PROCESSAMENTO DE SINAIS

Transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

- Revisar os conceitos relativos a transformada z.
- Apresentar a relação que há entre a transformada z e a transformada de Fourier de tempo discreto.
- Representar sequências por meio da transformada z.

Transformada z

Reposta em frequencia de um sistema pode ser achada pela transformada de fourier da resposta ao impulso do mesmo sistema

- Para sistemas de tempo discreto, a transformada z é o equivalente a $\underbrace{\text{transformada de Laplace}}$ para sistemas de tempo contínuo.

dominio dos complexos
||
dominio de Laplace

dominio do tempo para o dominio da frequencia (se susbstituir s por j*omega)
ou
real para imaginario

- Aborda uma classe maior de seqüência quando comparada com a transformada de Fourier.
  - Para alguns sinais, a transformada de Fourier não é convergente.
  - Todavia, para estes sinais, a transformada z pode ser convergente.

Transformada z

- A transformada z é definida como

z = variavel complexa

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}} \qquad (1)$$

- Utilizando a notação de operador transformada z tem-se:

Z{} -> transformada Z

$$Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z)$$

onde z é uma variável complexa contínua.

Transformada z

- A transformada z definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Bilateral

- A transformada z definida como

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Unilateral

- Para sequências $\overbrace{\text{causais,}}^{n >= 0}$ as duas definições são iguais.

Transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A transformada de Fourier de tempo discreto foi definida como

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- A transformada z foi definida como

supondo que a transforma
z resultou em: x(z) = 1 / (z+1)

a transforma de fourier seria
apenas substituir z por e^(jomega),
mas isso só funciona se a FT
existir para x[n]

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

z pode assumir qualquer
valor complexo

- Fazendo $z = e^{j\omega}$ a transformada z torna-se a transformada de Fourier de tempo discreto.

Transformada z

- Se $X(e^{j\omega})$ existir, então, basta substituir $z = e^{j\omega}$ em $X(z)$.

z = |z| * e ^(j * argumento_de_z)

- Isso corresponde a satisfazer $|z| = 1$.

- Ou seja, a variável complexa z está restrita a um círculo de raio unitário centrado na origem.

- Quando $|z| = 1$, a transformada z corresponde a transformada de Fourier de tempo discreto.

Transformada z

- Vamos expressar z na forma polar. Isto é,

$$z = re^{j\omega}$$

- Com isso,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

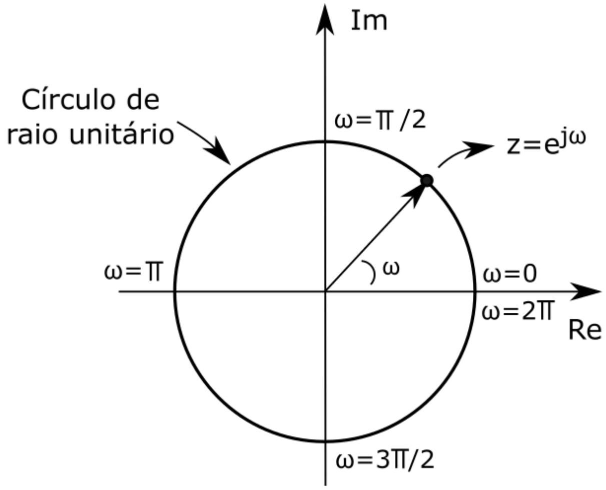
$$\boxed{X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\omega n}}$$

- A transformada z pode ser considerada com a transformada de Fourier de tempo discreto de $x[n]r^{-n}$.
- Se $r = 1$, a equação se reduz a transformada de Fourier de $x[n]$.

Transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- No plano z, o contorno correspondente a $|z| = 1$ é um círculo com raio unitário.



$$z = 1 \qquad (\omega = 0)$$

$$z = j \qquad (\omega = \pi/2)$$

$$z = -1 \qquad (\omega = \pi)$$

$$z = -j \qquad (\omega = 3\pi/2)$$

- A transformada z avaliada sobre o círculo de raio unitário corresponde a transformada de Fourier de tempo discreto.
- A avaliação de $X(z)$ sobre o círculo de raio unitário, fornece a transformada de Fourier para $0 \leq \omega < 2\pi$.
- Fica evidente a periodicidade da transformada de Fourier.

Convergência da transformada z versus a da transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Dependendo da sequência, a transformada de Fourier pode não ser convergente.

- Dependendo do valor de z, a transformada z pode não ser convergente.

- Dada uma sequência, o conjunto de valores de z para os quais a transformada z converge é denominado região de convergência (**ROC**).

r não pode ser qualquer numero, para uns r o valor de z impedira a transformada de convergir

Convergência da transformada z versus a da transformada de Fourier

- A transformada de Fourier é convergente se a sequência for absolutamente somável.
- Considerando

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\omega n}$$

para que a série seja convergente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

- Esta equação mostra o porquê da transformada z convergir para sequências que não tem transformada de Fourier.
- Isto se deve a multiplicação de $x[n]$ por r^{-n}.

Exemplo

- A sequência $x[n] = u[n]$ não é absolutamente somável.
  - Transformada de Fourier não converge.

- Todavia, $r^{-n}u[n]$ é absolutamente somável se $r > 1$.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |u[n]r^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u[n]}{r^n} \right| < \infty$$

Convergência da transformada z versus a da transformada de Fourier

- A convergência da transformada z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

depende apenas de $|z|$, uma vez que para $|X(z)| < \infty$, temos que

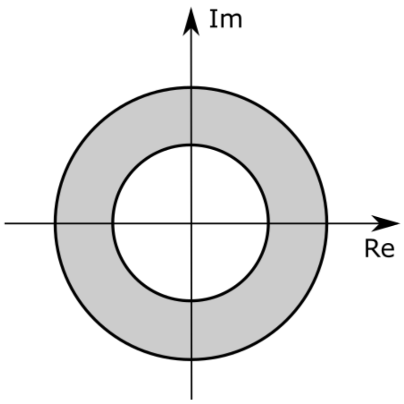
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]||z|^{-n} < \infty$$

- Se para algum $z = z_1 \in ROC$, então todos os valores de z no círculo definido por $|z| = |z_1|$ também estarão na ROC.

Convergência da transformada z versus a da transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como consequência a ROC terá a forma de um disco no plano z centrado na origem.
- Sua fronteira externa será um círculo (ou se estenderá ao infinito) e sua fronteira interna também será um círculo (ou incluirá a origem).



- Se a ROC incluir o círculo unitário, isso implica na convergência da transformada z para $|z| = 1$. Logo, a transformada de Fourier da sequência converge. Caso contrário, a transformada de Fourier não convergirá.

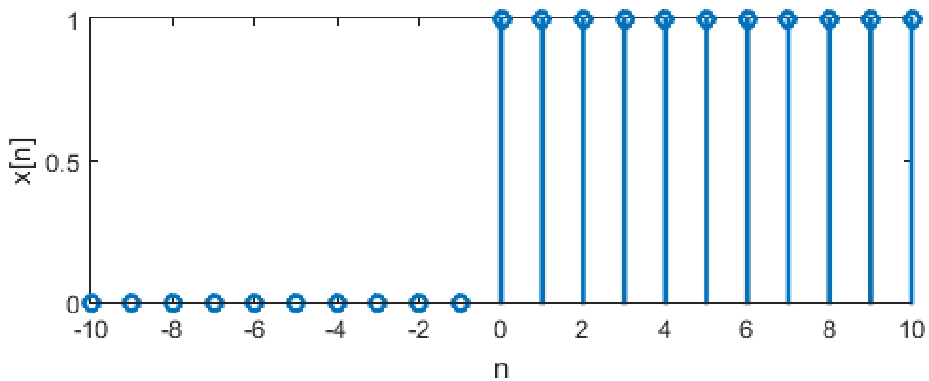
Exemplo 1

sequencia direita

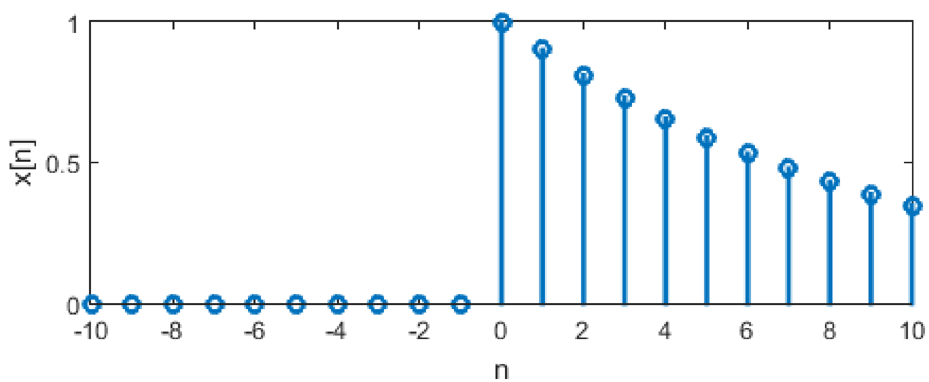
- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = a^n u[n]$$

vai gerar a transformada z
para sistema causal



a=1



a=0,9

Exemplo 1

- Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n\, u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\, z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Para que a série seja convergente, necessita-se que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

Exemplo 1

Portanto, a ROC é tal que $|az^{-1}| < 1$ ou

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

Assim, dentro da ROC,

Da P.G.:

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}$$
$$a = 1$$
$$q = az^{-1}$$

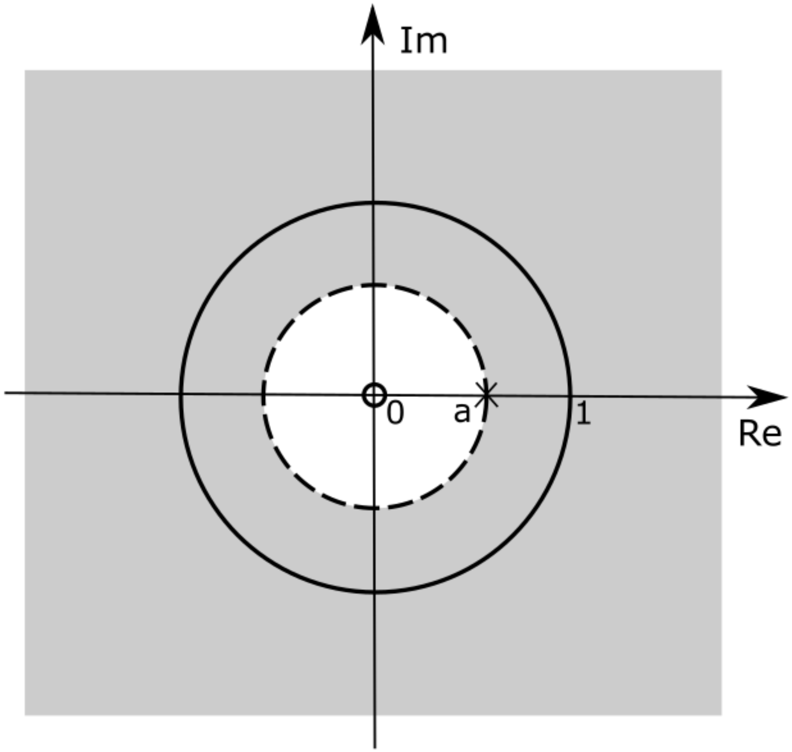
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|}$$

Definição de transforma Z para um sinal causal

Exemplo 1

A ROC é:



Zeros: 0

Polos: a

Exemplo 1

- OBS. 1:
  - A transformada de Fourier convergirá se $|a| < 1$.
  - Para $a = 1$, $x[n]$ é a sequência degrau unitário.
  - Sua transformada z é

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, \qquad |z| > 1$$

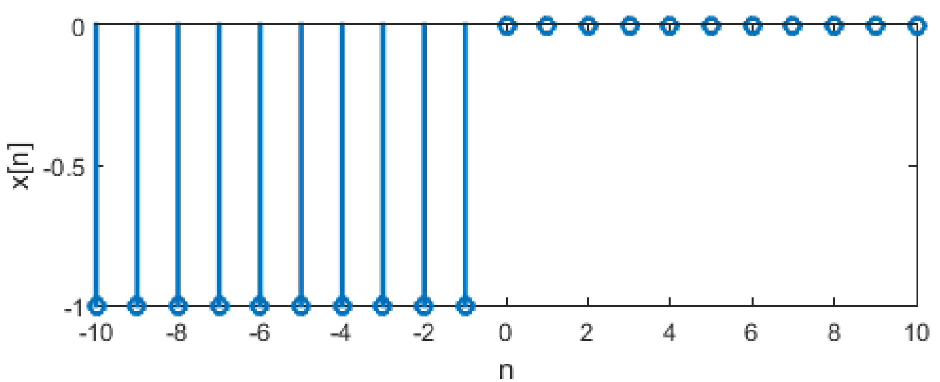
- OBS. 2:
  - Para $|a| > 1$, a ROC não inclui o círculo unitário.
  - Logo, para esses valores de a a transformada de Fourier não convergirá.
  - Nesse caso, $a^n u[n]$ é uma exponencial crescente.

Exemplo 2

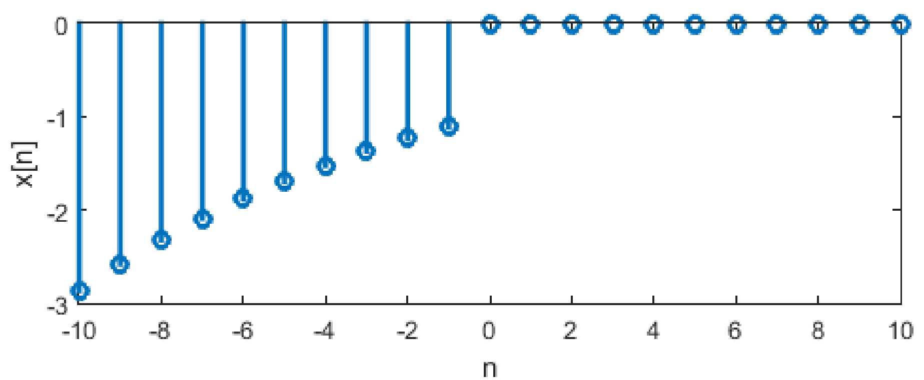
sequencia esquerda

- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$



a=1



a=0,9

Exemplo 2

- Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -a^n u[-n-1]z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1]\, z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n$$

Se $|a^{-1}z| < 1$ ou, equivalentemente, $|z| < |a|$, o somatório será convergente e:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z}$$

Exemplo 2

Manipulando, tem-se

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1 - a^{-1}z - 1}{1 - a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z}$$

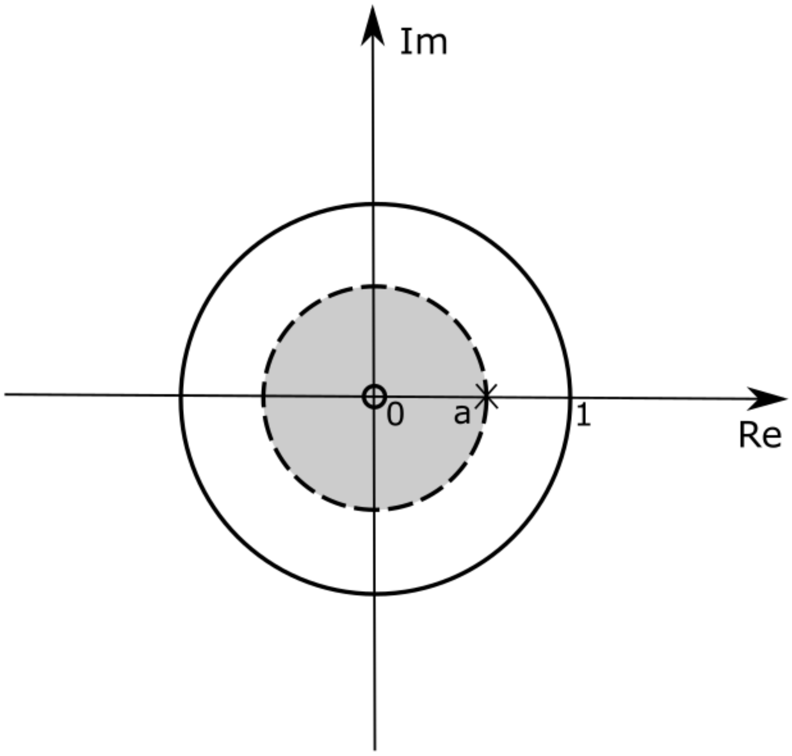
$$X(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} \frac{[-(a^{-1}z)^{-1}]}{[-(a^{-1}z)^{-1}]} = \frac{1}{1 - (a^{-1}z)^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z - a}, \qquad |z| < |a|}$$

unica coisa que ira mudar de uma sequencia a direita, é que na direita |z| > |a|

Exemplo 2

A ROC é:



Zeros: 0

Polos: a

Exemplo 2

- Para $|a| < 1$ a sequência $-a^n u[-n-1]$ cresce exponencialmente a medida que $n \to -\infty$.

- Portanto, a transformada de Fourier não existe.

- Comparando as transformadas z dos exemplos 1 e 2, observa-se que têm expressões algébricas, polos e zeros idênticos.

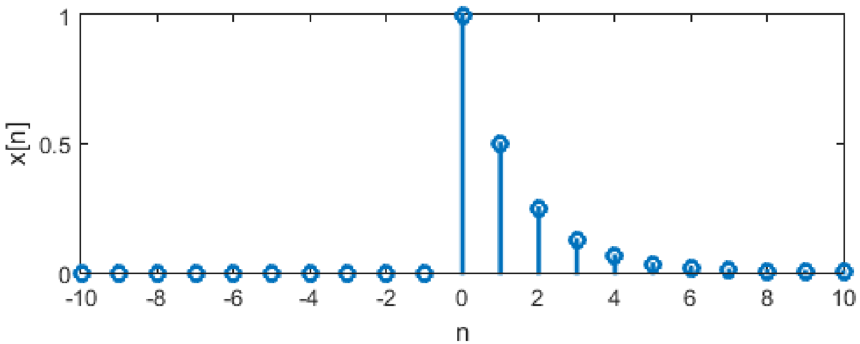
- As transformadas z diferem na ROC.

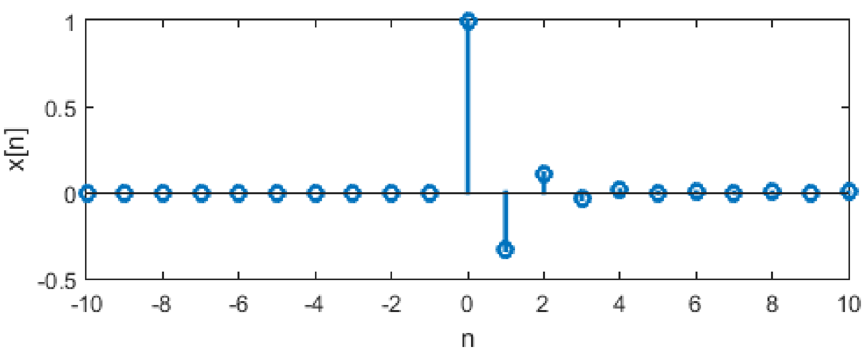
- Assim, deve-se especificar a expressão algébrica e a ROC da transformada z de uma sequência.

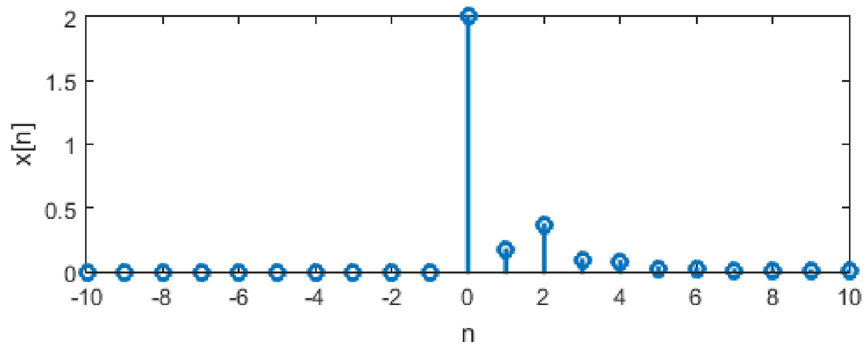
Exemplo 3

- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$







Exemplo 3

- Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\, z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\, z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n$$

Para os somatórios serem convergentes:

intersecção vai ser a ROC

$$\left|\frac{1}{2} z^{-1}\right| < 1 \text{ e } \left|\left(-\frac{1}{3}\right) z^{-1}\right| < 1 \quad \text{ou} \quad \underbrace{|z| > \frac{1}{2} \text{ e } |z| > \frac{1}{3}}$$

Exemplo 3

Para que ambas as condições sejam satisfeitas:

$$|z| > \frac{1}{2}$$

Assim,

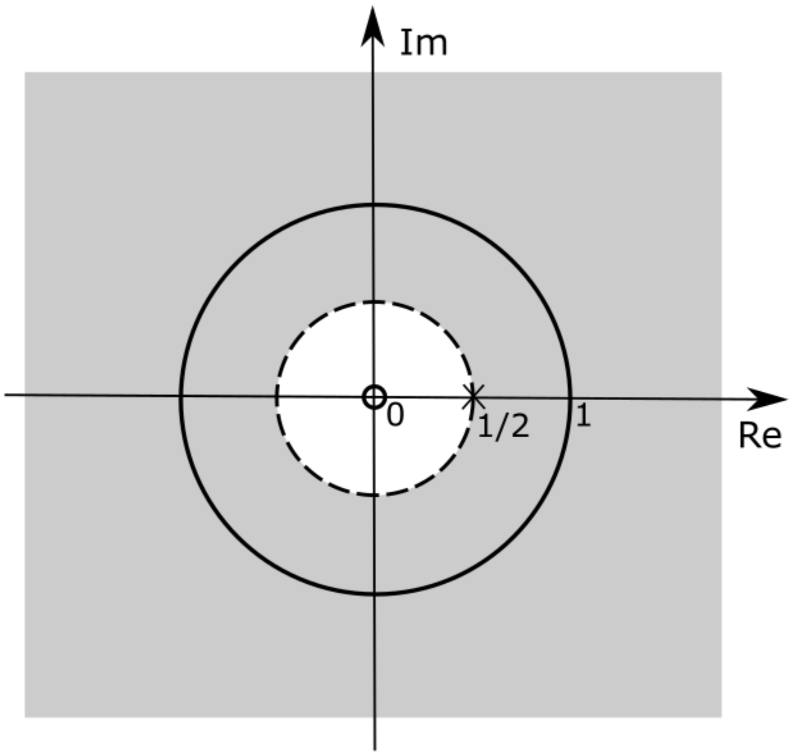
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

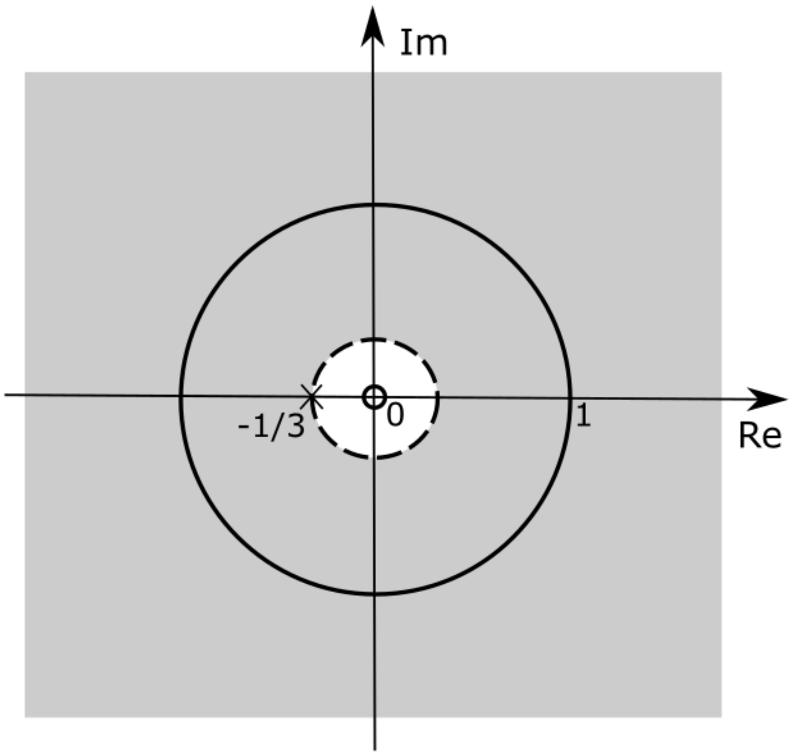
$$X(z) = \frac{2\left(1 - \frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$

Exemplo 3

nunca vai existir polos DENTRO da ROC

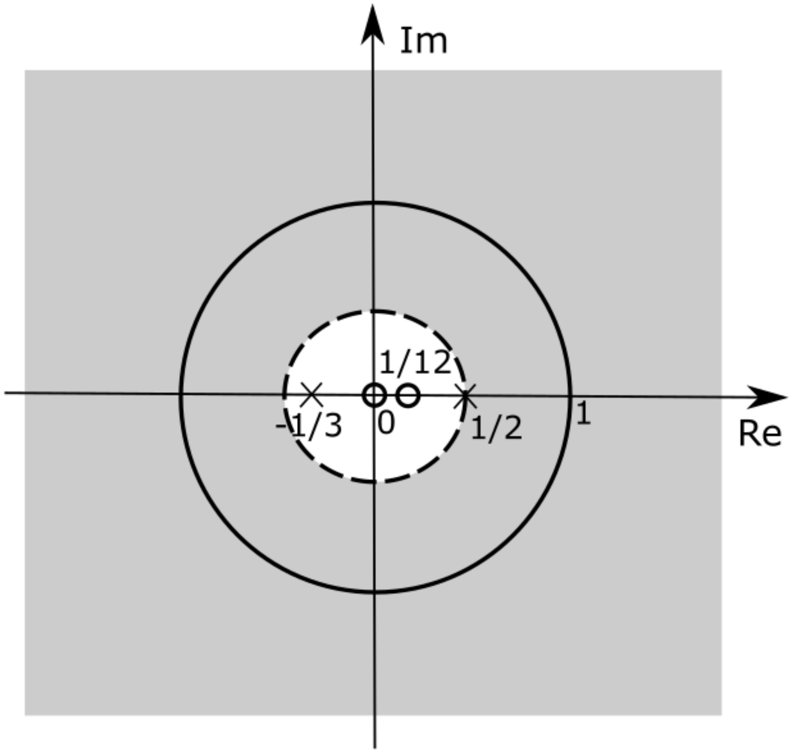
Região de convergência:





Exemplo 3

Região de convergência:



Exemplo 4

- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

utilizando os resultados gerais obtidos nos exemplos 1 e 2.

Exemplo 4

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Solução:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

Consequentemente

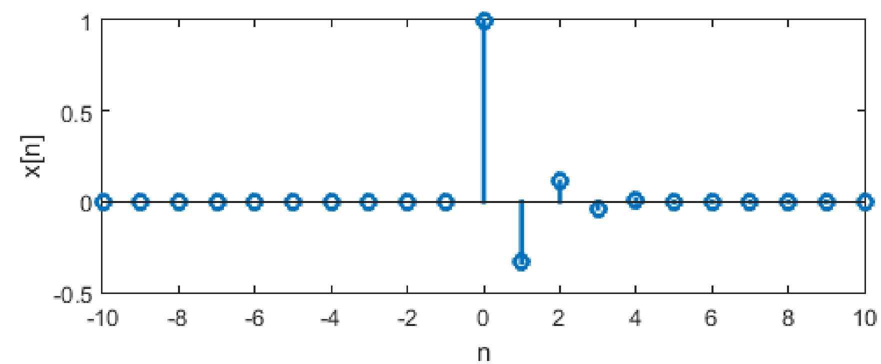
$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

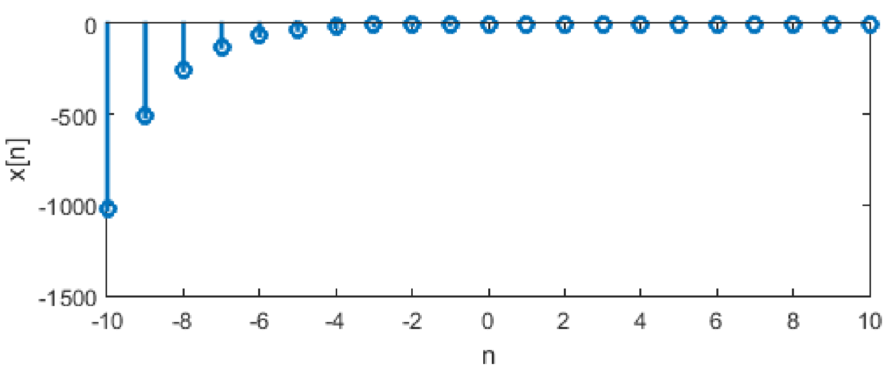
Exemplo 5

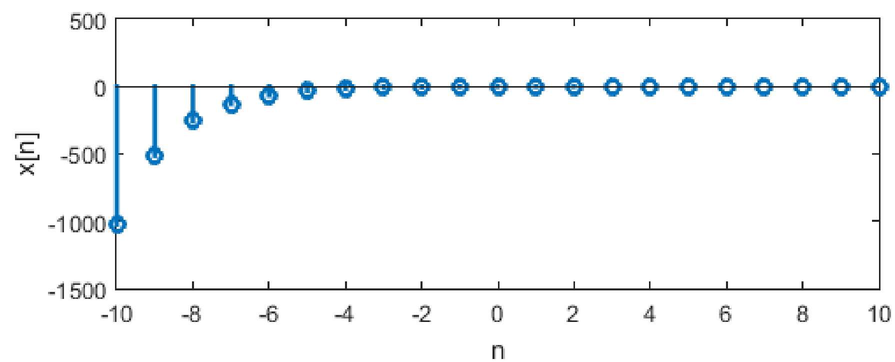
- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

utilizando os resultados gerais obtidos nos exemplos 1 e 2.







Exemplo 5

- Solução:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

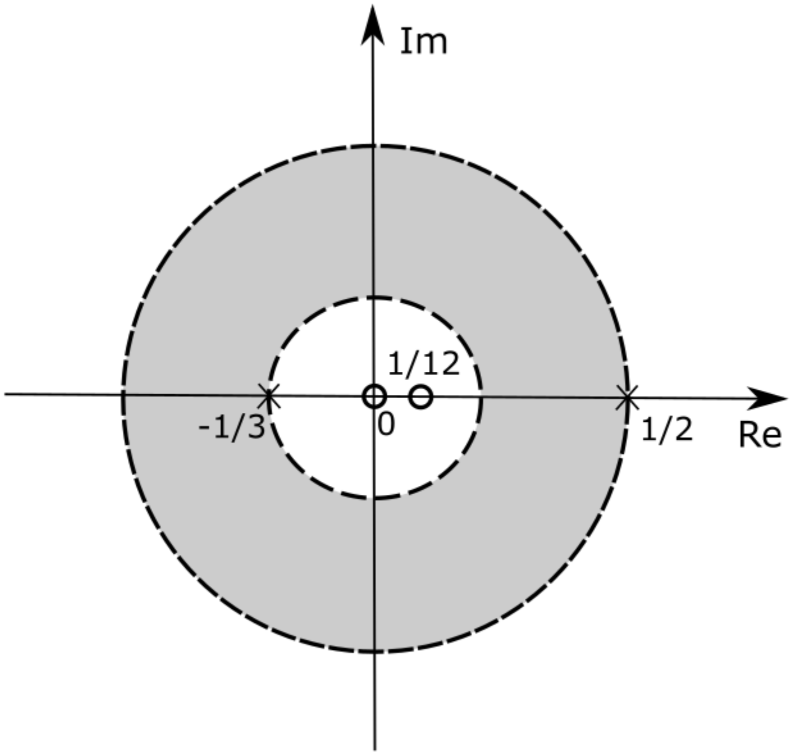
Consequentemente

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

Exemplo 5

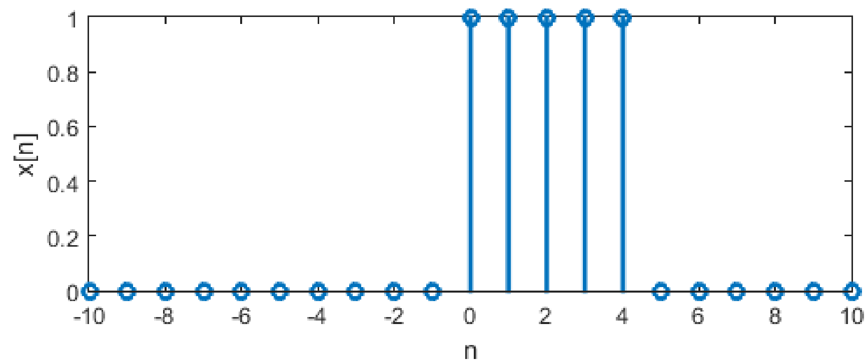
Região de convergência:



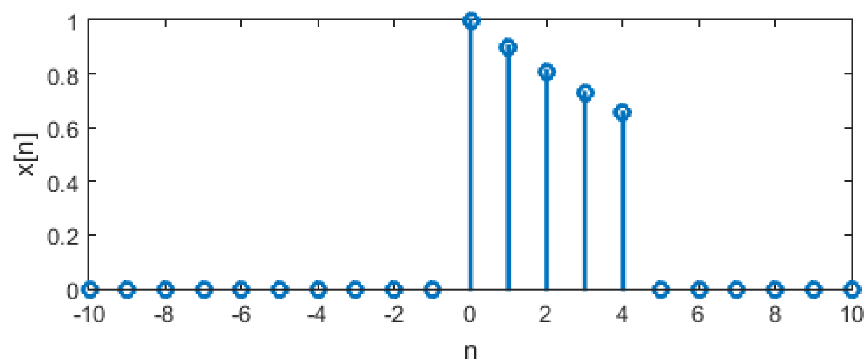
Exemplo 6

- Calcular a transformada z da sequência

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



a=1, N=4



a=0,9, N=4

Exemplo 6

- Solução:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n$$

Usando:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \alpha^k = \frac{\alpha^{N_1} - \alpha^{N_2+1}}{1-\alpha}, \qquad N_2 \geq N_1$$

$$X(z) = \frac{(az^{-1})^0 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}} = \frac{1 - \frac{a^N}{z^N}}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{\frac{z^N - a^N}{z^N}}{\frac{z-a}{z}} = \frac{\frac{z^N - a^N}{z^{N-1}}}{z - a}$$

Exemplo 6

Logo,

$$X(z) = \frac{z^N - a^N}{z^{N-1}(z-a)}$$

A ROC é obtida a partir da condição

$$\sum_{n=0}^{N-1} |az^{-1}|^n < \infty$$

Assim, para que a soma seja finita,

$$|a| < \infty \quad \text{e} \quad z \neq 0$$

Exemplo 6

As raízes do numerador são:

$$z^N = a^N$$

$$z_k = \sqrt[N]{a^N}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

Por z ser uma variável complexa, tem-se:

$$z_k = ae^{j\left(2\pi k/_{N}\right)}, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Para $N = 16$, $a \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a \leq 1$

$$z_k = ae^{j\left(\pi k/_{8}\right)}, \qquad k = 0, 1, \dots, 15$$

Exemplo 6

O zero em $k = 0$ cancela o polo em $z = a$. Logo, a ROC e os polos e zeros restantes são

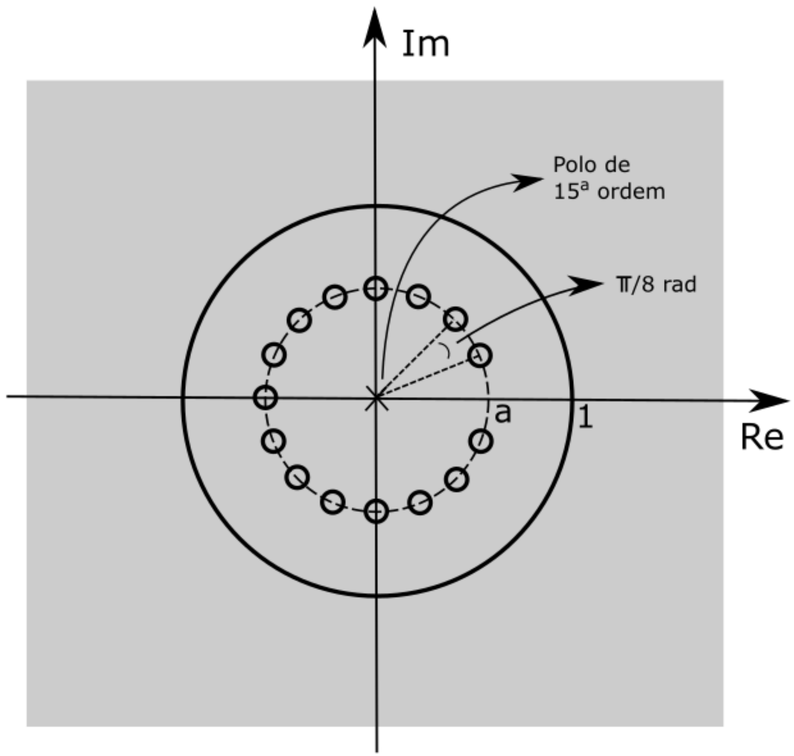


Tabela de pares de transformadas z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Tabela similar a tabela de transformada de Laplace

TABLE 3.1 SOME COMMON z-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
9. $[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
10. $[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2\cos\omega_0]z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
11. $[r^n\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1-[r\cos\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
12. $[r^n\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1-[2r\cos\omega_0]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$

Propriedades da ROC

Reler os exemplos para visualizar os exemplos

- Propriedade 1
  - A ROC é um disco ou anel no plano z e centrada na origem, isto é, $0 \leq r_D < |z| < r_E \leq \infty$.

- Propriedade 2
  - A transformada de Fourier de $x[n]$ é absolutamente convergente se e somente se a ROC da transformada z de $x[n]$ incluir o círculo de raio unitário.

- Propriedade 3
  - A ROC não pode conter polos.

Propriedades da ROC

- Propriedade 4
  - Se $x[n]$ é uma sequência a direita, isto é, uma sequência que é zero para $n < N_1 < \infty$, a ROC se estende para fora do polo mais externo e finito de $x(z)$.

- Propriedade 5
  - Se $x[n]$ é uma sequência a esquerda, isto é, uma sequência que é diferente de zero para $-\infty < N_2 < n$, a ROC se estende para dentro do polo mais interno de $x(z)$ até (e possivelmente) $z = 0$.

Propriedades da ROC

- Propriedade 6
  - Uma sequência de dois lados é uma sequência de duração infinita. Sua ROC consiste de um anel no plano z, limitado no interior e exterior por um polo e consistentemente com a propriedade 3, não contém nenhum polo.

- Propriedade 7
  - Se $x[n]$ é uma sequência de duração finita, isto é, a sequência é zero exceto num intervalo finito $-\infty < N_1 \leq n \leq N_2 < \infty$, então a ROC é o plano z inteiro, exceto, possivelmente, $z = 0$ ou $z = \infty$.

Propriedades da transformada z

- Na apresentação das propriedades:
  - $X(z)$ denota a transformada z de $x[n]$;
  - R_x denota a ROC de $X(z)$.

- Assim,

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z), \qquad ROC = R_x$$
$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), \qquad ROC = R_{x_1}$$
$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z), \qquad ROC = R_{x_2}$$

Propriedades da transformada z

- **1) Linearidade**

$$a x_1[n] + b x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} a X_1(z) + b X_2(z), \qquad ROC \text{ contém } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

- Exemplo

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$Z\{x[n]\} = Z\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \right\} + Z\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}}$$

ROC:

$$|z| > \frac{1}{2} \;\text{ e }\; |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2} \cap |z| > \frac{1}{3} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

Propriedades da transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- **2) Deslocamento no tempo**

$$x[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-n_0}X(z), \qquad ROC = R_x$$

(Exceto pela possível adição ou exclusão de $z = 0$ ou $z = \infty$).

- Exemplo

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x[n-1] = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]$$

$$X(z) = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}$$

$$Z\{x[n-1]\} = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1]\right\} = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}$$

Propriedades da transformada z

- **3) Multiplicação por uma sequência exponencial** → COMPLEXA

$$z_0^n x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\underbrace{\left(z/z_0\right)}_{\text{Substituir z por z0}}, \qquad ROC = |z_0| R_x$$

- Exemplo

Dado $u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$ calcule a transformada z de

$$x[n] = r^n cos(\omega_0 n) u[n]$$

Da relação de Euler

$$cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

Propriedades da transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Logo,

$$x[n] = \frac{1}{2}\underbrace{\left(re^{j\omega_0}\right)}_{z_0}^{n} u[n] + \frac{1}{2}\underbrace{\left(re^{-j\omega_0}\right)}_{z_0}^{n} u[n]$$

Considerando os pares

$$\mathrm{u}[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

$$z_0^n x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left({}^{z}/_{z_0}\right), \qquad ROC = |z_0| R_x$$

$$\frac{1}{2}\left(re^{j\omega_0}\right)^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{re^{j\omega_0}}\right)^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}, \qquad |z| > r$$

$$\frac{1}{2}\left(re^{-j\omega_0}\right)^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}}, \qquad |z| > r$$

Propriedades da transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Da linearidade,

$$X(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - re^{-j\omega_0}z^{-1}}, \qquad |z| > r$$

$$X(z) = \frac{(1 - rcos(\omega_0)z^{-1})}{1 - 2rcos(\omega_0)z^{-1} + r^2z^{-2}}, \qquad |z| > r$$

Propriedades da transformada z

- **4) Diferenciação de $X(z)$**

$$nx[n] \overset{z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}, \qquad ROC = R_x$$

- Exemplo

Calcule a transformada z de $x[n] = na^n u[n] = n(a^n u[n])$

$$a^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

Logo,

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - az^{-1}}\right), \qquad |z| > |a|$$

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \qquad |z| > |a|$$

Propriedades da transformada z

- **5) Reversão no tempo**

$$x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right), \qquad ROC = \frac{1}{R_x}$$

⇨ Leia-se: a ROC é invertida.

- Exemplo

Calcule a transformada z de $x[n] = a^{-n}u[-n]$

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

Logo,

$$X(z) = \frac{1}{1 - a\left(\frac{1}{z}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - az}, \qquad |z| < |a^{-1}|$$

$$X(z) = \frac{-a^{-1}z^{-1}}{1 - a^{-1}z^{-1}}, \qquad |z| < |a^{-1}|$$

Propriedades da transformada z

- **6) Convolução de sequências**

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z), \qquad ROC \text{ contém } R_{x_1} \cap R_{x_2}$$

- Exemplo

Calcule a transformada z de $x_1[n] * x_2[n]$ sendo que $x_1[n] = a^n u[n]$ e $x_2[n] = u[n]$.

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

$$u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

Logo, se $|a| < 1$

$$Y(z) = Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{z^2}{(z - a)(z - 1)},$$

$$|z| > 1$$

Propriedades da transformada z

- **7) Teorema do valor inicial**

Se $x[n] = 0$ para $n < 0$ então $x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$.

Propriedades da transformada z

Prof. Dr. Rafael Cardoso

TABLE 3.2 SOME z-TRANSFORM PROPERTIES

Section Reference	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R_x
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
3.4.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\| R_x$
3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
	$\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
3.4.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
3.4.8	Initial-value theorem:		
	$x[n] = 0, \quad n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	

Transformada z inversa

- **1) Por inspeção**

Calcule a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

Do par 5 da tabela 3.1:

$$a^n u[n] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

Logo,

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Transformada z inversa

Calcule a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| < \frac{1}{2}$$

Do par 6 da tabela 3.1:

$$-a^n u[-n-1] \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| < |a|$$

Logo,

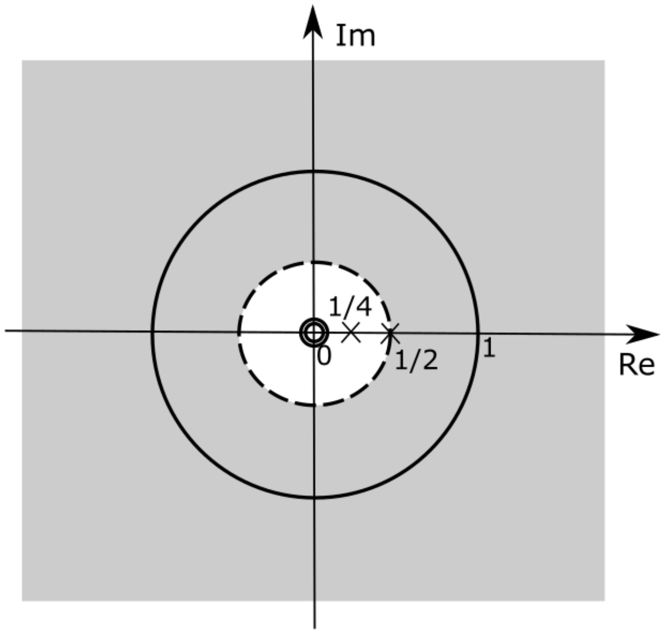
$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right\} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

Transformada z inversa

- **2) Expansão em frações parciais**

Calcule a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$



Da propriedade 4 da ROC, conclui-se que a sequência é a direita.

Transformada z inversa

A transformada $X(z)$ pode ser expressa por

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Com isso,

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z)\bigg|_{z=\frac{1}{4}} = \cancel{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\frac{1}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

$$A_1 = -1$$

Transformada z inversa

Similarmente,

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$A_2 = 2$$

Assim,

$$X(z) = \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Transformada z inversa

Como a ROC é $|z| > \frac{1}{2}$, que é o polo mais externo, da propriedade 4 da ROC, a sequência $x[n]$ é a direita.

Do linearidade e do par 5 da tabela 3.1:

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

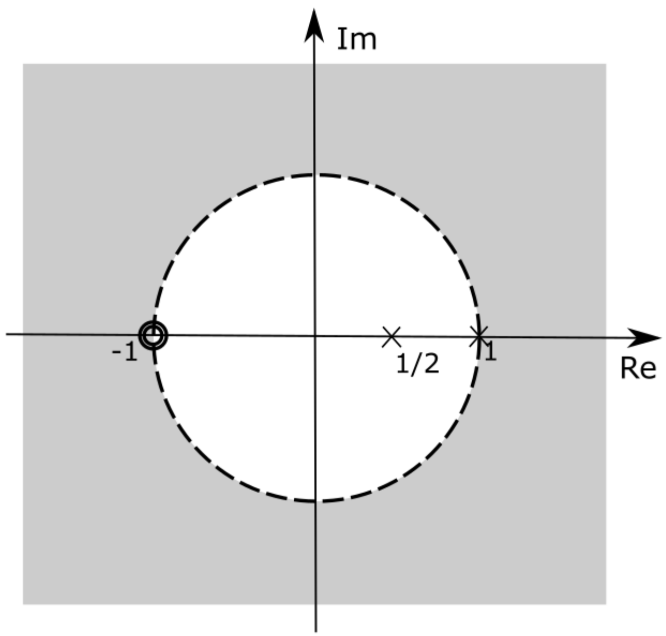
$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Transformada z inversa

- Exemplo 2

Calcule a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}, \qquad |z| > 1$$



Da propriedade 4 da ROC, conclui-se que a sequência é a direita.

Transformada z inversa

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Como o numerador tem o mesmo grau do denominador, efetua-se a divisão dos polinômios. Assim,

$$
\begin{array}{r|l}
z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2}
-z^{-2} + 3z^{-1} - 2 & 2 \\ \cline{1-1}
5z^{-1} - 1 &
\end{array}
$$

Logo,

$$X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

e

$$X(z) = 2 + \frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})}$$

Transformada z inversa

Com isso,

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\frac{(1+z^{-1})^2}{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}(1 - z^{-1})}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = \frac{(1+z^{-1})^2}{(1-z^{-1})}\bigg|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)} = \frac{3^2}{-1} = -9$$

$$A_1 = -9$$

Transformada z inversa

Similarmente,

$$A_2 = (1 - z^{-1})X(z)\Big|_{z=1} = \cancel{(1 - z^{-1})}\frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\cancel{(1 - z^{-1})}}\Bigg|_{z=1}$$

$$A_2 = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=1} = \frac{(1 + (1)^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}(1)^{-1}\right)} = \frac{2^2}{\frac{1}{2}} = 8$$

$$A_2 = 8$$

Assim,

$$X(z) = 2 - \frac{9}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{8}{(1 - z^{-1})}$$

Transformada z inversa

Como a ROC é $|z| > 1$, que é o polo mais externo, da propriedade 4 da ROC, a sequência $x[n]$ é a direita.

Da linearidade e dos pares 1, 2 e 5 da tabela 3.1:

$$\delta[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} 1, \qquad \text{todo } z$$

$$u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8u[n]$$

Transformada z inversa

- **Exemplo 3**

Calcule $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ sendo que $x_1[n] = a^n u[n]$ e $x_2[n] = u[n]$.

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

$$u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

Como mostrado previamente, se $|a| < 1$, então

$$Y(z) = Z\{x_1[n] * x_2[n]\} = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})}, \qquad |z| > 1$$

A sequência $y[n]$ pode ser obtida através da transformada z inversa.

Transformada z inversa

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$y[n] = Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})}\right\}, \qquad |z| > 1$$

$$\frac{1}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{A_1}{(1-az^{-1})} + \frac{A_2}{(1-z^{-1})}$$

$$A_1 = (1-az^{-1})X(z)\Big|_{z=a} = \cancel{(1-az^{-1})}\frac{1}{\cancel{(1-az^{-1})}(1-z^{-1})}\Bigg|_{z=a}$$

$$A_1 = \frac{1}{(1-z^{-1})}\Bigg|_{z=a} = \frac{1}{(1-(a)^{-1})} = \frac{a}{a-1}$$

$$A_1 = \frac{a}{a-1}$$

Transformada z inversa

$$A_2 = (1 - z^{-1})X(z)\Big|_{z=1} = \cancel{(1 - z^{-1})}\frac{1}{(1 - az^{-1})\cancel{(1 - z^{-1})}}\Bigg|_{z=1}$$

$$A_2 = \frac{1}{(1 - az^{-1})}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{(1 - a(1)^{-1})} = \frac{1}{1 - a}$$

$$A_2 = \frac{1}{1 - a}$$

Logo,

$$X(z) = \frac{a}{a - 1}\frac{1}{(1 - az^{-1})} + \frac{1}{1 - a}\frac{1}{(1 - z^{-1})}$$

Transformada z inversa

Assim,

$$y[n] = Z^{-1}\left\{\frac{a}{a-1}\frac{1}{(1-az^{-1})}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{1}{1-a}\frac{1}{(1-z^{-1})}\right\}$$

Dos pares 2 e 5 da tabela 3.1:

$$u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}}, \qquad |z| > |a|$$

$$y[n] = \frac{a}{a-1}a^n u[n] + \frac{1}{1-a}u[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{1-a}u[n] - \frac{a}{1-a}a^n u[n]$$

$$y[n] = \frac{1}{1-a}\left(u[n] - a^{n+1}u[n]\right)$$

Transformada z inversa

- **3) Expansão em série de potências**

Calcule a transformada z inversa de

$$X(z) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$$

A transformada $X(z)$ pode ser expressa como

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

Transformada z inversa

Por inspeção, usando o par 4 da tabela 3.1

$$\delta[n-m] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-m}, \qquad \text{todo } z \text{ exceto } 0 \text{ (se } m > 0) \text{ ou } \infty \text{ (se } m < 0)$$

tem-se

$$X(z) = z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = -2 \\ -\frac{1}{2}, & n = -1 \\ -1, & n = 0 \\ \frac{1}{2}, & n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo,

$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$