PROCESSAMENTO DE SINAIS

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

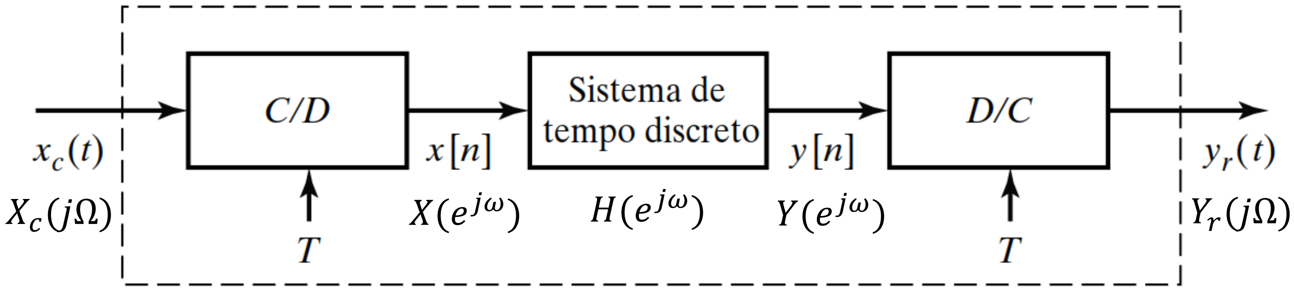
Objetivos

- Descrever com se dá o processamento de sinais de tempo contínuo via processamento em tempo discreto.
- Verificar as relações existentes no domínio da frequência.
- Apresentar o princípio da invariância ao impulso.

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere o sistema de processamento em tempo discreto de sinais de tempo contínuo:



- Do conversor C/D:

$$x[n] = x_c(nT) \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

- Do conversor D/C:

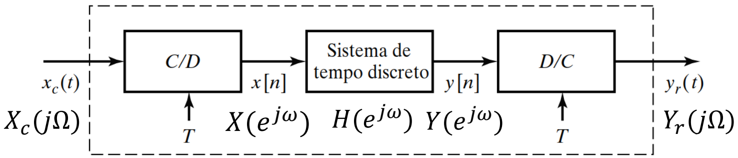
$$y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \frac{sen\left[\pi(t-nT)/_T\right]}{\pi(t-nT)/_T} \quad \Rightarrow \quad Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y\left(e^{j\Omega T}\right)$$

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} TY\left(e^{j\Omega T}\right), & |\Omega| < \pi/_T \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considerando que o sistema de tempo discreto seja LIT:



$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

- Como $Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)Y(e^{j\Omega T})$ e considerando $\omega = \Omega T$:

$$Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)H(e^{j\Omega T})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

- Se o sinal for de banda limitada, isto é, $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq {}^{\pi}/_{T}$:

$$Y_r(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T})X_c(j\Omega), & |\Omega| < {}^{\pi}/_{T} \\ 0, & |\Omega| < {}^{\pi}/_{T} \end{cases}$$

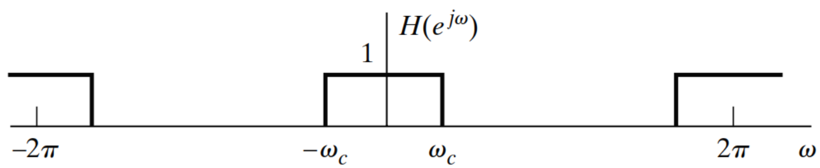
- Se a taxa de amostragem é superior a taxa de Nyquist:

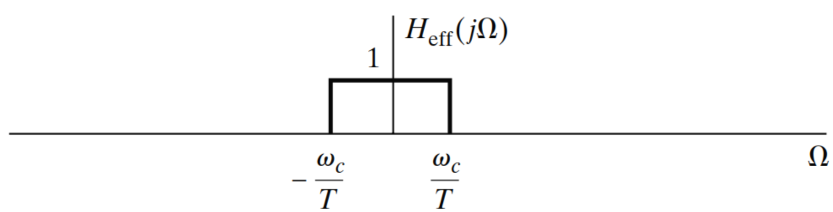
$$\boxed{Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega)X_c(j\Omega)}$$ onde $$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}), & |\Omega| < {}^{\pi}/_{T} \\ 0, & |\Omega| < {}^{\pi}/_{T} \end{cases}$$

Filtro Passa-Baixas

- Considere um sistema de tempo discreto com a seguinte resposta em frequência:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



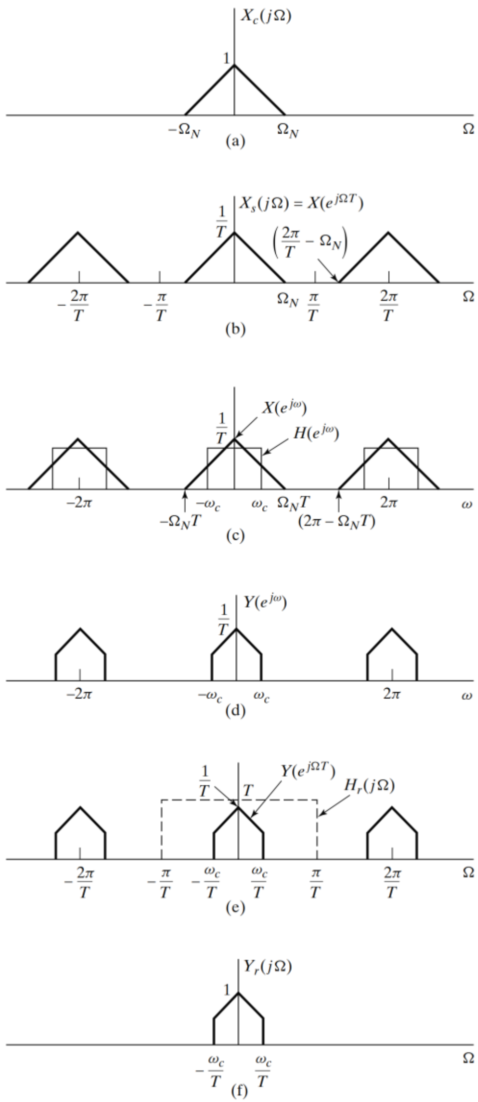


Frequência de corte:

$$\Omega_c = {}^{\omega_c}/_{T}$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\Omega T}\right), & |\Omega T| < \omega_c \;\; ou \;\; |\Omega| < {}^{\omega_c}/_{T} \\ 0, & |\Omega T| > \omega_c \;\; ou \;\; |\Omega| > {}^{\omega_c}/_{T} \end{cases}$$

Filtro Passa-Baixas



Espectro do sinal de entrada

Espectro do sinal de entrada amostrado

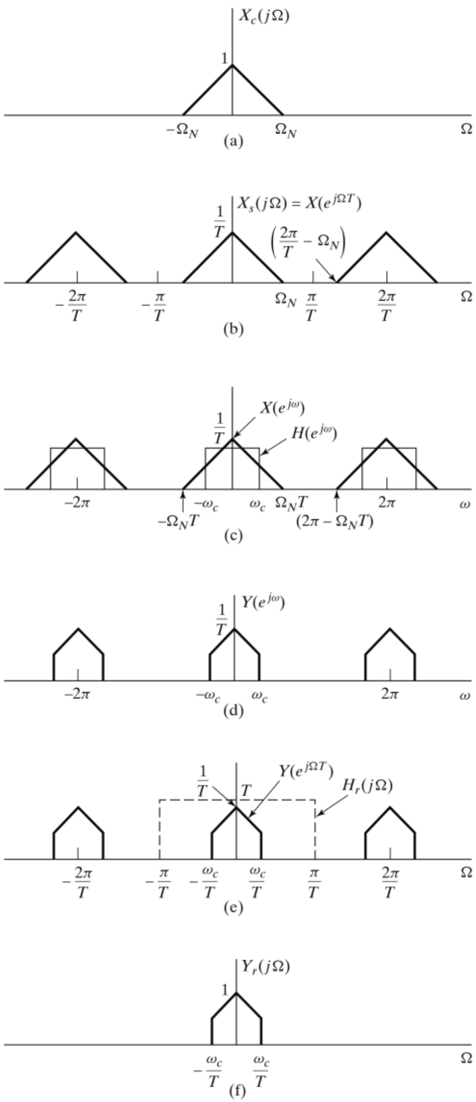
Espectro da sequência de amostras e do filtro PB

Espectro da saída do filtro PB

Espectro da saída do filtro PB e do filtro de reconstrução

Espectro do sinal filtrado reconstruído

Filtro Passa-Baixas

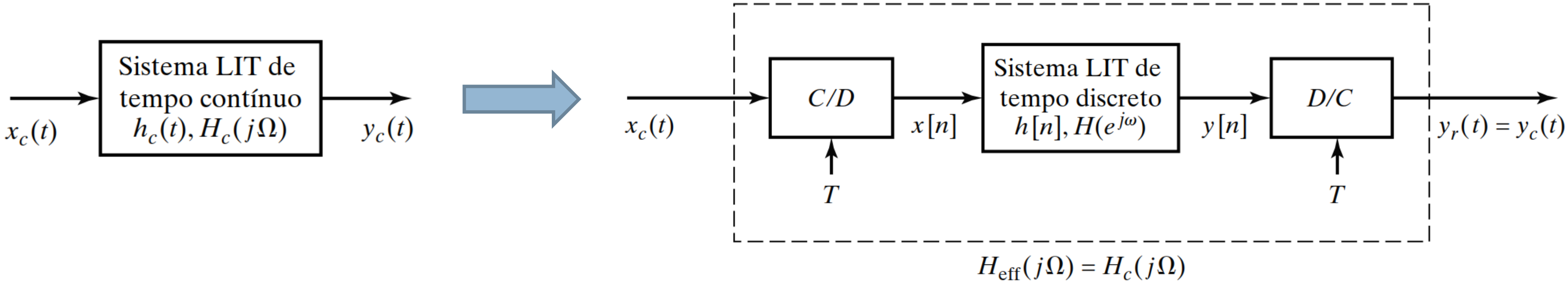


- O filtro de tempo discreto com frequência de corte ω_c tem o efeito de um filtro de tempo contínuo com frequência de corte $\Omega_c = {}^{\omega_c}/_{T}$.

- Considerando um filtro de tempo discreto fixo, variando-se T pode-se implementar um outro filtro com frequência de corte variável.

Invariância ao Impulso

- Considere a implementação de um sistema de tempo contínuo através de processamento em tempo discreto conforme as figuras abaixo:



- Se $H_c(j\Omega)$ for de banda limitada e T seja escolhido de forma que:

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \tag{1}$$

então, para que $H_{eff}(j\Omega) = H_c(j\Omega)$, $H\left(e^{j\omega}\right)$ deve ser

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi}$$

Invariância ao Impulso

- Para o sistema descrito, vamos relacionar as respostas ao impulso $h_c(t)$ e $h[n]$ para que $H(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right)$.

- Suponha que:

$$h[n] = h_c(nT) \qquad (2)$$

- Da teoria de amostragem:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

e se (1) for satisfeita: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi$

- Modificando a equação (2) para contabilizar o fator de escala T:

$$\underbrace{h[n] = T h_c(nT)}_{\text{Versão de tempo discreta invariante ao impulso.}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = H_c\left(\frac{j\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi$$

Exemplo 1: Invariância ao Impulso Aplicada a um Filtro Passa-Baixas

- Deseja-se obter um filtro passa-baixas ideal de tempo discreto com frequência de corte $\omega_c < \pi$.

- Considerando um filtro passa-baixas ideal de tempo contínuo com frequência de corte $\Omega_c = {}^{\omega_c}/_T < {}^{\pi}/_T$ tem-se:

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| < \Omega_c \end{cases} \Longrightarrow h_c(t) = \frac{sen(\Omega_c t)}{\pi t}$$

- Definindo a resposta ao impulso do filtro de tempo discreto como:

$$h_c[n] = Th_c(nT) = T\frac{sen(\Omega_c nT)}{\pi nT} = \frac{sen(\omega_c n)}{\pi n} \Longrightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

onde $\omega_c = \Omega_c T$.

Exemplo 2: Invariância ao Impulso Aplicada a um Sistema de Tempo Contínuo com Função de Transferência Racional

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Obtenha um sistema de tempo discreto a partir do princípio da invariância ao impulso para o sistema:

$$H_c(s) = \frac{A}{s - s_0} \quad \Rightarrow \quad h_c(t) = Ae^{s_0 t}u(t)$$

- Aplicando o princípio da invariância ao impulso:

$$h_c[n] = Th_c(nT) = Ae^{s_0 Tn}u[n] \quad \Rightarrow \quad H(\mathrm{z}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T}z^{-1}}$$

- Substituindo $z = e^{j\omega}$ fornece a resposta em frequência (transformada de Fourier) do sistema, isto é,

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T}e^{-j\omega}}$$