PROCESSAMENTO DE SINAIS

Sistemas em Tempo Discreto

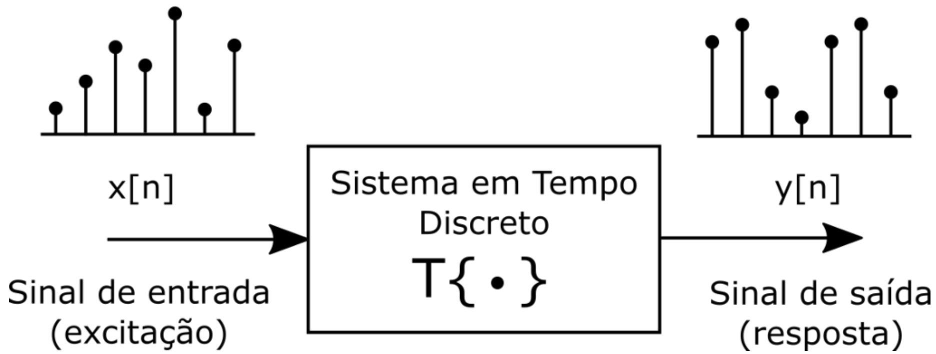
Prof. Dr. Rafael Cardoso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco
Departamento de Elétrica

Sistema

- Um sistema em tempo discreto é definido matematicamente como uma transformação ou um operador que mapeia uma sequência de entrada $x[n]$ em uma sequência de saída $y[n]$.

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



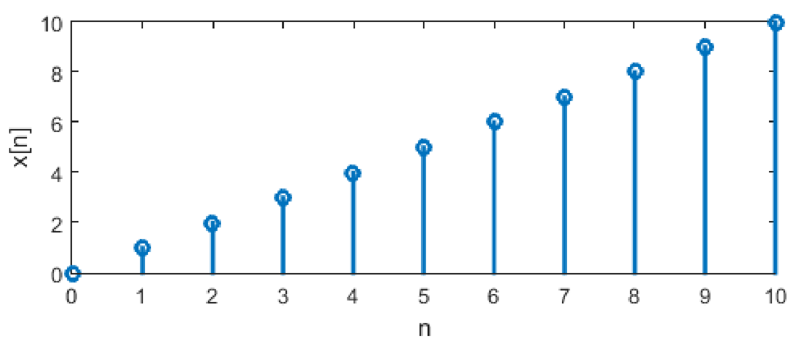
Sistema

- Sistema de Atraso:

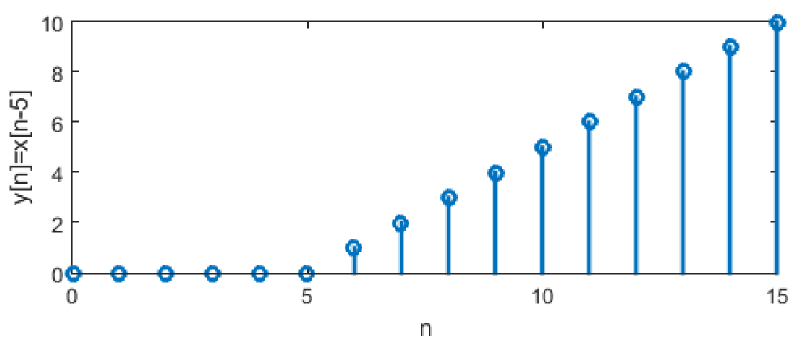
$$y[n] = x[n - n_d], \qquad -\infty < n < \infty$$

$$n_d \in \mathbb{Z}, \qquad n_d > 0$$

$x[n]$



$y[n] = x[n - 5]$



Sistema

- Média Móvel:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \cdots + x[n] \\ + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2]\}$$

Sistema

- Média Móvel:

$$M_1 = 0$$

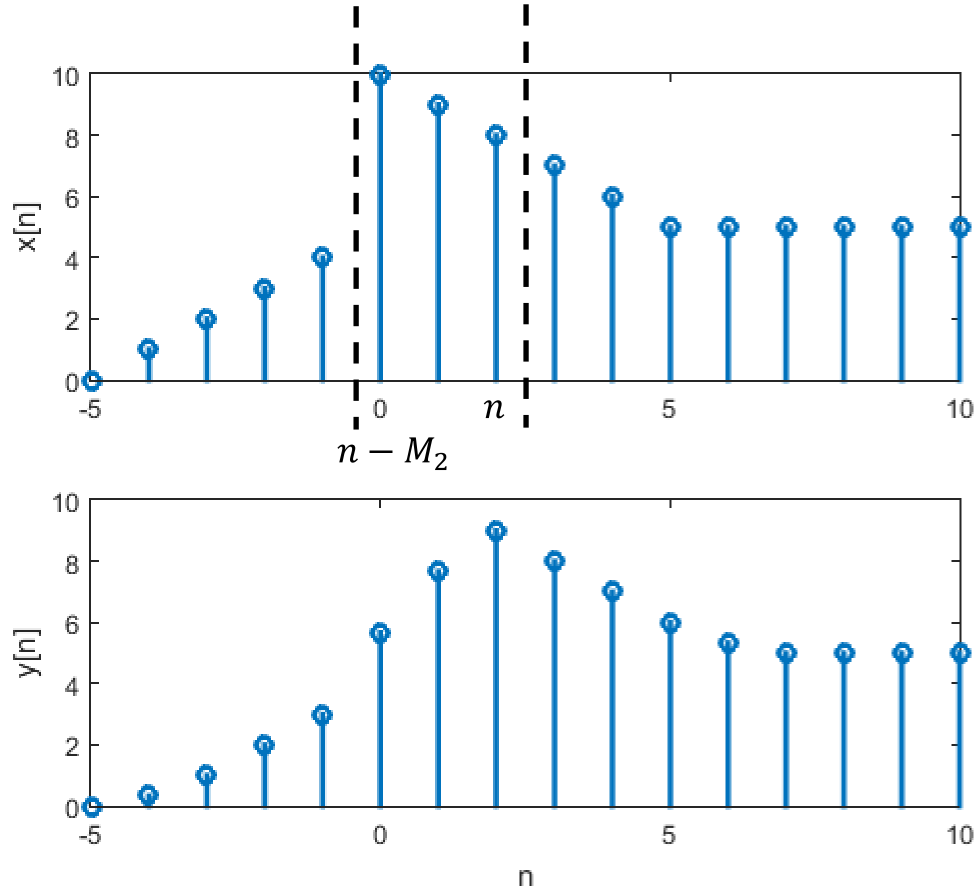
$$M_2 = 2$$

Para $n = 2$:

$$y[2] = \frac{1}{3}(x[2] + x[1] + x[0])$$

$$y[2] = \frac{1}{3}(8 + 9 + 10)$$

$$y[2] = 9$$



Sistema

- Média Móvel:

$M_1 = 2$

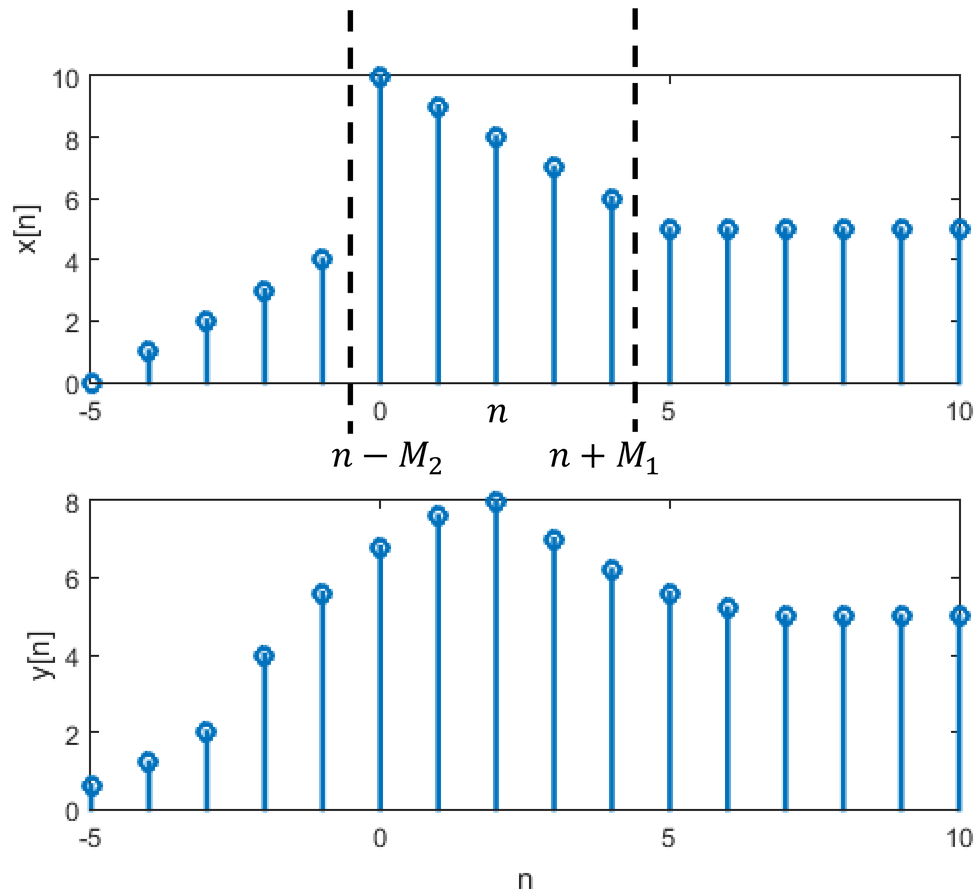
$M_2 = 2$

Para $n = 2$:

$$y[2] = \frac{1}{5}(x[4] + x[3] + x[2] + x[1] + x[0])$$

$$y[2] = \frac{1}{5}(6 + 7 + 8 + 9 + 10)$$

$$y[2] = 8$$



Propriedades de Sistemas

- **Sistemas com e sem Memória**
  - Um sistema é dito sem memória se a saída $y[n]$ a cada valor de n depender apenas da entrada $x[n]$ no mesmo valor de n.

$$y[n] = (x[n])^n \Rightarrow \text{Sem memória.}$$

$$y[n] = x[n-2] \Rightarrow \text{Com memória.}$$

Propriedades de Sistemas

- **Sistemas Lineares**
  - Um sistema é dito linear se satisfizer o **princípio da superposição.**
  - Se $y_1[n]$ e $y_2[n]$ são as respostas de um sistema para as entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$, respectivamente, então o sistema é linear se e somente se

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

e

Propriedade da Aditividade

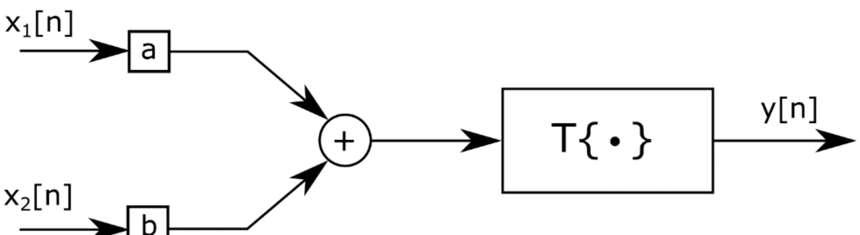
$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

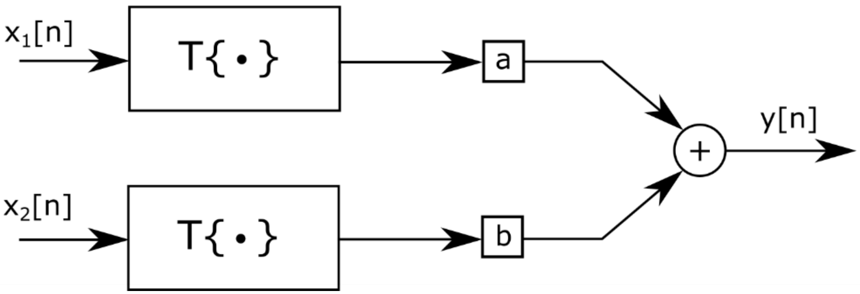
Propriedade da Homogeneidade

Propriedades de Sistemas

- Princípio da superposição:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$



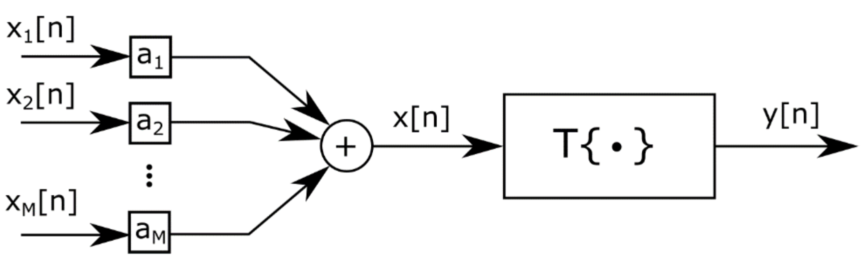


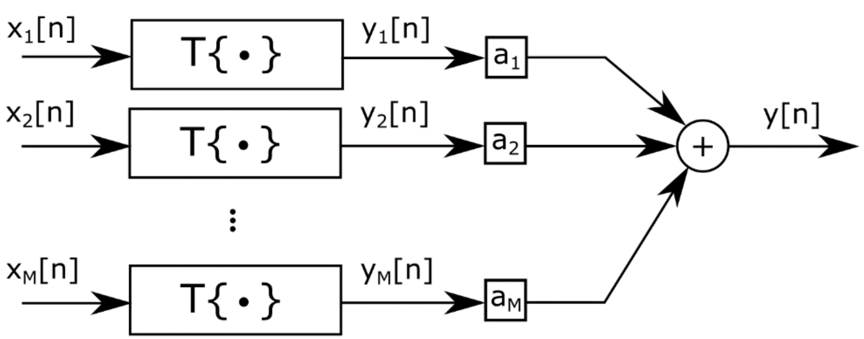
Propriedades de Sistemas

- Generalização para M entradas:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k x_k[n] \qquad\qquad y[n] = \sum_{k=1}^{M} a_k y_k[n]$$

onde $y_k[n]$ é a resposta do sistema a entrada $x_k[n]$.





Propriedades de Sistemas

- Exemplo: Acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Sejam as entradas $x_1[n]$ e $x_2[n]$, tal que:

$$x_1[n] \Longrightarrow y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]$$

$$x_2[n] \Longrightarrow y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]$$

Propriedades de Sistemas

- Para o sistema ser linear, dada

$$x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n] \Rightarrow y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n]$$

- Verificação:

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_3[n]$$

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[n] + bx_2[n])$$

$$y_3[n] = a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[n] + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[n]$$

$$y_3[n] = ay_1[n] + by_2[n] \Rightarrow \text{Sistema Linear}$$

Propriedades de Sistemas

- Exemplo:

$$y[n] = log_{10}(|x[n]|)$$

  - Verificação:

$$x_1[n] = 10 \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = 1$$

$$x_2[n] = 100 \quad \Rightarrow \quad y_2[n] = 2$$

$$x_2[n] = 10x_1[n] \quad \nRightarrow \quad y_2[n] = 10y_1[n] = 100 \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema Não Linear}$$

Propriedades de Sistemas

- **Sistemas Invariantes no Tempo**
  - A relação entrada-saída não varia com o tempo.
  - Se

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

o sistema é invariante no tempo se

$$y_1[n] = T\{x[n-k]\} = y[n-k], \qquad \text{para todo } k.$$

Propriedades de Sistemas

- Exemplo:

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

Atrasando a entrada tem-se:

$$y_1[n] = x[n-k] - x[n-1-k]$$

Deslocando a saída para comparação:

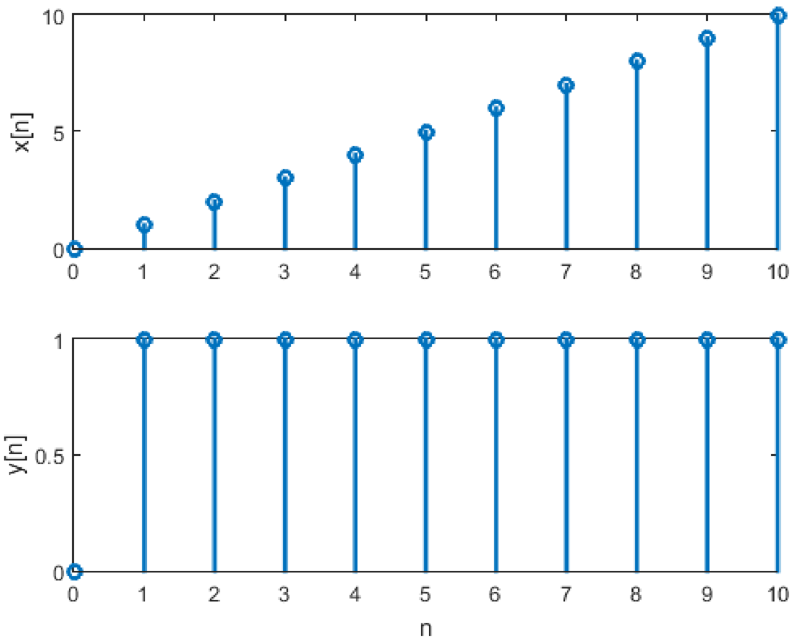
$$y[n-k] = x[n-k] - x[n-1-k] = y_1[n] \Rightarrow$$

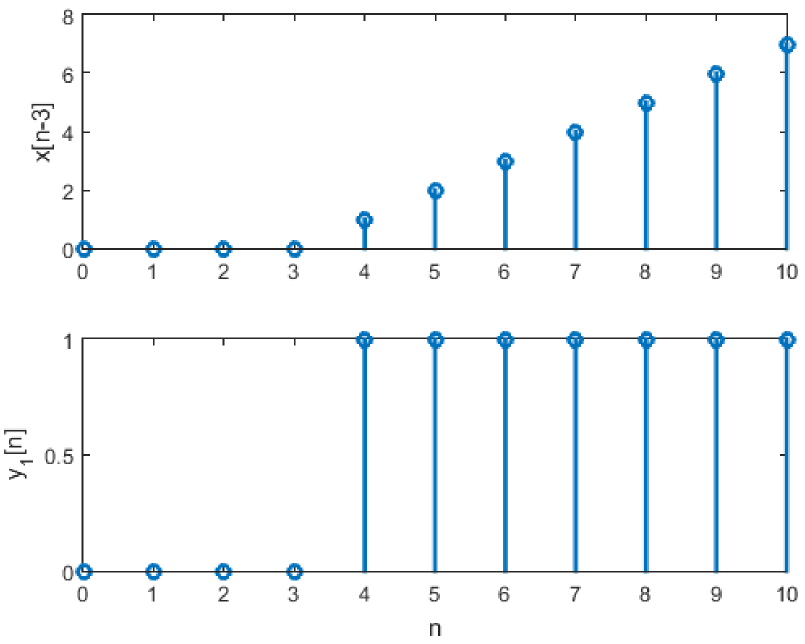
Sistema invariante no tempo.

Propriedades de Sistemas

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

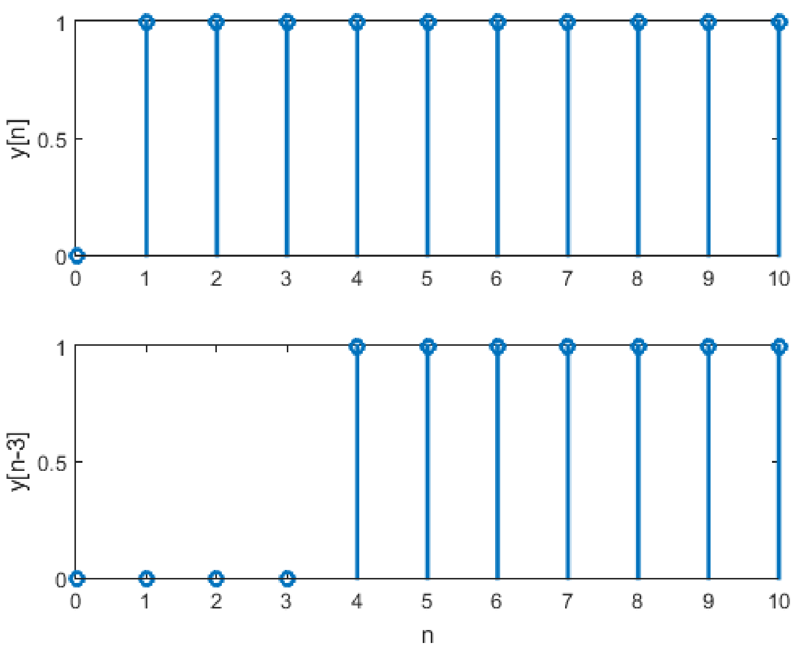
$$y_1[n] = x[n-3] - x[n-1-3]$$



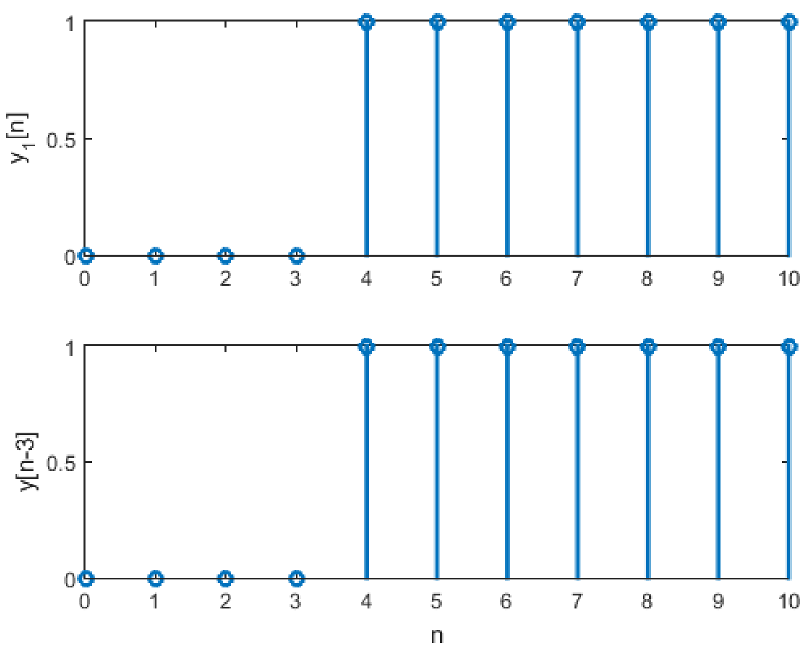


Propriedades de Sistemas

$y[n]$ vs $y[n-3]$



$y_1[n]$ vs $y[n-3]$



$y_1[n] = y[n-3]$ Sistema invariante no tempo.

Propriedades de Sistemas

- Exemplo:

$$y[n] = nx[n]$$

Atrasando a entrada tem-se:

$$y_1[n] = nx[n-k]$$

Deslocando a saída para comparação:

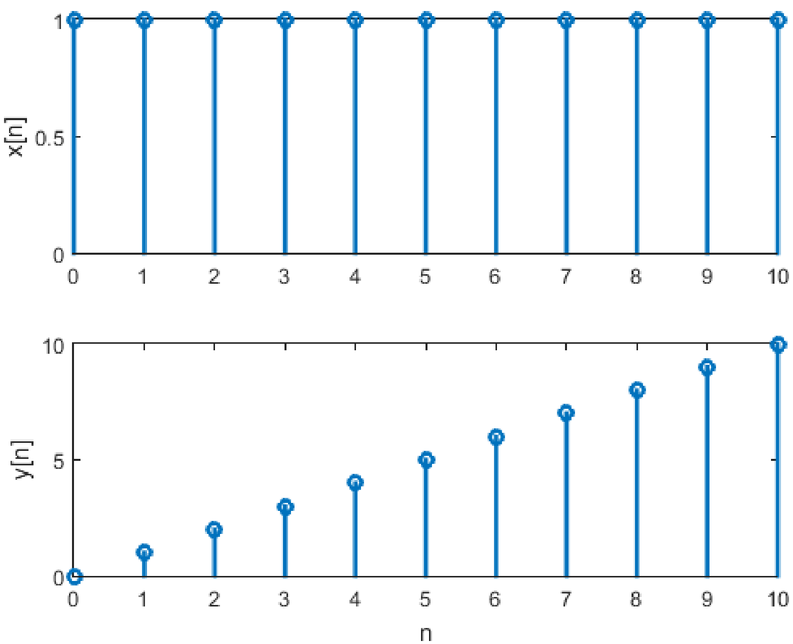
$$y[n-k] = (n-k)x[n-k] \neq y_1[n] \Rightarrow$$

Sistema variante no tempo

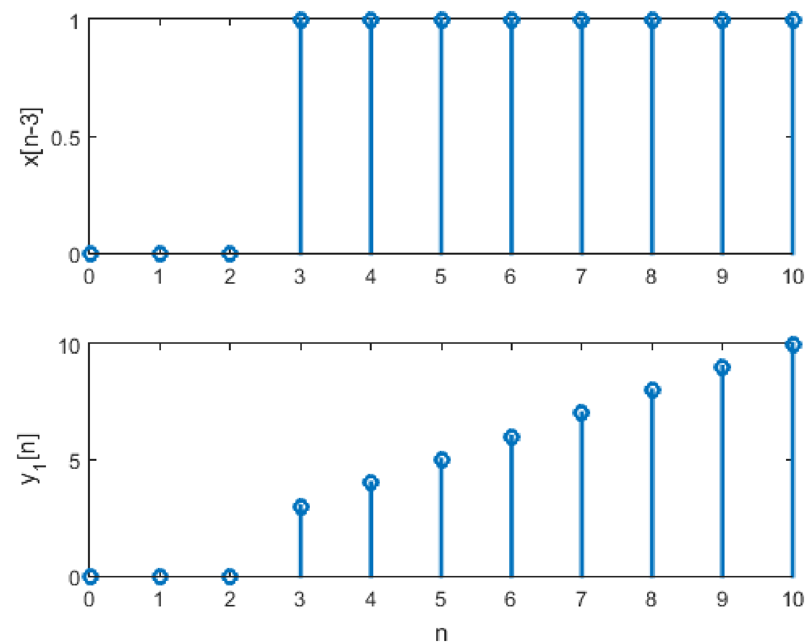
Propriedades de Sistemas

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$y[n] = nx[n]$$

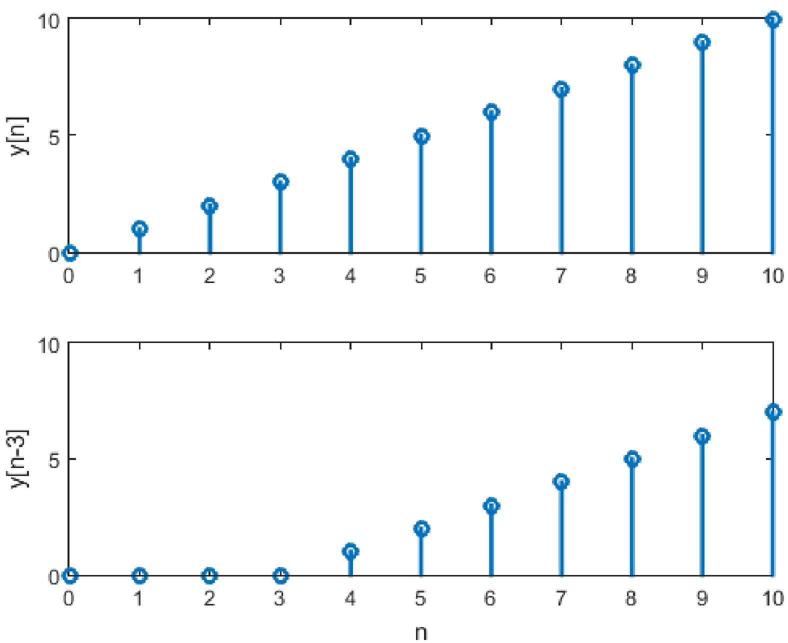


$$y_1[n] = nx[n-3]$$

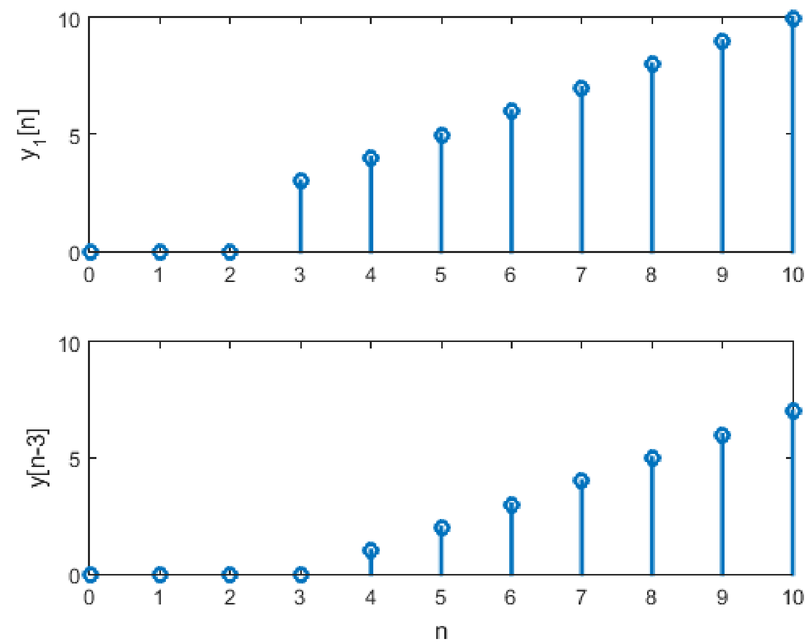


Propriedades de Sistemas

$y[n]$ vs $y[n-3]$



$y_1[n]$ vs $y[n-3]$



$y_1[n] \neq y[n-3]$ ⟹ Sistema variante no tempo

Propriedades de Sistemas

- **Causalidade**
  - *Sistema causal*: Para qualquer intante n, a saída $y[n]$ depende apenas de entradas até o instante n.

$$y[n] = T\{x[n], x[n-1], \dots\}$$

  - O sistema não é antecipativo.

$y[n] = x[n] - x[n-1]$ ⇒ Sistema causal

$y[n] = x[n+1] - x[n]$ ⇒ Sistema não causal

Propriedades de Sistemas

- Sistemas causais
  - São fisicamente realizáveis.
  - Implementáveis para processamento em tempo real.
- Sistemas não causais
  - Não podem ser implementados em tempo real.
  - Podem ser empregados para processamento *off-line*.

Propriedades de Sistemas

- **Estabilidade**
  - Um sistema é estável no sentido BIBO (*Bounded Input-Bounded Output*) se, e somente se, cada entrada limitada produzir uma saída limitada, para todo n.

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \text{para todo } n\,.$$ → Entrada limitada

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \text{para todo } n\,.$$ → Saída limitada

Propriedades de Sistemas

- Exemplo:

$$y[n] = (x[n])^2$$

Dada

$$|x[n]| \leq B_x \Rightarrow \quad |y[n]| = |x[n]|^2 \leq {B_x}^2$$

Sistema estável

Propriedades de Sistemas

- Exemplo:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n+1, & n \geq 0 \end{cases}$$

Para $n < 0, u[n] = 0 \Rightarrow y[n] = 0$

Para $n \geq 0, u[n] = 1 \Rightarrow \nexists B_y \text{ tal que } (n+1) \leq B_y < \infty$

$\Rightarrow$ Sistema instável

Propriedades de Sistemas

- **Sistemas Lineares Invariantes no Tempo**
  - Considere um sistema onde se aplica na entrada um impulso unitário no instante $n = k$:

$$y_k[n] = T\{\delta[n-k]\}$$

  - A resposta $y_k[n]$ recebe o nome de **resposta ao impulso** e é representada por

$h_k[n]$ $\Rightarrow$ Resposta ao impulso aplicado no instante $n = k$.

Propriedades de Sistemas

- Uma sequência $x[n]$ pode ser representada por

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$$

- Logo

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

Propriedades de Sistemas

- Se o sistema for linear, do princípio da superposição,

$$y[n] = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,T\{\delta[n-k]\}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\boxed{h_k[n]}$$

A resposta ao impulso depende do instante de tempo $n = k$ em que foi aplicada.

Propriedades de Sistemas

- Se o sistema for invariante no tempo, dada

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

então,

$$h[n-k] = T\{\delta[n-k]\}$$

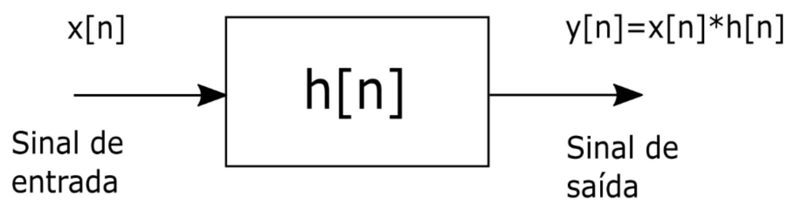
- Logo,

$$y[n] = \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k] = x[n] * h[n]}$$

Soma de convolução

Propriedades de Sistemas

- Característica de um sistema linear e invariante no tempo (LTI):
  - Um sistema LTI é completamente caracterizado por usa resposta ao impulso $h[n]$.
  - Dada $h[n]$, pode-se utilizar a soma de convolução para se calcular a saída $y[n]$ para qualquer entrada $x[n]$.



Propriedades de Sistemas

- Exemplo:
  - Dada

$$h[n] = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0.25, 0, 0, 0\}$$

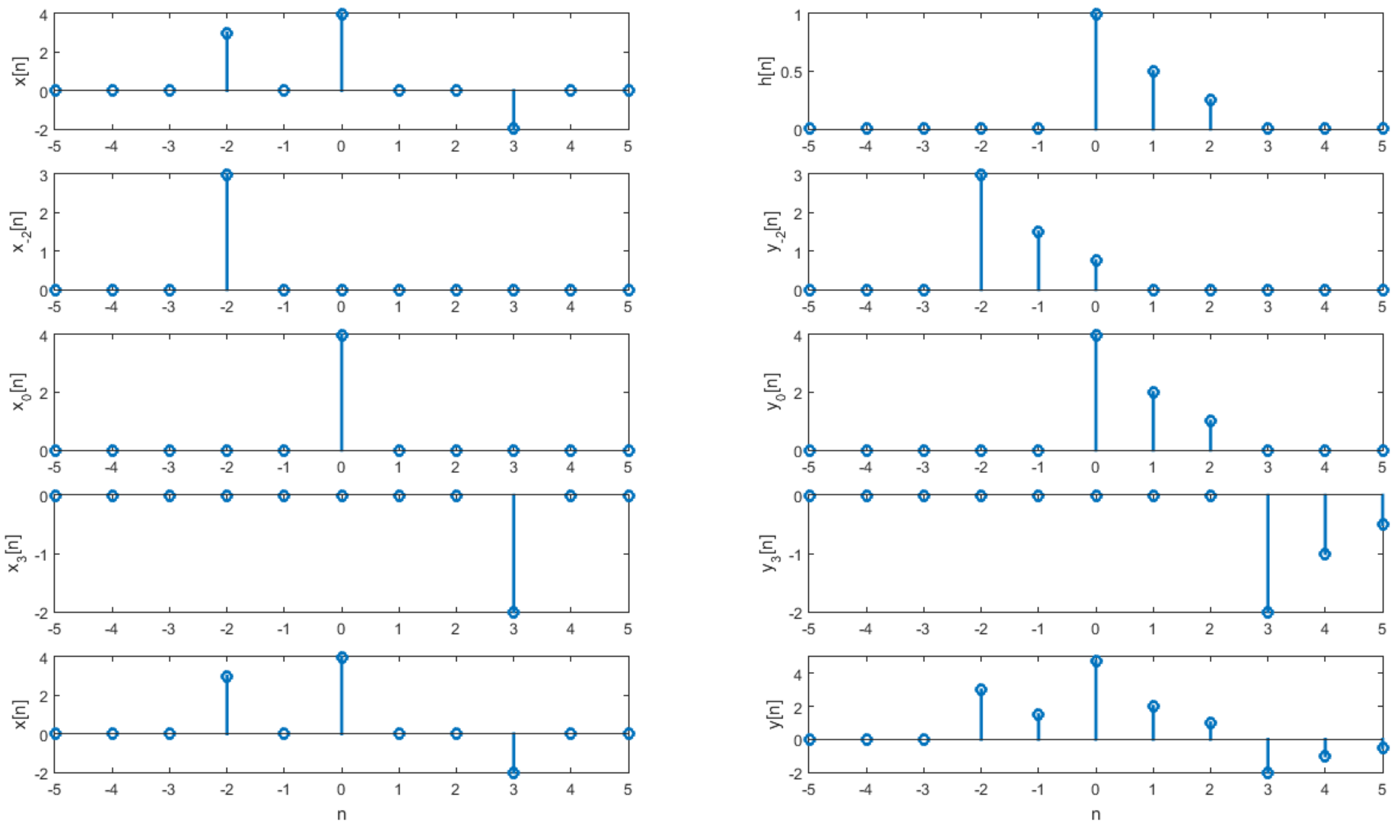
e

$$x[n] = \{0, 0, 0, 3, 0, 4, 0, 0, -2, 0, 0\}$$

calcule a saída $y[n]$ do sistema.

Propriedades de Sistemas

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$



Propriedades de Sistemas

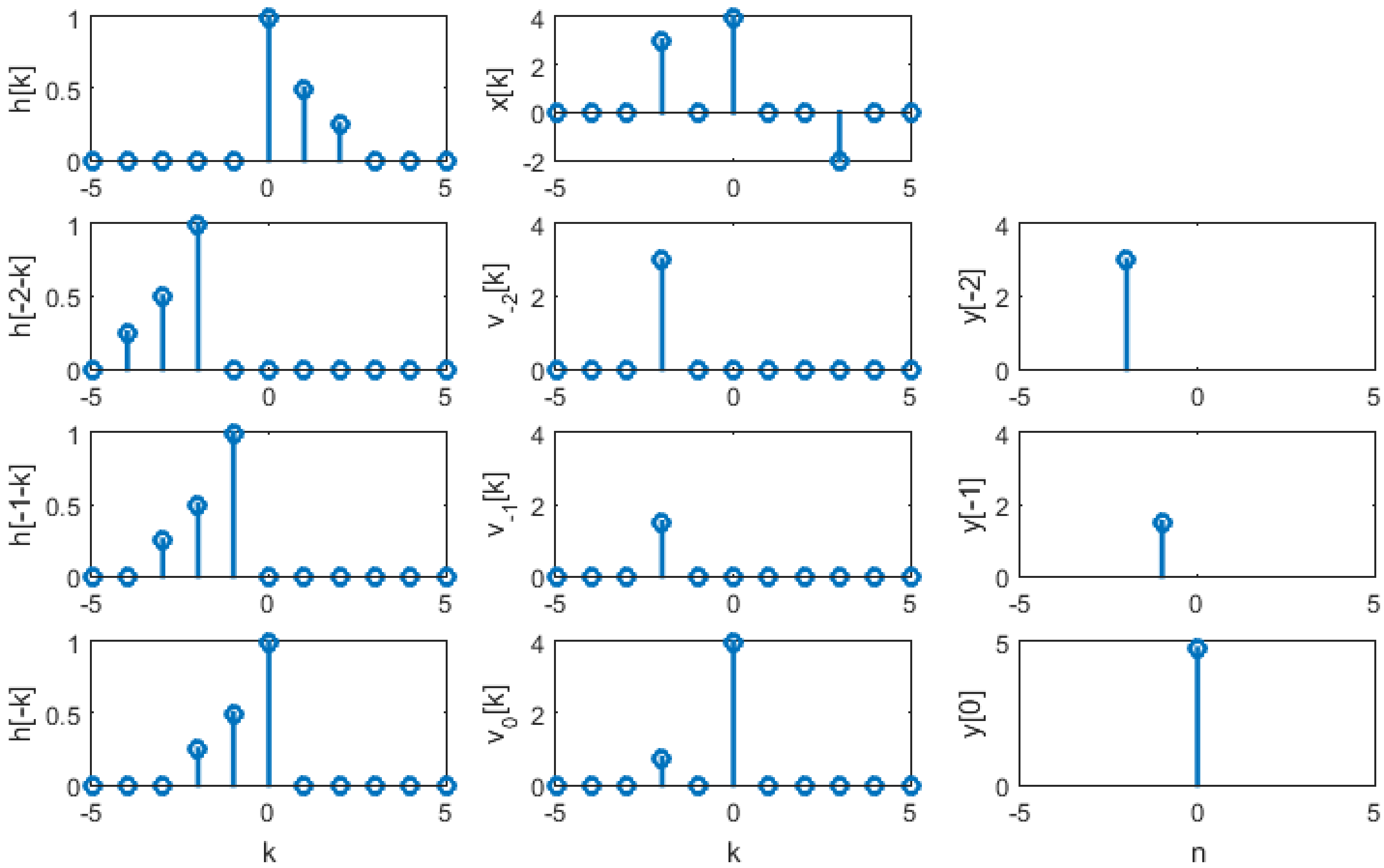
- Suponha que se deseje saber o valor de $y[n]$ para um valor de $n = n_0$:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n_0 - k]$$

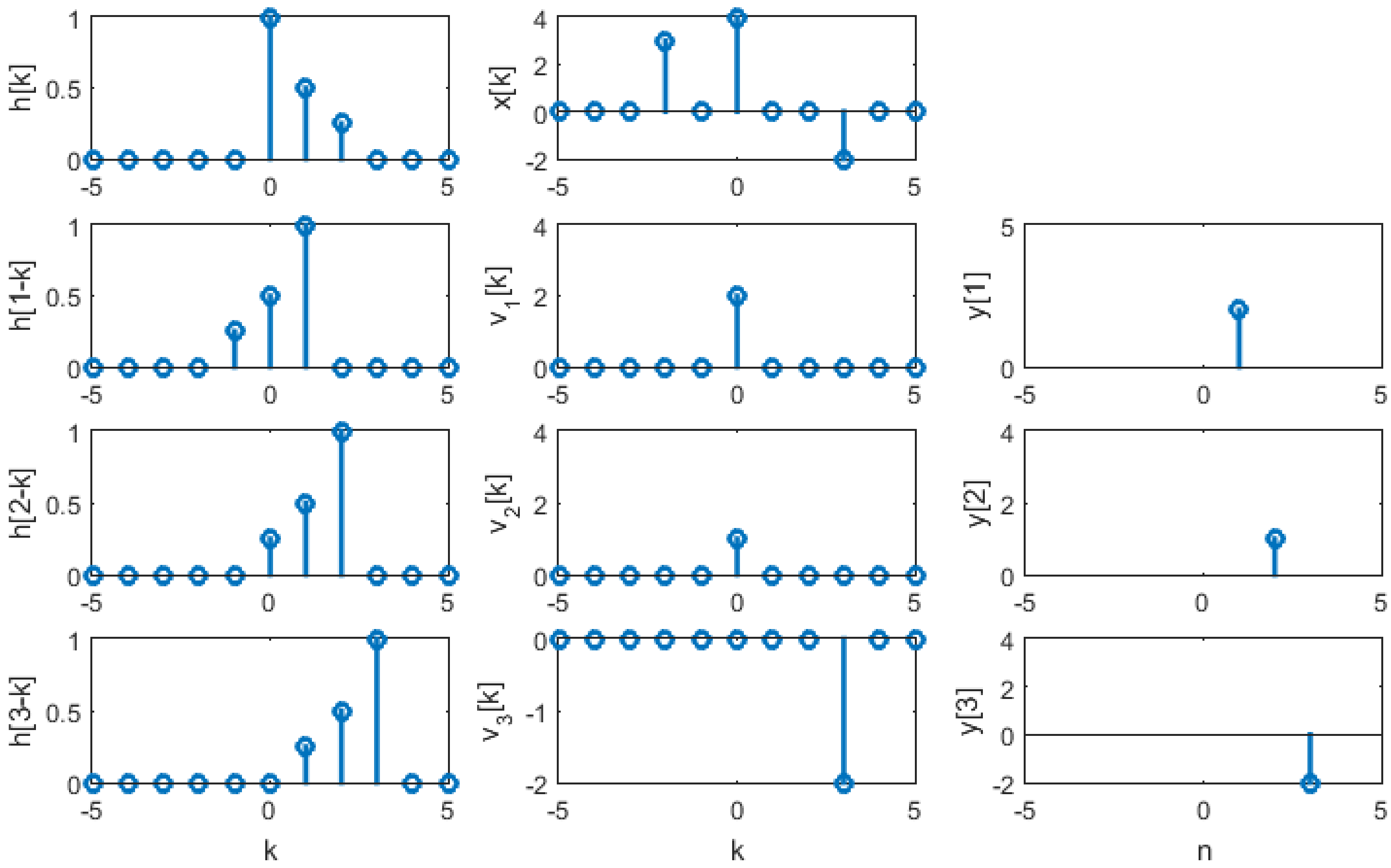
1. **Refletir** $h[k]$ sobre $k = 0$ para se obter $h[-k]$.
2. **Deslocar** $h[-k]$ de n_0 para se obter $h[n_0 - k]$.
   1. $n_0 > 0$ desloca para a direita.
   2. $n_0 < 0$ desloca para a esquerda.
3. **Multiplicar** $x[k]$ por $h[n_0 - k]$ para gerar $v_{n_0} = x[k]h[n_0 - k]$.
4. **Somar** todos os valores de v_{n_0} para se obter $y[n_0]$.

Propriedades de Sistemas

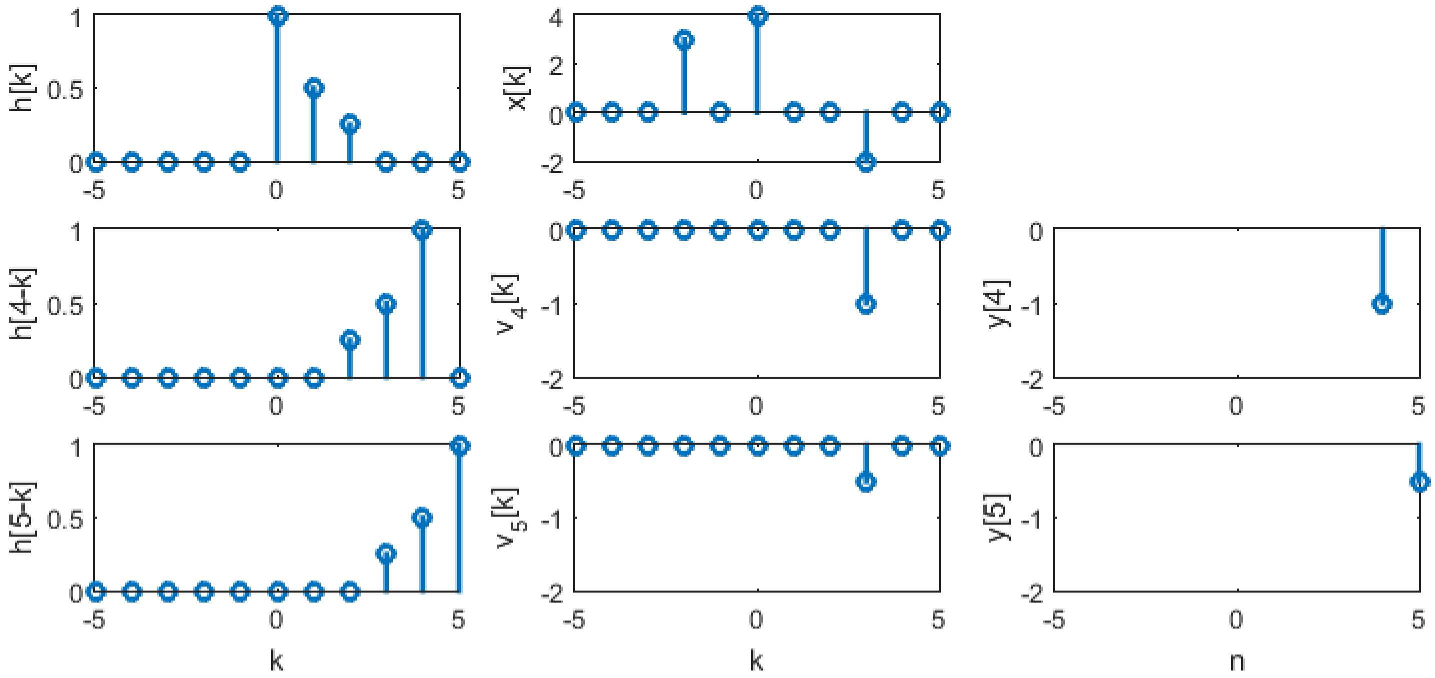
Prof. Dr. Rafael Cardoso



Propriedades de Sistemas



Propriedades de Sistemas



Propriedades de Sistemas

Prof. Dr. Rafael Cardoso