PROCESSAMENTO DE SINAIS

Definições Básicas

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco
Departamento de Elétrica

Sinais e Sistemas

- Sinal
  - Aplicado a algo que contenha informação.
  - É definido como uma função de uma ou mais variáveis independentes que contenham informação sobre o estado ou comportamento de um sistema físico.

$$s_1(t) = 5t$$

$$s_2(t) = 10t^2$$

$$s(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2$$

Sinais e Sistemas

- Sinal real:

$$V(t) = 180sen(2\pi 60t)$$

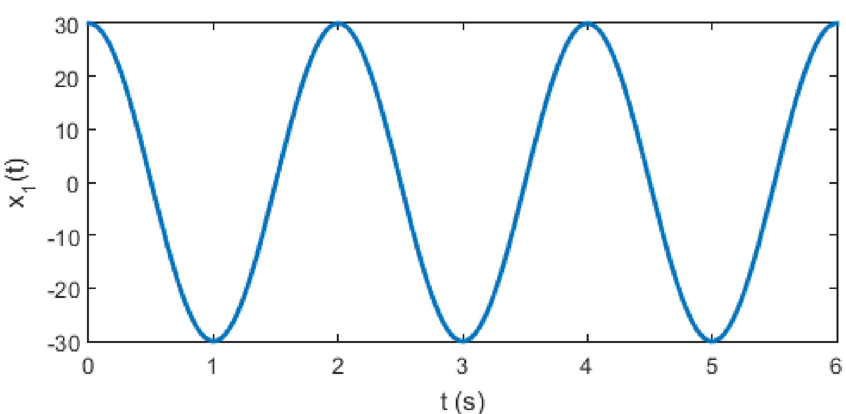
- Sinal complexo:

$$S(t) = Acos(2\pi 60t) + jAsen(2\pi 60t)$$

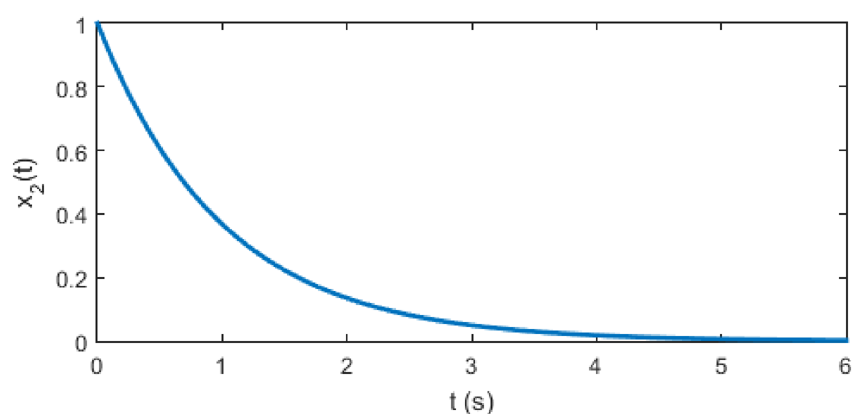
Sinais e Sistemas

- Sinais de tempo contínuo:
  - São definidos ao longo do tempo contínuo.
  - São representados por variáveis independentes contínuas.
  - Sinais analógicos.

$$x_1(t) = 30\cos(\pi t)$$



$$x_2(t) = e^{-t}$$



Sinais e Sistemas

- Sinais de tempo discreto:
  - São sinais definidos somente em certos instantes de tempo bem definidos.
  - Representados por variáveis independentes discretas.

$$x(t_n) = e^{-|t_n|}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

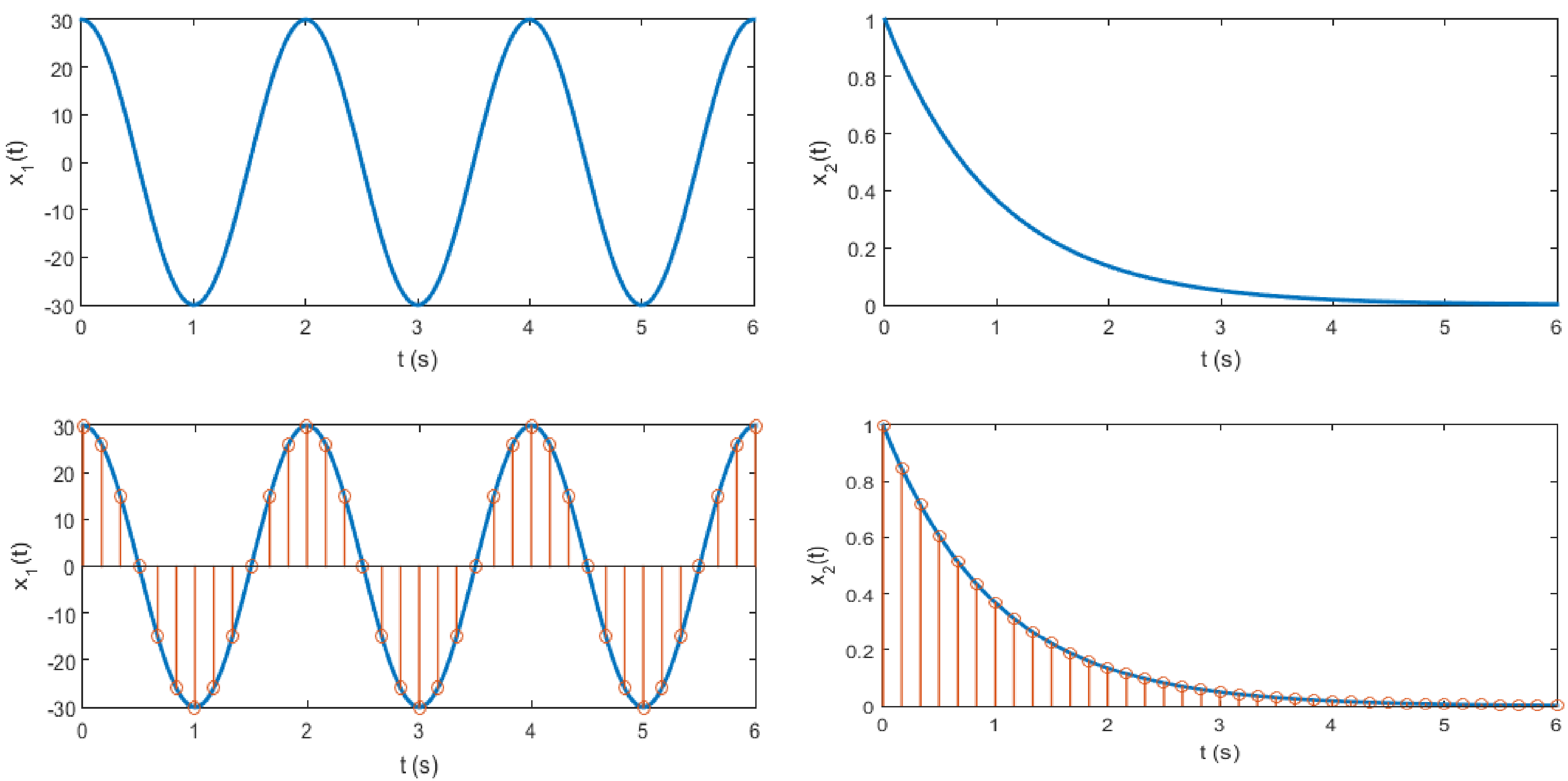
  - Se utilizarmos a variável independente inteira n como índice dos instantes de tempo discreto, tem-se uma sequência de números.

$$x_1[n] = 30\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

Sinais e Sistemas

$$x_1(t) = 30\cos(\pi t)$$

$$x_2(t) = e^{-t}$$

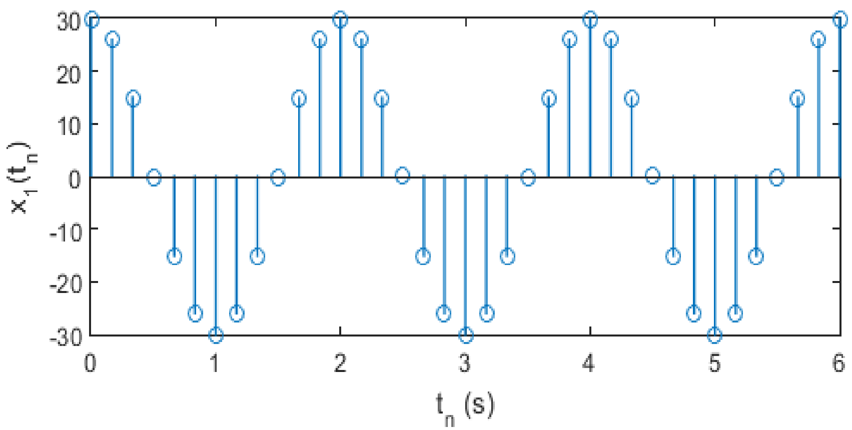


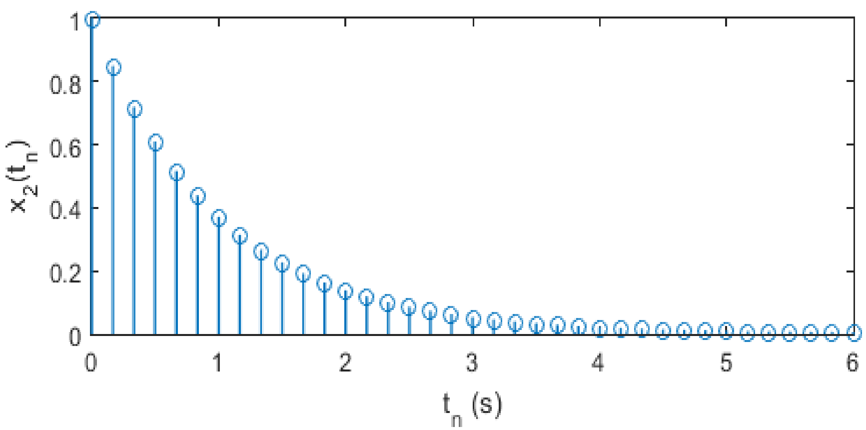
Sinais e Sistemas

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sinais de tempo discreto:

$$x_1(t_n) = 30\cos(\pi t_n) \qquad x_2(t_n) = e^{-t_n}$$



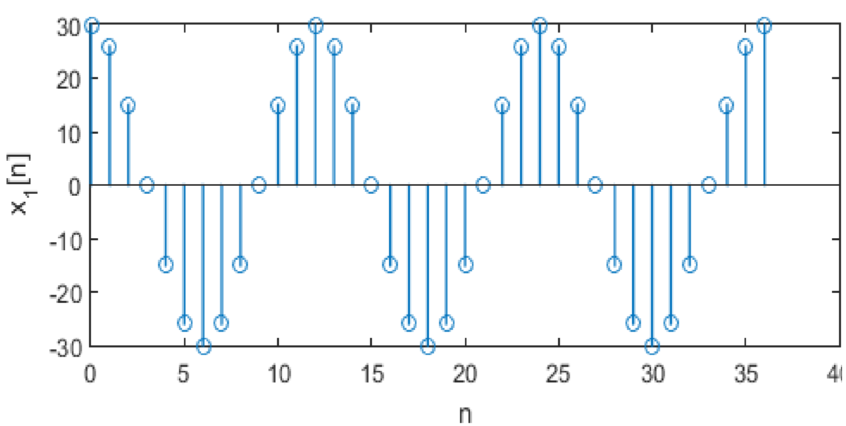


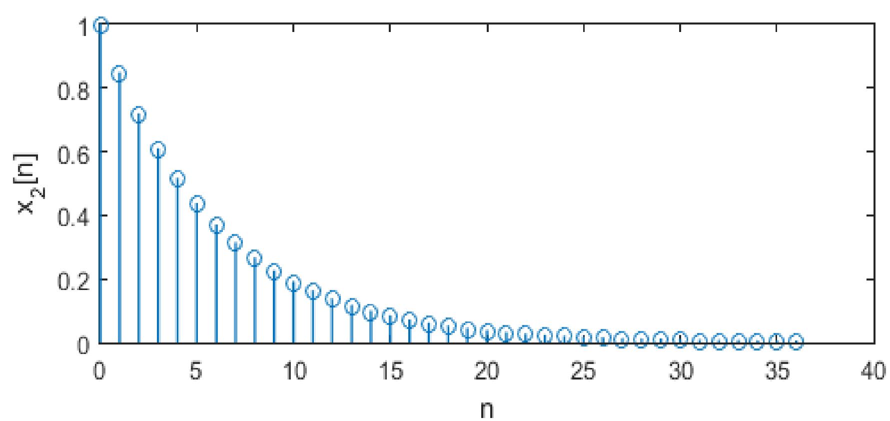
Sinais e Sistemas

- Sinais de tempo discreto (sequência):
  - Selecionando amostras do sinal contínuo em cada t_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, espaçadas de $T = {}^{1}/_{6}\, s$, tem-se que $t_n = Tn$.

$$x_1(t_n) = 30\cos(\pi t_n) \qquad\qquad x_2(t_n) = e^{-t_n}$$

$$x_1[n] = 30\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) \qquad\qquad x_2[n] = e^{-\frac{1}{6}n}$$

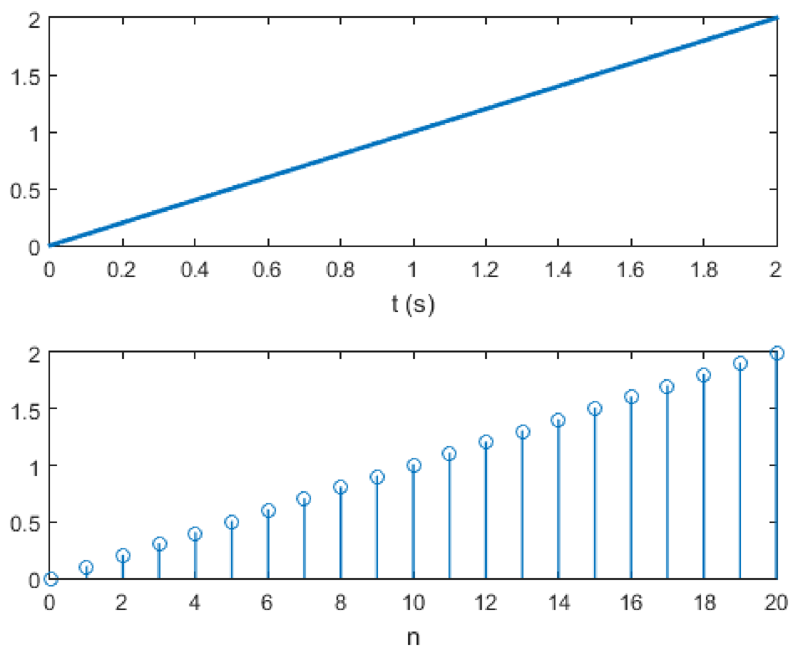




Sinais e Sistemas

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sinais com valores contínuos:
  - O sinal pode assumir qualquer valor dentro de um intervalo finito ou infinito.

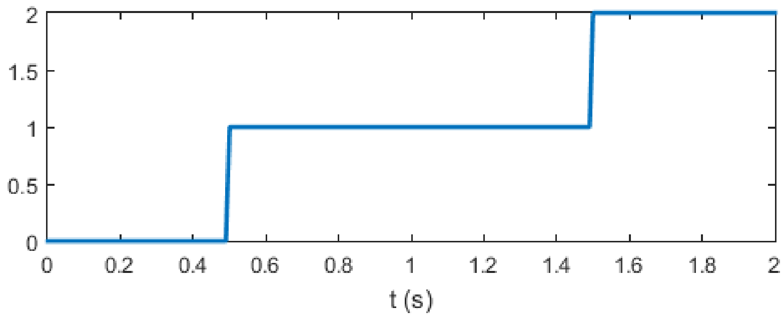


Tempo contínuo, amplitude contínua.

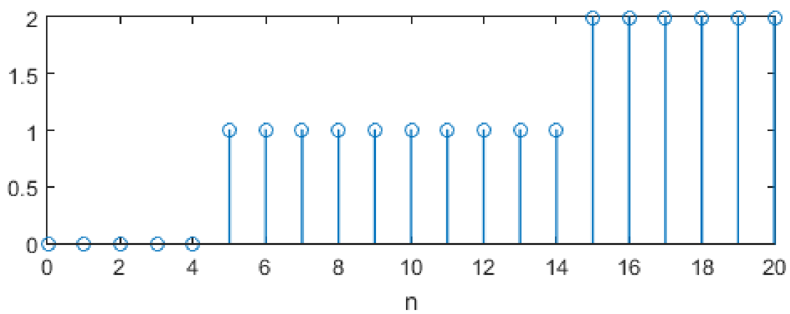
Tempo discreto, amplitude contínua.

Sinais e Sistemas

- Sinais com valores discretos:
  - O sinal pode assumir valores dentro de um conjunto finito de possíveis valores.
  - Arredondamentos, truncamento, quantização.



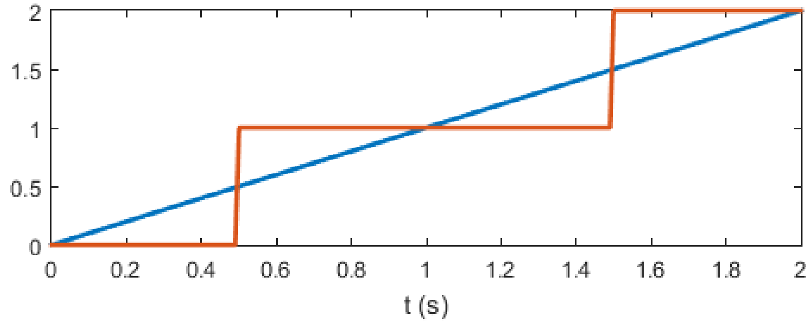
Tempo contínuo, amplitude discreta.



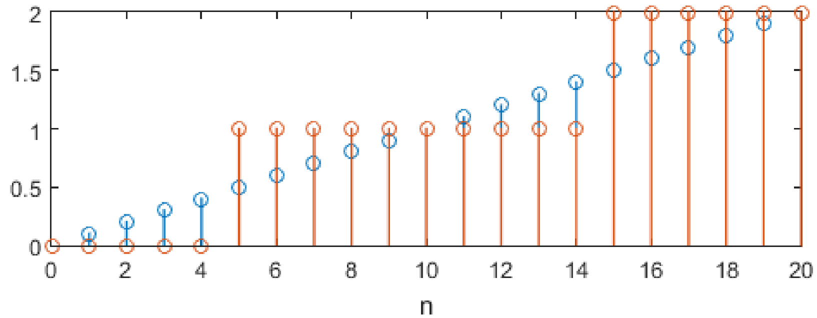
Tempo discreto, amplitude discreta.

Sinais e Sistemas

- Comparação dos tipos de sinais:



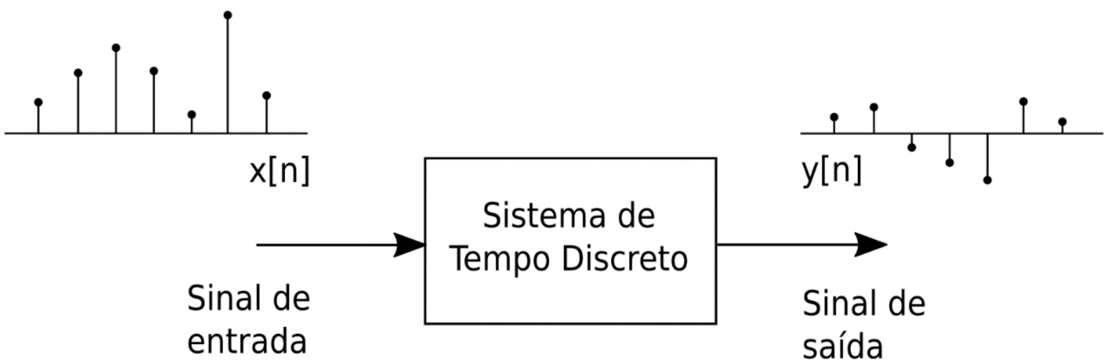
Tempo contínuo.
Amplitude contínua x discreta.



Tempo discreto.
Amplitude contínua x discreta.

Sinais e Sistemas

- Sistema:
  - É algo responsável por manipular um ou mais sinais de entrada, de acordo com uma regra bem definida, para produzir sinais de saída.
  - Seguem as mesmas classificações dos sinais.
  - Ex: amplificador, equalizador, etc.



Sinais em Tempo-Discreto

- Sinais em tempo-discreto são representados por sequências.
- Uma sequência de números x, na qual o n-ésimo número da sequência é denotada por $x[n]$, é escrita como:

$$x = \{x[n]\}, \qquad -\infty < n < \infty$$

onde $n \in \mathbb{Z}$.

$$x[n] = \{1, 5, -4, 5.8, 12, \dots\}$$

Indica $n = 0$.

Sinais em Tempo-Discreto

- Uma sequência pode ter valor real ou complexo.
  - Sequência real:

$$x[n] = \{1, 5, -4, 5.8, 12, \dots\}$$

  - Sequência complexa:

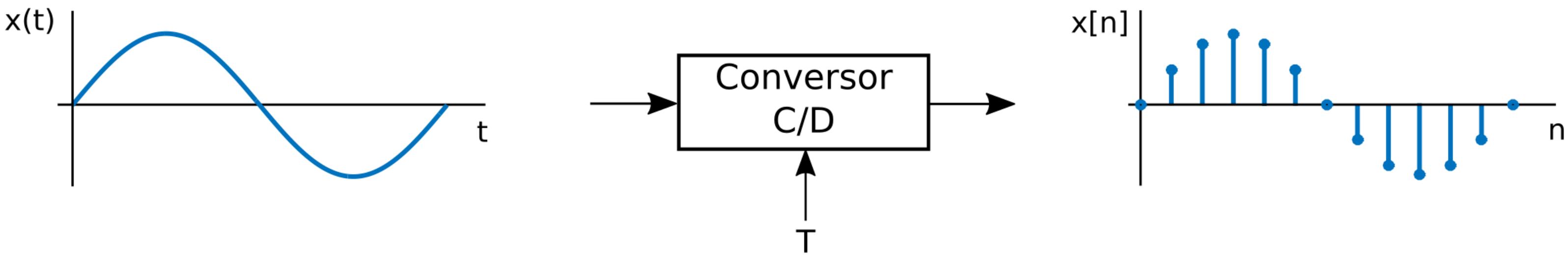
$$x[n] = \{1 + j2, 5, 4 - j3\}$$

$$x[n] = x_{Re}[n] + jx_{Im}[n]$$
$$x[0] = x_{Re}[0] + jx_{Im}[0]$$

$$x_{Re}[0] = 1 \quad \text{e} \quad x_{Im}[0] = 2$$

Sinais em Tempo-Discreto

- Usualmente, as sequências advém da amostragem periódica de um sinal analógico (tempo contínuo).



- O valor numérico do n-ésimo número na sequência é o valor do sinal analógico $x(t)$, no instante nT:

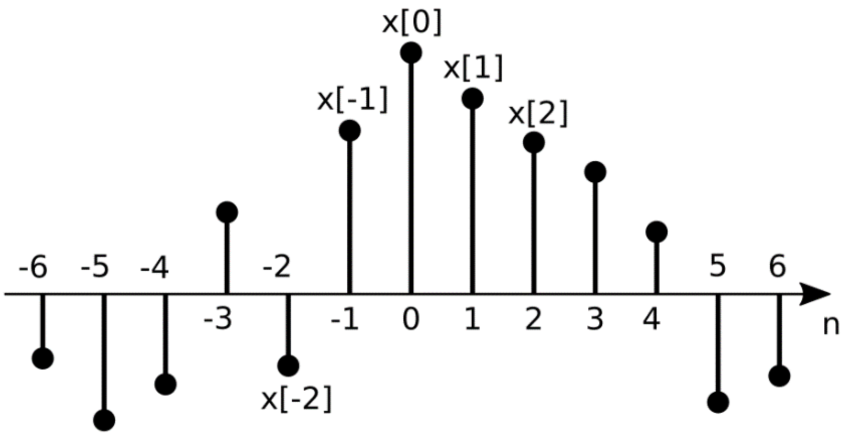
$$x[n] = x(nT), \qquad -\infty < n < \infty$$

T → Período de amostragem (s).

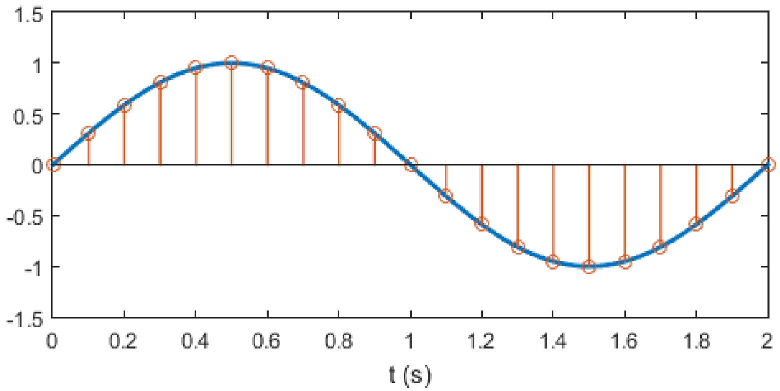
$f_s = \frac{1}{T}$ → Frequência de amostragem (Hz) / Taxa de amostragem (Amostras/s).

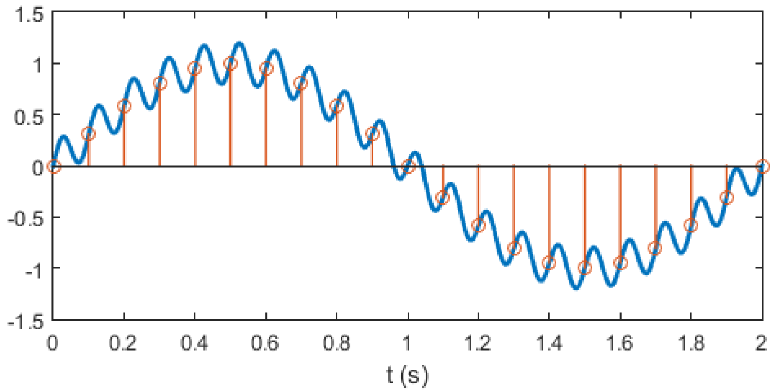
Sinais em Tempo-Discreto

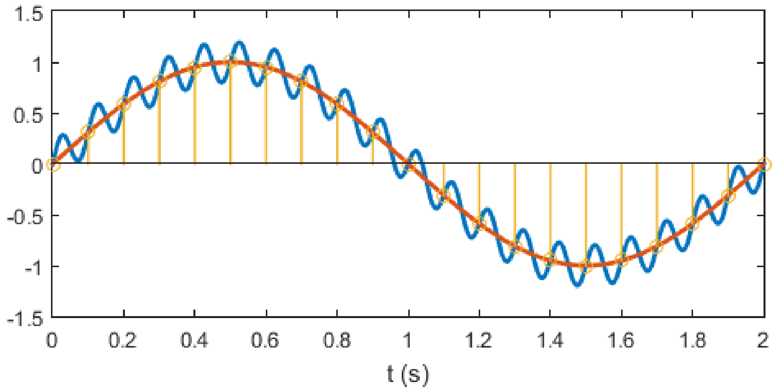
- O valor de $x[n]$ é definido apenas para valores **inteiros** de n.
- O valor de $x[n]$ é **indefinido** para valores não inteiros de n.
- Não se pode dizer que o sinal $x[n] = 0$ para valores não inteiros de n.



Sinais em Tempo-Discreto







Operações Básicas com Sequências

- Considere as sequências:

$$x_1[n] = \{2, 5, 3\} \text{ e } x_2[n] = \{1, 5, 8\}$$

- Soma:

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] = \{3, 10, 11\}$$

- Produto:

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] = \{2, 25, 24\}$$

- Multiplicação por escalar:

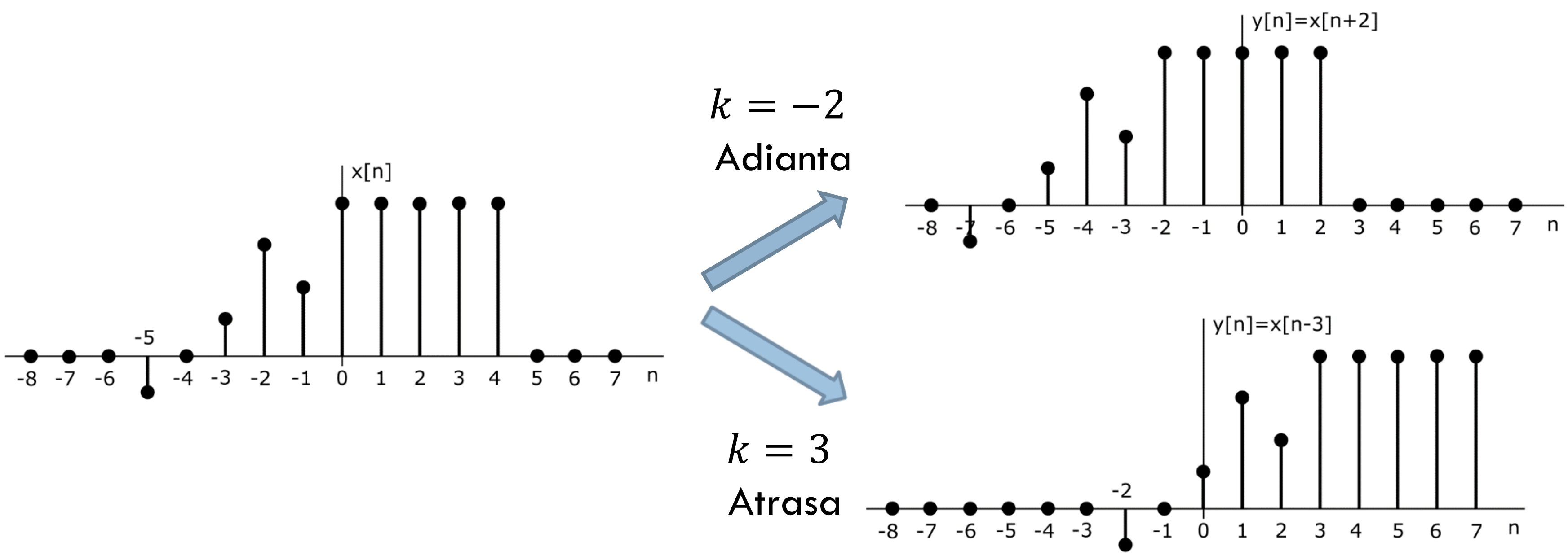
$$\alpha = 2$$

$$y[n] = \alpha \cdot x_1\,[n] = 2 \cdot \{2, 5, 3\} = \{4, 10, 6\}$$

Operações Básicas com Sequências

- Uma sequência $y[n]$ é dita deslocada em relação à sequência $x[n]$ se:

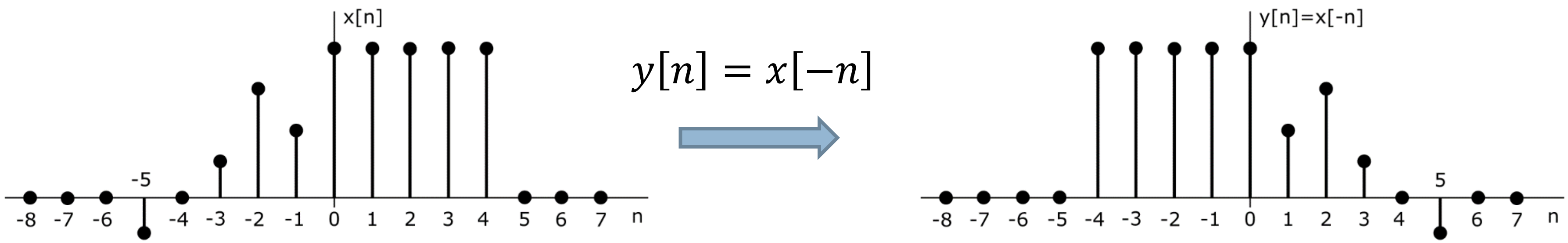
$$y[n] = x[n-k], \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Operações Básicas com Sequências

- Uma sequência $y[n]$ é dita refletida em relação à origem se:

$$y[n] = x[-n]$$



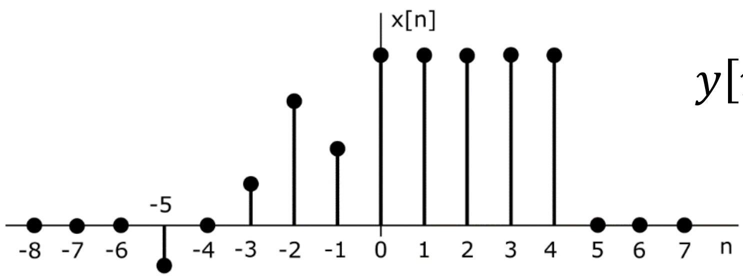
Operações Básicas com Sequências

Prof. Dr. Rafael Cardoso

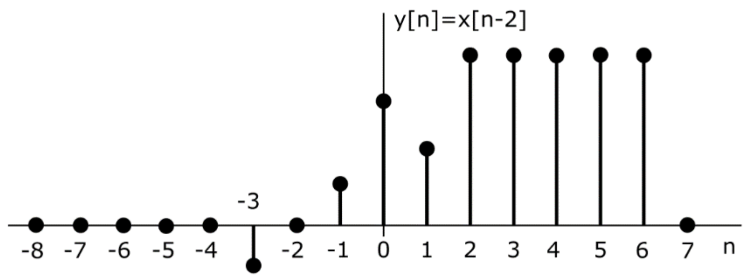
- Dada a sequência $x[n]$, atrase a sequência de 2 amostras e, depois, faça a reflexão da sequência.

- Para atrasar a sequência, fazemos $n = n - k$, onde $k = 2$.

$$y[n] = x[n-k] = x[n-2]$$



$$y[n] = x[n-2]$$



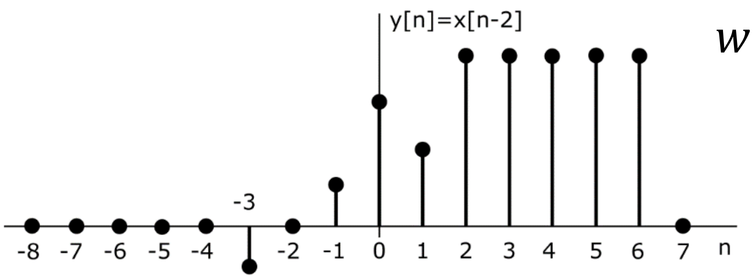
Operações Básicas com Sequências

- Para refletir a sequência, fazemos

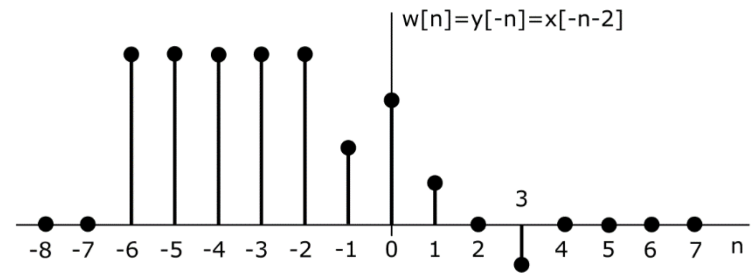
$$w[n] = y[-n] = x[-n-k].$$

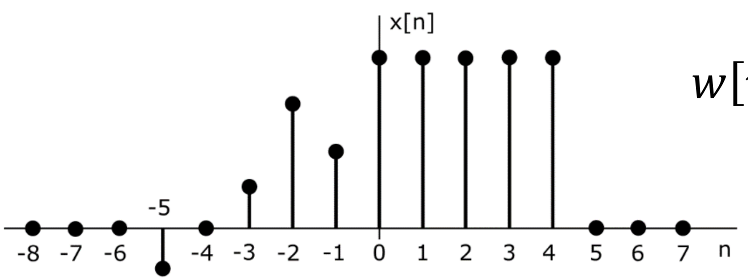
- Mas $k = 2$, logo,

$$w[n] = x[-n-2]$$

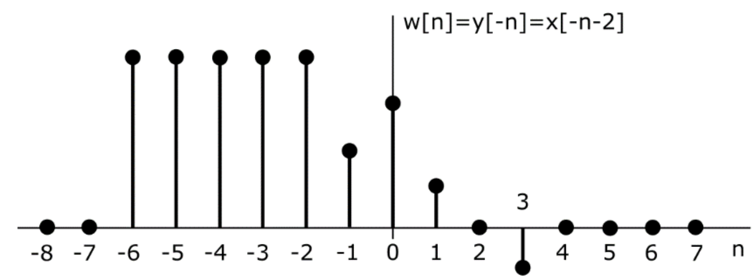


$$w[n] = y[-n]$$





$$w[n] = x[-n-2]$$

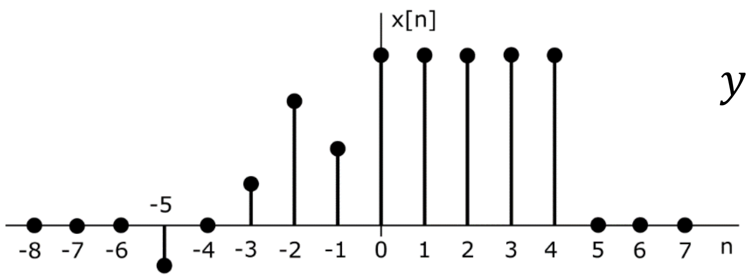


Operações Básicas com Sequências

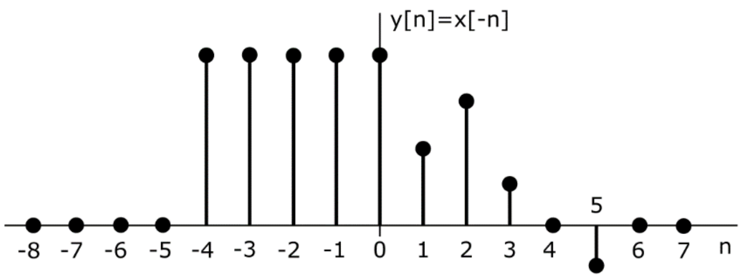
- Dada a sequência $x[n]$, faça a sua reflexão e atrase a sequência de 2 amostras.

- Para refletir a sequência, fazemos

$$y[n] = x[-n]$$



$y[n] = x[-n]$



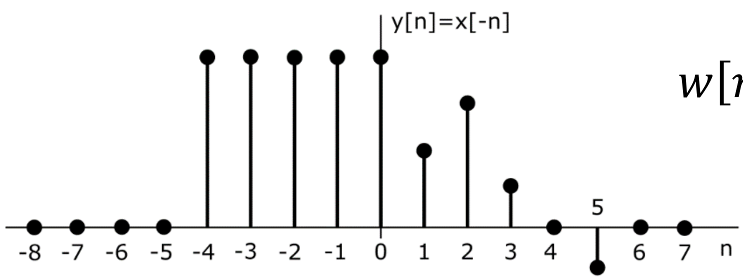
Operações Básicas com Sequências

- Para atrasar a sequência $y[n]$, fazemos $n = n - k$.

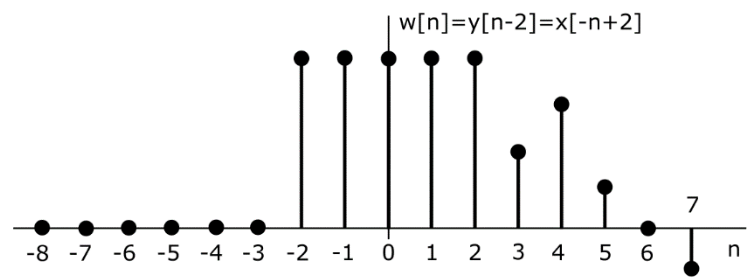
$$w[n] = y[n-k] = x[-(n-k)]$$

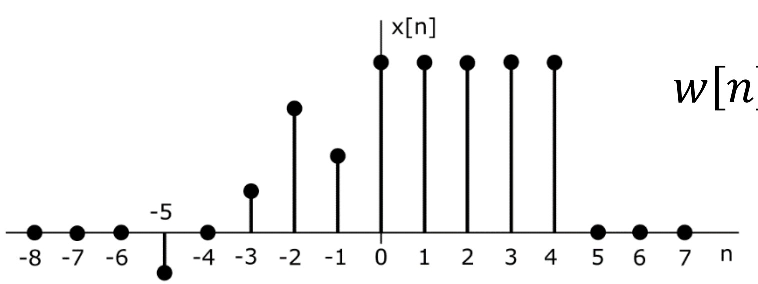
- Como $k = 2$

$$w[n] = x[-n+2]$$

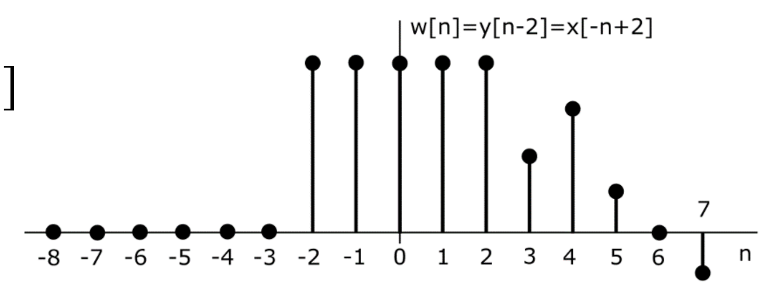


$w[n] = y[n-k]$





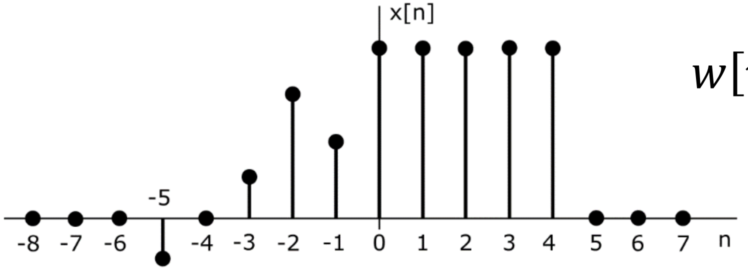
$w[n] = x[-n+2]$



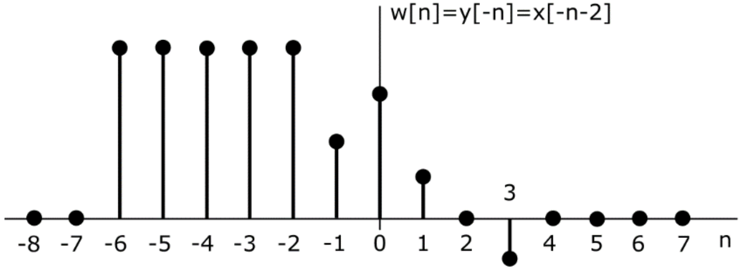
Operações Básicas com Sequências

Prof. Dr. Rafael Cardoso

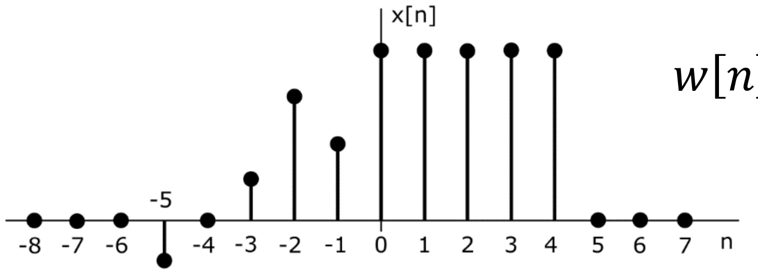
- Atraso e Reflexão:



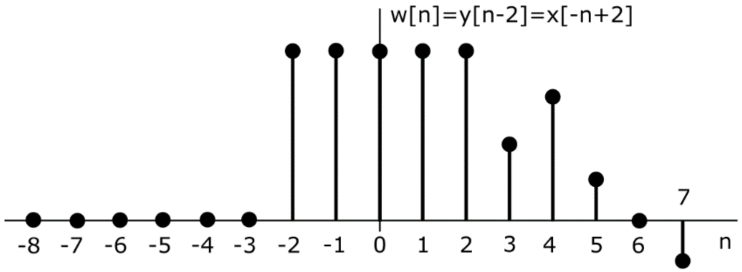
$$w[n] = x[-n-2]$$



- Reflexão e Atraso:



$$w[n] = x[-n+2]$$



Operações Básicas com Sequências

- Conclusão:
  - As operações de deslocamento e espelhamento **não são comutativas.**

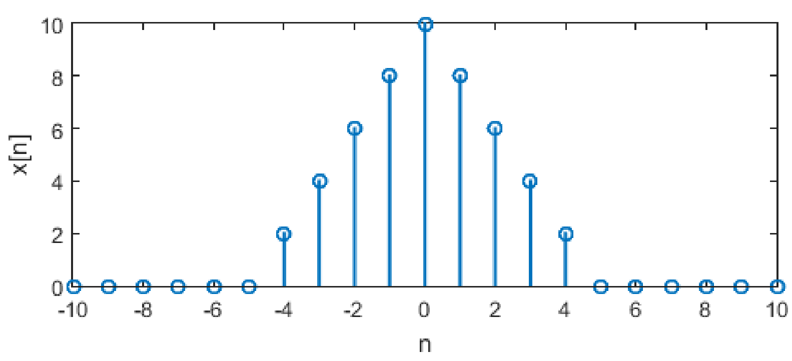
Sinais em Tempo-Discreto

- Sequência real par (simétrica):

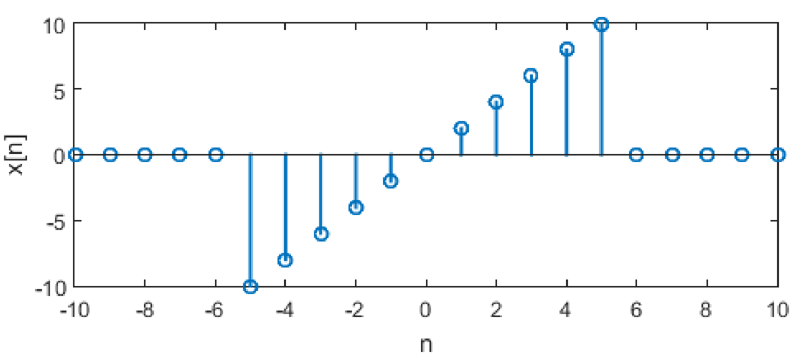
$$x[-n] = x[n]$$

- Sequência real ímpar (antissimétrica):

$$x[-n] = -x[n]$$



Sequência par.

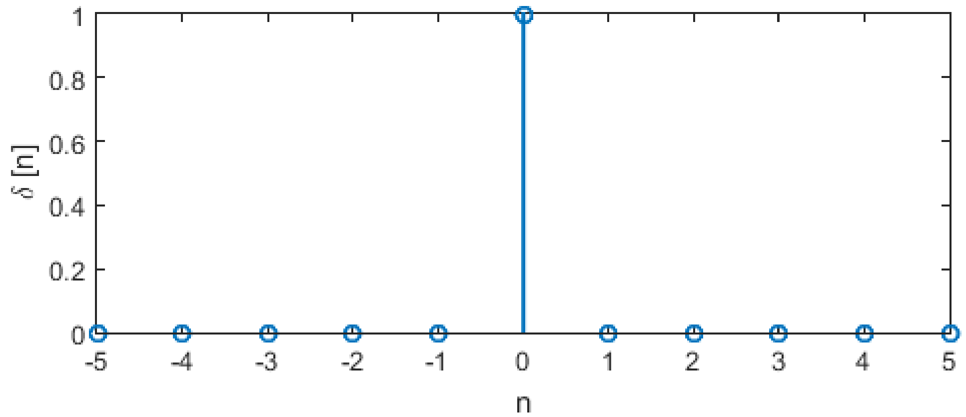


Sequência ímpar.

Sequências Básicas

- Impulso unitário:

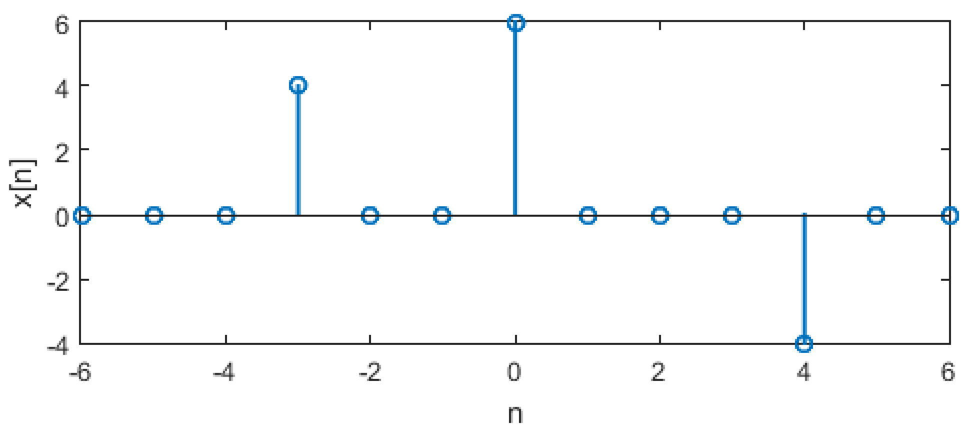
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & para\; n = 0 \\ 0, & para\; n \neq 0 \end{cases}$$



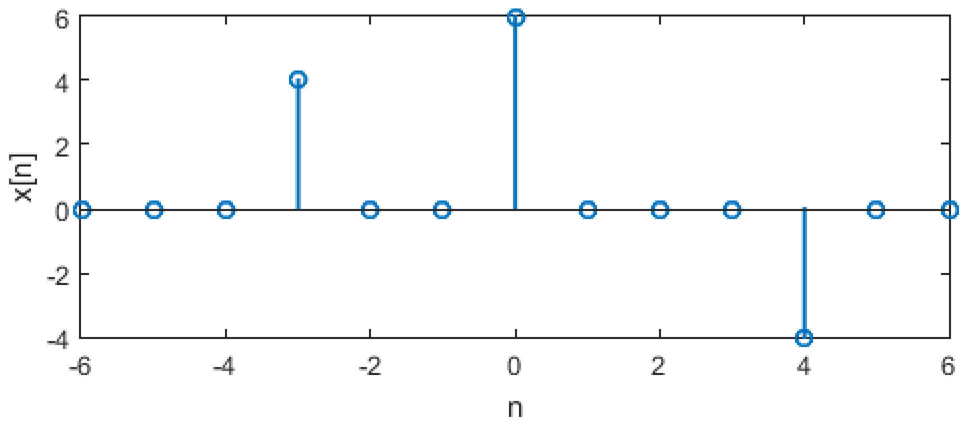
Sequências Básicas

- Uma sequência arbitrária pode ser representada como uma soma ponderada de impulsos deslocados.
- Considere a sequência:

$$x[n] = \{0, 0, 0, 4, 0, 0, \underset{\uparrow}{6}, 0, 0, 0, -4, 0, 0\}$$



Sequências Básicas

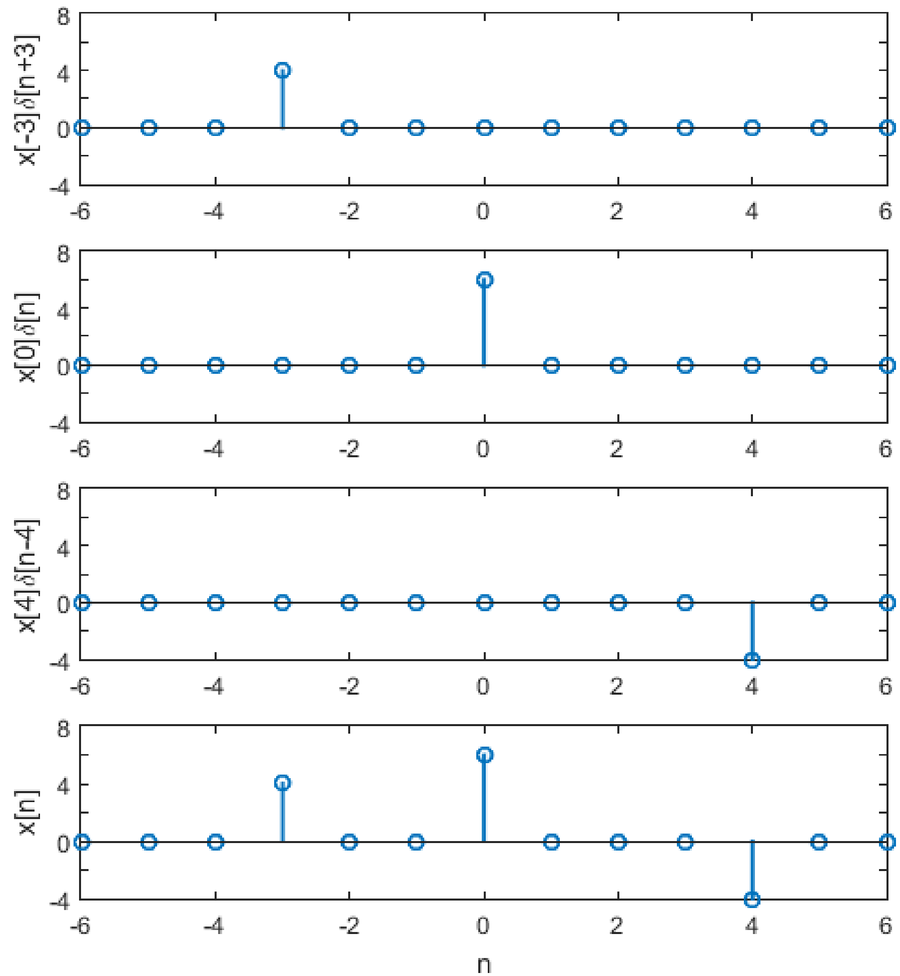


$$x[n] = x[-3]\delta[n+3] + x[0]\delta[n] + x[4]\delta[n-4]$$

- Genericamente

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

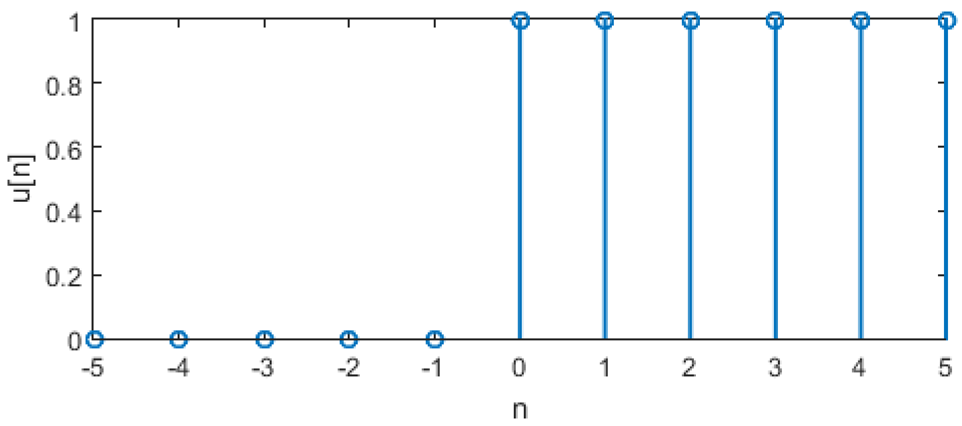
Sequências Básicas



Sequências Básicas

- Degrau unitário:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & para\; n \geq 0 \\ 0, & para\; n < 0 \end{cases}$$



Sequências Básicas

- A sequência degrau unitário também pode ser representada por:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

$$u[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

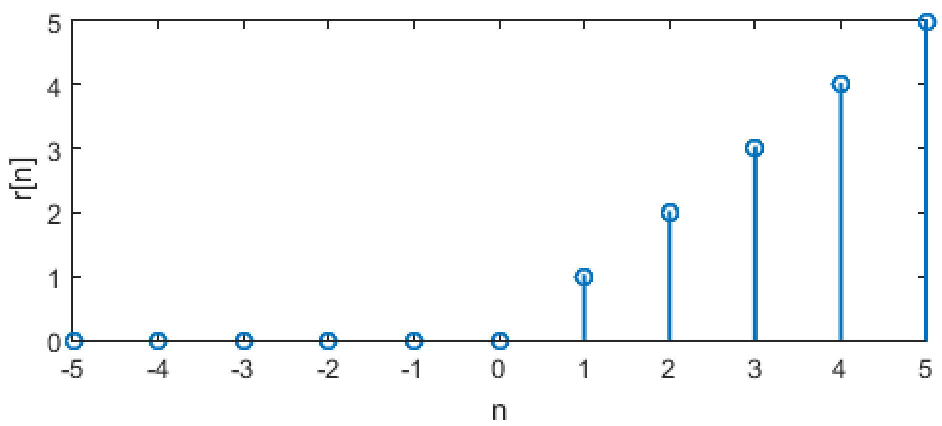
- Por sua vez, a sequência impulso unitário pode ser representada por:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

Sequências Básicas

- Rampa unitária:

$$r[n] = \begin{cases} n, & para\, n \geq 0 \\ 0, & para\, n < 0 \end{cases}$$



Sequências Básicas

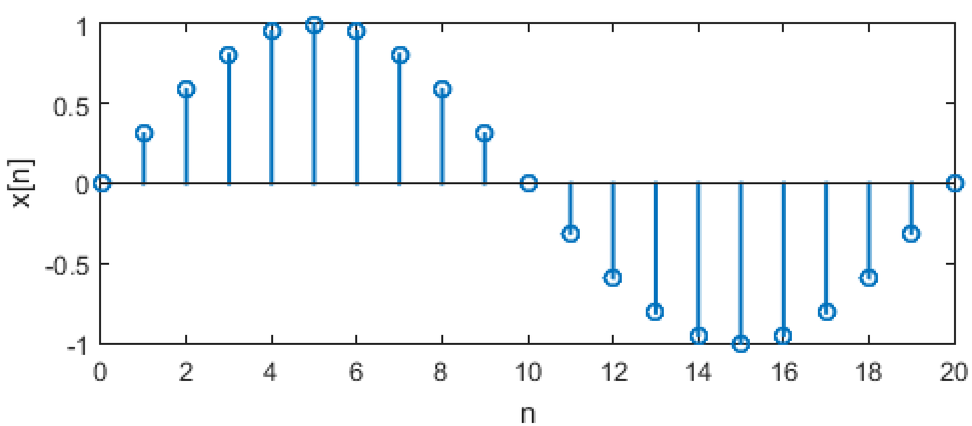
- Sequência senoidal:

$$x[n] = A\cos(\omega n + \phi) \qquad \text{para todo } n$$

onde A e $\phi \in \mathbb{R}$.

ω → Frequência (radianos/amostra)

ϕ → Fase (radianos)



$$x[n] = cos\left(0.1\pi n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sequências Básicas

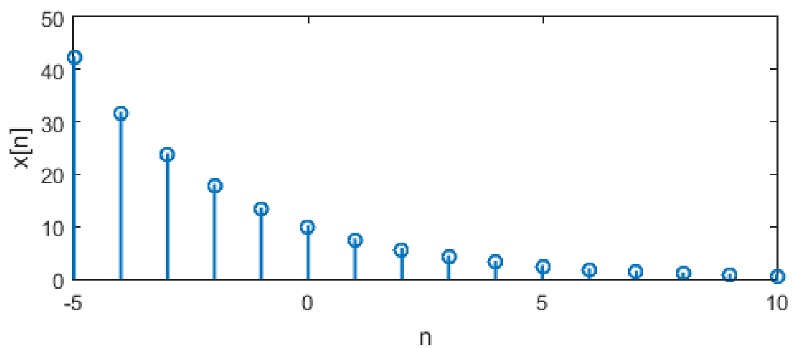
- Sequências exponenciais:

$$x[n] = \mathrm{A}\alpha^{n} \qquad \text{para todo } n$$

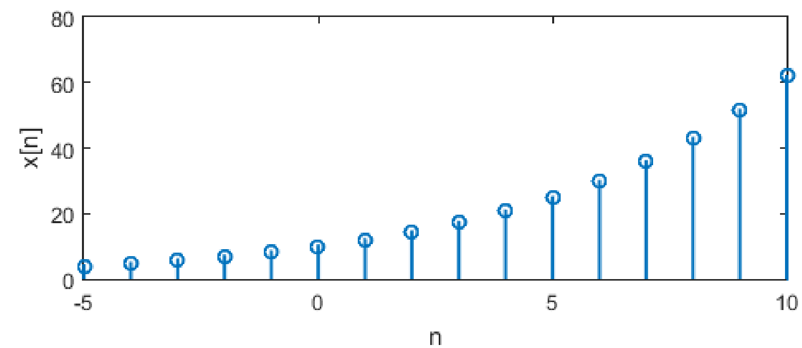
- Se A e $\alpha \in \mathbb{R}$ a sequência $x[n]$ é real.

Sequências Básicas

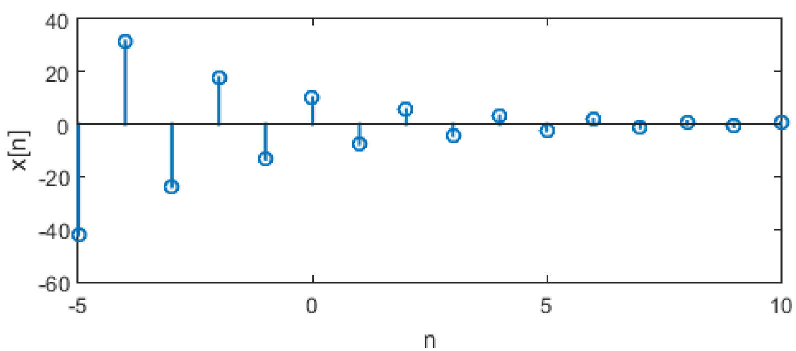
$0 < \alpha < 1$



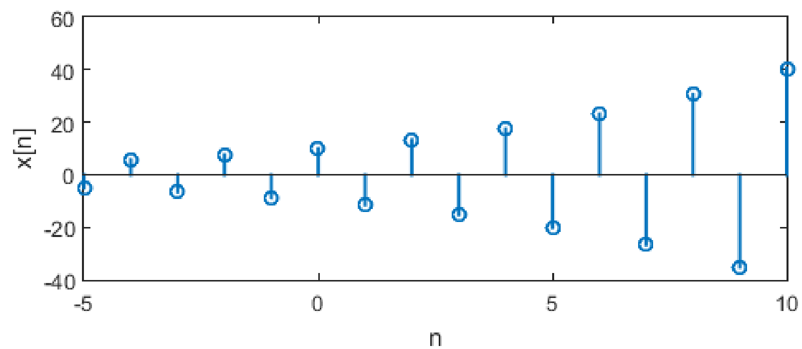
$\alpha > 1$



$-1 < \alpha < 0$



$\alpha < -1$



Sequências Básicas

- Sequências exponenciais:

$$x[n] = \mathrm{A}\alpha^n \qquad \text{para todo } n$$

- Se A e $\alpha \in \mathbb{C}$ a sequência $x[n]$ é complexa.

- Considere: $A = |A|e^{j\emptyset}$ e $\alpha = |\alpha|e^{j\omega}$

Sequências Básicas

- Tem-se:

$$x[n] = \mathrm{A}\alpha^n = |A|e^{j\emptyset}\left(|\alpha|e^{j\omega}\right)^n$$

$$x[n] = |A|e^{j\emptyset}|\alpha|^n e^{j\omega n}$$

$$x[n] = |A||\alpha|^n e^{j(\omega n+\emptyset)}$$

- Utilizando a identidade de Euler:

$$e^{ja} = cos(a) + \mathrm{j}\ \mathrm{sen}(a)$$

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

$$x[n] = x_{Re}[n] + \mathrm{j}x_{Im}[n]$$

Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

$|\alpha| > 1 \Longrightarrow$ Envelope exponencial crescente

$|\alpha| < 1 \Longrightarrow$ Envelope exponencial decrescente

$|\alpha| = 1 \Longrightarrow$ **Sequência exponencial complexa**

- Sequência exponencial complexa

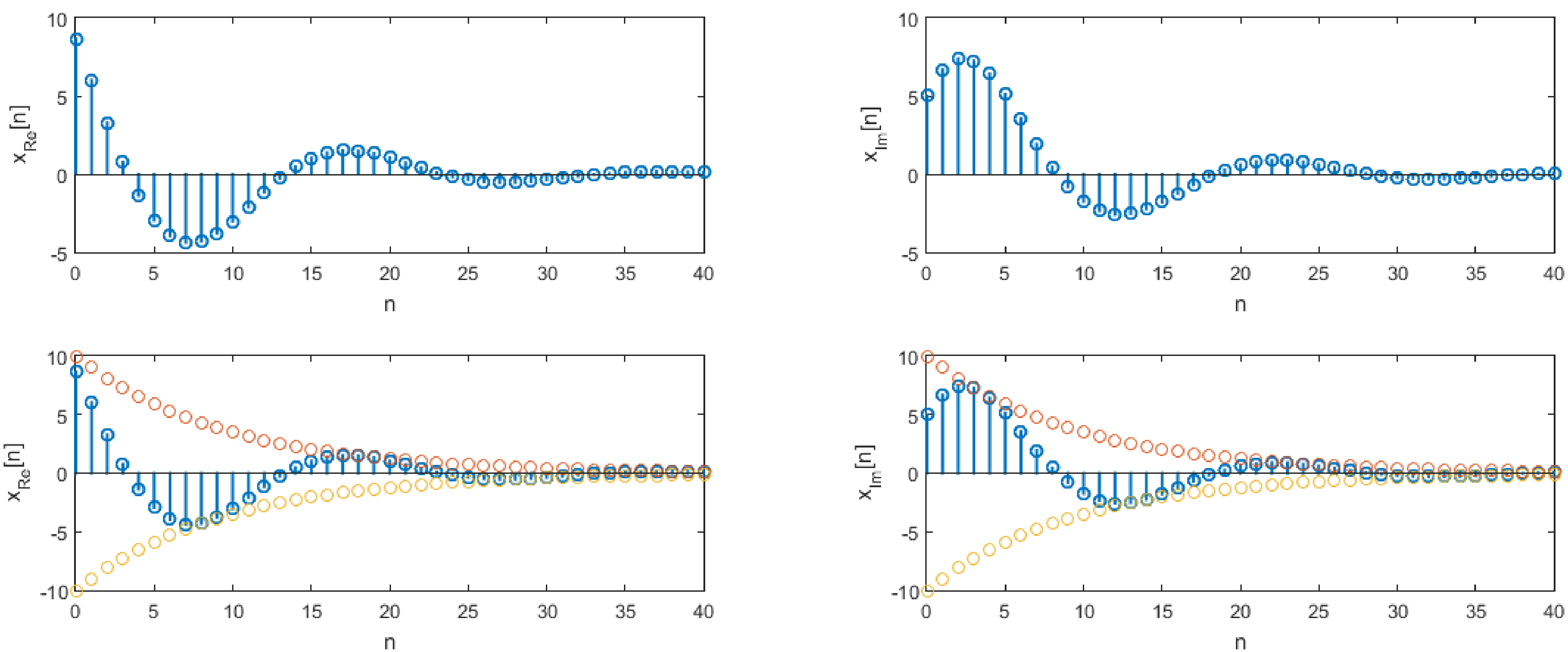
$$x[n] = |A|\cos(\omega n + \emptyset) + j|A|sen(\omega n + \emptyset)$$

$$x[n] = |A|e^{j(\omega n + \emptyset)}$$

Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

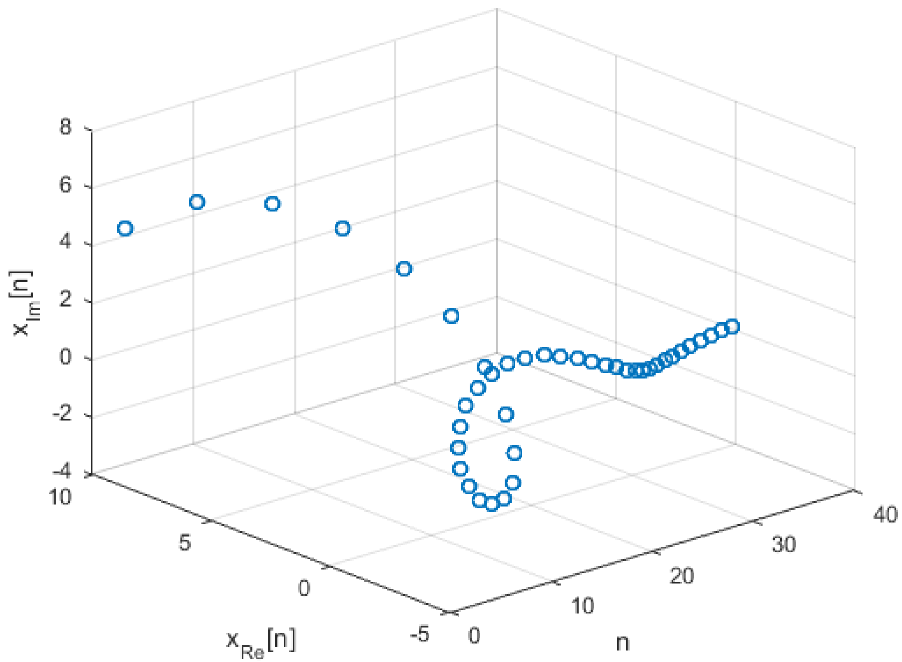
$$x[n] = 10 \cdot 0{,}9^n \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot 0{,}9^n \,\mathrm{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$



Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

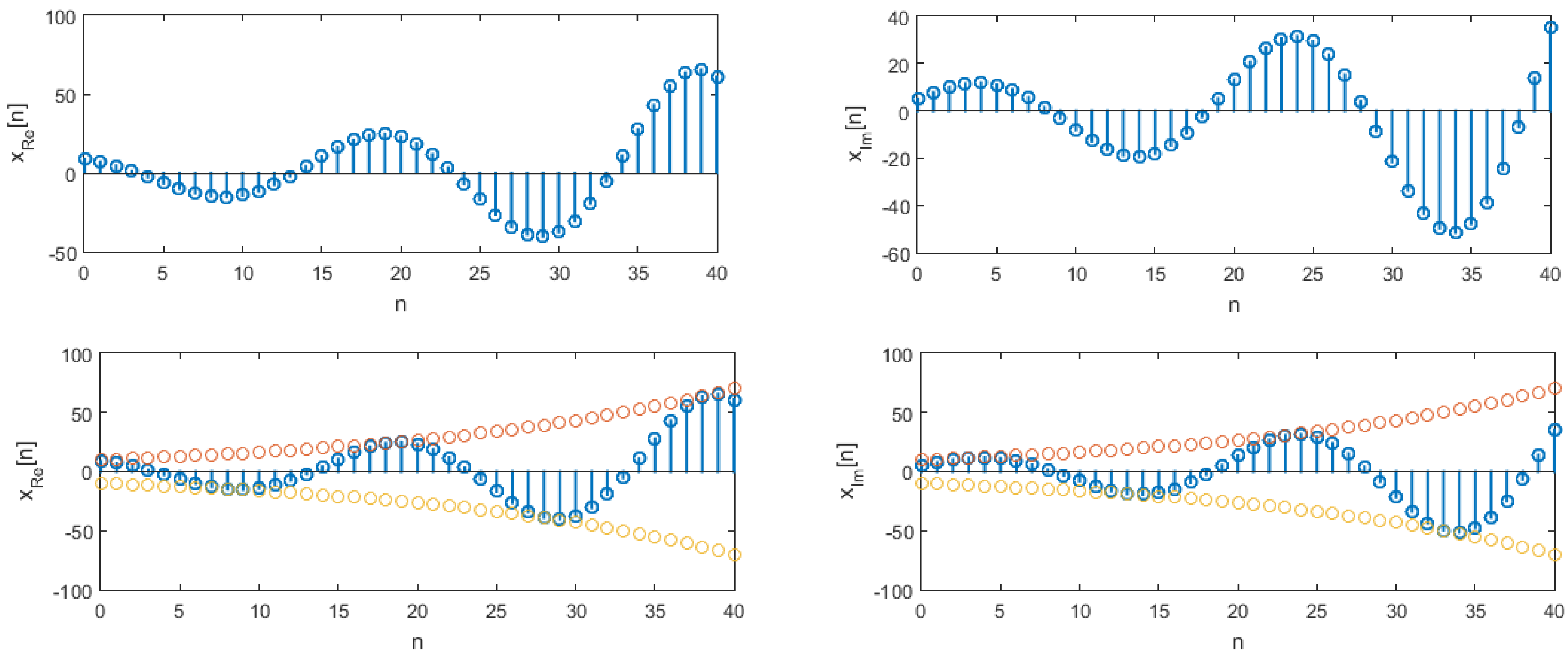
$$x[n] = 10 \cdot 0{,}9^n \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot 0{,}9^n \,\mathrm{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$



Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

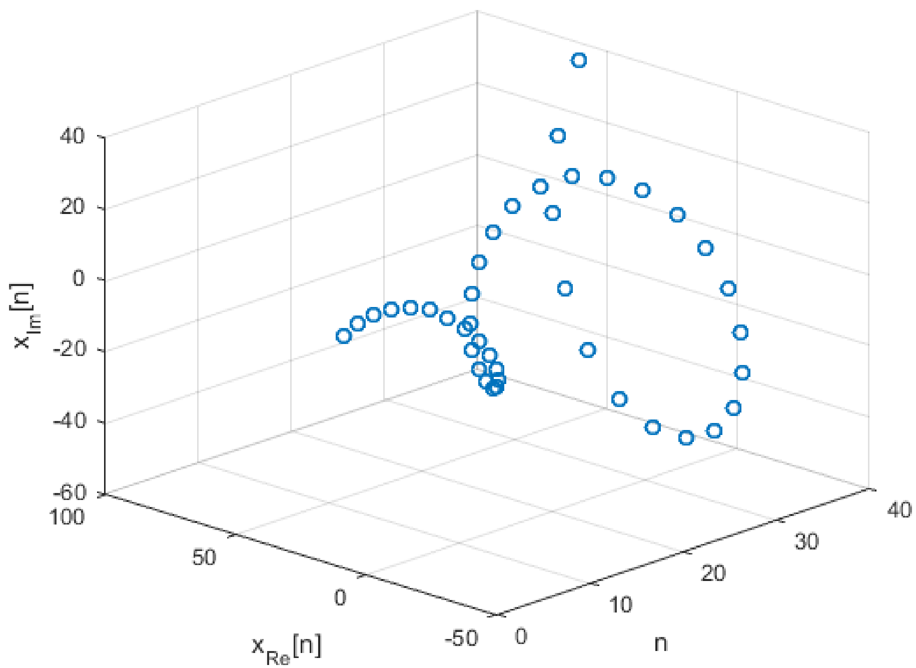
$$x[n] = 10 \cdot 1{,}05^n \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot 1{,}05^n \operatorname{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$



Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

$$x[n] = 10 \cdot 1{,}05^n \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot 1{,}05^n \,\mathrm{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$

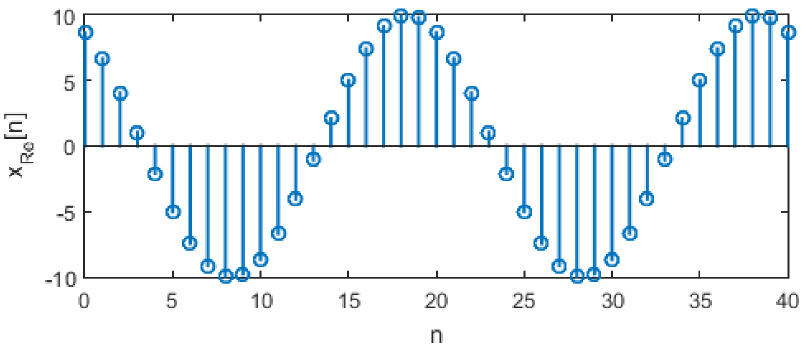


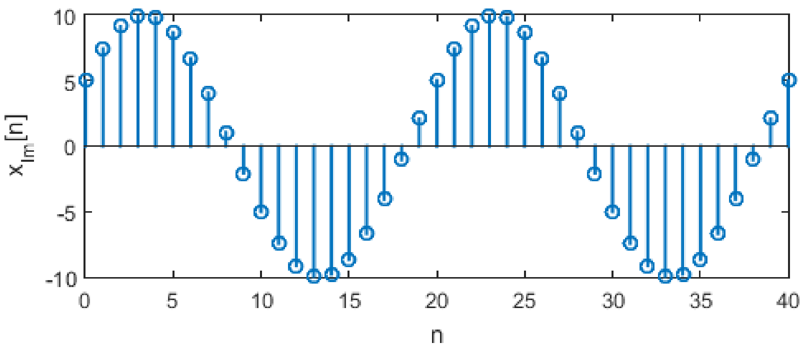
Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

$$x[n] = 10 \cdot \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot \mathrm{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x[n] = 10 \cdot e^{j\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)}$$



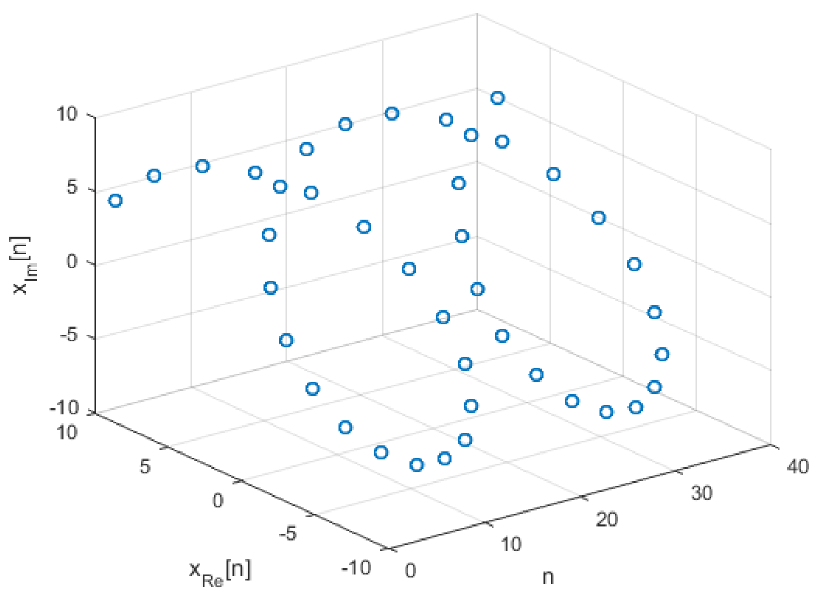


Sequências Básicas

$$x[n] = |A||\alpha|^n \cos(\omega n + \emptyset) + j|A||\alpha|^n sen(\omega n + \emptyset)$$

$$x[n] = 10 \cdot \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right) + j10 \cdot \operatorname{sen}\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x[n] = 10 \cdot e^{j\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{6}\right)}$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Sinais Senoidais de Tempo-Contínuo

$$x(t) = A\cos(\Omega t + \theta), \qquad -\infty < t < \infty$$

$$x(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$$

A ⟹ Amplitude

$\Omega = 2\pi f$ ⟹ Frequência (rad/s)

f ⟹ Frequência (Hz)

θ ⟹ Fase (rad)

$T = \frac{1}{f}$ ⟹ Período (s)

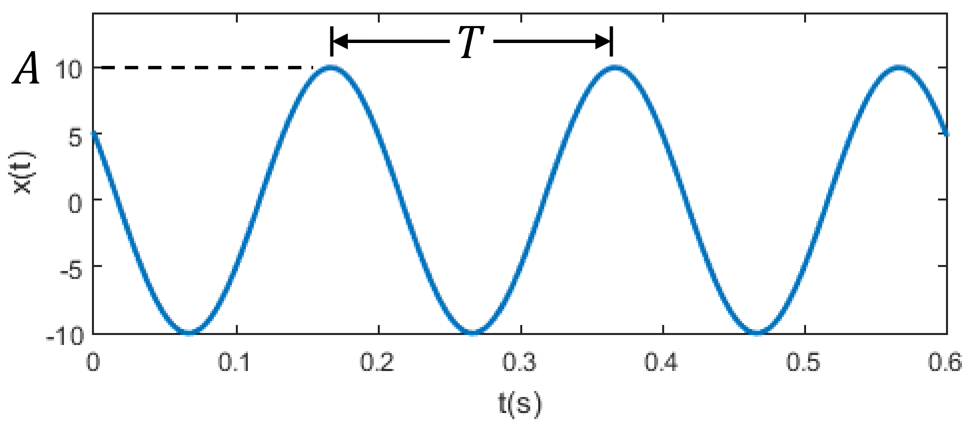
t ⟹ Tempo (s)

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x(t) = 10cos\left(2\pi 5t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = 10, \qquad f = 5\ Hz, \qquad T = \frac{1}{5}\ s, \qquad \Omega = 2\pi 5\ {}^{rad}/_{s}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}\ rad$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Para cada frequência f, o sinal $x(t) = Acos(2\pi ft + \theta)$ é periódico.

$$\boxed{x(t+T) = x(t)}$$

$$x(t+T) = Acos(2\pi f(t+T) + \theta)$$

$$x(t+T) = Acos(2\pi ft + 2\pi fT + \theta)$$

$$x(t+T) = Acos\left(2\pi ft + 2\pi f\frac{1}{f} + \theta\right)$$

$$x(t+T) = Acos(2\pi ft + \theta + 2\pi)$$

$$x(t+T) = Acos(2\pi ft + \theta) = x(t)$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Sinais senoidais de tempo contínuo com frequências f diferentes são distintos.
- O aumento da frequência f resulta em um aumento no número de oscilações do sinal.

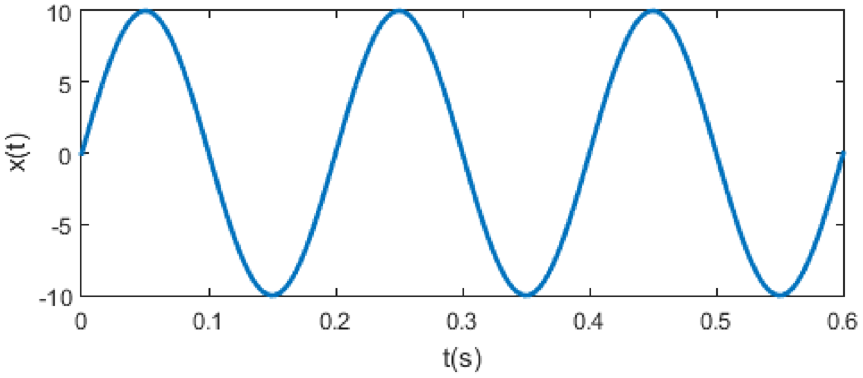
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x(t) = 10cos\left(2\pi 5t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f = 5\ Hz$$

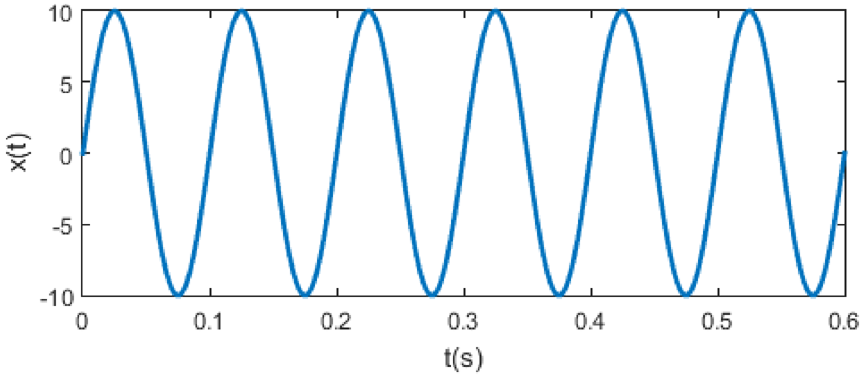
$$T = \frac{1}{5} = 0{,}2\ s$$



$$x(t) = 10cos\left(2\pi 10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f = 10\ Hz$$

$$T = \frac{1}{10} = 0{,}1\ s$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Estas características apresentadas também se aplicam as exponenciais complexas:

$$x(t) = Ae^{j(\Omega t+\theta)}$$

- Seja a fórmula de Euler:

$$e^{\pm ja} = cos(a) \pm jsen(a)$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Fazendo:

$$
\begin{array}{rl}
 & e^{ja} = cos(a) + jsen(a) \\
+ & e^{-ja} = cos(a) - jsen(a) \\
\hline
 & e^{ja} + e^{-ja} = 2cos(a)
\end{array}
$$

- Logo,

$$cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Agora, fazendo:

$$\begin{array}{rl} & e^{ja} = cos(a) + jsen(a) \\ - & e^{-ja} = cos(a) - jsen(a) \\ \hline & e^{ja} - e^{-ja} = 2jsen(a) \end{array}$$

- Logo,

$$sen(a) = \frac{e^{ja} - e^{-ja}}{2j}$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Com isso, um sinal senoidal pode ser expresso por exponenciais complexas, isto é,

$$x(t) = A cos(\Omega t + \theta) = \underbrace{\frac{A}{2} e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t+\theta)}}_{\text{Soma de dois sinais conjugados complexos de mesma amplitude.}}$$

- Surge frequência negativa.

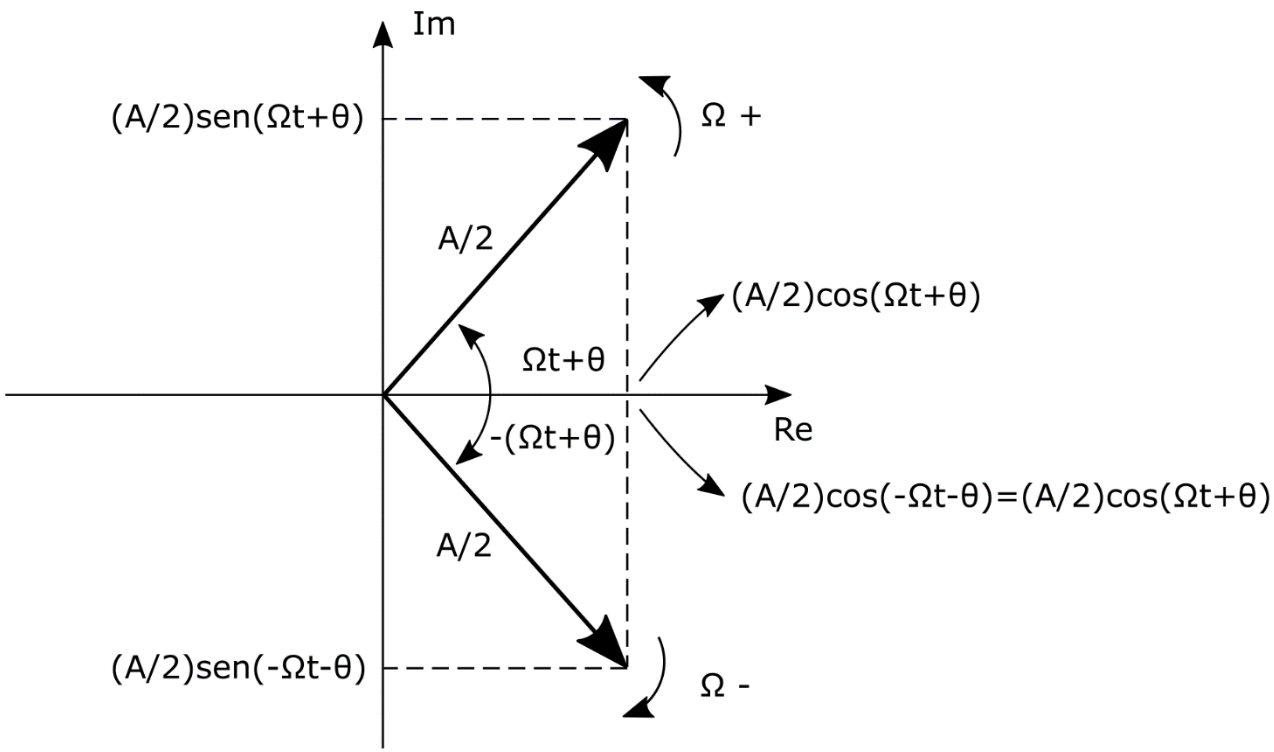
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Frequência é, fisicamente, uma grandeza positiva (ciclos por segundo).
- Qual o significado de frequência negativa?

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Representação por dois fasores.

$$x(t) = Acos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sinais Senoidais de Tempo-Discreto

$$x[n] = A\cos(\omega n + \phi), \qquad -\infty < n < \infty$$

$$x[n] = A\cos(2\pi f n + \phi)$$

A ⟹ Amplitude

$\omega = 2\pi f$ ⟹ Frequência (rad/amostra)

f ⟹ Frequência (ciclos/amostra)

ϕ ⟹ Fase (rad)

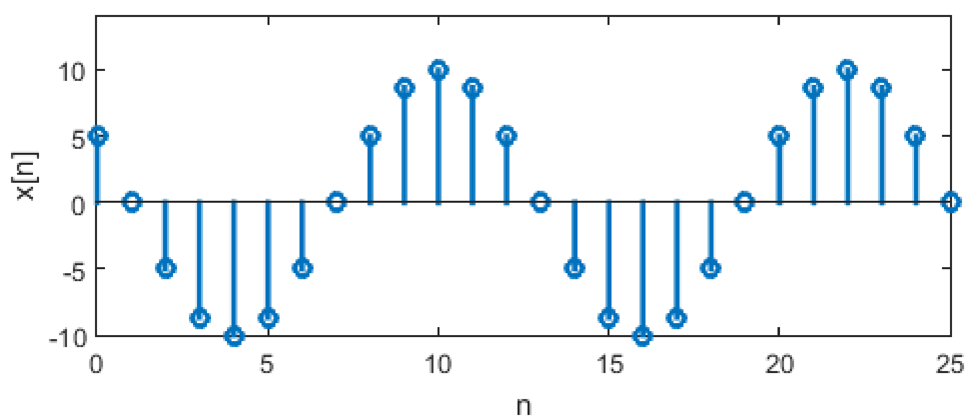
n ⟹ Amostra

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

$$x[n] = 10cos\left(2\pi\frac{1}{12}n + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$A = 10, \qquad f = \frac{1}{12}\, {}^{ciclos}/_{amostra}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{12}\, {}^{rad}/_{amostra},$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}\, rad$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Sinais senoidais discretos somente são periódicos se a frequência f for um número racional (razão de números inteiros).
- Um sinal de tempo discreto é periódico se

$$x[n+N] = x[n], \qquad \text{para todo } n$$

- O menor valor de N que atenda a equação acima é denominado período fundamental.

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Prova da periodicidade:
  - Um sinal periódico deve satisfazer

$$x[n+N] = x[n]$$

$$cos(2\pi f(n+N)+\phi) = cos(2\pi fn+\phi)$$

  - Que só é verdadeira se

$$2\pi fN = 2\pi k, \qquad k, N \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{f = \frac{k}{N}}$$

$\Rightarrow$ k e N devem ser primos relativos (único divisor comum é 1).

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

$$x[n] = cos\left(2\pi\frac{1}{12}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2\pi f N = 2\pi k$$

$$2\pi\frac{1}{12}N = 2\pi k$$

$$\frac{1}{12} = \frac{k}{N}, \qquad k = 1, \qquad N = 12$$ ⇒ Sinal periódico.

-Divisor comum: 1.

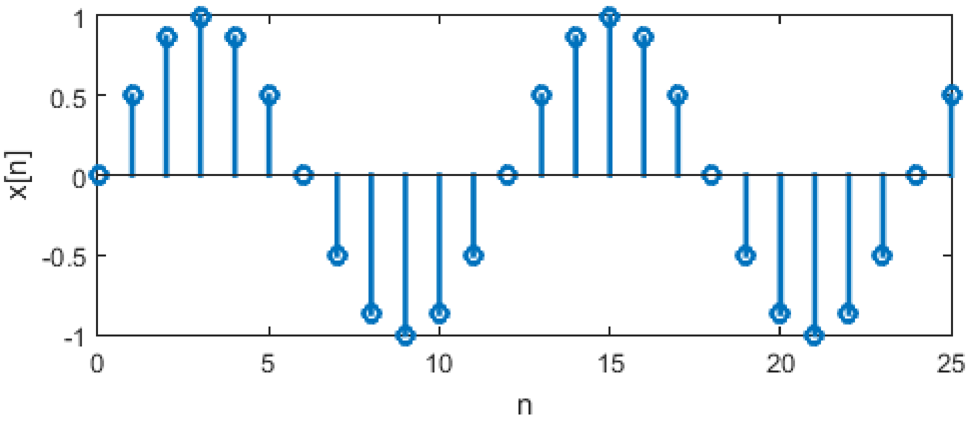
-Primos relativos.

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x[n] = cos\left(2\pi\frac{1}{12}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N = 12$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x[n] = cos\left(2\pi \frac{2}{12} n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{2}{12} = \frac{k}{N}$$

-Divisores comuns: 1, 2.
-Devemos simplificar.

$$\frac{1}{6} = \frac{k}{N}, \qquad k = 1, \qquad N = 6$$

Sinal periódico.

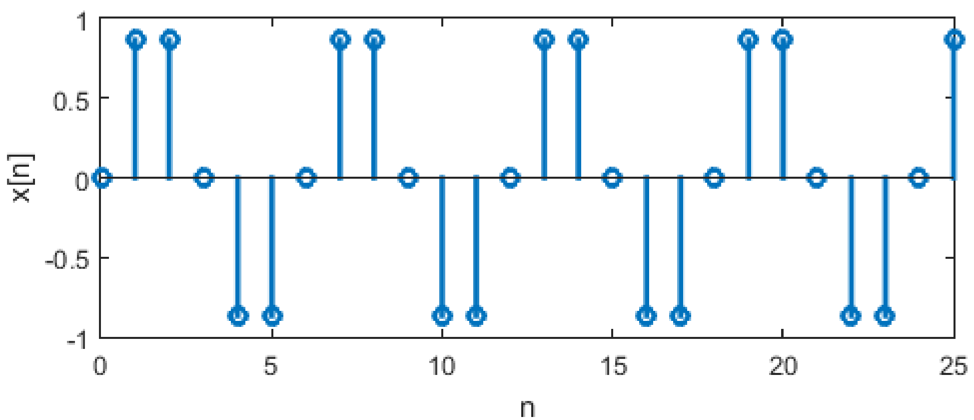
-Divisor comum: 1.
-Primos relativos.

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x[n] = cos\left(2\pi\frac{2}{12}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N = 6$$

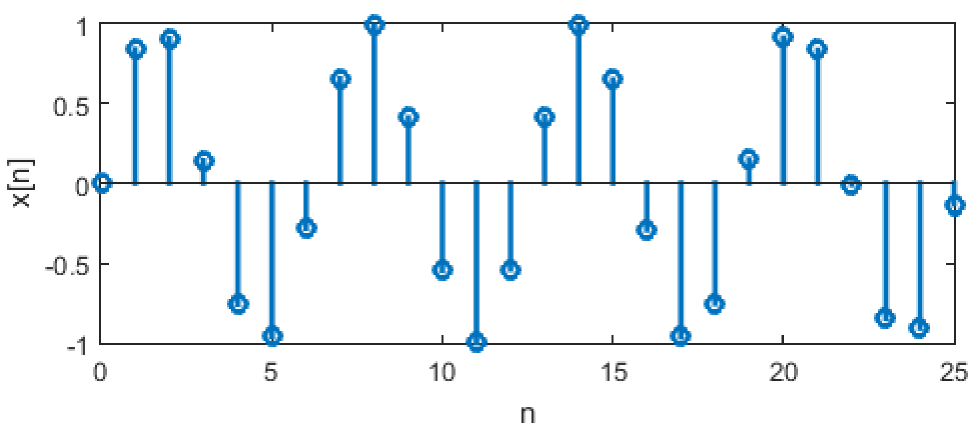


Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

$$x[n] = cos\left(n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f = \frac{1}{2\pi}$$ ⇨ -Número irracional.
-Não se consegue representar $f = \frac{k}{N}$

$\nexists N \in \mathbb{Z}$ ⇨ Sinal não periódico



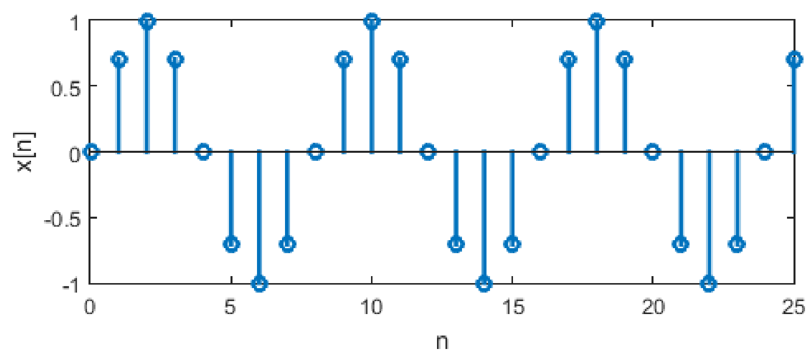
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

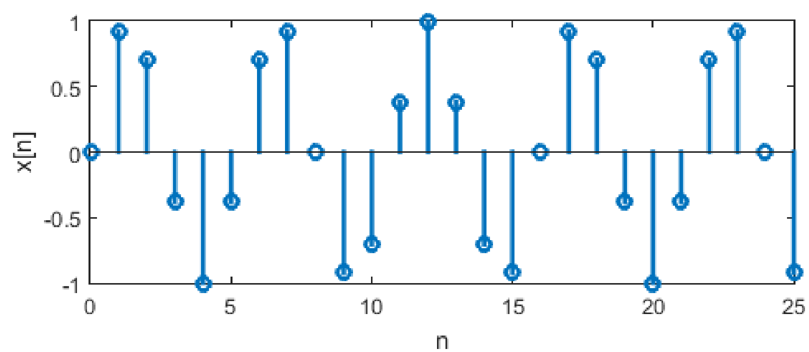
- Efeitos da variação da frequência f sobre o período N.

$$x[n] = cos\left(2\pi f n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$f = \frac{2}{16}$ ciclos/amostra
$N = 8$ amostras



$f = \frac{3}{16}$ ciclos/amostra
$N = 16$ amostras



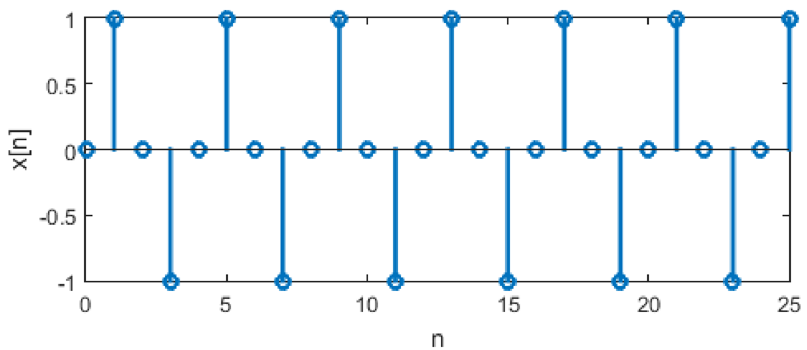
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

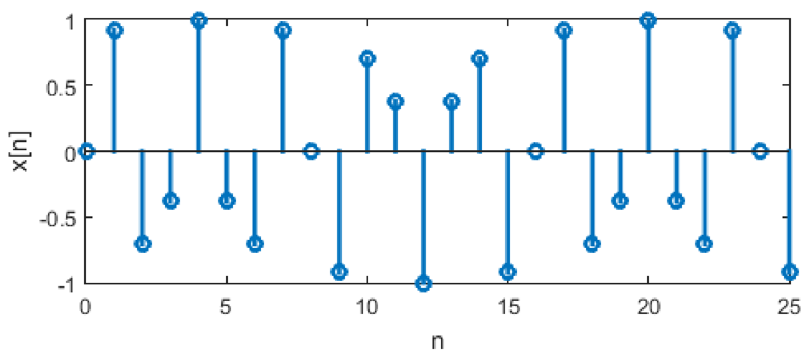
- Efeitos da variação da frequência f sobre o período N.

$$x[n] = cos\left(2\pi f n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$f = \dfrac{4}{16}$ ciclos/amostra
$N = 4$ amostras



$f = \dfrac{5}{16}$ ciclos/amostra
$N = 16$ amostras



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Os efeitos da variação da frequência f sobre o período N **contrariam** o senso comum para sinais de tempo contínuo.
- O conceito de periodicidade para sinais senoidais também se aplicam a exponencial complexa

$$e^{j\omega(n+N)} = e^{j\omega n}$$

se

$$\boxed{\omega N = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2\pi k}{\omega}, \qquad N \text{ e } k \in \mathbb{Z}}$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Sinais senoidais de tempo-discreto com frequências separadas por múltiplos inteiros de $2\pi\ rad/amostra$ **são idênticos.**

$$cos\big((\omega + 2\pi k)n + \phi\big) = cos(\omega n + 2\pi k n + \phi) = cos(\omega n + \phi)$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Com isso, todas as sequências do tipo

$$x[n] = A cos(\omega_k n + \phi) \quad \text{e} \quad x[n] = Ae^{j(\omega_k n + \phi)}$$

onde

$$\omega_k = \omega + 2\pi k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad e \quad -\pi \leq \omega \leq \pi \; (0 \leq \omega \leq 2\pi)$$

são idênticas.

- Por isso, especifica-se frequências apenas no intervalo

$$-\pi \leq \omega \leq \pi \quad \text{ou} \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi$$

$$-\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 0 \leq f \leq 1$$

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Qualquer sequência com frequência $|\omega| > \pi\, rad/amostra$ ou $|f| > \frac{1}{2}\, ciclo/amostra$ será idêntica a uma sequência com frequência $|\omega| < \pi\, rad/amostra$ ou $|f| < \frac{1}{2}\, ciclo/amostra$.

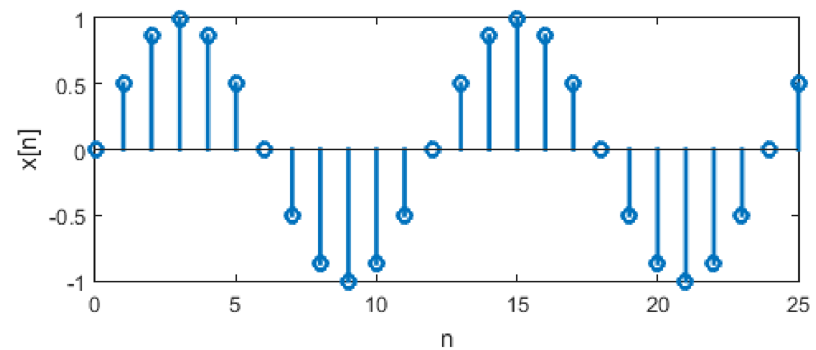
- Sinais senoidais de tempo contínuo são sempre distintos para frequências diferentes no intervalo $-\infty < \Omega < \infty$ ou $-\infty < f < \infty$.

Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

$$x[n] = cos\left(\omega n - \frac{\pi}{2}\right)$$

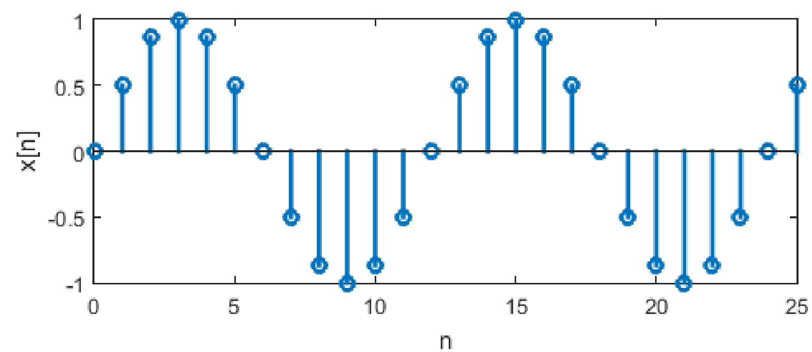
$\omega = \dfrac{2\pi}{12}$ rad/amostra

$N = 12$ amostras



$\omega = \dfrac{2\pi}{12} + 2\pi$ rad/amostra

$N = 12$ amostras

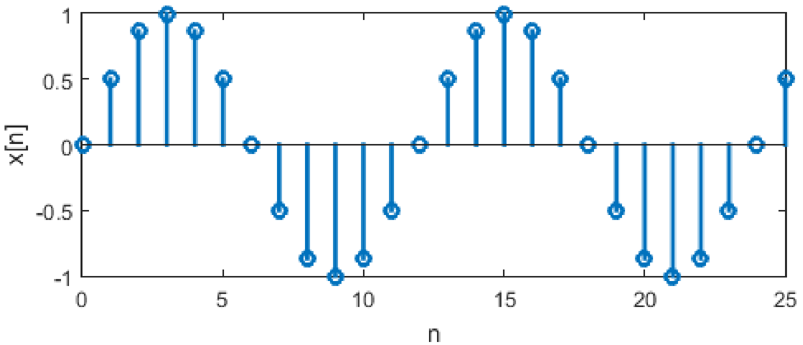


Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

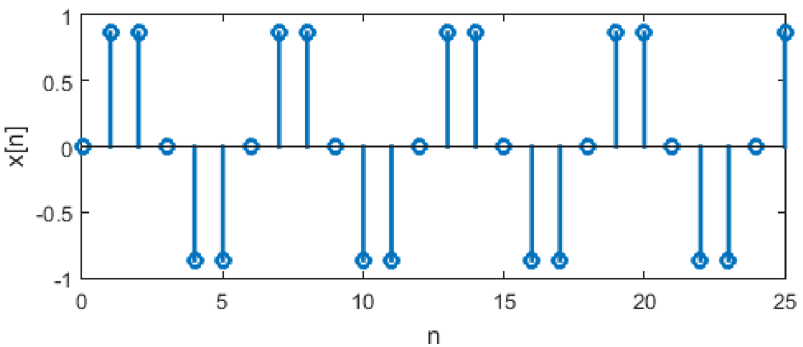
Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$x[n] = cos\left(\omega n - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\omega = \frac{2\pi}{12}$ rad/amostra
$N = 12$ amostras



$\omega = \frac{4\pi}{12}$ rad/amostra
$N = 6$ amostras



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A maior taxa de oscilação em um sinal senoidal de tempo discreto ocorre em $\omega = \pm\pi \ {}^{rad}/_{amostra}$ ou $f = \pm\frac{1}{2} \ {}^{ciclo}/_{amostra}$.
- Considere

$$x[n] = cos(\omega n)$$

$$\omega = 0,\ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi \ {}^{rad}/_{amostra}$$

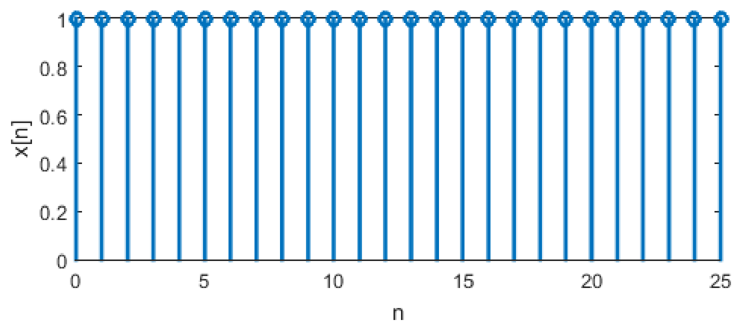
$$f = 0,\ \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \, {}^{ciclo}/_{amostra}$$

$$N = \infty, 16, 8, 4, 2$$

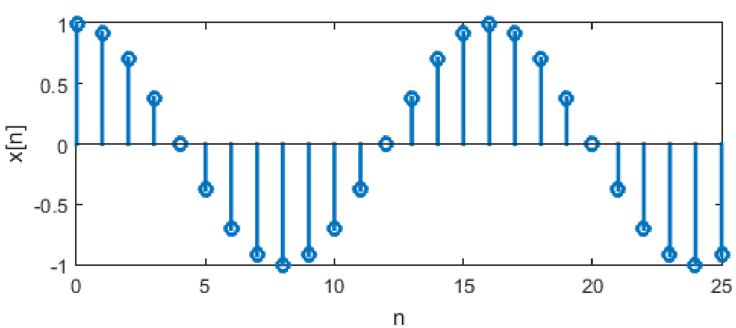
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

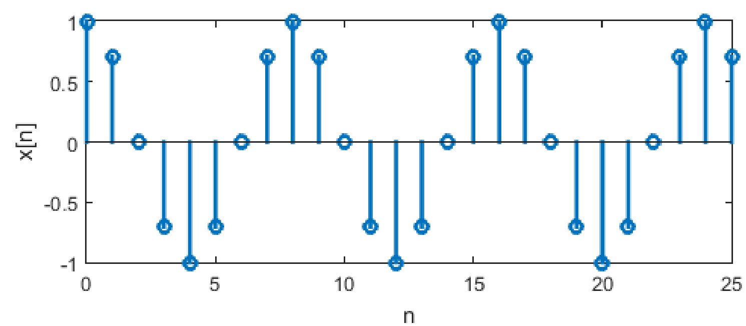
$\omega = 0$



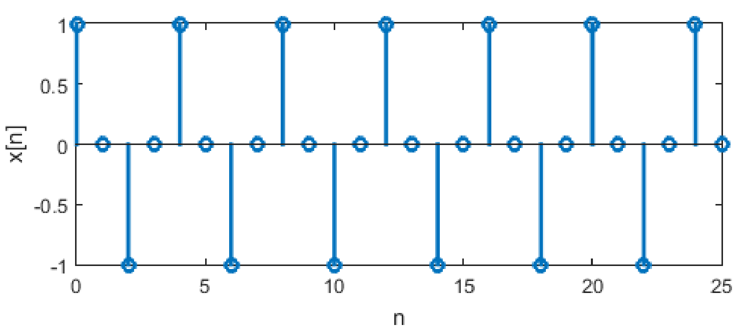
$\omega = \frac{\pi}{8}$



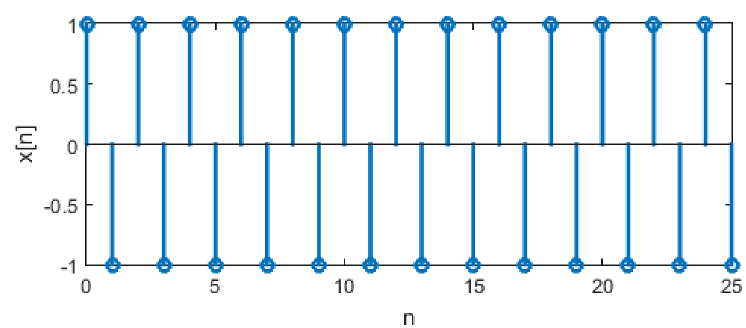
$\omega = \frac{\pi}{4}$



$\omega = \frac{\pi}{2}$



$\omega = \pi$



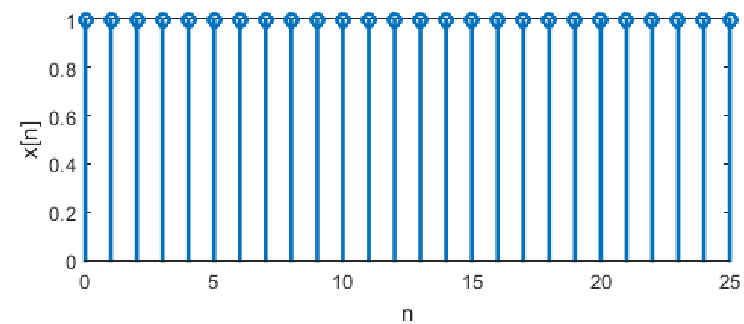
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

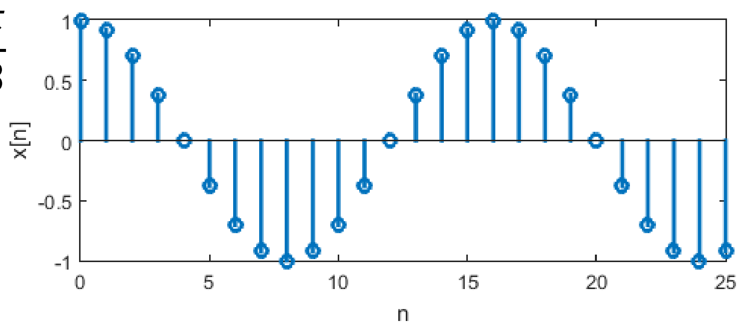
Como:

$$x[n] = cos(\omega n) = cos(-\omega n):$$

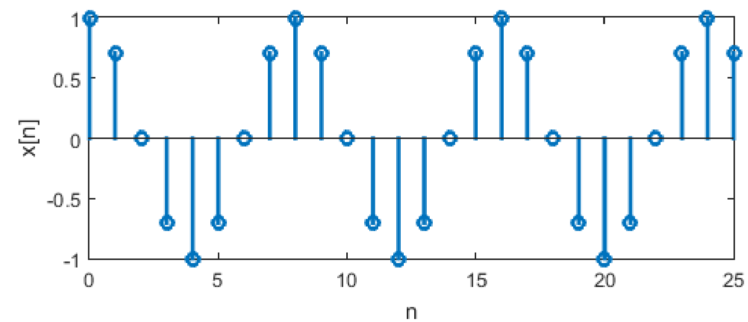
$\omega = 0$



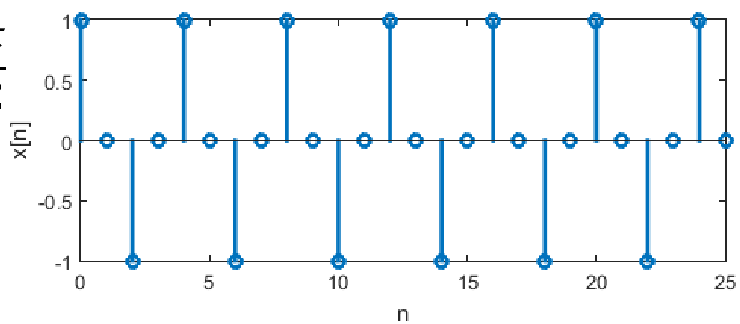
$\omega = -\dfrac{\pi}{8}$



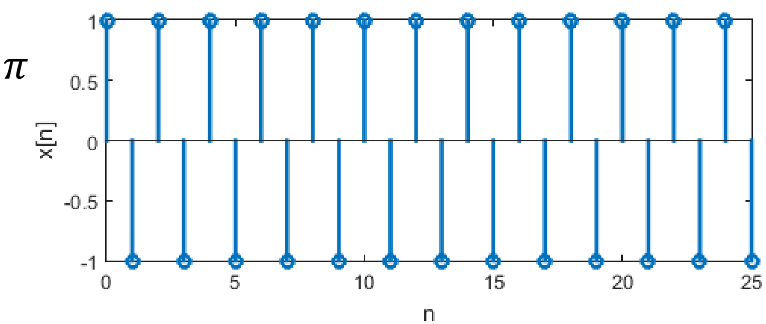
$\omega = -\dfrac{\pi}{4}$



$\omega = -\dfrac{\pi}{2}$



$\omega = -\pi$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

- Consequentemente, as maiores taxas de oscilação ocorrem em $\omega = \pm\pi \, {}^{rad}/_{amostra}$.
- E para $\pi \leq \omega \leq 2\pi \, {}^{rad}/_{amostra}$?
  - Considere $-\pi \leq \omega \leq 0$ e $\omega_2 = \omega + 2\pi$.
  - $\pi \leq \omega_2 \leq 2\pi$.

$$x_1[n] = \cos(\omega n)$$

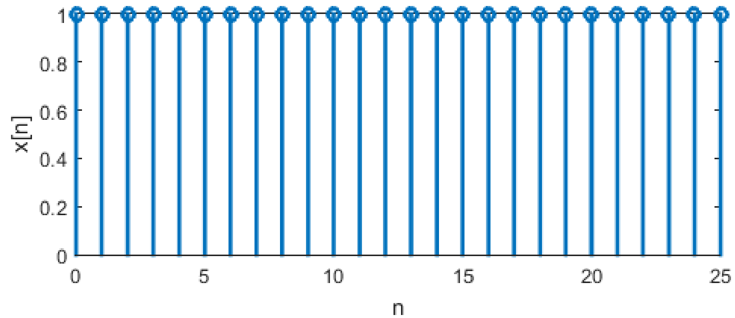
$$x_2[n] = cos(\omega_2 n) = \cos\big((\omega + 2\pi)n\big) = cos(\omega n)$$

$$x_2[n] = x_1[n] = cos(\omega n)$$

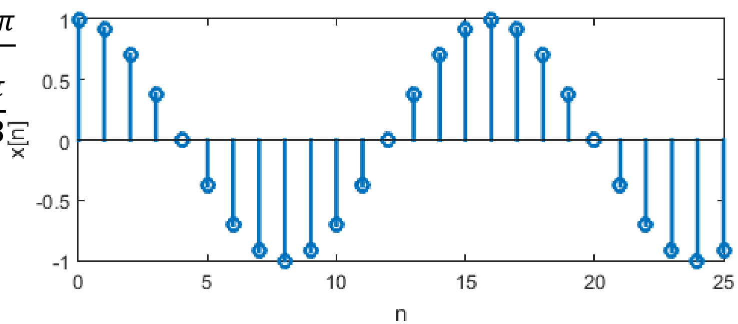
Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

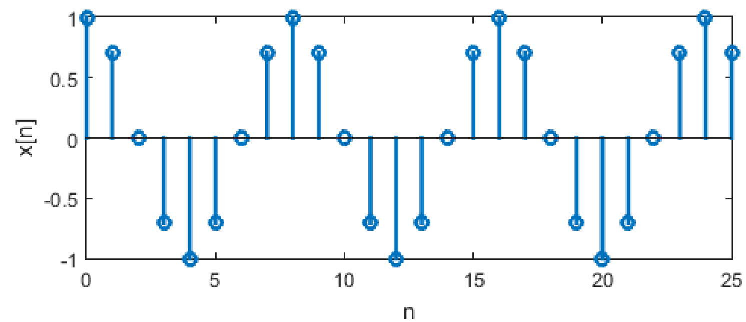
$$\omega_2 = 2\pi$$
$$\omega = 0$$



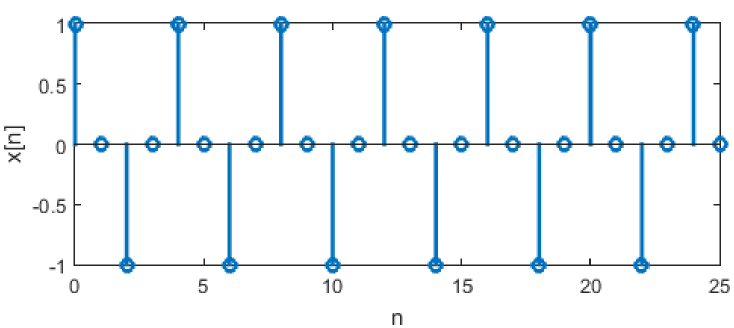
$$\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$$
$$\omega = -\frac{\pi}{8}$$



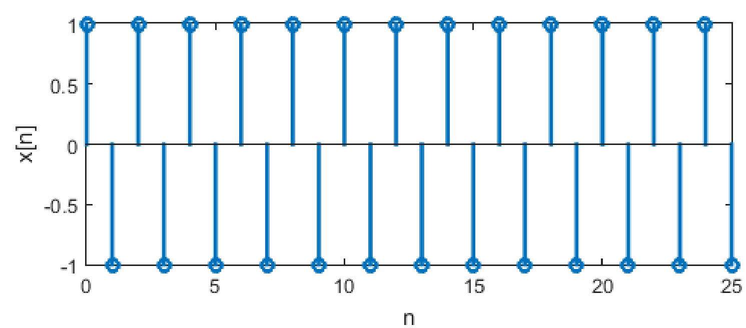
$$\omega_2 = \frac{7\pi}{4}$$
$$\omega = -\frac{\pi}{4}$$



$$\omega_2 = \frac{3\pi}{2}$$
$$\omega = -\frac{\pi}{2}$$

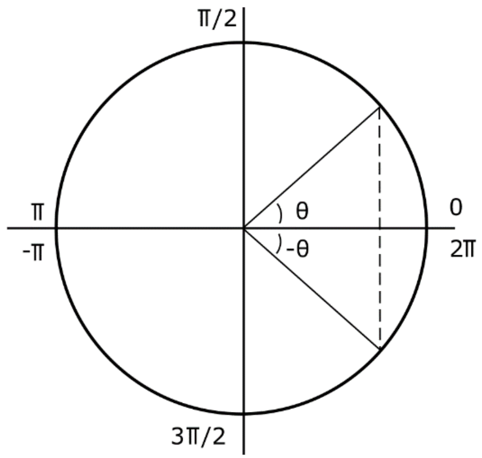


$$\omega_2 = \pi$$
$$\omega = -\pi$$



Frequência: Sinais de Tempo Contínuo x Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso



- Para $-\pi \leq \omega \leq \pi\ {}^{rad}/_{amostra}$:
  - Número de oscilações aumenta de: $\omega = 0$ até $\omega = \pi$.
  - Número de oscilações diminui de: $\omega = -\pi$ até $\omega = 0$.
- Para $0 \leq \omega \leq 2\pi\ {}^{rad}/_{amostra}$:
  - Número de oscilações aumenta de: $\omega = 0$ até $\omega = \pi$.
  - Número de oscilações diminui de: $\omega = \pi$ até $\omega = 2\pi$.