就可以在 2 式和 3 式中消去未知量 x。

这样,三元一次方程组就转化为了含有未知量 y, z 的二元一次方程组,继续消元,最终会得到一元一次方程。

线性代数基础

览遍干秋

を味め 中ツ

运算

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

n 元一次方程组,将方程组的系数与常数写成一个 $n \times (n+1)$ 的矩阵。 例如方程组

$$\begin{cases} x+y+z=2\\ 2x+y+z=5\\ x+2y+z=10 \end{cases}$$

可写为矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

的话 矩阵的定义。

运算

矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

观察消元过程增广矩阵的变化 用方程的第二行,减去两倍的第一行;用方程的第三行,减去第一行。

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - z = 1 \\ y = 8 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秒

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

第二行乘以 -1。

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ y = 8 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 8
\end{pmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

第三行减去第二行。

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ -z = 9 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

削言

矩阵的定义与 运算

VEN-THYE

矩阵与图论

消元法

Q&A

第三行乘以 -1。

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + z = -1 \\ z = -9 \end{cases}$$

增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -9
\end{pmatrix}$$

此时解出 z, 不断反代可解出全部未知量。

线性代数基础 览遍于秋

則言 矩阵的定义与 运算 矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵加速 矩阵与图论 消元法

IH)UIA

增广矩阵是系数与常数的矩阵,一切方程组变换都可以直接 在增广矩阵中进行。

将系数矩阵化为上三角矩阵,即可解出一未知数,反代可解 全部未知数。

Gauss 消元

线性代数基础 览遍干秋

前言 矩阵的定义与 运算 矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵加速 矩阵与图论 **消元法**

1137014

因为我们绕开了行列式与 Cramer 法则,前面的理论体系并不完备。

将一行乘以 k、一行减去另一行等操作称为初等矩阵变换。 Guass 消元的过程就是模拟初等矩阵变换过程,将增广矩阵 变换为上三角矩阵的过程。

线性代数基础

览遍干秋

前言

短阵的定义と

矩阵快速幂与

矩阵加速

担阵与图论

消元法

Q&A

Gauss 消元将增广矩阵变换为上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} & b_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordan 消元将增广矩阵变换为单位矩阵与系数

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

Gauss 消元需回代求未知量, Gauss-Jordan 消元无需回代求其他未知量。

线性代数基础

消元法

以下是在 Gauss 消元中应用的三种初等行变换

- 用一非零的数 k 乘以某一整行(1)
- 把一行的 k 倍加到另一行(2)
- 互换仟意两行的位置(3)

步骤如下

- 枚举主元 x, 依次消去第 1 ~ N 个未知量
- 找到 $A_{p,x} \neq 0$ 的第 p 行, $p \geq x$
- 交换第 x 行与第 p 行 (3)
- 将交换后的第 × 行乘以 $\frac{1}{A_{n,x}}$ (1)
- 用第 x 行消去其他所有行的变元 x (2)

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义-运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

枚举主元 x,依次消去第 $1 \sim N$ 个未知量

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 5 \\
1 & 2 & 1 & 10
\end{pmatrix}$$

首先消去第一个未知量(第一列),枚举找到 $A_{?,1} \neq 0$ 的一行,选择第一行,不需要交换。

用第一行消去第二行、第三行的第一个未知量。此后,除第 一行以外,第一列均为 0。

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 8
\end{pmatrix}$$

线性代数基础

览遍干秋

22.5 矩阵的定义

运身 矩阵快速幂与

知底与图论 知底与图论

消元法

Q&A

枚举到 x = 2,消去第二个未知量 (第二列),枚举找到 $A_{2,2} \neq 0$ 的一行,只有第三行,与第二行交换。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

用第二行消去第一行、第三行的第二个未知量

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -6 \\
0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}$$

此后, 第二列只有第二行不为 0。

线性代数基础

览遍干秋

前言

矩阵的定义-¹ 运算

矩阵快速幂与

矩阵与图论

消元法

1670/4

Q&A

枚举到 x = 3,消去第三个未知量 (第三列),枚举找到第三 行,不需要交换。第三行乘 -1。

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & -6 \\
0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

用第三行消去第三个未知量

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & -5 \\
0 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

全部未知量被消去,系数矩阵为单位矩阵,解得 $x_1 = -5, x_2 = 8, x_3 = -1$ 。

线性代数基础

前言

矩阵的定义与 运算

矩阵快速幂与 矩阵加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

当消去变量 x 时,找不到 $A_{p,x} \neq 0$ 怎么办? 这个方程组要么无解,要么无穷解。 最终会形成如下结构

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & 0 & b_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & 0 & & b_i \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{N,N} & b_N \end{pmatrix}$$

 $b_i = 0$ 则无穷解, $b_i \neq 0$ 则无解。

例题 - P3389 高斯消元法

线性代数基础

览遍干秋

前言

短阵的定义と

矩阵快速幂与

拓阵与图论

消元法

Q&A

给定一个线性方程组,对其求解。

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

线性代数基础 览遍于秋

33 C 矩阵的定义与 运管

运算

起件加速

矩阵与图论

消元法

Q&A

That's all. Thank you!

Q&A