# PROCESSAMENTO DE SINAIS

## Estruturas para Sistemas de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

# Objetivos



- Apresentar diferentes formas de se representar sistemas de tempo discreto:
  - Do tipo IIR;
  - Do tipo FIR.

# Representação por Diagramas de Blocos de Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um filtro com função de transferência e resposta ao impulso dadas por:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad , \qquad |z| > |a|$$

$$h[n] = b_0 a^n u[n] + b_1 a^{n-1} u[n-1]$$

- Da função de transferência se obtém a equação de diferenças do filtro:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - az^{-1}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1})$$

$$y[n] - ay[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

$$\boxed{y[n] = ay[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]}$$

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos



- O objetivo é obtermos diferentes estruturas para a implementação da equação:

$$y[n] = ay[n-1] + b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

- Embora sob aritmética de precisão infinita estas estruturas sejam equivalentes, quando implementadas com aritmética de precisão finita os resultados podem ser distintos.

- Adicionalmente, questões associadas a uso de memória também serão distintas.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

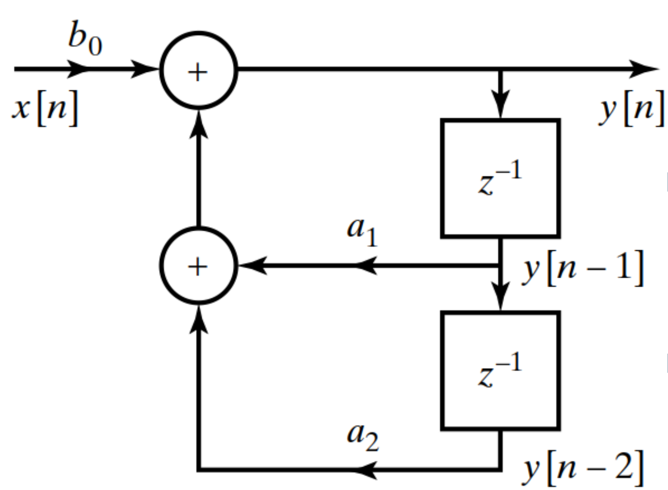


- Considere um filtro com função de transferência e equação de diferenças dadas por, respectivamente:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] \qquad (1)$$

- O diagrama de blocos da equação (1) é:




Demanda memória.

Demanda memória.

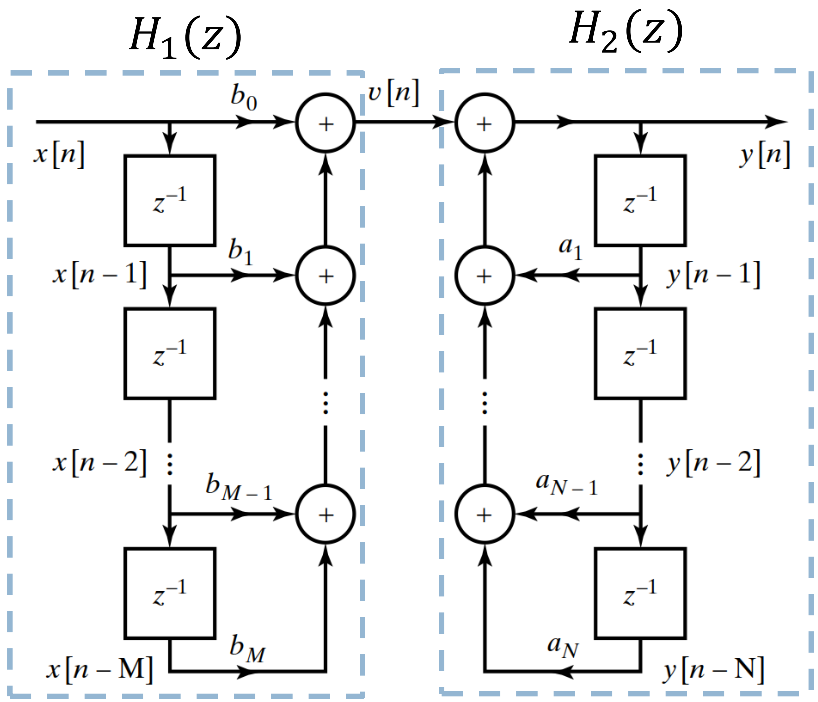
# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos



- Generalizando para um sistema de N-ésima ordem:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

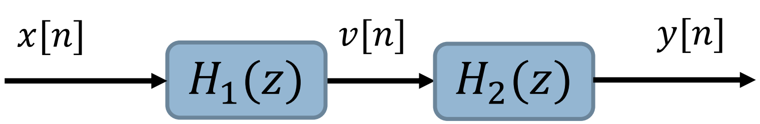
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$




- Da figura:

$$v[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

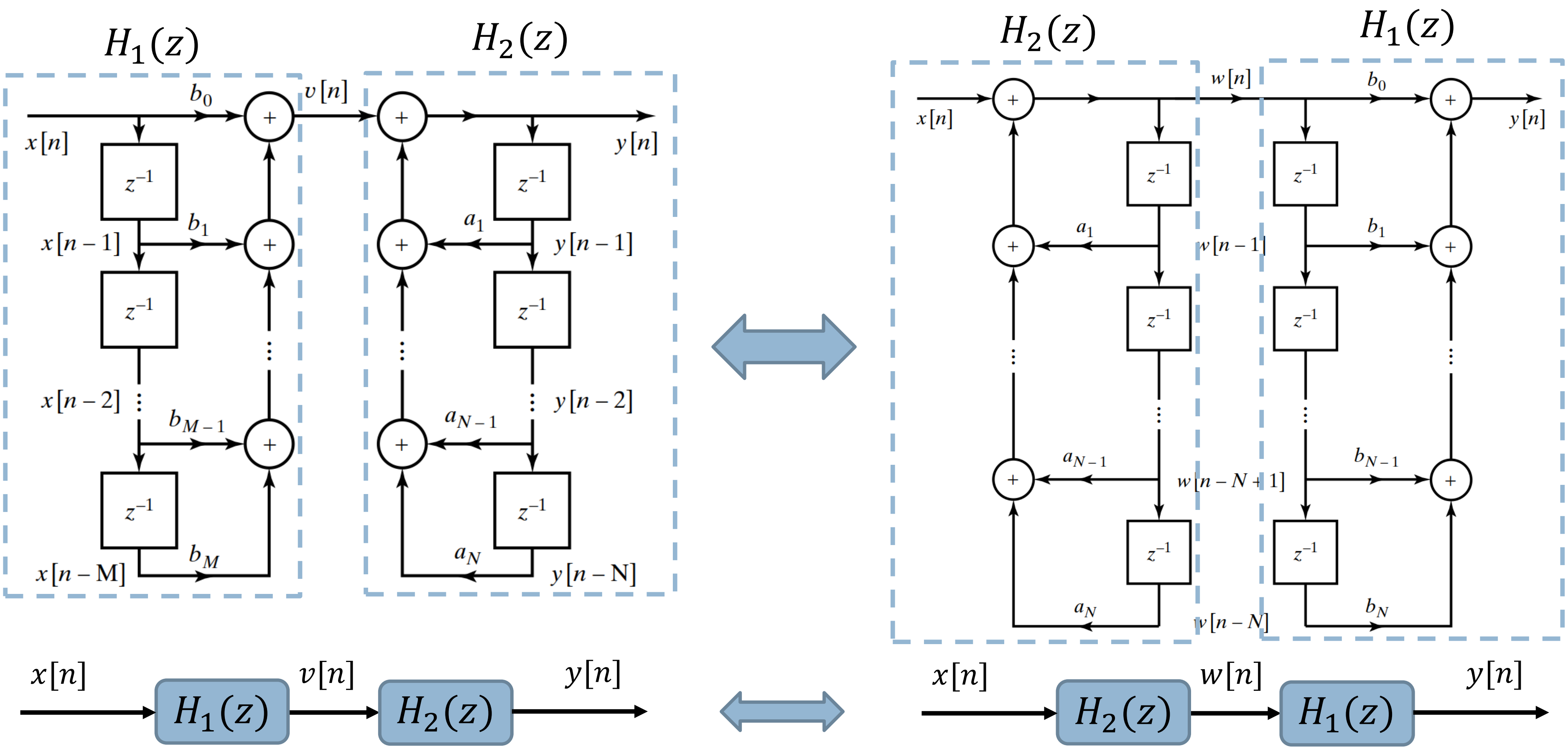
$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n]$$



# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sistemas LIT:

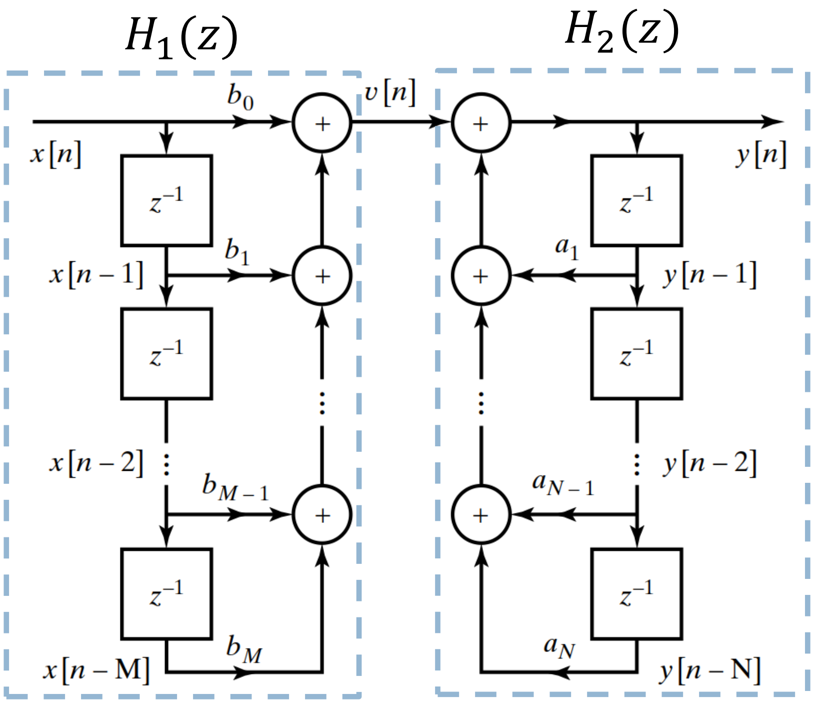



- Ambas as representações são equivalentes.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para a primeira representação:

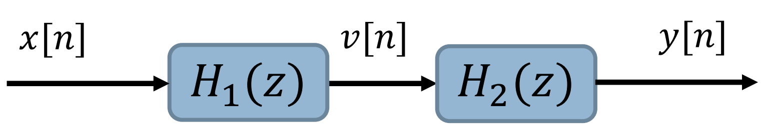



$$H(z) = H_2(z)H_1(z) = \left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right)\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)$$

Ou, equivalentemente:

$$V(z) = H_1(z)X(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)X(z)$$

$$Y(z) = H_2(z)V(z) = \left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right)V(z)$$

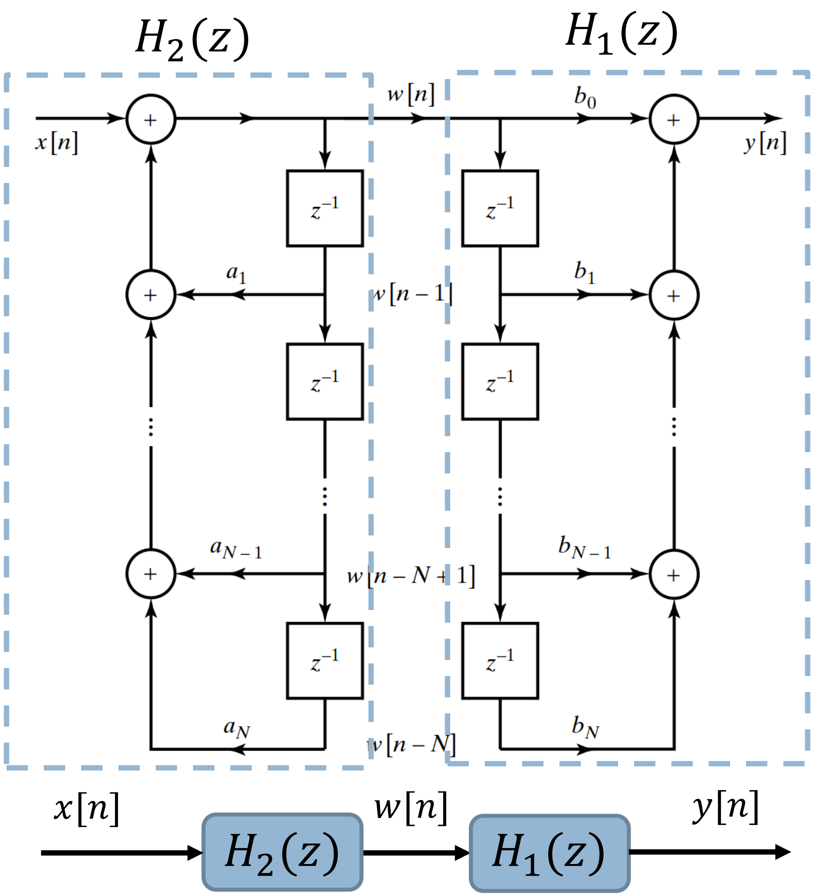



Primeiro são implementados os zeros e depois os polos.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para a segunda representação:




$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)\left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right)$$

Ou, equivalentemente:

$$W(z) = H_2(z)X(z) = \left(\frac{1}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right)X(z)$$

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right)W(z)$$

Primeiro são implementados os polos e depois os zeros.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Apesar de, matematicamente, ambas as representações serem idênticas, quando implementadas com precisão numérica finita, diferenças podem ocorrer.

- Em aritmética de ponto fixo:
  - Os coeficientes armazenados não são exatos.
  - Os cálculos aritméticos também não são exatos e geram ruídos que serão propagados na cadeia do filtro.

- Exemplo:
  - Precisão infinita: $2{,}34256987 - 2{,}34255876 = 0{,}00001111$
  - Precisão finita 32 bits (Q20): $2456362 - 2456350 = 12 \Longrightarrow 0{,}00001144$
    - Resolução: $2^{-20} = 0{,}0000009537$
  - Precisão finita 16 bits (Q10): $2398 - 2398 = 0 \Longrightarrow 0$
    - Resolução: $2^{-10} = 0{,}0009766$

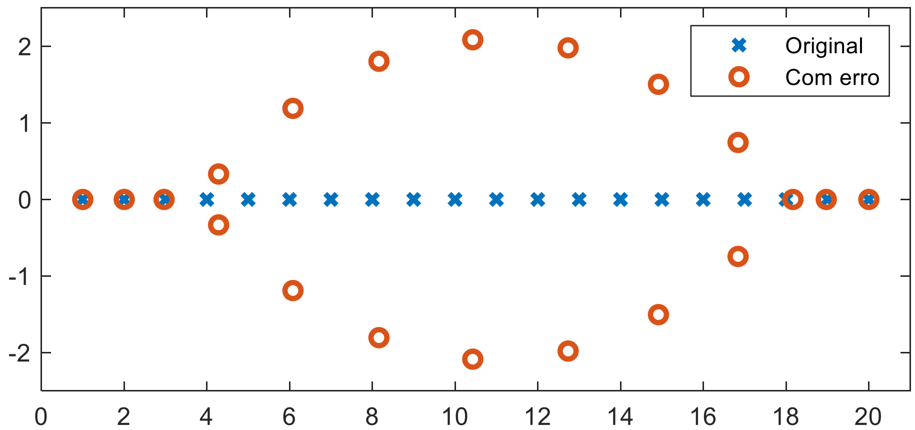
# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- As raízes de polinômios também podem ser sensíveis a variações pequenas nos coeficientes.

- Polos e zeros de sistemas podem sofrer grandes variações em função da implementação em ponto fixo.

- Exemplo:
  - Polinômio de Wilkinson: $p(x) = \prod_{n=1}^{20}(x-i) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20)$

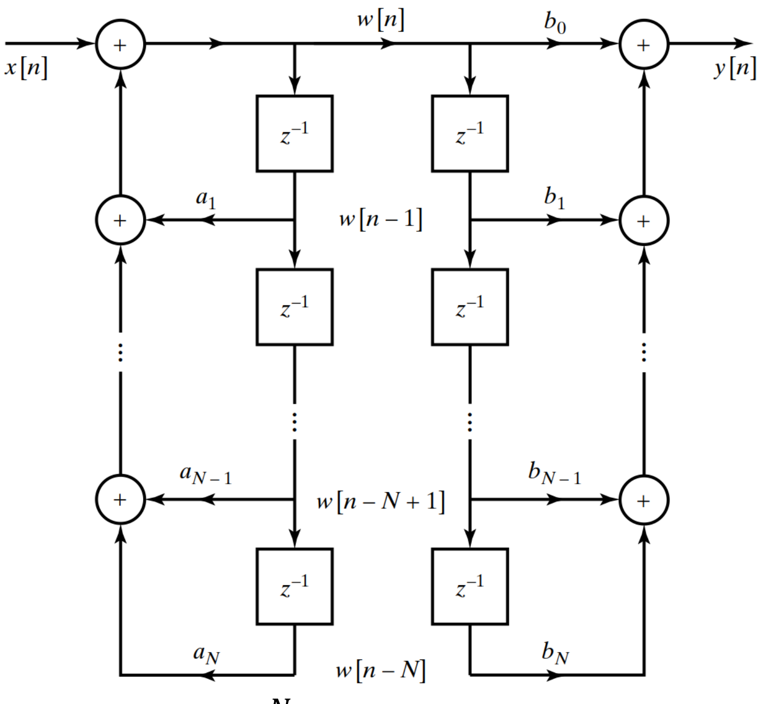


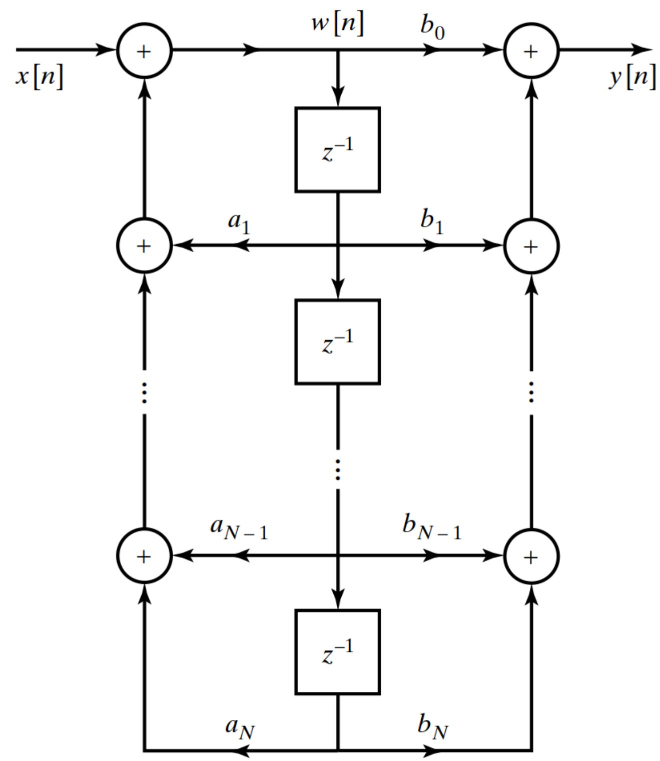

A multiplicação do coeficiente de $x^{19}$ por 1,000001 modifica significativamente os polos do polinômio.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Ainda para a segunda representação, no domínio do tempo:



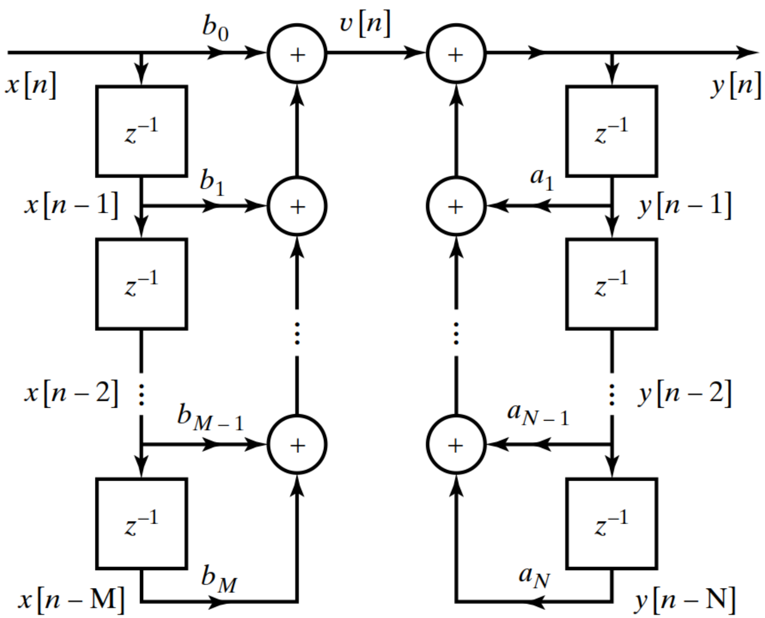

$$w[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n]$$

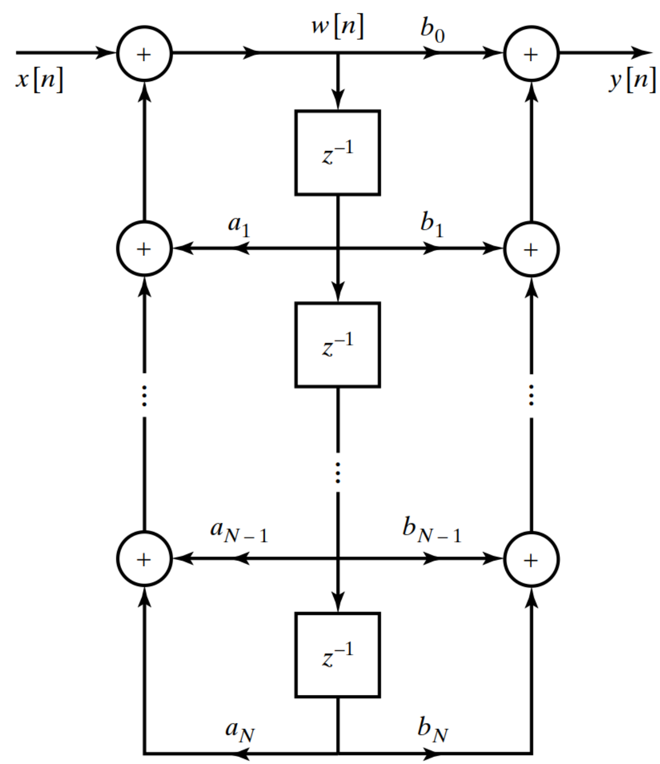
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k w[n-k]$$

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- As duas formas apresentadas são, então:




**Forma Direta I**

Utiliza $(N + M)$ elementos de atraso.

Implementa zeros e depois polos.

**Forma Direta II ou Forma Canônica Direta**

Utiliza $\max(N, M)$ elementos de atraso.

Implementa polos e depois zeros.

# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

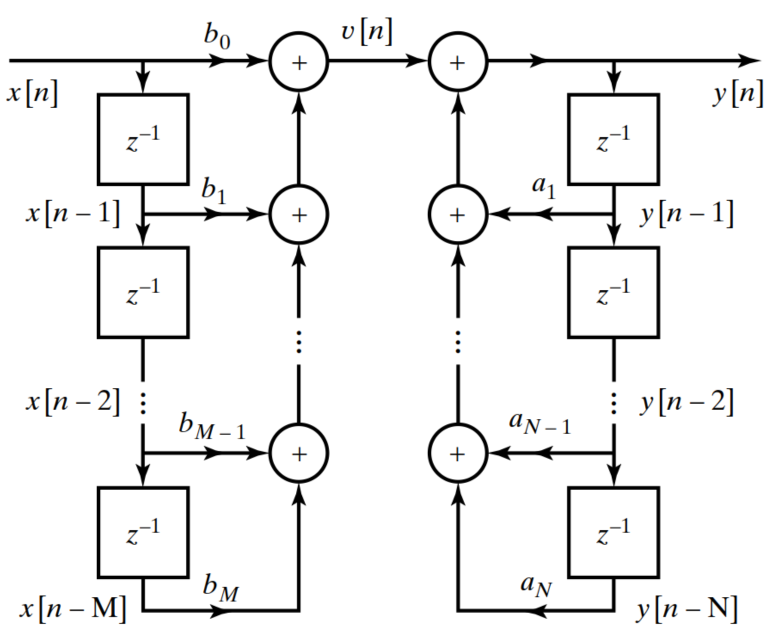
Prof. Dr. Rafael Cardoso

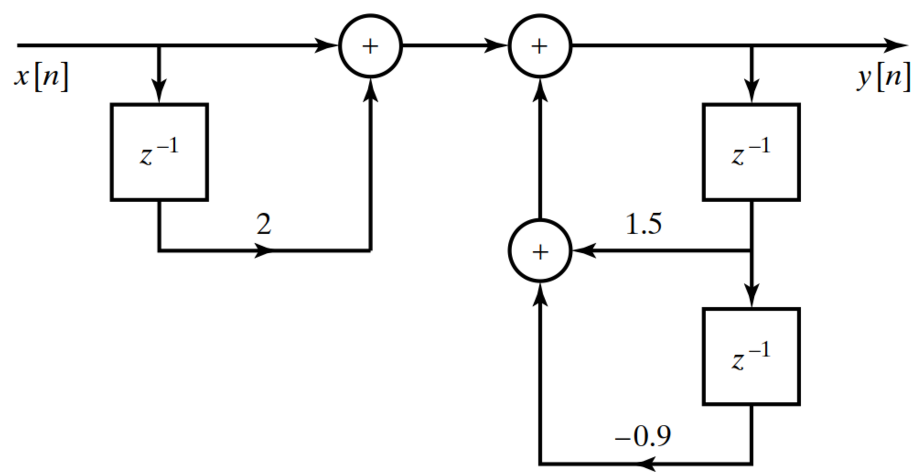
- Representar o sistema nas formas Direta I e Direta II:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}9z^{-2}}$$

$$y[n] = 1{,}5y[n-1] - 0{,}9y[n-2] + x[n] + 2x[n-1]$$

## Forma Direta I



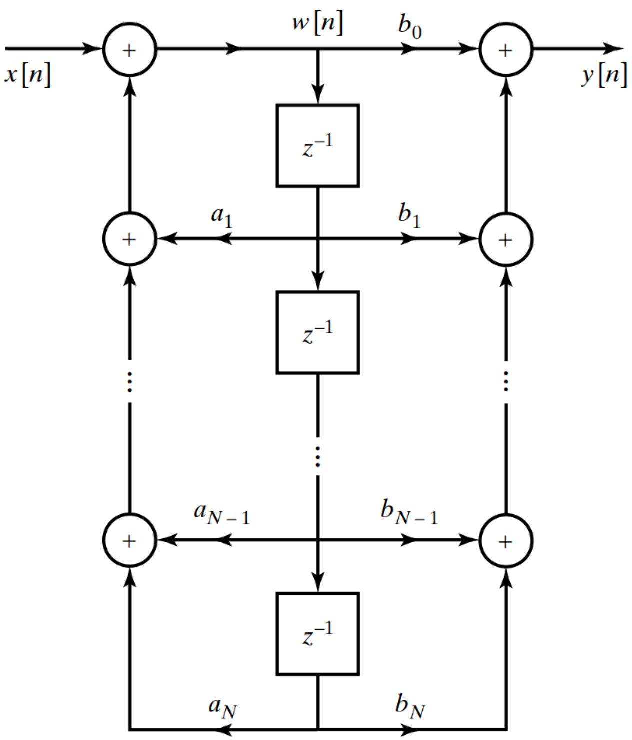
# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Blocos

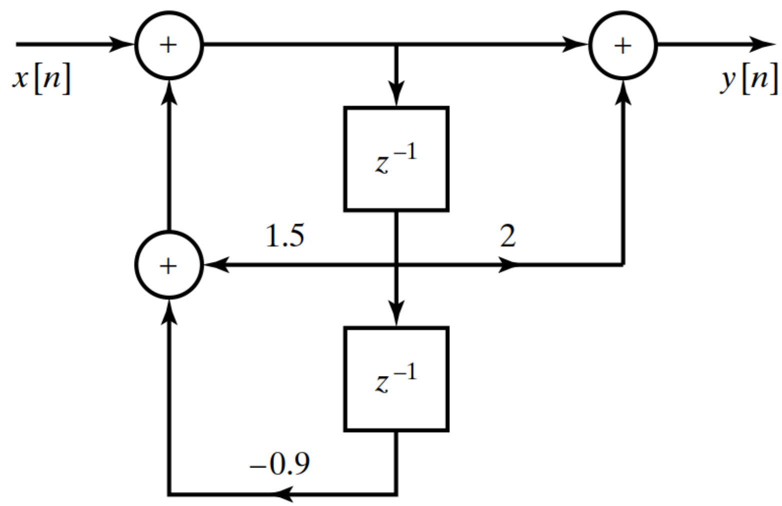
Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}9z^{-2}}$$

$$y[n] = 1{,}5y[n-1] - 0{,}9y[n-2] + x[n] + 2x[n-1]$$

## Forma Direta II

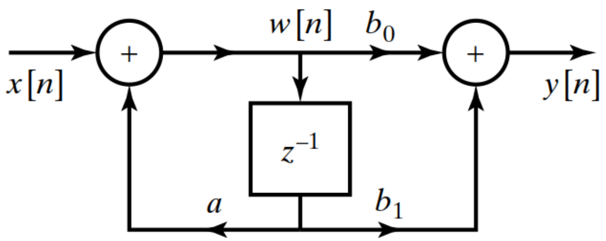


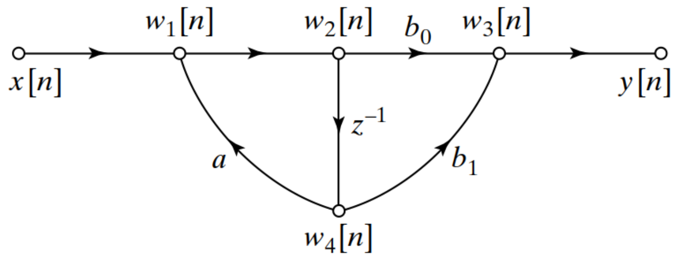



# Representação de Equações de Diferenças por Diagramas de Fluxo de Sinais



- Outra maneira de representar equações de diferenças.




$$w[n] = aw[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1]$$

$$w_1[n] = aw_4[n] + x[n]$$

$$w_2[n] = w_1[n]$$

$$w_3[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_4[n]$$

$$w_4[n] = w_2[n-1]$$

$$y[n] = w_3[n]$$

Reescrevendo:

$$w_2[n] = aw_2[n-1] + x[n]$$

$$y[n] = b_0 w_2[n] + b_1 w_2[n-1]$$

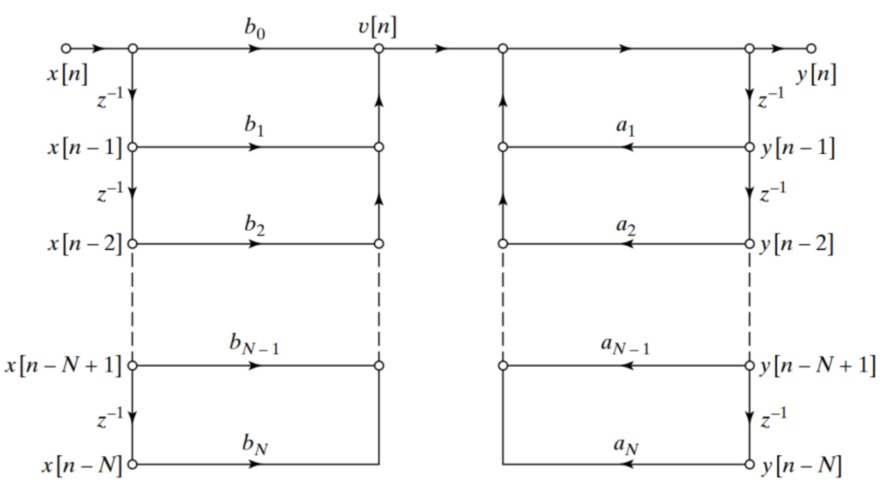
# Estruturas Básicas para Sistemas IIR

# Formas Diretas

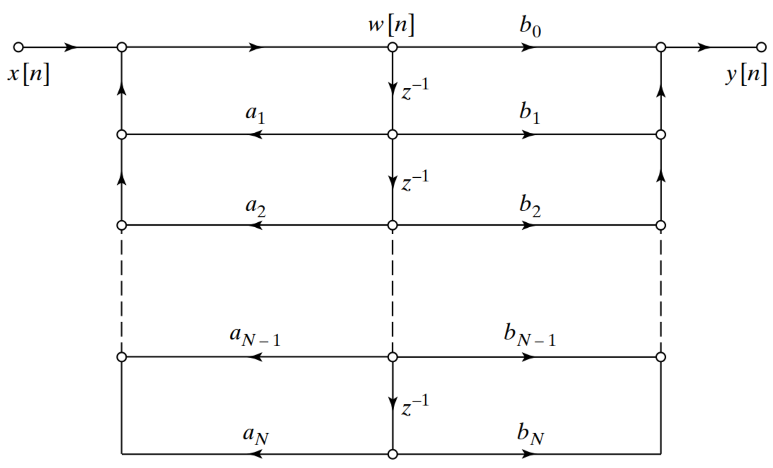


- Para um sistema de N-ésima ordem:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \Longleftrightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$




Forma Direta I




Forma Direta II

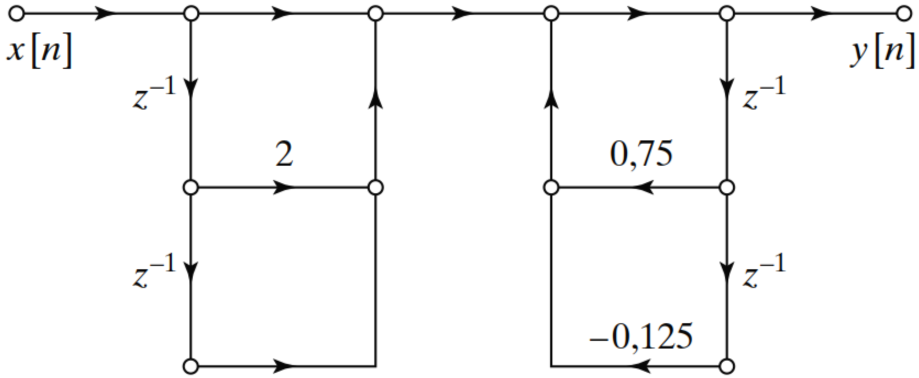
# Formas Diretas



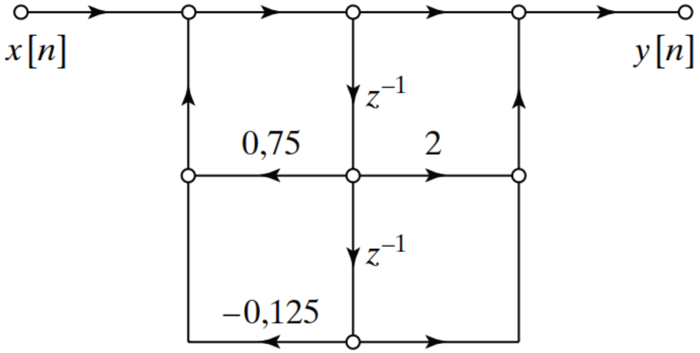
- Determine as representações na Forma Direta I e II para o sistema:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}}$$

$$y[n] = 0{,}75y[n-1] + 0{,}125y[n-2] + x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$




Forma Direta I




Forma Direta II

# Forma em Cascata



- Considere a função de transferência:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Fatorando tem-se:

$$H(z) = A\frac{\prod_{k=1}^{M_1}(1 - f_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2}(1 - g_k z^{-1})(1 - g_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1}(1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2}(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$

onde $M = M_1 + 2M_2$ e $N = N_1 + 2N_2$.

- Os fatores de primeira ordem representam os zeros $f_k$ e os polos $c_k$ reais.
- Os fatores de segunda ordem representam o pares de zeros conjugados complexos $g_k$ e $g_k^*$ e de polos conjugados complexos $d_k$ e $d_k^*$.

# Forma em Cascata

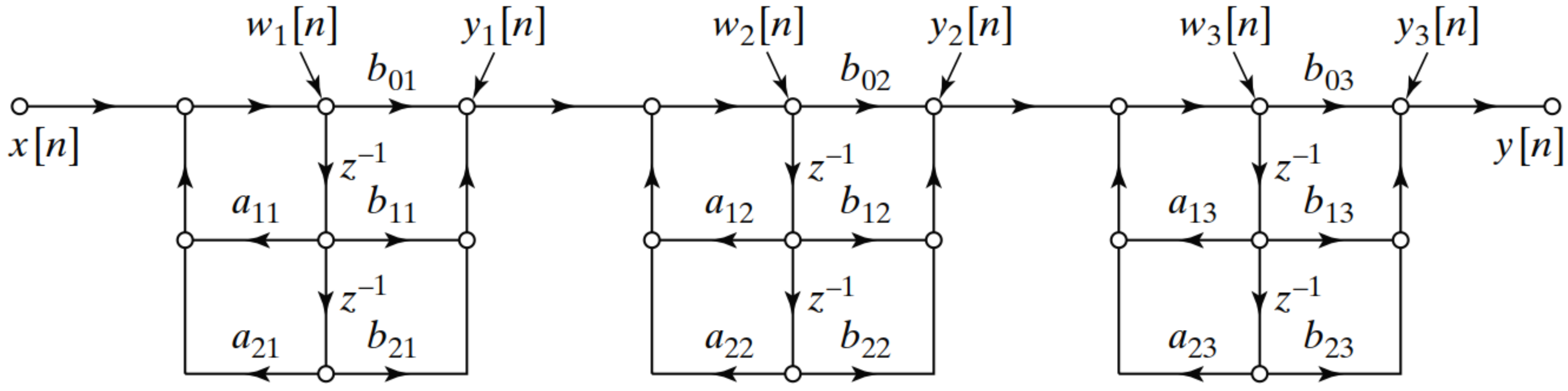


- O agrupamento de pares de zeros e de polos fornece uma estrutura baseada em seções de segunda ordem (SOS):

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$

onde $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ é o maior inteiro contido em $(N+1)/2$.

- Uma estrutura em cascata para um sistema de 6ª ordem na forma direta II é:




Cada seção tem 5 multiplicações.

# Forma em Cascata

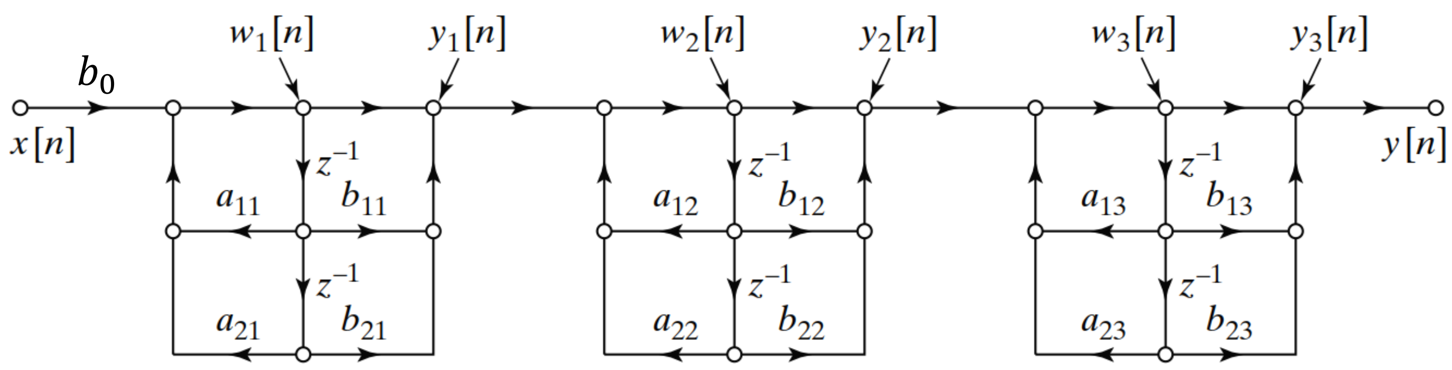


- Outra possível representação é:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \prod_{k=1}^{N_s} \frac{1 + \tilde{b}_{1k} z^{-1} + \tilde{b}_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$

  onde $b_0$ é o primeiro coeficiente do polinômio do numerador e $\tilde{b}_{ik} = {}^{b_{ik}}/_{b_{0k}}$ para $i = 1, 2$ e $k = 1, 2, \dots, N_s$.

- Tem-se a cascata de SOSs com 4 multiplicações e 1 ganho global $b_0$.




- Ponto flutuante: SOS com 4 multiplicações e 1 ganho global.
- Ponto fixo: SOS com 5 multiplicações para distribuir o ganho do sistema.

# Forma em Cascata



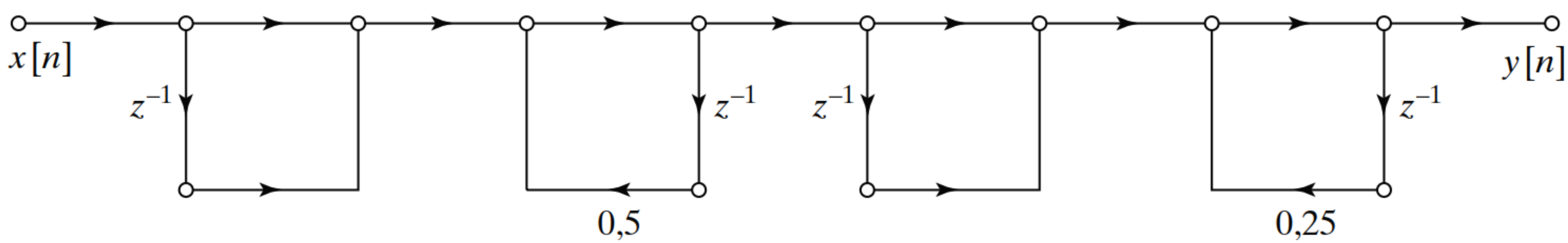
- Comparação para N par:
  - Formas Direta I e II: $(2N + 1)$ multiplicações.
  - Forma em Cascata: $(5N/2)$ multiplicações.
  - Forma em Cascata com ganho global: $(2N + 1)$ multiplicações.

# Forma em Cascata

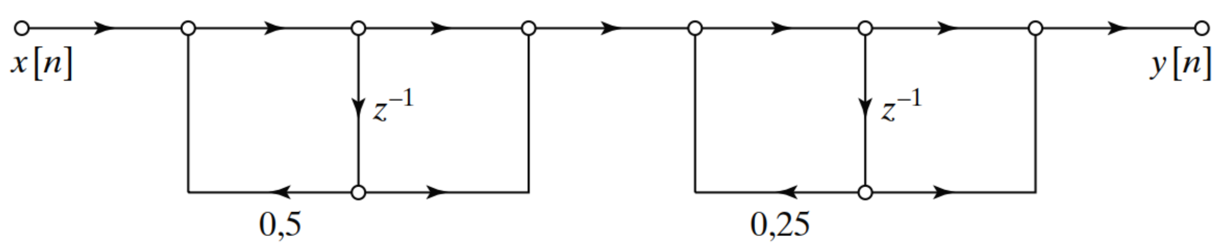
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine representações em cascata para o sistema:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0{,}5z^{-1})(1 - 0{,}25z^{-1})}$$




Subseções em Forma Direta I




Subseções em Forma Direta II

# Forma Paralela



- Seja o sistema $H(z)$ representado por expansão em frações parciais:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k}}_{\text{Atrasos}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-k}}}_{\text{Sistemas de 1ª ordem}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k(1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}}_{\text{Sistemas de 2ª ordem}}$$

onde $\mathrm{N} = N_1 + 2N_2$. Se $M \geq N$, então, $N_p = M - N$, caso contrário o primeiro somatório não existe.

- Alternativamente, agrupando-se os polos reais tem-se:

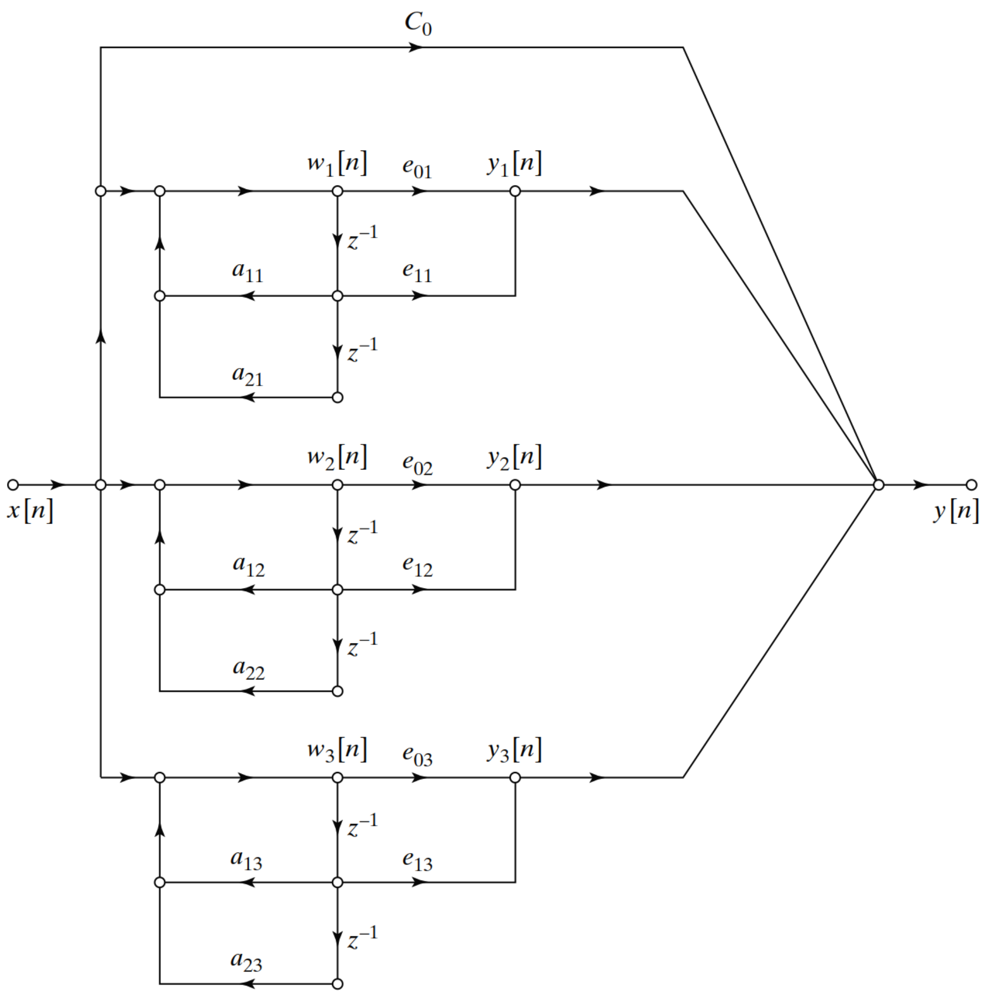
$$H(z) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k}}_{\text{Atrasos}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}}_{\text{Sistemas de 2ª ordem}}$$

onde $N_s = \lfloor (N+1)/2 \rfloor$ é o maior inteiro contido em $(N+1)/2$. Se $N_p = M - N$ é negativo, o primeiro somatório não existe.

# Forma Paralela



- Para um sistema de 6ª ordem ($M = N = 6$):



# Forma Paralela

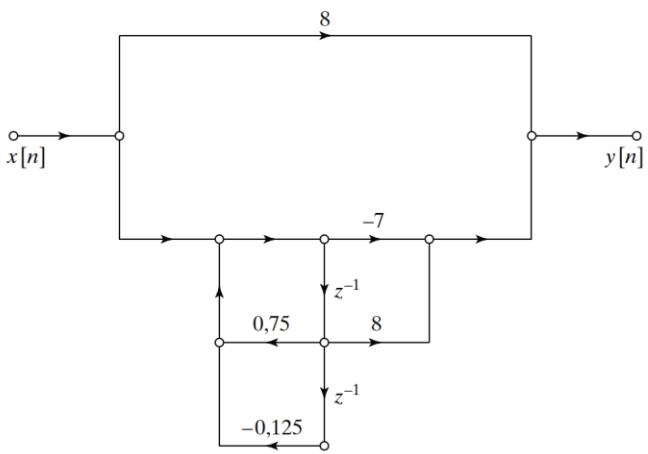


- Determine representações paralelas para o sistema:

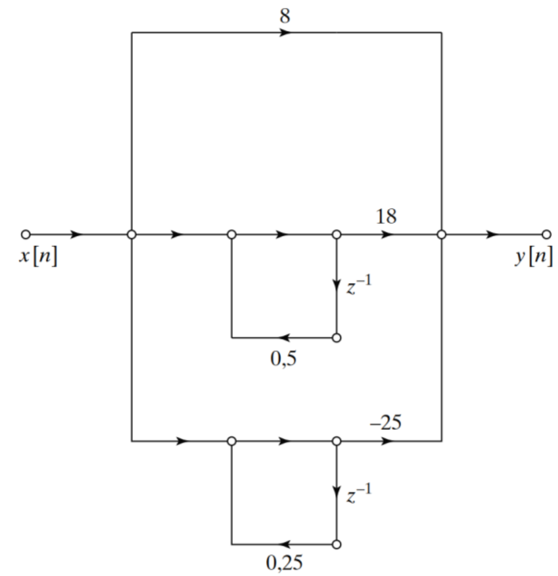
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}}$$

- Representando o sistema por:

$$H(z) = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0{,}75z^{-1} + 0{,}125z^{-2}}$$




$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0{,}5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0{,}25z^{-1}}$$



# Formas Transpostas

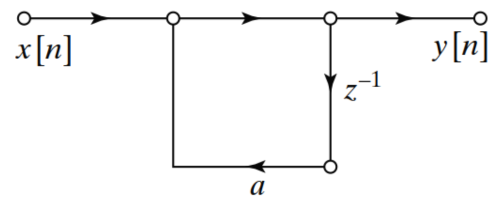


- Para transpor um gráfico de fluxo de sinais deve-se:
  - Inverter a direção de todos os ramos do gráfico;
  - Manter todos os ganhos;
  - Trocar entre si os nós de entrada e saída.

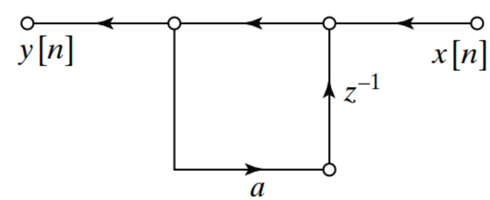
- Considere o sistema:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

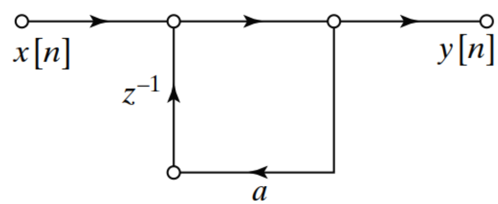
$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$




Forma Direta I




Invertendo a direção dos ramos e trocando entrada por saída.

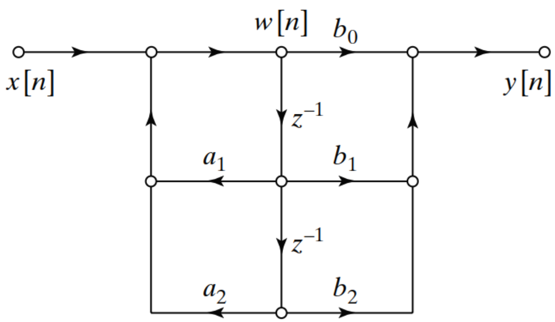



Forma Direta I Transposta

# Formas Transpostas



- Considere o sistema:

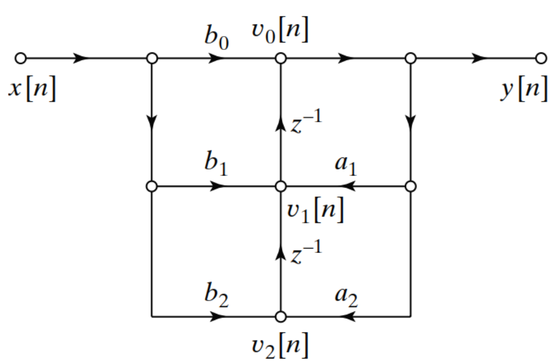



$$w[n] = a_1 w[n-1] + a_2 w[n-2] + x[n]$$

$$y[n] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + b_2 w[n-2]$$

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$




$$v_0[n] = b_0 x[n] + v_1[n-1]$$

$$y[n] = v_0[n]$$

$$v_1[n] = a_1 y[n] + b_1 x[n] + v_2[n-1]$$

$$v_2[n] = a_2 y[n] + b_2 x[n]$$

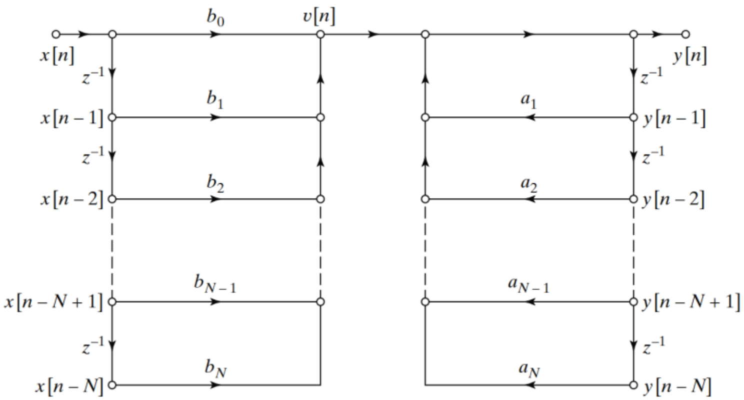
$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Os sistemas são equivalentes.

# Formas Transpostas

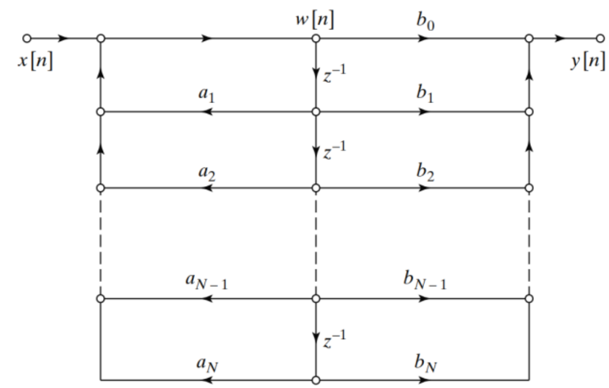


## Forma Direta I



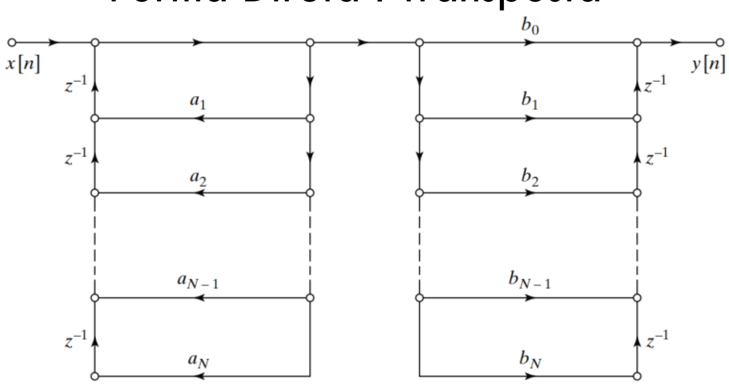

Zeros Polos

## Forma Direta II



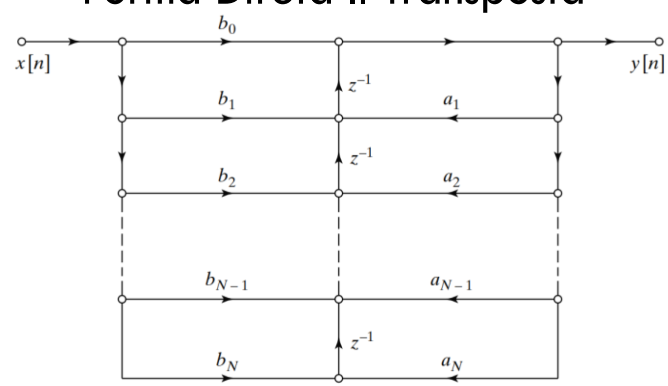

Polos Zeros

## Forma Direta I Transposta




Polos Zeros

## Forma Direta II Transposta




Zeros Polos

# Estruturas Básicas para Sistemas FIR

# Forma Direta



- Filtros FIR causais tem apenas zeros (exceto polos em $z = 0$).
- Os coeficientes $a_k$ são todos nulos.

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \cancel{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}} \xrightarrow{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y[n] = \cancel{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]}^{\,0} + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]}$$

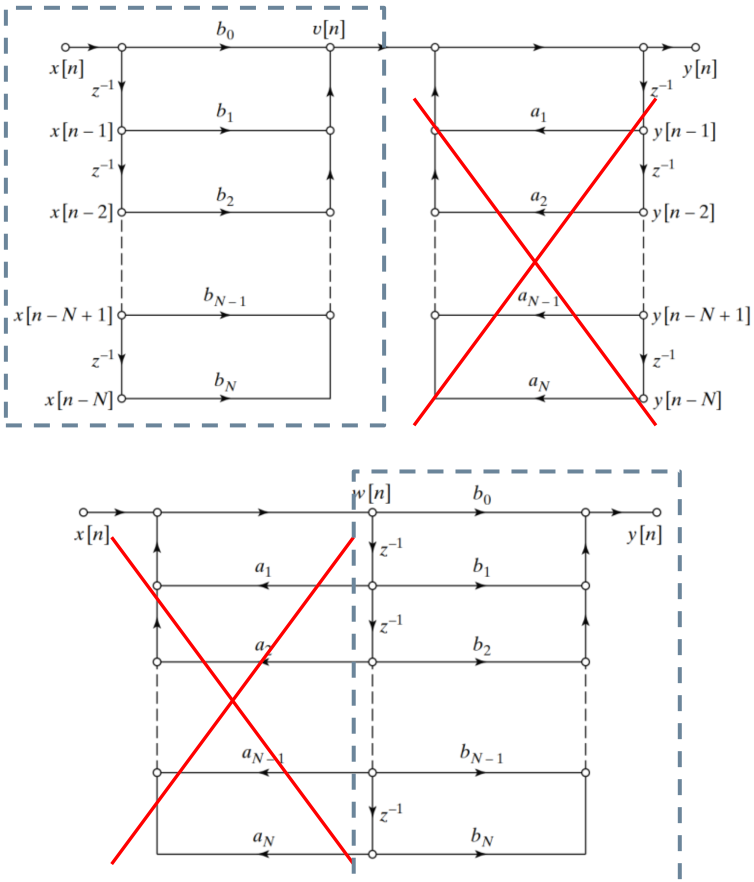
onde:

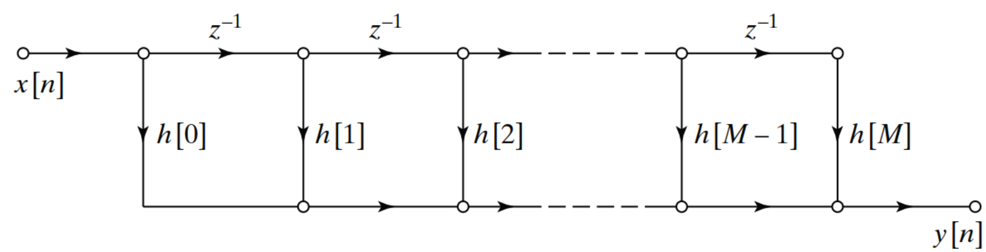
$$h[n] = \begin{cases} b_n & n = 0, 1, \dots, M \\ 0 & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

# Forma Direta



- Neste caso, as formas dos filtros IIR Direta I e II, com $a_k = 0$, conduzem a:



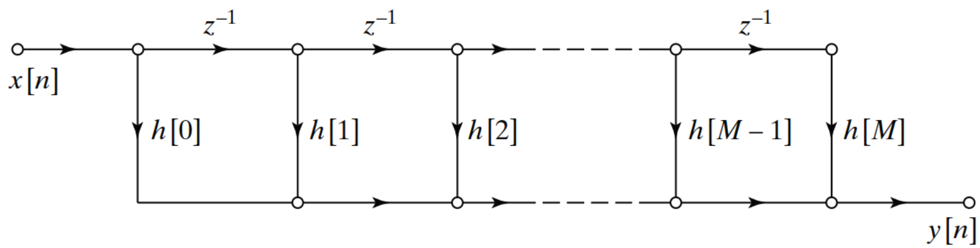




Forma Direta

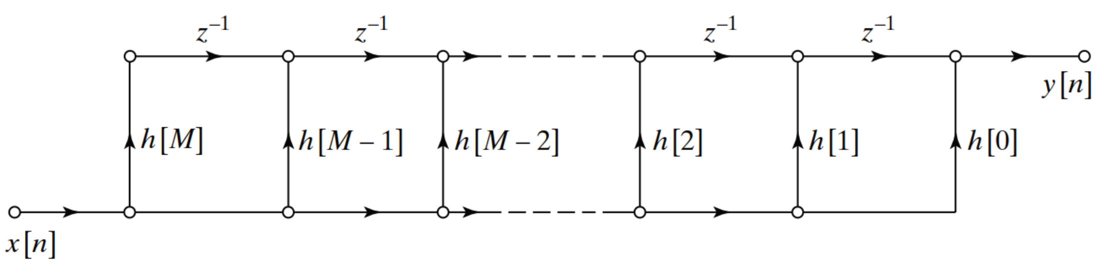
# Forma Direta Transposta



- A partir das formas dos filtros IIR Direta I e II, transpostas, com $a_k = 0$, ou transpondo a Forma Direta do filtro FIR, resulta:




Forma Direta




Forma Direta Transposta

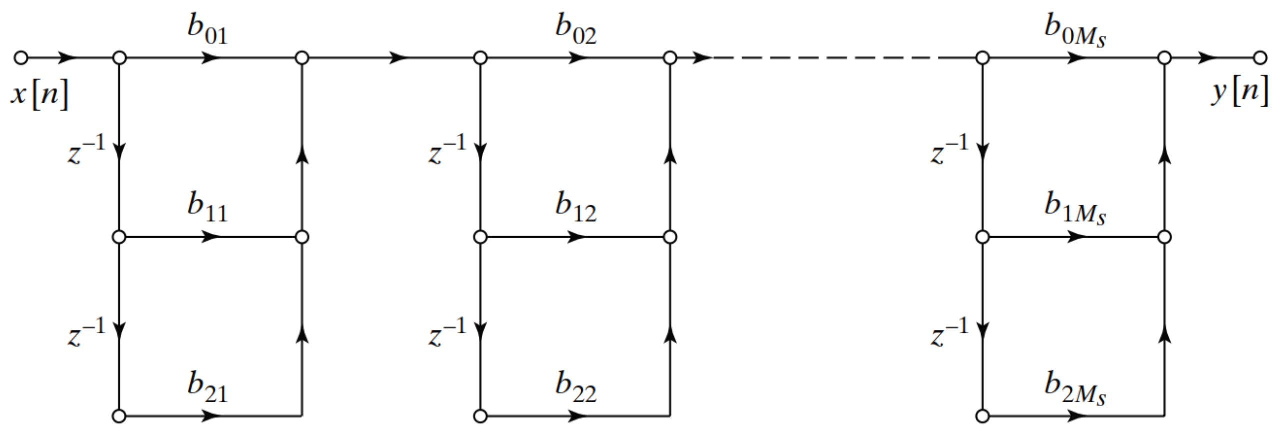
# Forma em Cascata



- É obtida fatorando-se a função de transferência do sistema:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$

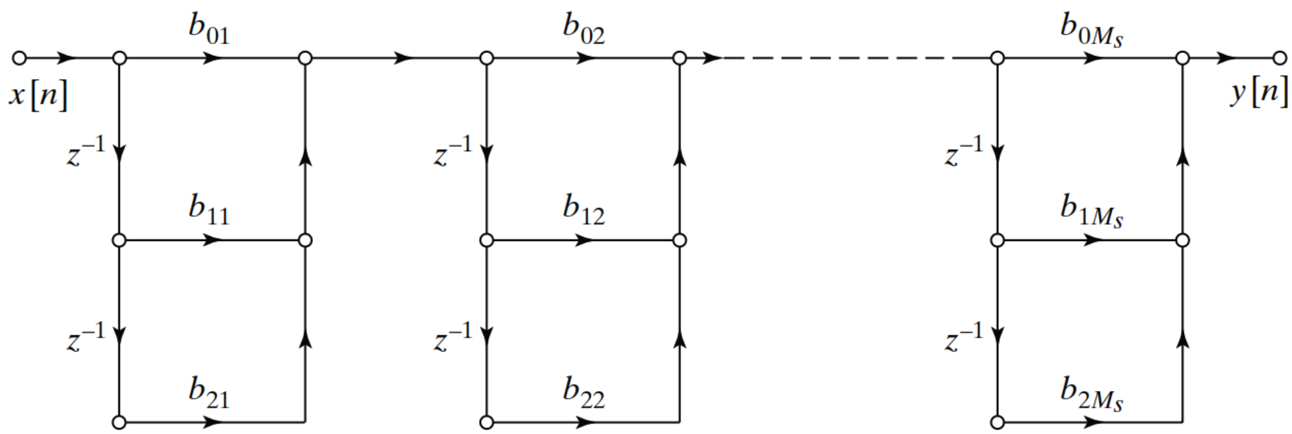
onde $M_s = \lfloor (M+1)/2 \rfloor$ é o maior inteiro contido em $(M+1)/2$. Caso $M$ seja ímpar, um dos coeficientes $b_{2k} = 0$.

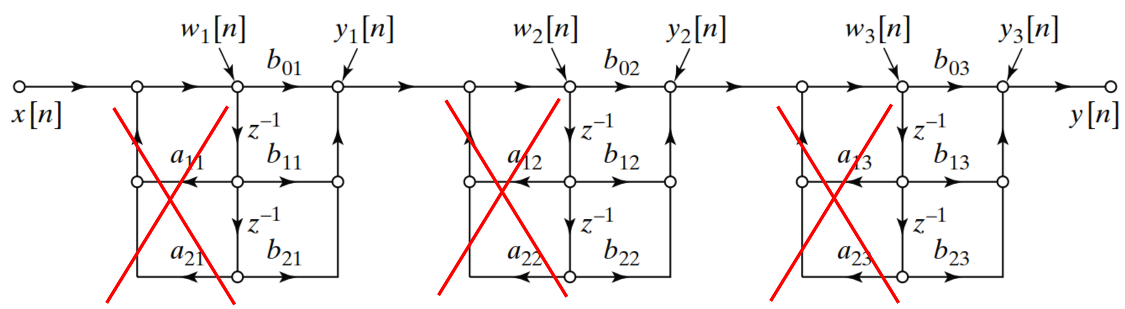


# Forma em Cascata

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n} = \prod_{k=1}^{M_s}(b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$



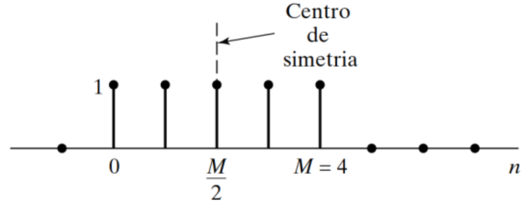

- Também é possível se obter a forma transposta.

# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear

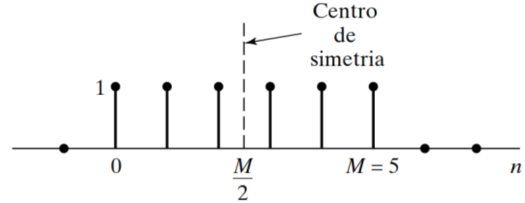


- Filtros FIR tem fase linear generalizada se:

$$h[M-n] = h[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, M$$



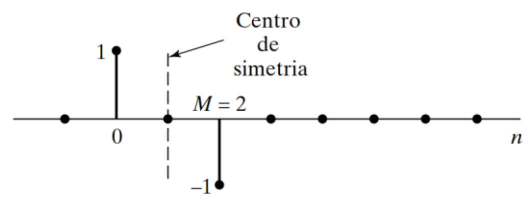

Tipo I ($M$ par)



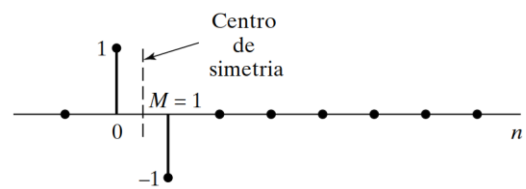

Tipo II ($M$ ímpar)

ou

$$h[M-n] = -h[n] \qquad n = 0, 1, \ldots, M$$




Tipo III ($M$ par)



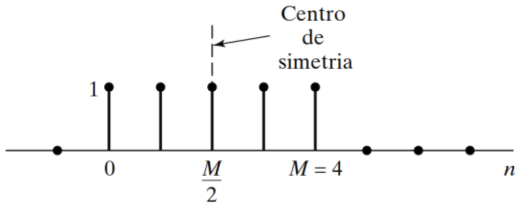

Tipo IV ($M$ ímpar)

# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para $M$ par:

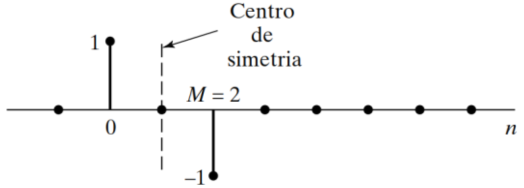
$$h[M-n] = h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$




Tipo I

ou

$$h[M-n] = -h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$




Tipo III

- A equação de diferenças pode ser reescrita como:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=M/2+1}^{M} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]$$

# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear

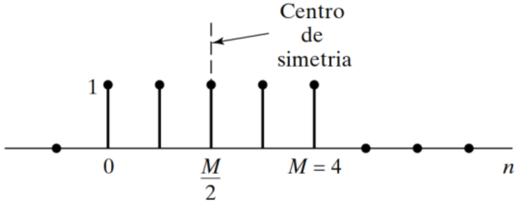
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Seja a equação de diferenças:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]$$

- Para sistemas do tipo I:

$$h[M-n] = h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$

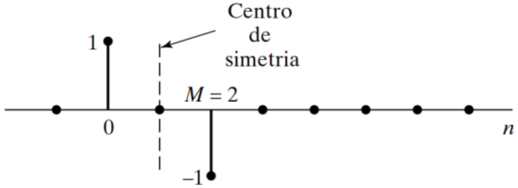



$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] + x[n-M+k]) + h[M/2]x[n-M/2]$$

$\frac{M}{2} + 1$ multiplicadores

- Para sistemas do tipo III:

$$h[M-n] = -h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$




$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

$\frac{M}{2}$ multiplicadores

# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear

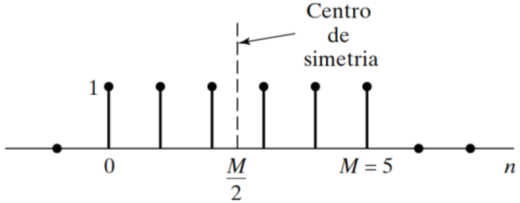
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Seja a equação de diferenças:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M/2-1} h[k]x[n-k] + h[M/2]x[n-M/2] + \sum_{k=0}^{M/2-1} h[M-k]x[n-M+k]$$

- Para sistemas do tipo II:

$$h[M-n] = h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$

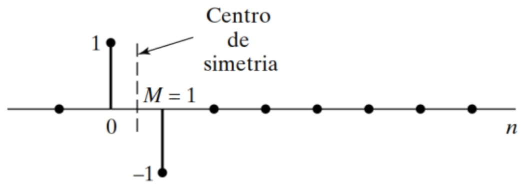



$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] + x[n-M+k])$$

$\frac{M+1}{2}$ multiplicadores

- Para sistemas do tipo IV:

$$h[M-n] = -h[n] \qquad n = 0, 1, \dots, M$$



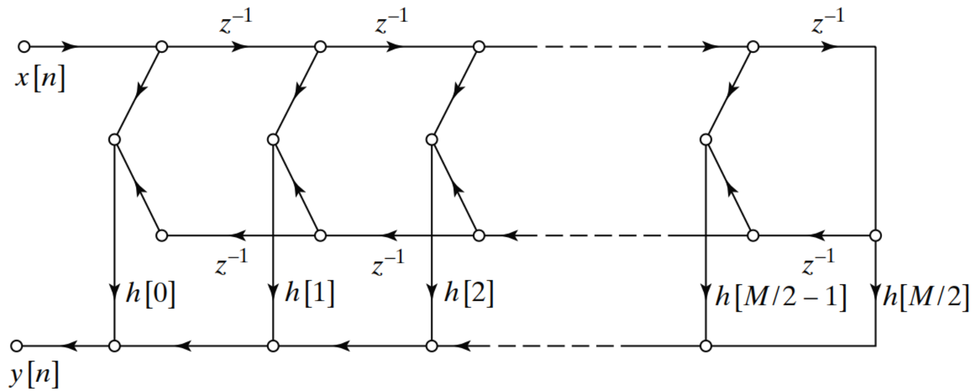

$$y[n] = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} h[k](x[n-k] - x[n-M+k])$$

$\frac{M+1}{2}$ multiplicadores

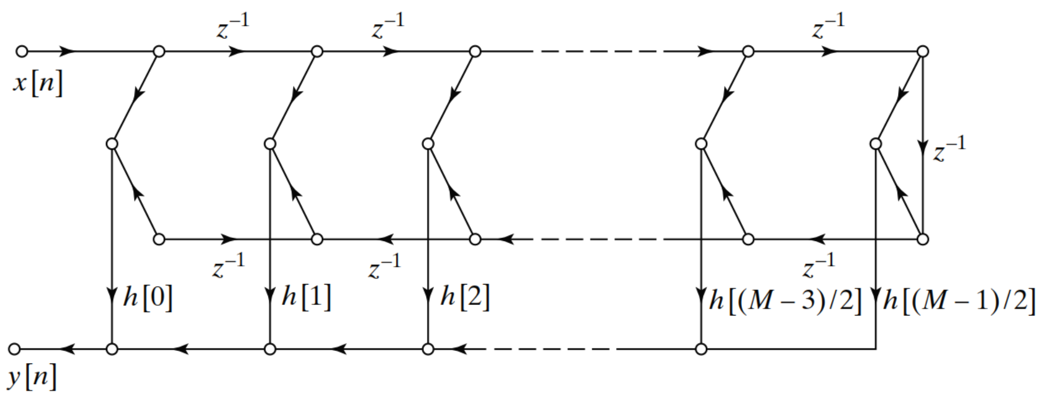
# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sistemas FIR tipo I:




- Para sistemas FIR tipo II:



# Estruturas para Sistemas FIR de Fase Linear



- Para sistemas FIR tipo III e IV: