PROCESSAMENTO DE SINAIS

Amostragem de Sinais de Tempo Contínuo e sua Reconstrução a Partir de suas Amostras

Um dos temas mais importantes para mim

Professor ira apresentar de duas maneiras: no dominio da freq e no dominio do tempo

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

- Descrever os princípios que regem a amostragem de sinais de tempo contínuo.

- Explicitar as relações existentes entre os espectros de frequência do sinal de tempo contínuo, do sinal amostrado e do sinal em tempo discreto.

- Apresentar o teorema de amostragem.

Amostragem de sinais analógicos

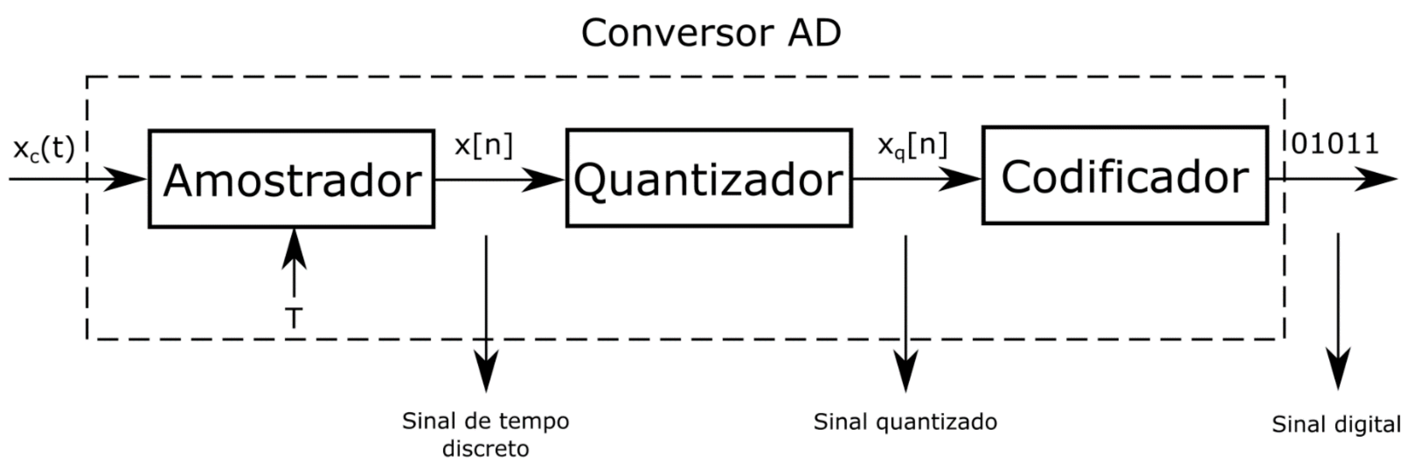
- Em grande parte das aplicações práticas, os sinais envolvidos são analógicos:
  - Sinal de voz;
  - Sinais áudio;
  - Sinais de vídeo;
  - Sinais de radar.

- Para que seja possível o processamento destes sinais por meios digitais, é necessária a conversão destes sinais analógicos em sinais digitais.

- Este procedimento denomina-se conversão analógica-digital (A/D) e é realizada, na prática, por um conversor analógico-digital (ADC).

Amostragem de sinais analógicos

- Um ADC pode ser representado por



  - **Amostragem:** Conversão de sinal de tempo contínuo em um sinal de tempo discreto.
  - **Quantização:** Conversão de sinal de tempo discreto com amplitude contínua em sinal de tempo discreto com amplitude discreta.
  - **Codificação:** Cada valor da sequência $x_q[n]$ é representada por um número binário de b bits.

Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Dado um sinal de tempo contínuo $x_c(t)$ este pode ser representado por uma sequência de tempo discreto:

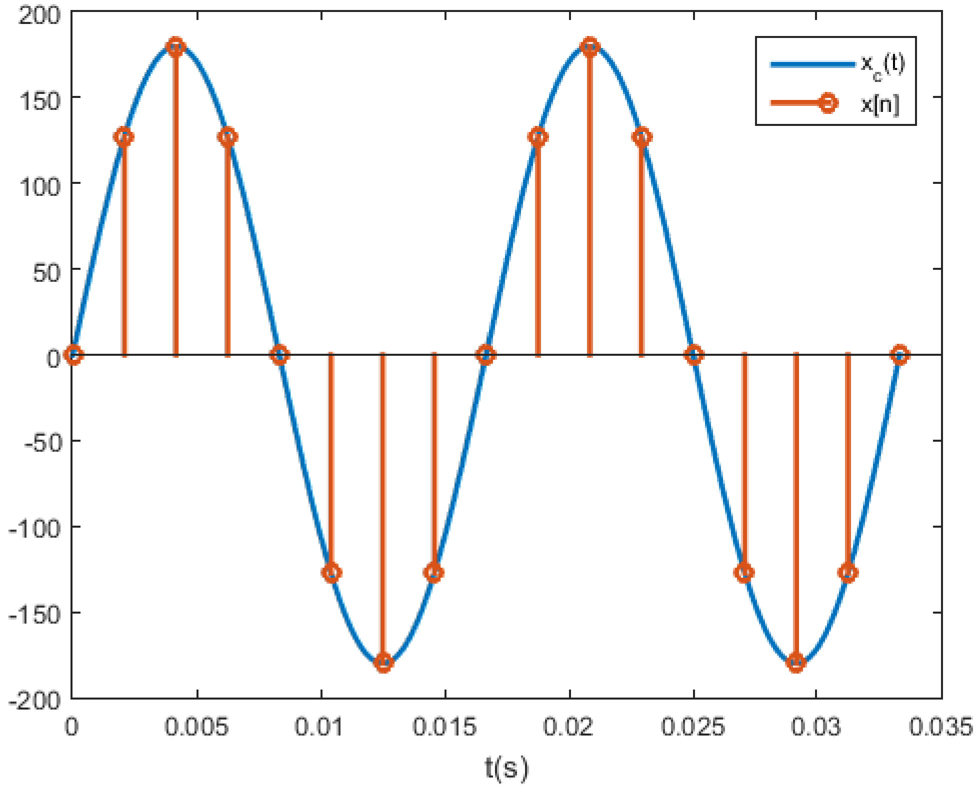
$$x[n] = x_c(nT), \qquad -\infty < n < \infty$$

T ⇒ Período de amostragem (s)

$f_s = \dfrac{1}{T}$ ⇒ Frequência de amostragem (Hz)
Taxa de amostragem (amostras/s)

$\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ ⇒ Frequência de amostragem (rad/s)

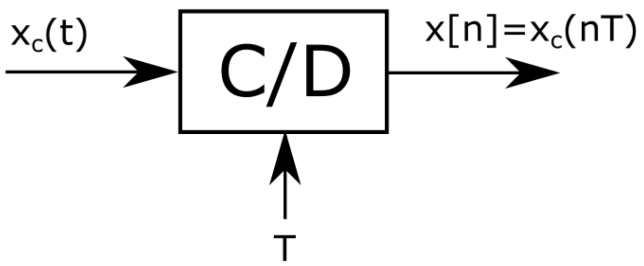
Amostragem de sinais analógicos

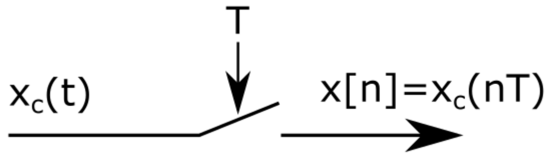


$$x[n] = x_c(nT)$$

Amostragem de sinais analógicos

- Um conversor ideal de tempo contínuo para tempo discreto ideal (C/D) pode ser representado por





Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

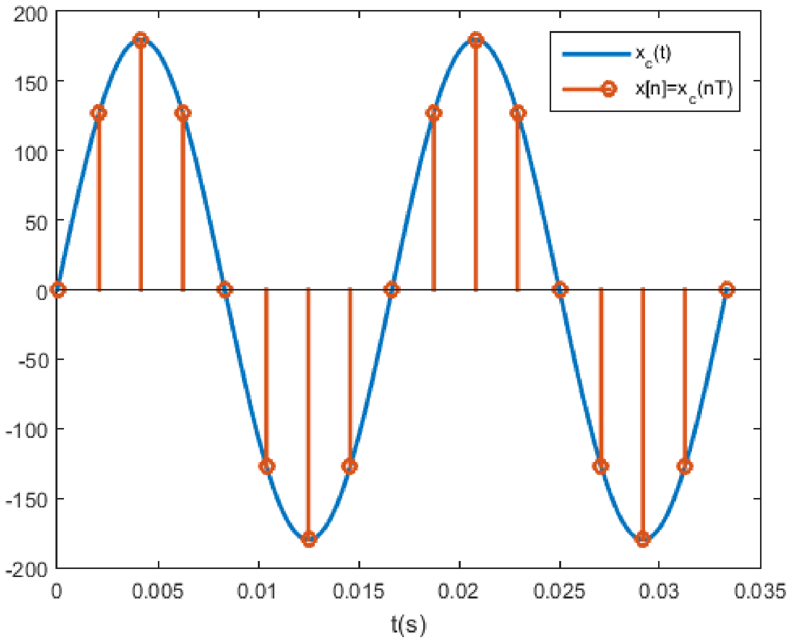
- O procedimento de amostragem, geralmente, não é invertível.

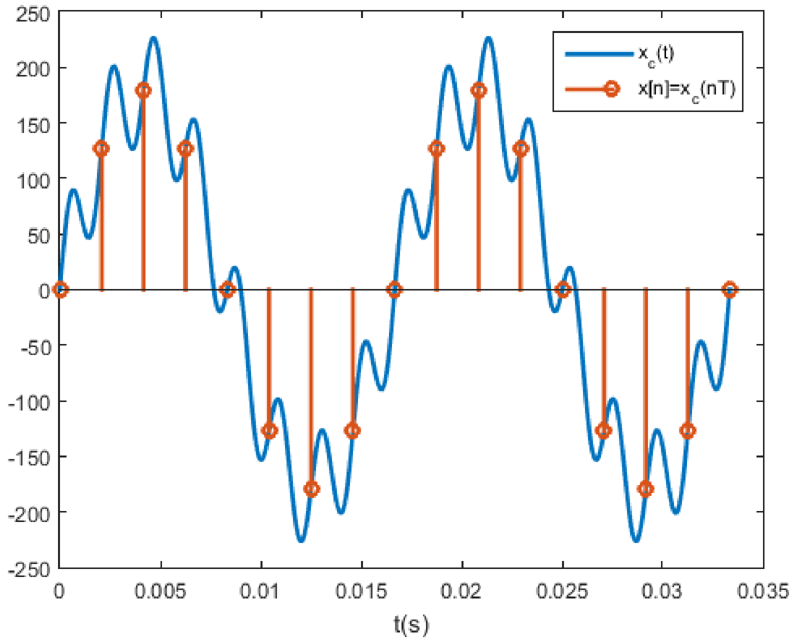
- Dada a saída $x[n]$, pode não ser possível a reconstrução de $x_c(t)$.

- Isso se dá em função de diversos sinais de tempo contínuo produzirem a mesma sequência de saída.

Amostragem de sinais analógicos

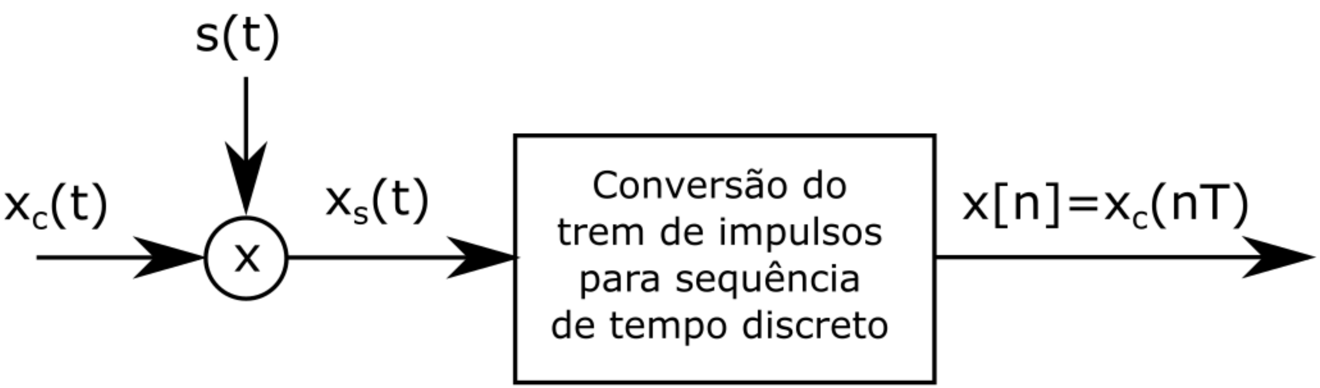
Prof. Dr. Rafael Cardoso





Amostragem de sinais analógicos

- O procedimento de amostragem pode ser representado por

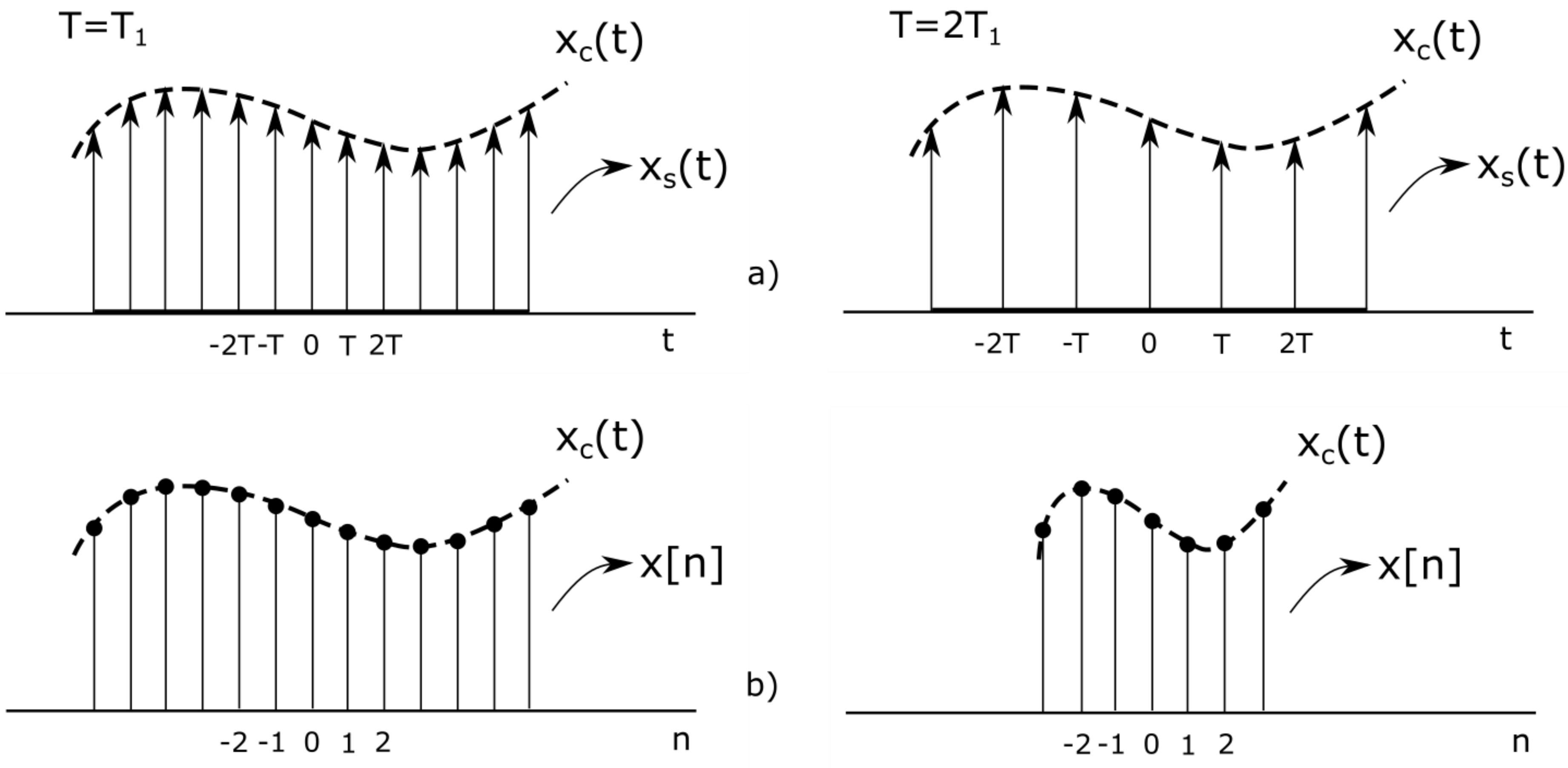


- O sinal $s(t)$ é um trem de impulsos periódico

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Amostragem de sinais analógicos

- Um sinal contínuo amostrado com diferentes períodos é exibido abaixo.



Amostragem de sinais analógicos

- A figura a) exibe o sinal contínuo $x_c(t)$ e o trem de impulsos modulado $x_s(t)$ para duas taxas de amostragem distintas.

- A figura b) mostra as respectivas sequências de saída $x[n]$.

- O sinal $x_s(t)$ é um sinal de tempo contínuo que vale 0 entre os instantes de amostragem que são múltiplos de T.

- O sinal $x[n]$ não é definido entre os instantes de amostragem e é indexado na variável inteira n.

- A variável n não traz informação sobre a taxa de amostragem.

Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um sinal de tempo contínuo

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$$

- Vamos amostrar o sinal com uma taxa de amostragem de $f_s = \frac{1}{T}$ amostras/s:

$$x[n] = x_c(nT) = A\cos(\underbrace{2\pi f T}_{\Omega} n + \theta) = A\cos\left(\frac{2\pi \overbrace{f}^{f_d} n}{f_s} + \theta\right)$$

$$x[n] = A\cos(\Omega T n + \theta) = A\cos(2\pi f_d n + \theta) = A\cos(\omega n + \theta)$$

frequencia do sinal de tempo discreto

$$\omega = \Omega T$$

$$f_d = \frac{f}{f_s}$$

Permite calcular f
se soubermos a frequência
de amostragem f_s

Amostragem de sinais analógicos

- Para sinais de tempo contínuo

$$-\infty < f < \infty$$
$$-\infty < \Omega < \infty$$

- Para sinais de tempo discreto

$$-\frac{1}{2} < f_d < \frac{1}{2}$$
$$-\pi < \omega < \pi$$

Amostragem de sinais analógicos

- Substituindo $f_d = \frac{f}{f_s}$

fs > 2f

$$-\frac{1}{2} < \frac{f}{f_s} < \frac{1}{2}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2} f_s < f < \frac{1}{2} f_s}$$

$$-\frac{1}{2T} < f < \frac{1}{2T}$$

Amostragem de sinais analógicos

- Substituindo $\omega = \Omega T$

$$-\pi < \Omega T < \pi$$

$$\boxed{-\frac{\pi}{T} < \Omega < \frac{\pi}{T}}$$

$$-\pi f_s < \Omega < \pi f_s$$

Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

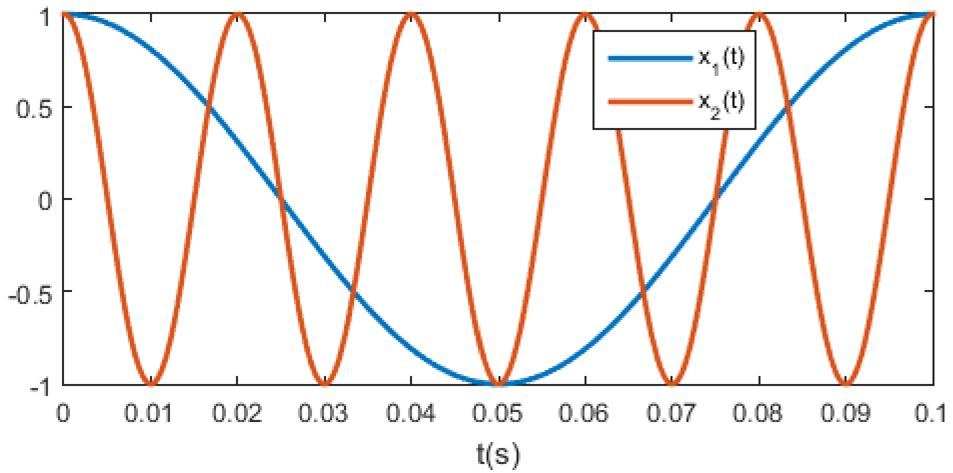
Sinais de Tempo Contínuo		Sinais de Tempo Discreto
$\Omega = 2\pi f$		$\omega = 2\pi f_d$
$\Omega \; - \dfrac{rad}{s}$ $f \; - Hz$		$\omega \; - \dfrac{rad}{amostra}$ $f_d \; - \dfrac{ciclos}{amostra}$
	$\omega = \Omega T \, , f_d = \dfrac{f}{f_s}$	$-\pi \leq \omega \leq \pi$ $-\dfrac{1}{2} \leq f_d \leq \dfrac{1}{2}$
	$\Omega = \dfrac{\omega}{T} \, , f = f_d f_s$	
$-\infty < \Omega < \infty$ $-\infty < f < \infty$		$-\dfrac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \dfrac{\pi}{T}$ $-\dfrac{f_s}{2} \leq f \leq \dfrac{f_s}{2}$

Amostragem de sinais analógicos

- Considere dois sinais de tempo contínuo que serão amostrados:

$$x_1(t) = cos(2\pi 10t)$$

$$x_2(t) = cos(2\pi 50t)$$



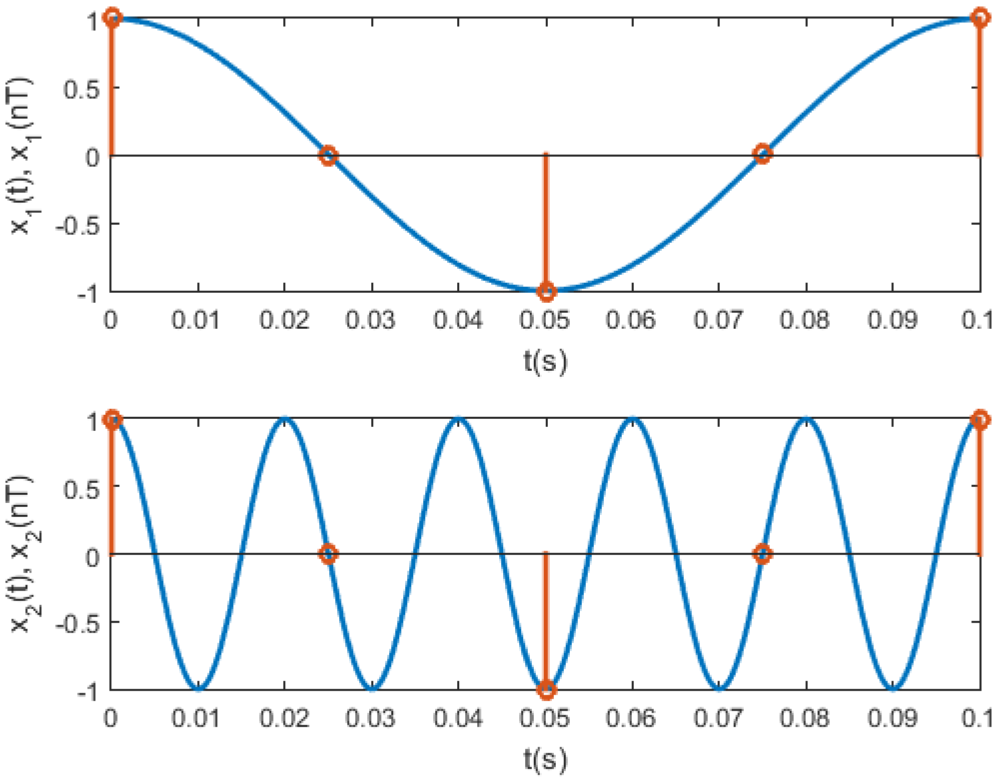
Amostragem de sinais analógicos

- Considerando $f_s = 40\ amostras/s$, $T = {}^{1}/_{f_s} = {}^{1}/_{40}$ s.

$$x_1[n] = cos(2\pi 10Tn) = cos\left(2\pi \frac{10}{40} n\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

$$x_2[n] = cos(2\pi 50Tn) = cos\left(2\pi \frac{50}{40} n\right) = cos\left(\frac{5\pi}{2} n\right)$$

Amostragem de sinais analógicos



Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Observa-se que tem-se dois sinais de tempo contínuo com frequências diferentes que são claramente distintos.

- Todavia, as sequências obtidas através da amostragem desses sinais são idênticas e, portanto, indistinguíveis.

Amostragem de sinais analógicos

- Observe que:

$$cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right) = cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}n\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

- Portanto, $x_2[n] = x_1[n]$.

x2(t) != x1(t) mas

- Logo, se nos for dada a sequência oriunda de $cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ não temos como afirmar se ela advém de $x_1(t)$ ou de $x_2(t)$.

Amostragem de sinais analógicos

- Como $x_2(t)$ fornece os mesmos valores de $x_1(t)$ quando amostrados com $f_s = 40\ amostras/s$ dizemos que $f_2 = 50\ Hz$ é um ***alias*** de $f_1 = 10\ Hz$ na taxa de amostragem de $f_s = 40\ amostras/s$.

- Outras frequências que são ***alias*** de $f_1 = 10\ Hz$ são:
  - $f_3 = 90\ Hz$
  - $f_4 = 130\ Hz$
  - $f_5 = 170\ Hz$
  - $f_k = (f_1 + 40k)\ Hz, k = 1, 2, 3, \ldots$

Amostragem de sinais analógicos

- Em geral, a amostragem de um sinal senoidal de tempo contínuo

$$x_c(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$$

com uma taxa de amostragem $f_s = \frac{1}{T}$ resulta em um sinal de tempo discreto

$$x[n] = A\cos(2\pi f_d n + \theta) \qquad (1)$$

onde $f_d = \frac{f}{f_s}$.

Amostragem de sinais analógicos

- Se for assumido que

$$-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$$

a frequência de tempo discreto

$$-\frac{1}{2} \leq f_d \leq \frac{1}{2}$$

$$-\pi \leq \omega \leq \pi$$

- Neste caso, a relação entre f e f_d é única.
- Não há mais ambiguidade mostrada, pois as frequências estão no intervalo de frequências dos sinais de tempo discreto.
- É possível se reconstruir o sinal de tempo contínuo $x_c(t)$ a partir de suas amostras $x[n]$.

Amostragem de sinais analógicos

- Por outro lado, se senóides

$$x_c(t) = A cos(2\pi f_k t + \theta)$$

onde

$$f_k = f + k f_s, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

são amostradas a uma taxa f_s, é evidente que f_k estará fora do intervalo $-\frac{f_s}{2} \leq f \leq \frac{f_s}{2}$.

Amostragem de sinais analógicos

- Logo,

$$x[n] = x_c(nT) = Acos\left(2\pi\frac{f + kf_s}{f_s}n + \theta\right)$$

$$x[n] = Acos\left(2\pi\frac{f}{f_s}n + \theta + 2\pi kn\right)$$

$$x[n] = Acos(2\pi f_d n + \theta) \qquad (2)$$

- Ou seja, (2) retorna a (1).

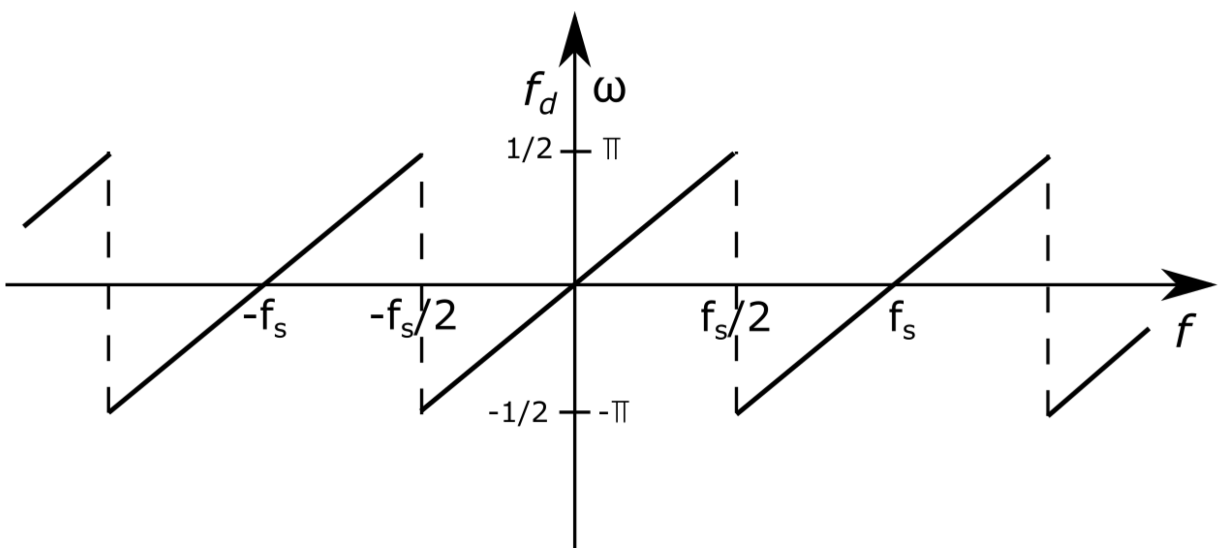
- Um infinito número de sinais de tempo contínuo podem ser representados pelo mesmo sinal de tempo discreto (conjunto de amostras).

Amostragem de sinais analógicos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Isso significa que as frequências $f_k = f + kf_s, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ são indistinguíveis da frequência f após a amostragem.

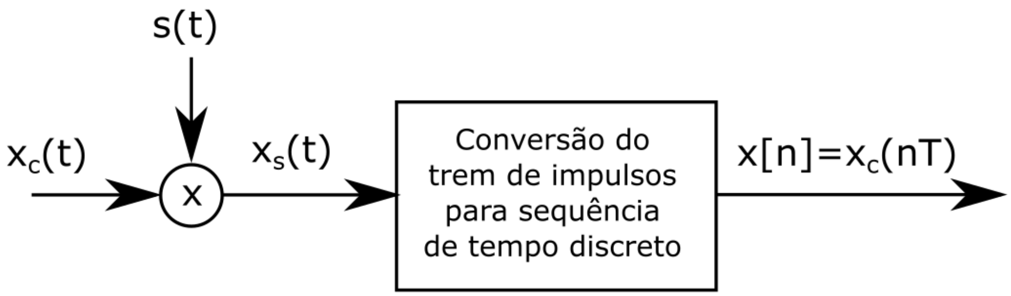
- Neste caso, há infinitos ***aliases*** de f.



Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere o procedimento de amostragem conforme a figura



- O sinal $s(t)$ é um trem de impulsos periódico

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Representação da amostragem no domínio da frequência

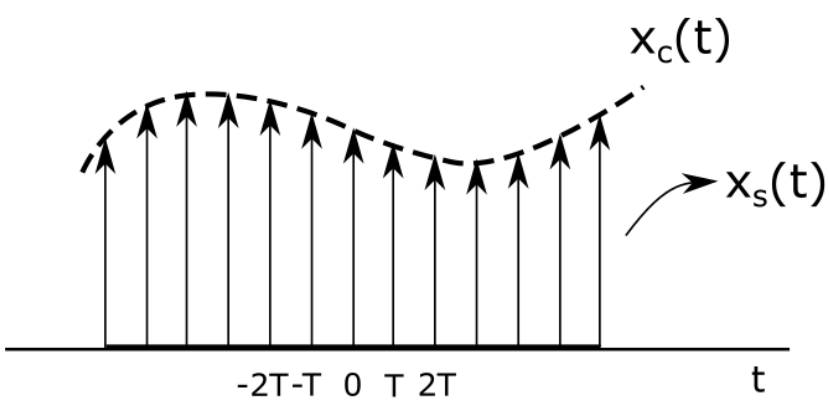
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Modulando $s(t)$ com $x_c(t)$ se obtém

$$x_s(t) = x_c(t)s(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

- Devido a propriedade do peneiramento

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$



Representação da amostragem no domínio da frequência

- A transformada de Fourier do trem de impulsos periódico é

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

onde $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência de amostragem em rad/s.

- A transformada de Fourier do sinal de tempo contínuo a ser amostrado $x_c(t)$ é $X_c(j\Omega)$.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- A transformada de Fourier do produto de duas funções é a convolução das transformadas, isto é,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_c(j\tau) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s - \tau)\, d\tau$$

$$\boxed{X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\big(j(\Omega - k\Omega_s)\big)}$$

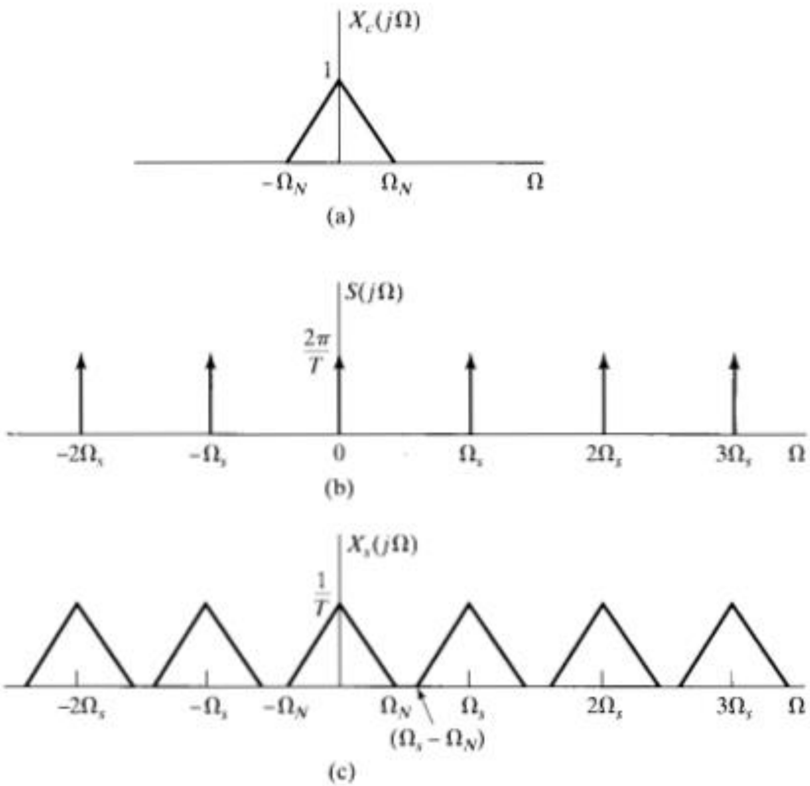
Representação da amostragem no domínio da frequência

- A transformada de Fourier de $x_s(t)$ consiste de cópias periodicamente espaçadas da transformada de Fourier de $x_c(t)$.

- As cópias de $X_c(j\Omega)$ são deslocadas por múltiplos inteiros da frequência de amostragem.

Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Transformada de Fourier de um sinal $x_c(t)$ com banda limitada.

Transformada de Fourier do sinal $s(t)$.

Convolução de $X_c(j\Omega)$ e $S(j\Omega)$.

$$\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N \quad \Rightarrow \quad \Omega_s > 2\Omega_N$$

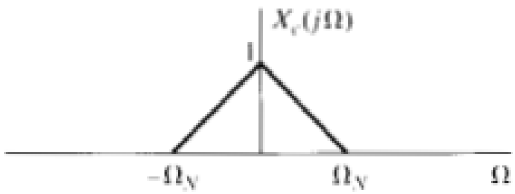
Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

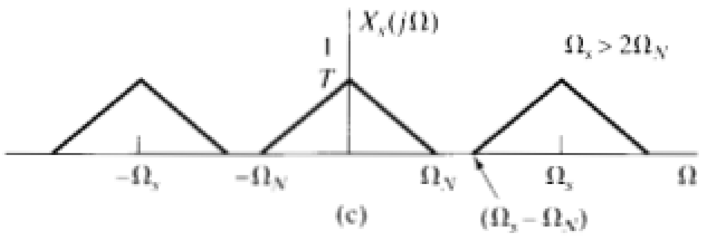
- Conclusão:
  - Se $\Omega_s - \Omega_N > \Omega_N$, isto é, $\Omega_s > 2\Omega_N$, $x_c(t)$ pode ser reconstruído a partir de $x_s(t)$ através do uso de um filtro passa-baixas ideal.

Representação da amostragem no domínio da frequência

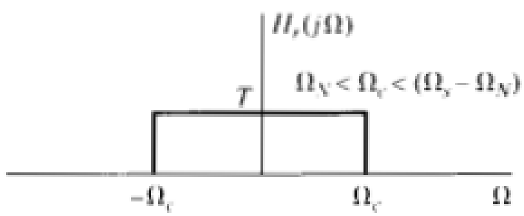
Prof. Dr. Rafael Cardoso



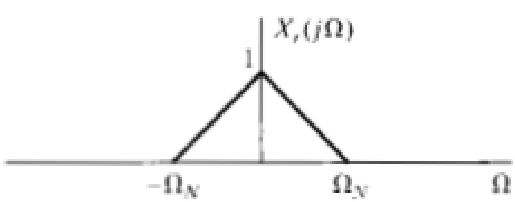
(b)



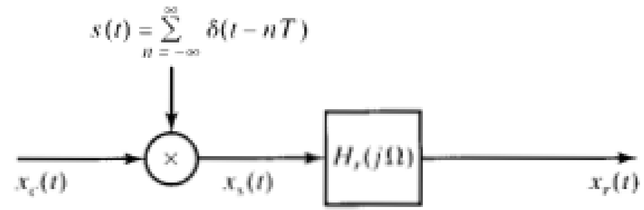
(c)



(d)



(e)

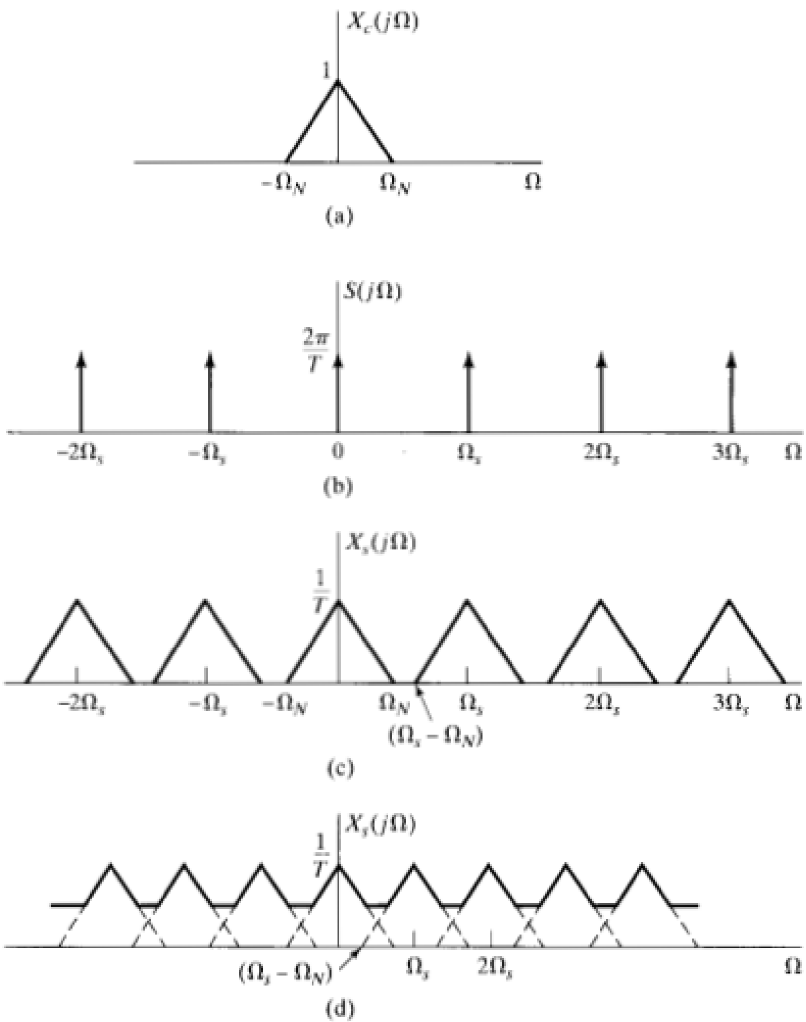


(a)

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X_s(j\Omega) = X_c(j\Omega)$$

Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Transformada de Fourier de um sinal $x_c(t)$ com banda limitada.

Transformada de Fourier do sinal $s(t)$.

Convolução de $X_c(j\Omega)$ e $S(j\Omega)$.

$\Omega_s - \Omega_N \leq \Omega_N$ → $\Omega_s \leq 2\Omega_N$

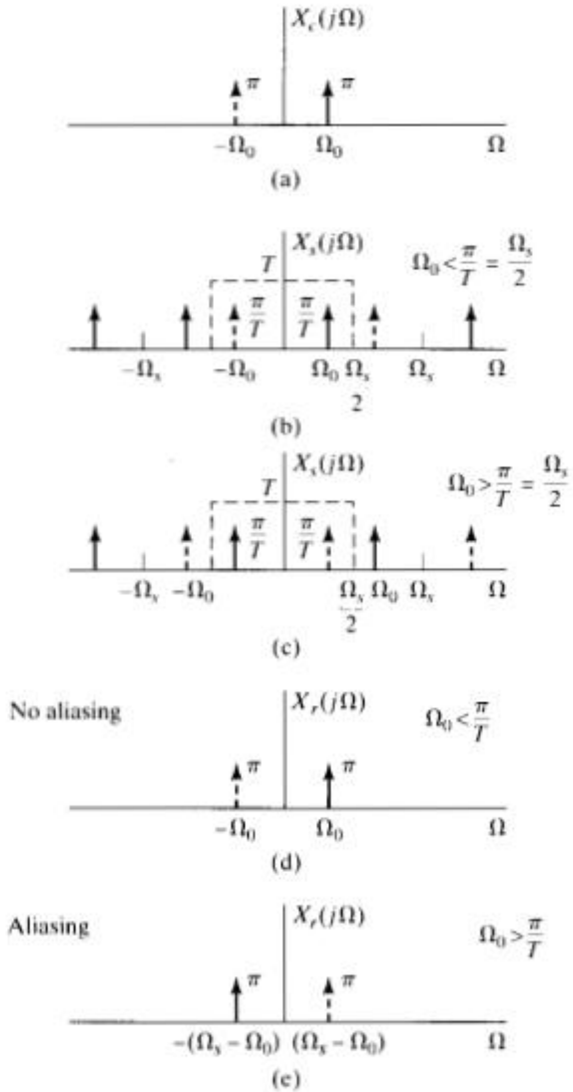
Representação da amostragem no domínio da frequência

- Conclusão:

  - Se $\Omega_s - \Omega_N \leq \Omega_N$, isto é, $\Omega_s \leq 2\Omega_N$, $x_c(t)$ não pode ser reconstruído a partir de $x_s(t)$ através do uso de um filtro-passa baixas ideal.
  - Há sobreposição espectral.
  - A saída reconstruída apresentará distorção de ***aliasing***.

Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Espectro de $x_c(t) = cos(\Omega_0 t)$

$x_r(t) = cos(\Omega_0 t)$

$x_r(t) = cos((\Omega_s - \Omega_0)t)$

Representação da amostragem no domínio da frequência

- **Teorema de Amostragem de Nyquist**
  - Seja $x_c(t)$ um sinal com banda limitada, isto é,

$$X_c(j\Omega) = 0 \quad \text{para} \quad |\Omega| \geq \Omega_N$$

Então, $x_c(t)$ é unicamente determinado por suas amostras $x[n] = x_c(nT)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, se

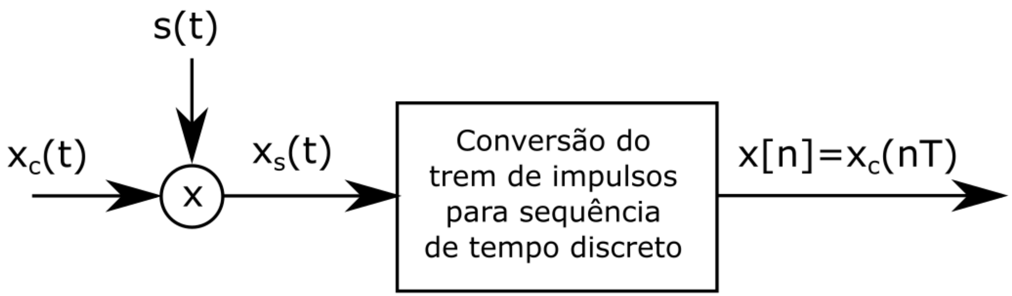
$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

$\Omega_N \Rightarrow$ Frequência de Nyquist

$2\Omega_N \Rightarrow$ Taxa de Nyquist

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Até agora, consideramos o modulador por trem de impulsos e o sinal amostrado $x_s(t)$ que é de tempo contínuo.



- Agora, o objetivo é analisar o espectro de frequência do sinal amostrado de tempo discreto $x[n]$, isto é, $X(e^{j\omega})$.

- Vamos representar $X(e^{j\omega})$ em função de $X_c(j\Omega)$ e $X_s(j\Omega)$.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Considere

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t - nT)$$

- Aplicando a transformada de Fourier de tempo contínuo, resulta

$$X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega Tn}$$

mas,

$$x[n] = x_c(nT)$$

e, consequentemente,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \Rightarrow$$

Transformada de Fourier de tempo discreto.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Logo,

$$X_s(j\Omega) = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\Omega T} = X\left(e^{j\Omega T}\right)$$

ou

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_s(j\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T}} = X_s\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$

- De

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\big(j(\Omega - k\Omega_s)\big)$$

resulta

$$X\left(e^{j\Omega T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\big(j(\Omega - k\Omega_s)\big)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - k\frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Conclusão:
  - $X(e^{j\omega})$ é uma versão de $X_s(j\Omega)$ com frequência em escala.
  - O fator de escala é $\omega = \Omega T$.
  - Para $\Omega = \Omega_s \Rightarrow \omega_s = 2\pi$.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Exemplo 1
  - Seja $x_c(t) = cos(4000\pi t)$, $T = \frac{1}{6000} s$. Assim,

$$x[n] = x_c(nT) = cos\left(4000\pi \frac{1}{6000} n\right) = cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 12000\pi\ rad/s$$

  - A maior frequência do sinal é $\Omega_N = 4000\pi\ rad/s$.
  - Como $\Omega_s > \Omega_N$ não haverá *aliasing*.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- A transformada de Fourier de $x_c(t)$ é

$$X_c(j\Omega) = \pi\delta(\Omega - 4000\pi) + \pi\delta(\Omega + 4000\pi)$$

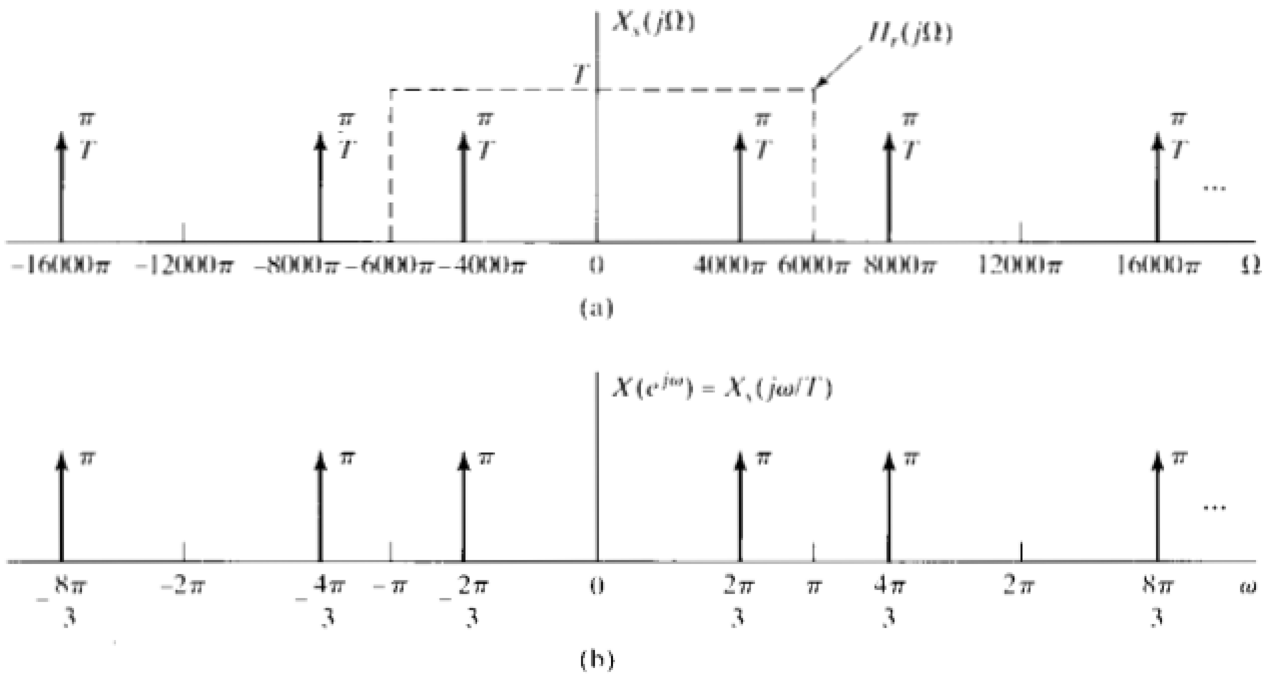
- Assim,

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\big(j(\Omega - k\Omega_s)\big)$$

Representação da amostragem no domínio da frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para $\Omega_s = 12000\pi$:



$$\delta\left(\frac{\omega}{T}\right) = T\delta(\omega)$$

- Sinal reconstruído adequadamente.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Exemplo 2
  - Seja $x_c(t) = cos(4000\pi t)$, $T = \frac{1}{1500}s$. Assim,

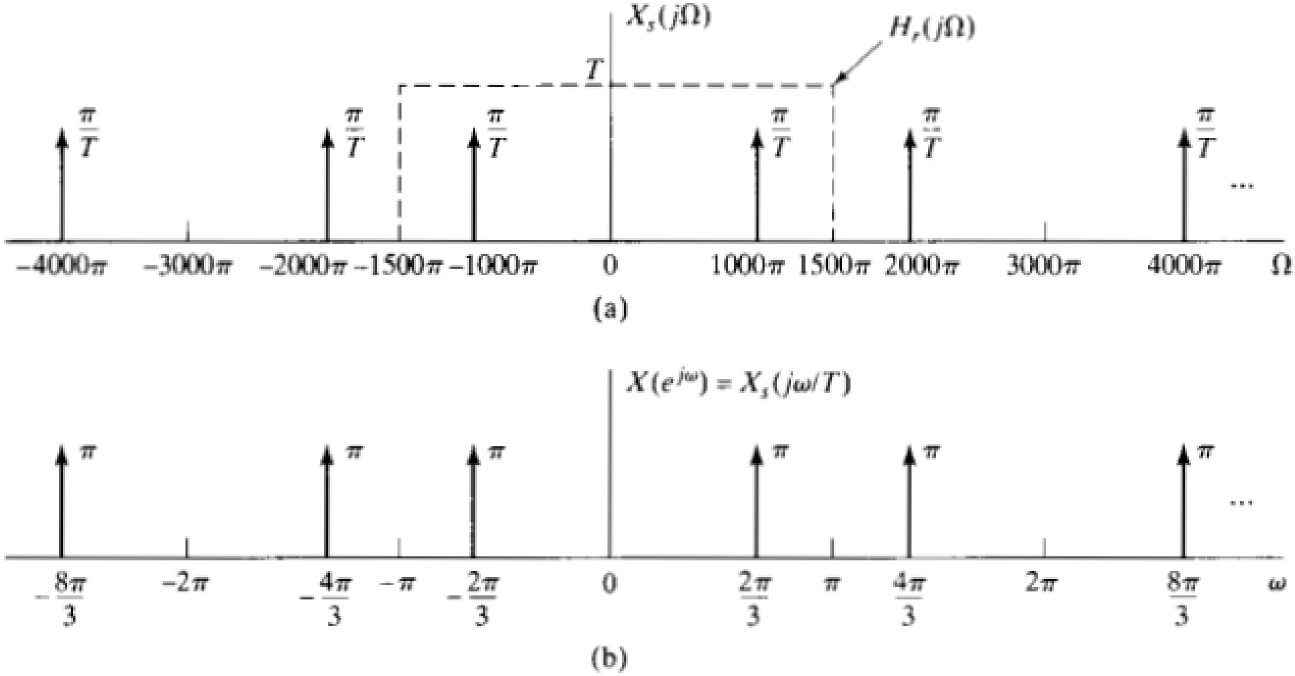
$$x[n] = x_c(nT) = cos\left(4000\pi \frac{1}{1500} n\right) = cos\left(\frac{8\pi}{3} n\right)$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 3000\pi\ rad/s$$

  - A maior frequência do sinal é $\Omega_N = 4000\pi\ rad/s$.
  - Como $\Omega_s < \Omega_N$ haverá *aliasing*.

Representação da amostragem no domínio da frequência

- Para $\Omega_s = 3000\pi$:

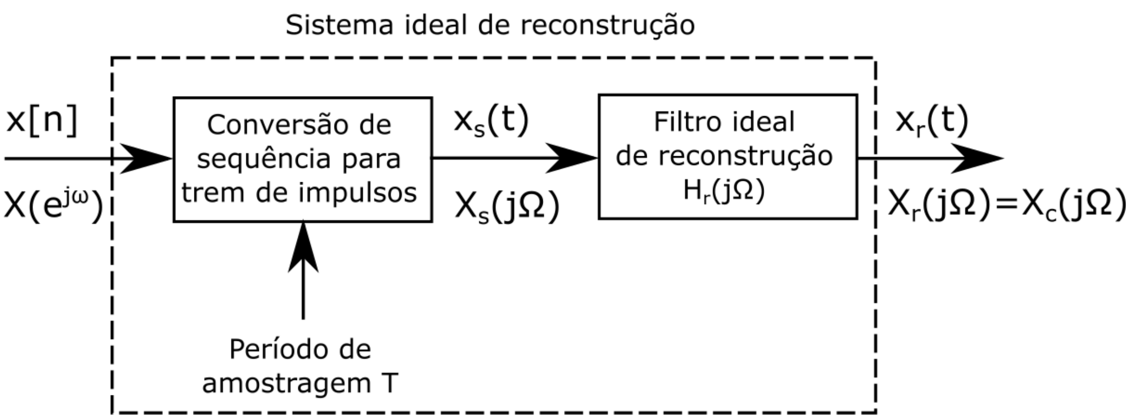


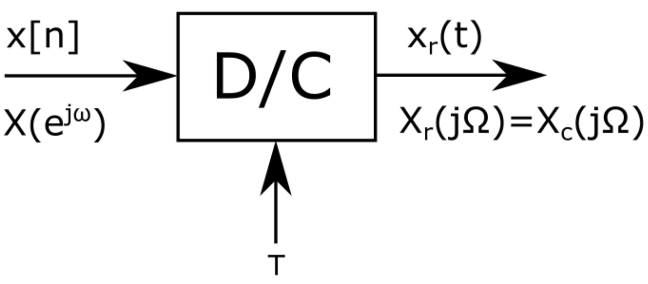
- Na reconstrução teremos $\Omega_0 = 1000\pi\, rad/s$ ao invés de $\Omega_0 = 4000\pi\, rad/s$.

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Se o teorema de amostragem de Nyquist for satisfeito.
- Se o filtro passa baixas de reconstrução for ideal.
  - O sinal contínuo $x_r(t) = x_c(t)$.
  - A transformada de Fourier do sinal reconstruído é igual a do sinal contínuo, isto é, $X_r(j\Omega) = X_c(j\Omega)$.





Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Dada uma sequência $x[n]$, pode-se formar um trem de impulsos $x_s(t)$:

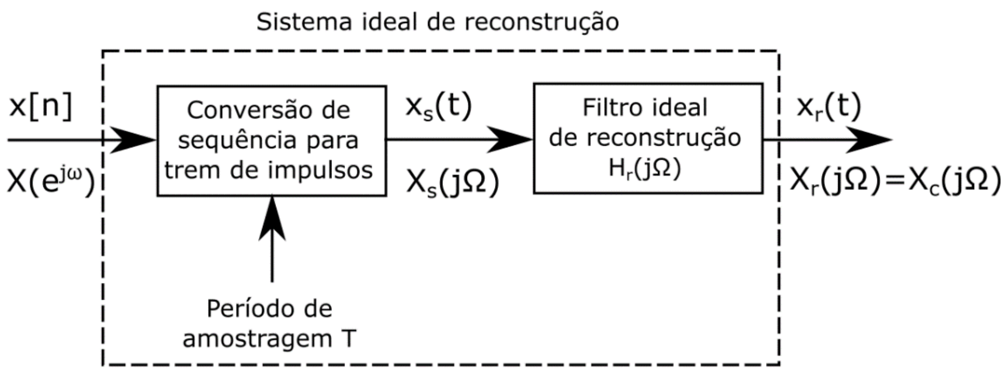
$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

- A n-ésima amostra está associada com o impulso em $t = nT$, onde T é o período de amostragem de $x[n]$.

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere o trem de impulsos como entrada de um filtro passa-baixas ideal de tempo contínuo.
- O filtro tem resposta em frequência $H_r(j\Omega)$ e resposta ao impulso $h_r(t)$.



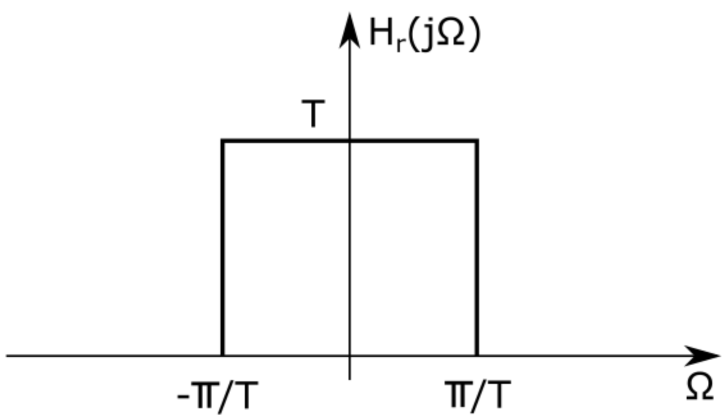
- O sinal reconstruído $x_r(t)$ é calculado por

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT) \quad (3)$$

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

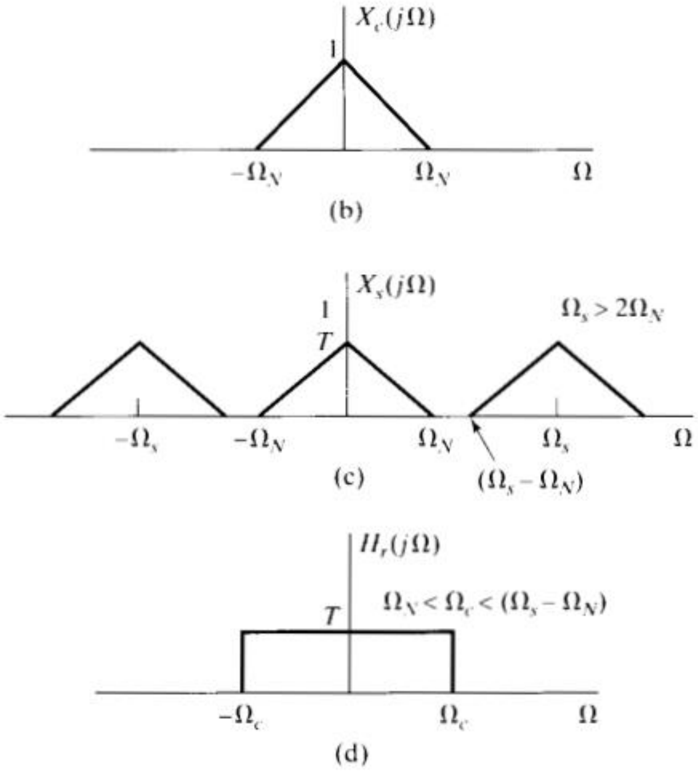
- O filtro tem um ganho T para compensar o fator de escala $\frac{1}{T}$.
- O filtro tem uma frequência de corte Ω_c entre Ω_N e $\Omega_s - \Omega_N$. Tipicamente, se utiliza

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$$



Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

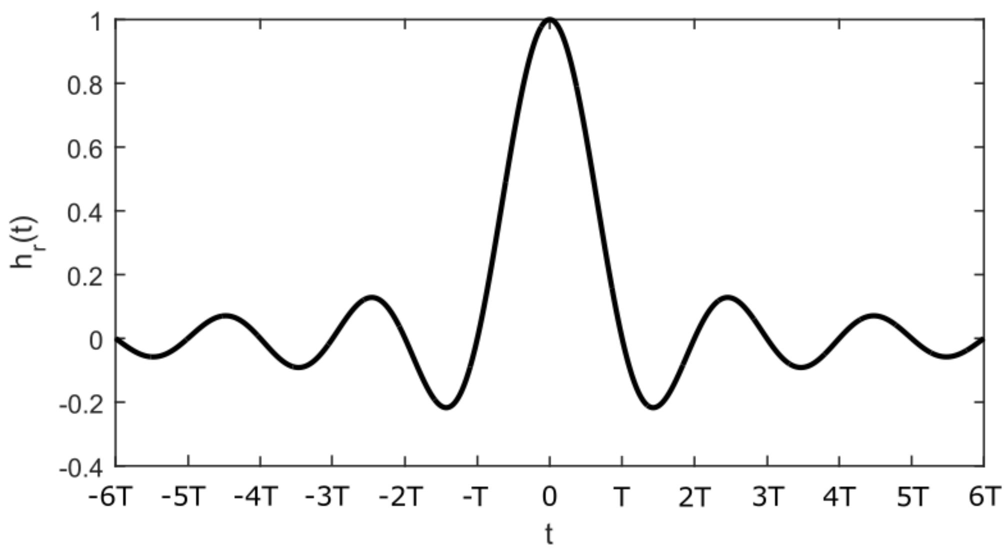


Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A resposta ao impulso $h_r(t)$ é $\mathcal{F}^{-1}\{H_r(j\Omega)\}$:

$$h_r(t) = \frac{sen\left(\pi t/_T\right)}{\pi t/_T} \qquad (4)$$

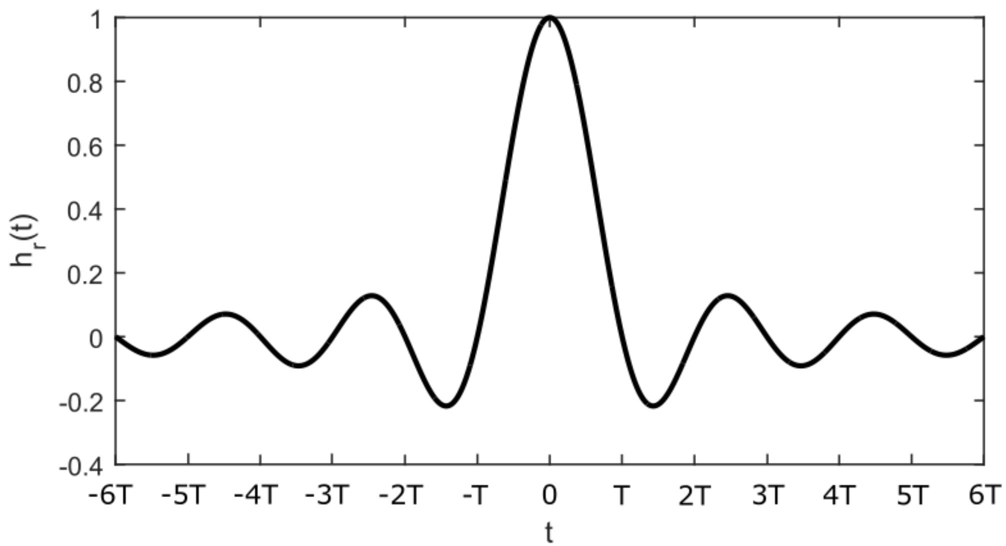


Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

- Substituindo (4) em (3):

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{sen\left(\pi(t-nT)/_T\right)}{\pi(t-nT)/_T} \qquad (5)$$

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras



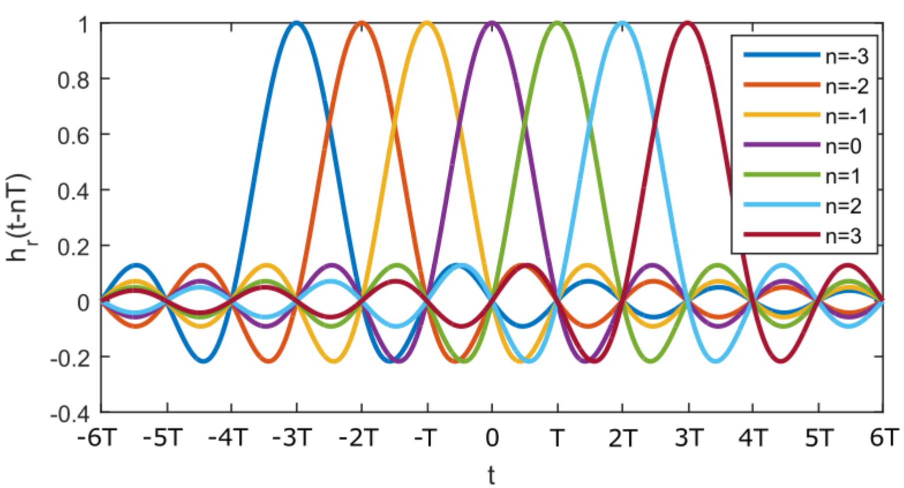
- Observe que:
  - $h_r(0) = 1$
  - $h_r(nT) = 0, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

- Deslocando $h_r(t)$ resulta

$$h_r(t-nT)=\frac{sen\left(\pi(t-nT)/_{T}\right)}{\pi(t-nT)/_{T}}$$

- Logo :
  - $h_r(mT-nT)=1, m=n$
  - $h_r(mT-nT)=0, m\neq n, m\in\mathbb{Z}.$



Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

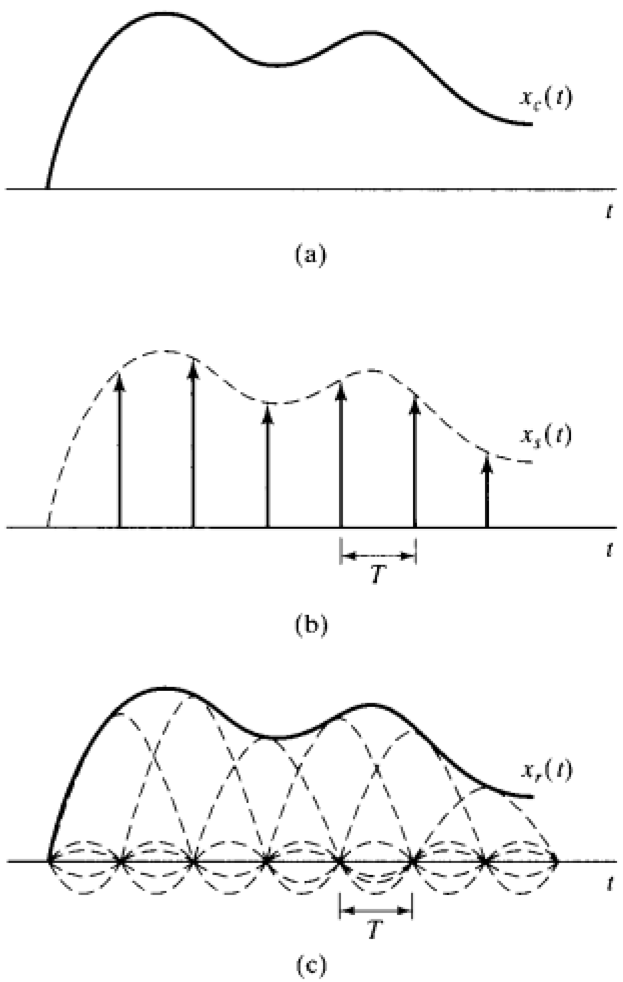
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Ou seja, o sinal reconstruído por (5) tem os mesmos valores de $x_c(t)$ nos instantes de amostragem.

- Entre os instantes de amostragem, (5) faz uma interpolação.

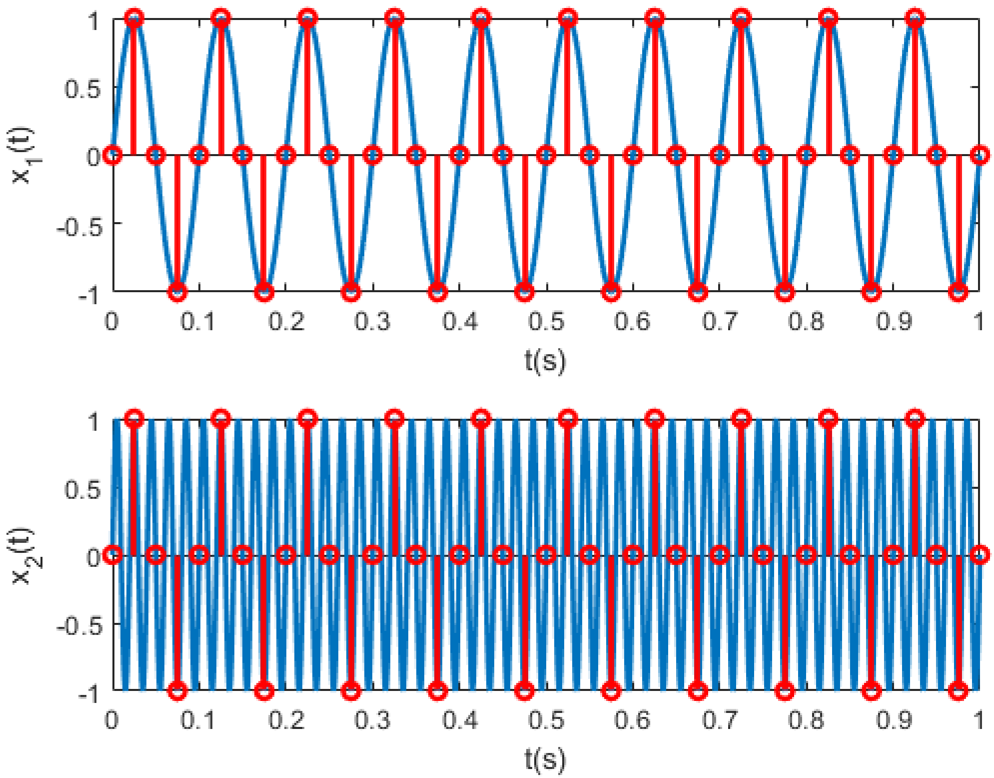
Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso



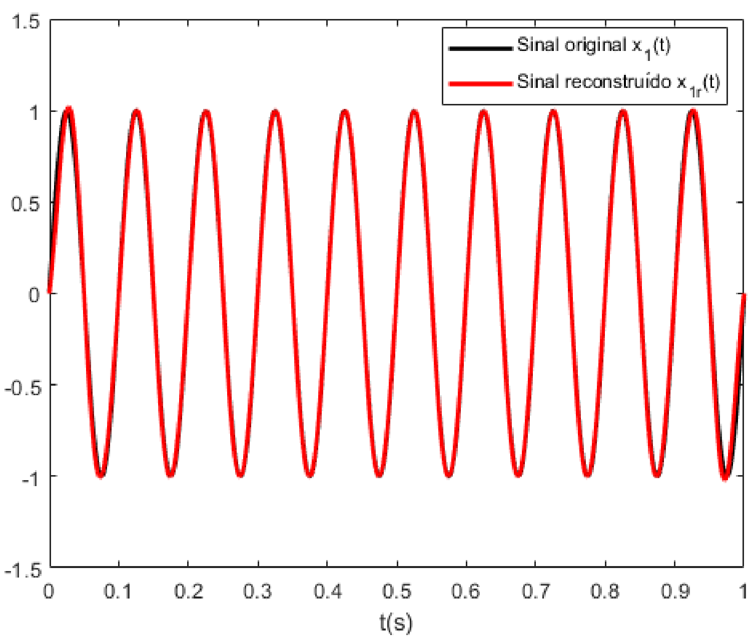
Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

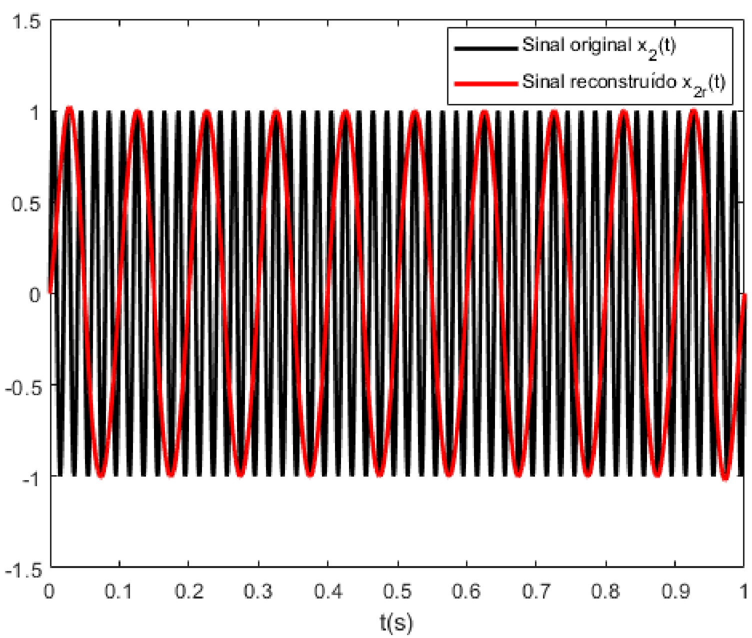
Prof. Dr. Rafael Cardoso



Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso





Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A análise do conversor discreto/contínuo no domínio da frequência parte de

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT)$$

- Aplicando a transformada de Fourier de tempo contínuo e considerando a propriedade do deslocamento no tempo resulta

$$X_r(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] H_r(j\Omega) e^{-j\Omega T n}$$

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

- Fatorando $H_r(j\Omega)$

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\overbrace{\Omega T}^{\omega} n}}_{\text{Transformada de Fourier de tempo discreto de } x[n]}$$

- Logo,

$$X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)X\left(e^{j\Omega T}\right) \tag{6}$$

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- De acordo com (6), o espectro da sequência $x[n]$, isto é, $X(e^{j\omega})$, é desnormalizado ($\omega = \Omega T$).

- A reposta em frequência do filtro de reconstrução $H_r(j\Omega)$ incorpora o período T para compensar o fator $\frac{1}{T}$ inerente da amostragem.

- Se o teorema de Nyquist for atendido, o sinal reconstruído $x_r(t)$ será igual ao sinal original $x_c(t)$ com banda limitada.

Reconstrução de Sinais com Banda Limitada a Partir de suas Amostras

- O sinal reconstruído $x_r(t)$ sempre terá banda limitada no máximo a frequência de corte do filtro passa-baixas de resconstrução.

- A frequência de corte do filtro passa-baixas de reconstrução é, geralmente,

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2}$$