

PROCESSAMENTO DE SINAIS

Análise de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Apresentar os conceitos de análise em frequência baseados na análise de Fourier.
- Descrever a análise em frequência para sinais de tempo contínuo periódicos e não periódicos.
- Descrever a análise em frequência para sinais de tempo discreto periódicos e não periódicos.

Princípio da Análise de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Decompor um sinal em termos de componentes senoidais (exponenciais complexas).



- Representação no domínio da frequência.



- Determinação do espectro de frequência do sinal.

Possíveis Representações

Prof. Dr. Rafael Cardoso

TEMPO	SINAL PERIÓDICO	SINAL NÃO PERIÓDICO
CONTÍNUO	Série de Fourier	Transformada de Fourier
DISCRETO	Série de Fourier de Tempo Discreto	Transformada de Fourier de Tempo Discreto

SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO PERIÓDICOS

SÉRIE DE FOURIER - FS

Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um sinal periódico $x(t)$ com período T .
- Objetiva-se representar o sinal $x(t)$ através de uma combinação linear de exponenciais harmonicamente relacionadas da forma

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t} \quad (1)$$

que é periódica com período fundamental $T = 1/f$.

- A representação (1) é denominada de Série de Fourier de $x(t)$.

Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Observe que

$$e^{j2\pi kft} = \cos(2\pi kft) + j\sin(2\pi kft)$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

- A frequência f determina o período fundamental de $x(t)$ enquanto os coeficientes c_k determinam a forma do sinal.

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Multiplicando-se (1), em ambos os lados, por $e^{-j2\pi f l t}$, onde l é um inteiro, e integrando-se sobre um período tem-se:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi f l t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j2\pi f l t} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t} \right) dt \quad (2)$$

- O lado direito resulta em

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi f(k-l)t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{j2\pi f(k-l)t}}{j2\pi f(k-l)} \Big|_{t_0}^{t_0+T}$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Substituindo-se os limites de integração, para $k \neq l$, o resultado é zero.
- Se $k = l$, tem-se

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt = t \Big|_{t_0}^{t_0+T} = T$$

- Consequentemente, (2) torna-se

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi l f t} dt = c_l T$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Logo, os coeficientes e Fourier podem ser calculados por

$$c_l = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi l f t} dt$$

- Como t_0 é arbitrário, pode-se integrar em qualquer intervalo T . Assim,

$$c_l = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi l f t} dt$$

Convergência da Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ **Teorema de Fourier**

“Seja $x(t)$ periódica com período T . Adicionalmente, sejam $x(t)$ e $x'(t)$ seccionalmente contínuas no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Então, a série de Fourier de $x(t)$ converge para $x(t)$ em todos os pontos onde é contínua e para $\frac{[x(t^+) + x(t^-)]}{2}$ onde $x(t)$ é descontínua.”

Série de Fourier para Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi kft} dt$$

EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kft}$$

Outras Representações da Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais periódicos reais, c_k e c_{-k} são complexos conjugados, isto é,

$$c_k = |c_k|e^{j\theta_k},$$
$$c_{-k} = |c_k|e^{-j\theta_k}.$$

- Com isso, a série de Fourier pode ser representada por

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi kft + \theta_k) \quad (3)$$

onde c_0 é real.

Outras Representações da Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Outra representação pode ser obtida expandindo-se o termo cosenoidal de (3)

$$\cos(2\pi kft + \theta_k) = \cos(2\pi kft)\cos(\theta_k) - \sin(2\pi kft)\sin(\theta_k).$$

- Logo,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2\pi kft) - b_k \sin(2\pi kft)),$$

$$a_0 = c_0,$$

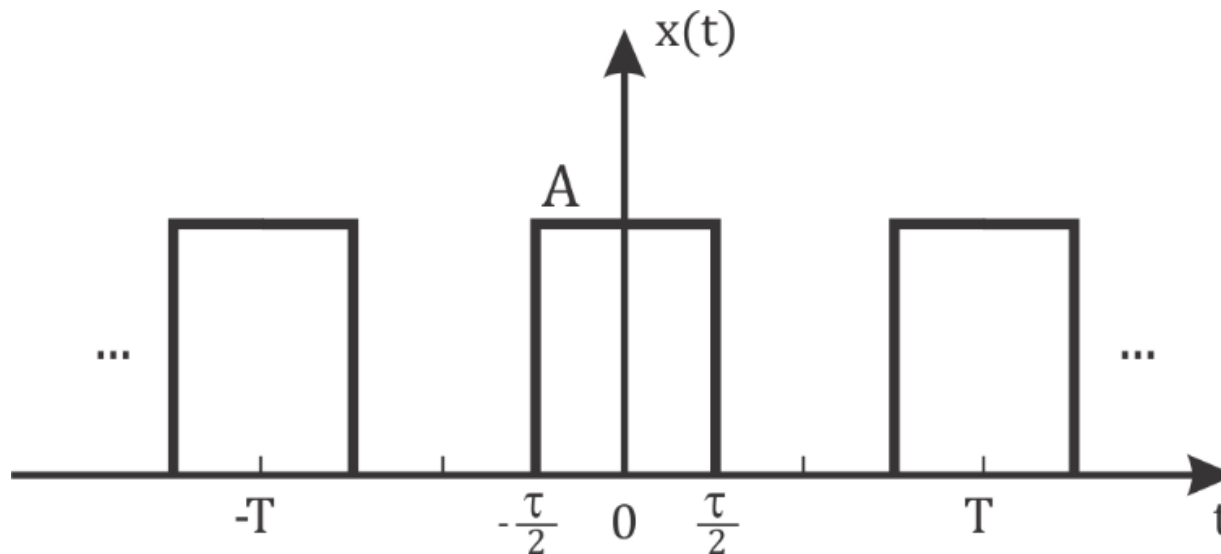
$$a_k = 2|c_k|\cos(\theta_k),$$

$$b_k = 2|c_k|\sin(\theta_k).$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine a representação de Fourier para o sinal ilustrado abaixo.



- Considere $A = 50$, $T = 1\text{ s}$ e $\tau = 0,5T$.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Utiliza-se

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-j2\pi k f t} dt$$

com limites de integração de $-\tau/2$ a $\tau/2$.

- Para $k = 0$ (fornece o nível CC do sinal):

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A dt = \frac{A\tau}{T}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

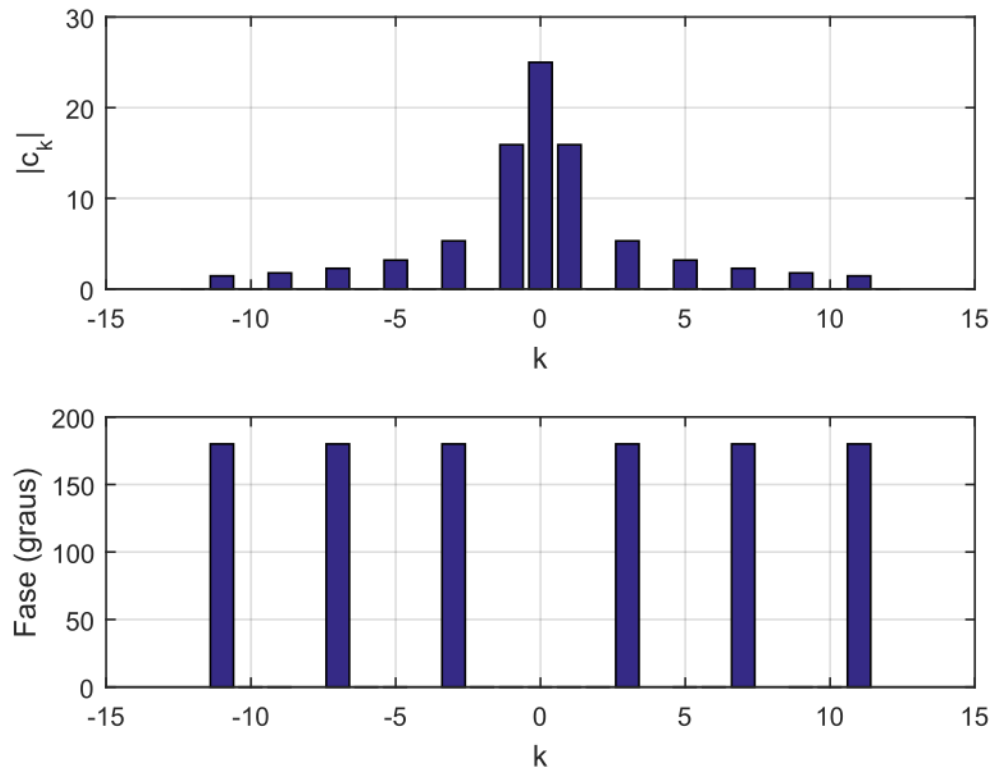
□ Para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi k f t} dt = \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-j2\pi k f t}}{-j2\pi k f} \right] \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{A}{\pi k f T} \frac{e^{j\pi k f \tau} - e^{-j\pi k f \tau}}{j2} \\ &= \frac{A\tau \operatorname{sen}(\pi k f \tau)}{T \pi k f \tau}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

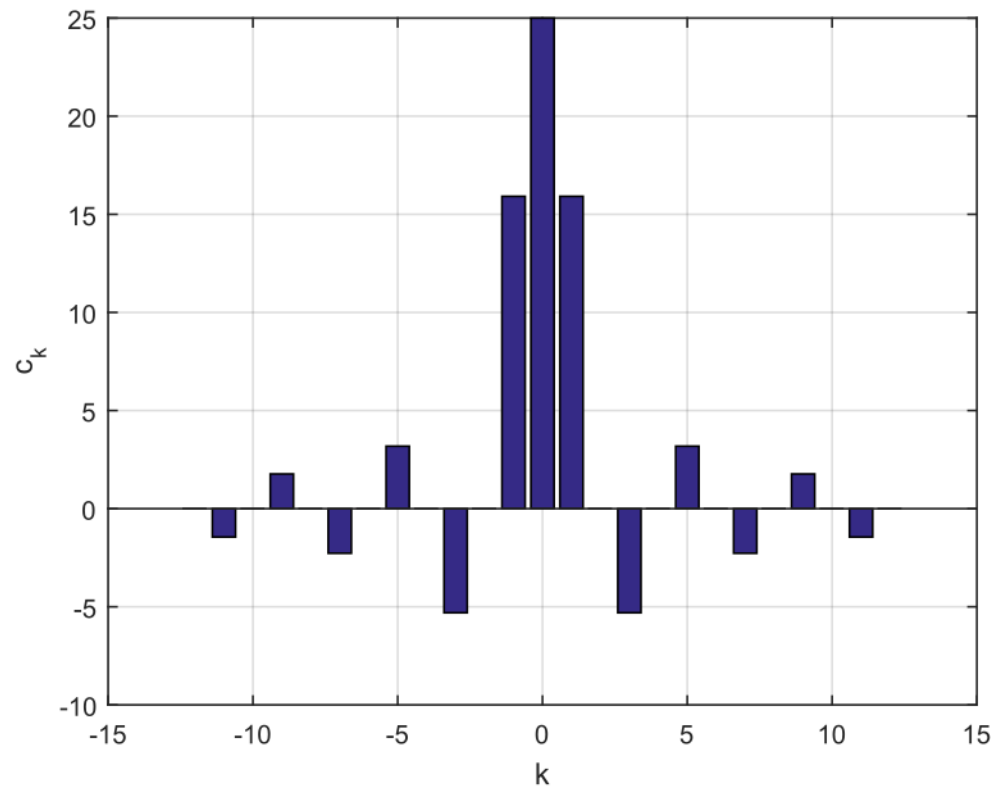
- Módulo e fase dos coeficientes de Fourier c_k para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como os coeficientes são todos reais, pode-se agrupar a magnitude e a fase em um único gráfico.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

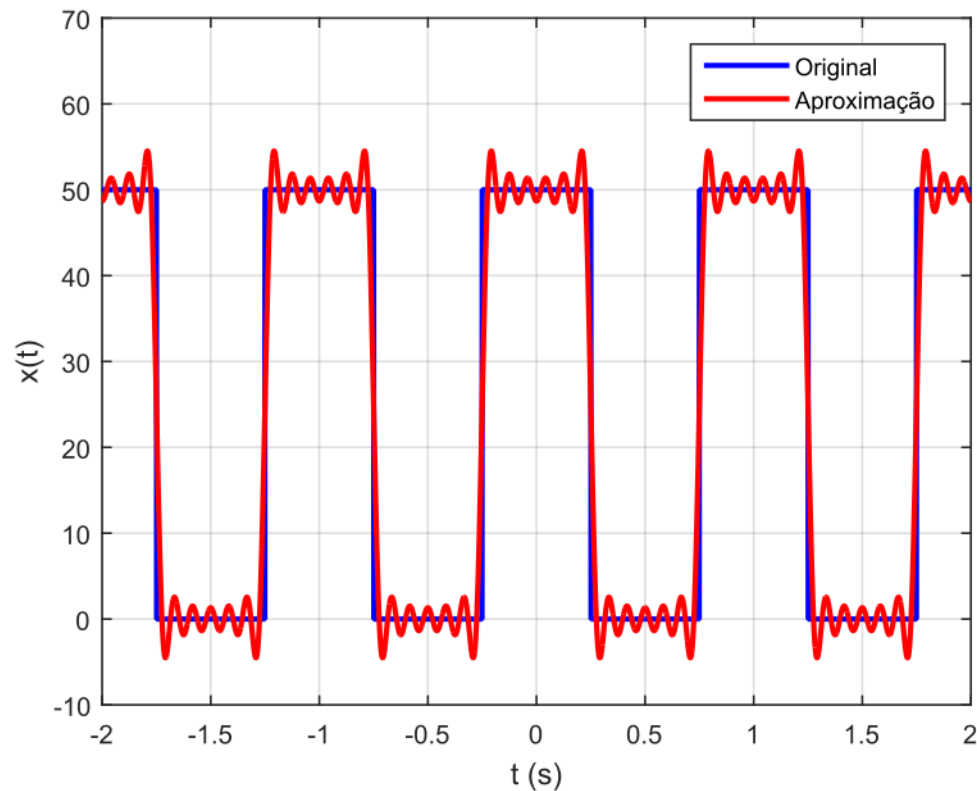
- Frequências presentes no sinal (espectro de frequência).
Observe que a frequência fundamental é $f = 1 \text{ Hz}$.

k	Frequência (Hz)	Amplitude	Fase (graus)
0	CC	25	0
1	1	31,83	0
3	3	10,61	180
5	5	6,37	0
7	7	4,55	180
9	9	3,53	0
11	11	2,89	180

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

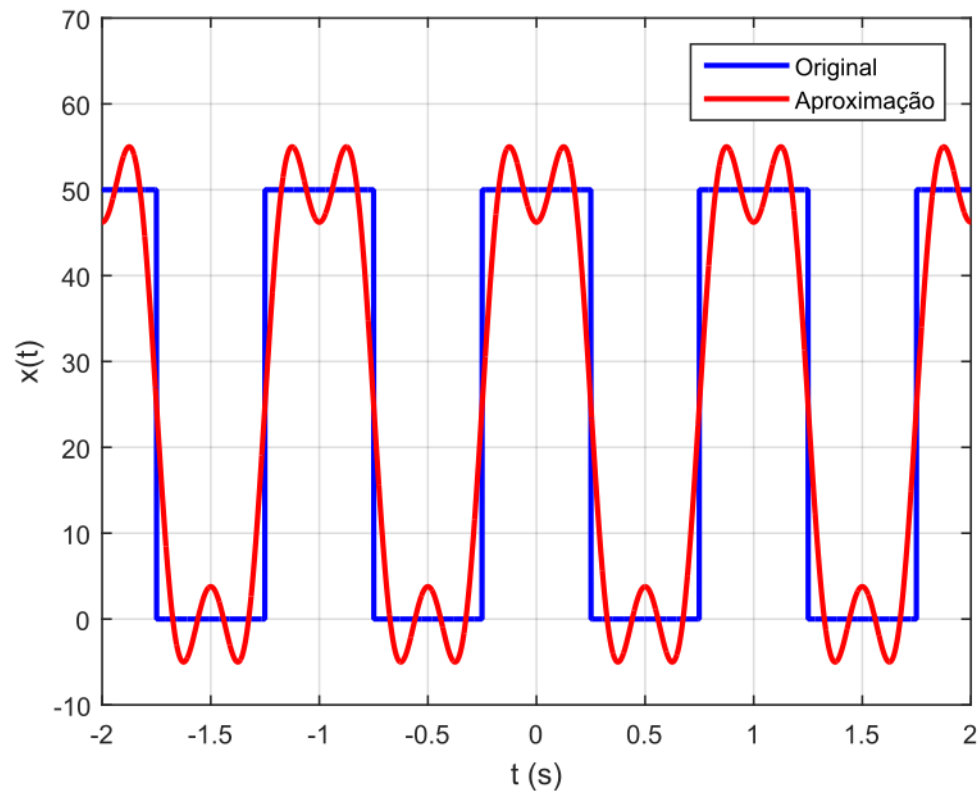
- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

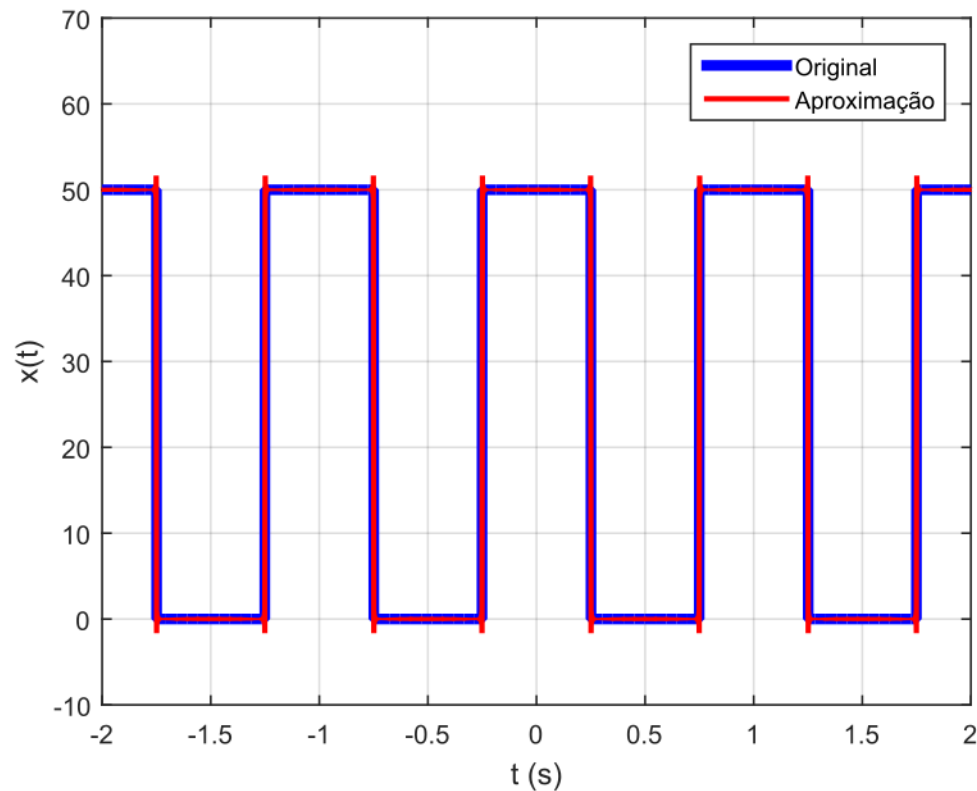
- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 1500$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Fica evidente a influência dos coeficientes c_k na forma do sinal reconstruído.
- Para ilustrar a influência da frequência fundamental na reconstrução do sinal, considere o mesmo sinal $x(t)$ analisado, porém, com período $T = 0,1$ s.
- Adicionalmente, sejam os dois casos já utilizados para a variação de k :
 - ▣ $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12,$
 - ▣ $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3.$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como a frequência fundamental é $f = 10 \text{ Hz}$ tem-se:

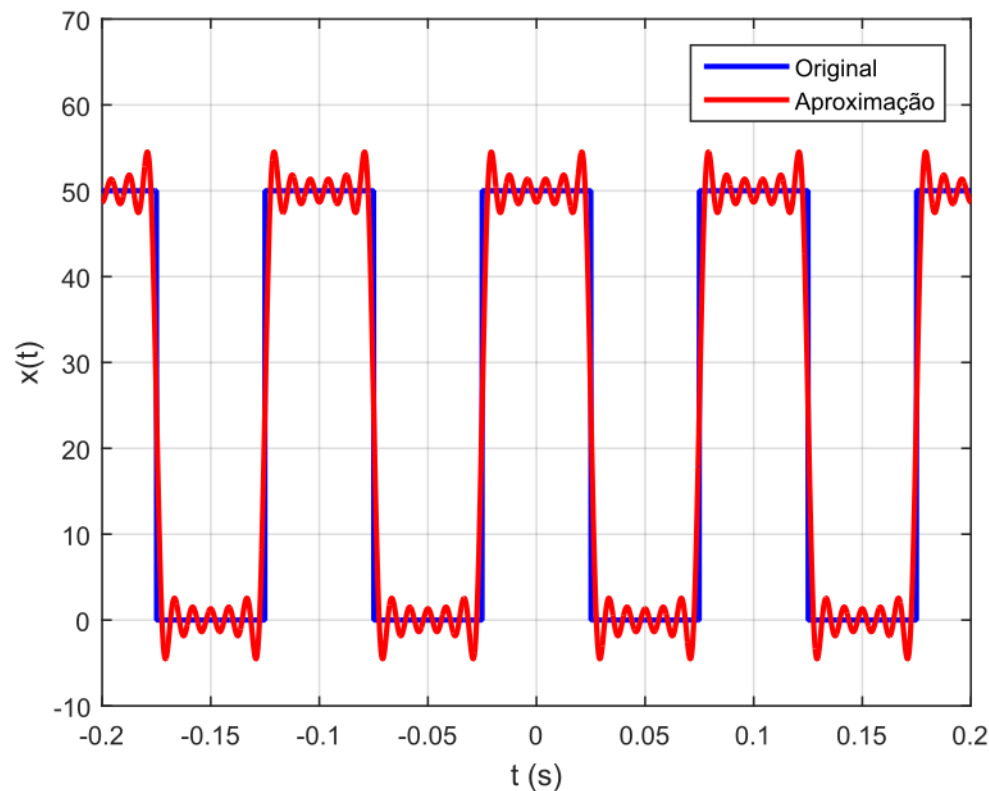
k	Frequência (Hz)	Amplitude	Fase (graus)
0	CC	25	0
1	10	31,83	0
3	30	10,61	180
5	50	6,37	0
7	70	4,55	180
9	90	3,53	0
11	110	2,89	180

- Como a forma da onda é a mesma, tem-se os mesmos componentes. Porém, agora, múltiplos de 10 Hz .

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.

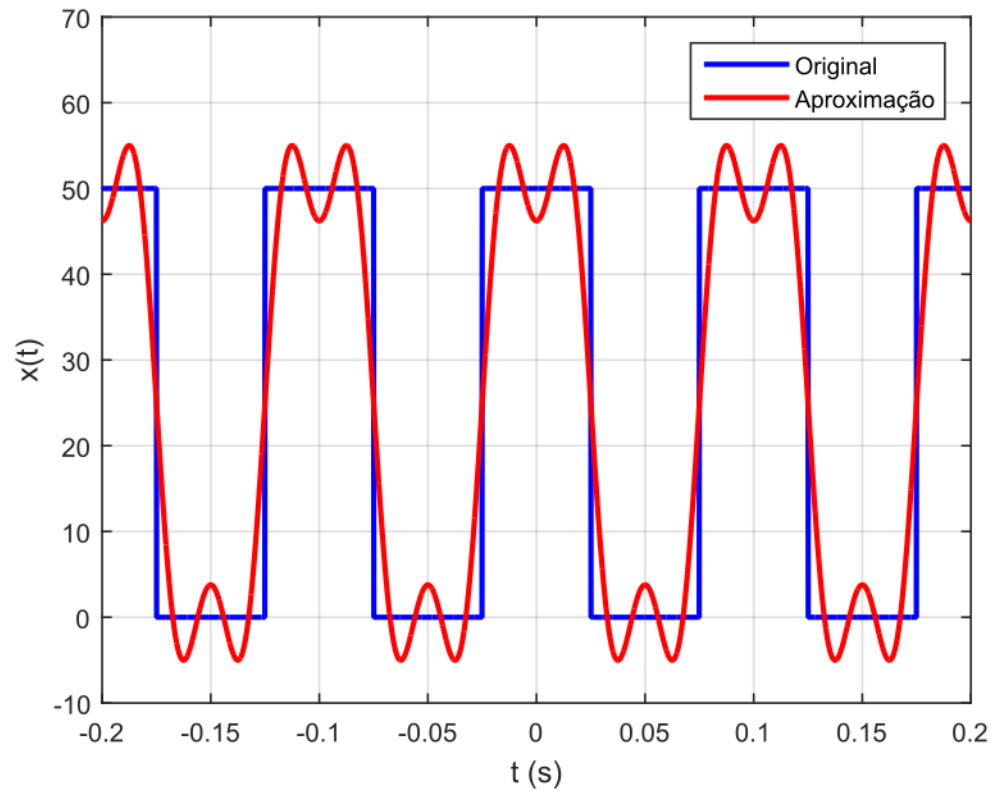


- A forma de onda é igual ao caso anterior. Porém, o período fundamental, agora, é $T = 0,1 \text{ s}$.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

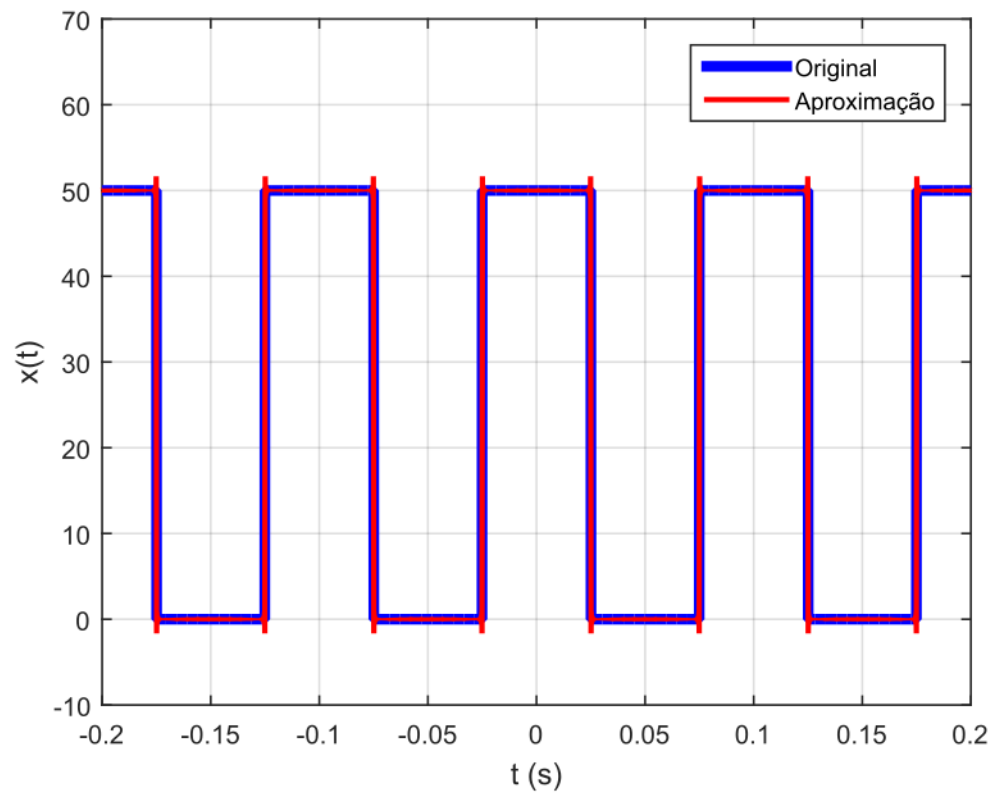
- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 1500$.



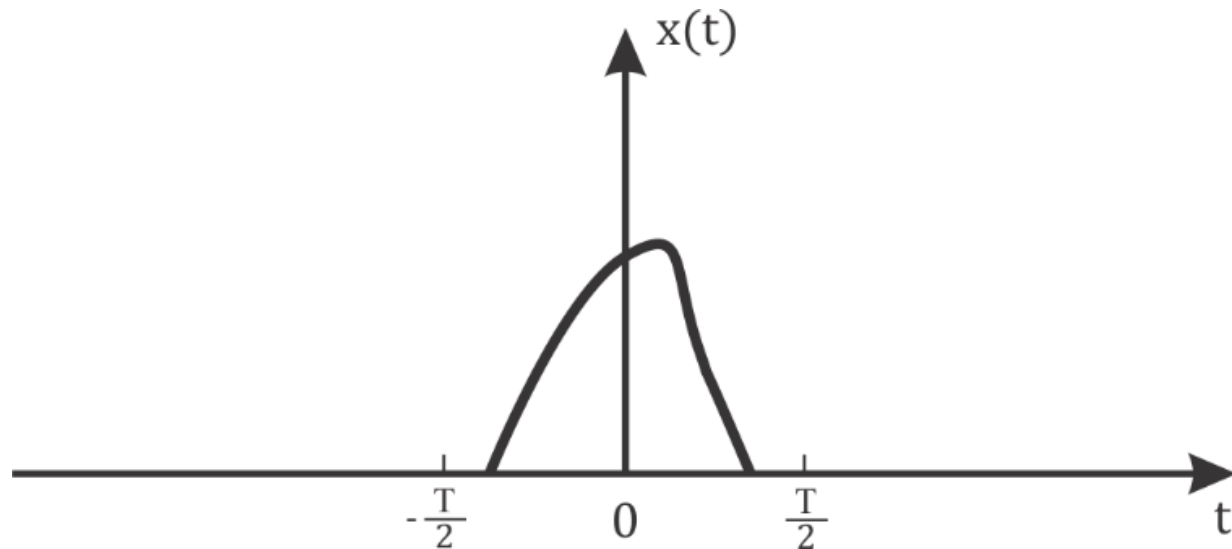
SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO NÃO PERIÓDICOS

TRANSFORMADA DE FOURIER - FT

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um sinal de tempo contínuo não periódico $x(t)$:

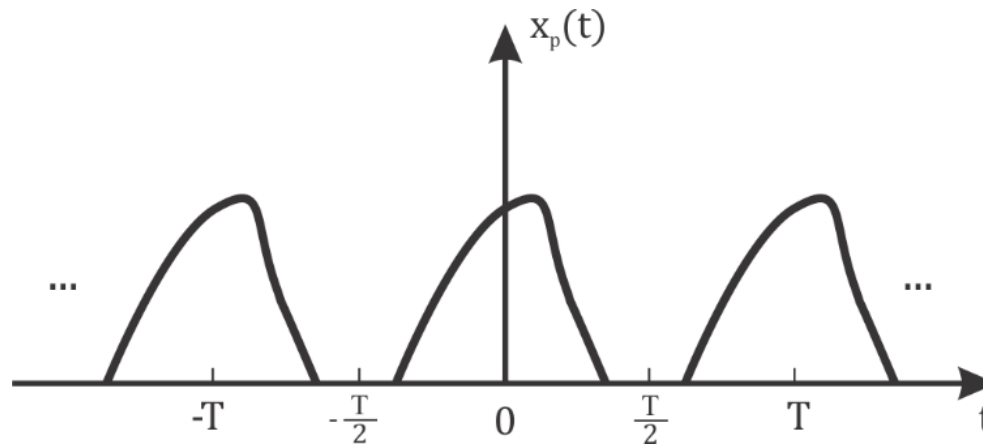


- Deseja-se determinar seu espectro de frequência.

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Se o sinal fosse periódico, com período T , a série de Fourier poderia ser aplicada. Para isso, a partir do sinal $x(t)$, pode-se criar um sinal periódico $x_p(t)$.



- É evidente que

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t).$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Isso leva à ideia de se usar a série de Fourier para se determinar o espectro de $x(t)$ considerando-se o limite de $T \rightarrow \infty$.
- Inicialmente, considere as equações da série de Fourier para $x_p(t)$, isto é,

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t}, \quad f = \frac{1}{T}, \quad (4)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f t} dt. \quad (5)$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como $x_p(t) = x(t)$ para $-T/2 \leq t \leq T/2$, (5) pode ser reescrita como

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f t} dt.$$

- Uma vez que $x(t) = 0$ para $|t| > T/2$, os limites de integração podem ser substituídos por $-\infty$ e ∞ :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi k f t} dt. \quad (6)$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Define-se a transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (7)$$

que é função da variável contínua F e não depende de T ou de f .

- Comparando-se (7) com (6), observa-se que

$$c_k = \frac{1}{T} X(kf), \quad (8)$$
$$T c_k = X(kf) = X\left(\frac{k}{T}\right).$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Isso significa que os coeficientes de Fourier são amostras de $X(F)$ tomadas em múltiplos inteiros de f e escalonadas por um fator $1/T$.
- Substituindo (8) na equação de síntese (4) fornece

$$x_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi kft} \quad (9)$$

que ainda diz respeito a um sinal periódico.

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para eliminar esta questão, deve-se calcular o limite de (9) para $T \rightarrow \infty$. Isto é,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi kft}.$$

- Para isso, inicialmente, considera-se $\Delta F = 1/T$. Assim:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k\Delta F t} \Delta F.$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- É evidente que a medida que $T \rightarrow \infty$, $x_p(t) \rightarrow x(t)$.
 - ▣ Com isso, ΔF torna-se o diferencial dF ;
 - ▣ E $k\Delta F$ se torna a variável contínua F .
 - ▣ O somatório torna-se uma integral em relação a frequência variável F .

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Logo,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k\Delta F t} \Delta F.$$

□ E a transformada inversa de Fourier de $X(F)$ é definida por

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi F t} dF. \quad (10)$$

Transformada de Fourier para Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO NÃO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

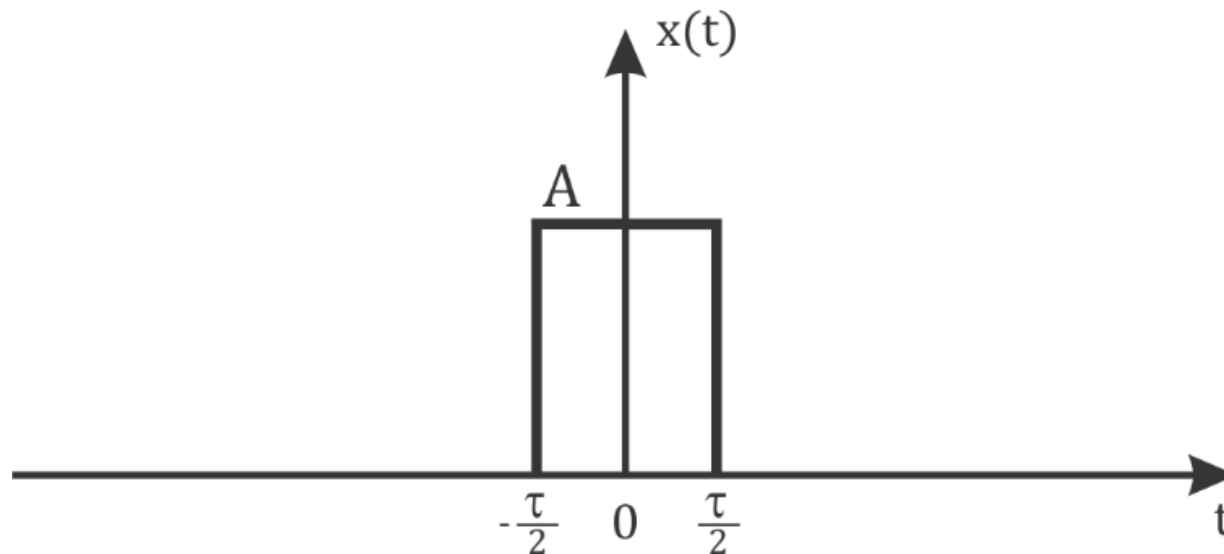
- Para se expressar as equações que descrevem a transformada de Fourier em função da frequência em *rad/s* considera-se $\Omega = 2\pi F$. Logo, $dF = d\Omega/2\pi$.
- Consequentemente,

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt,$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine a transformada de Fourier do sinal representado abaixo.



- Considere $A = 50$ e $\tau = 0,5$ s.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Utiliza-se

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

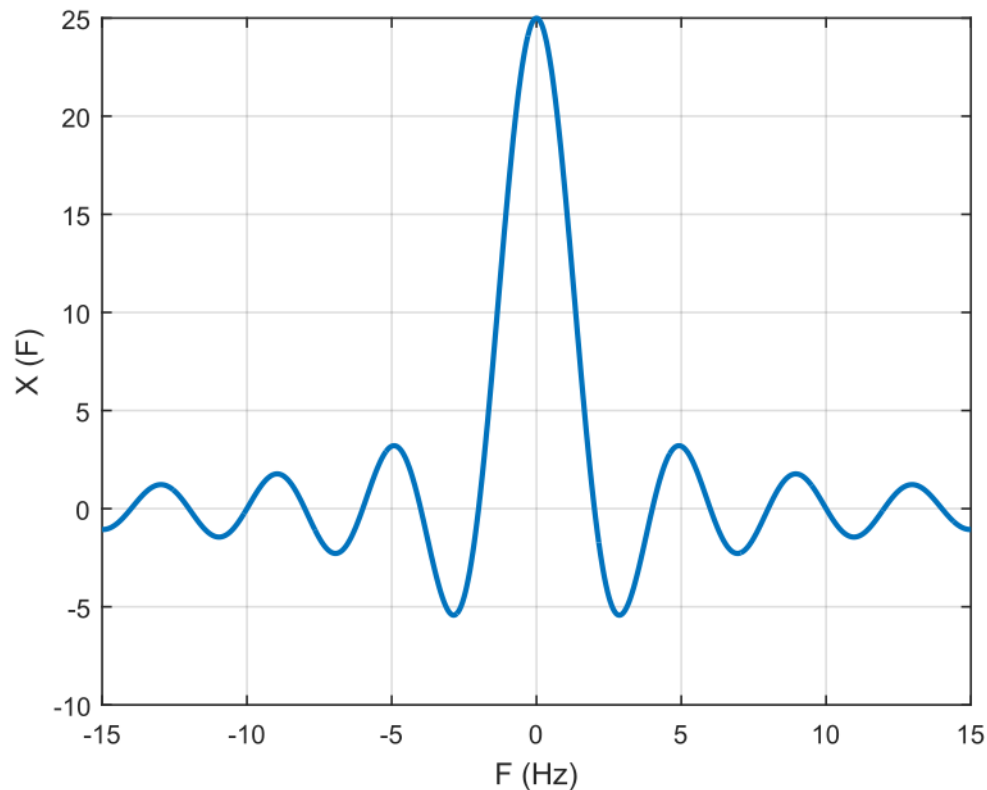
que para o sinal em questão pode ser alterada para

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{\sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau}.$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

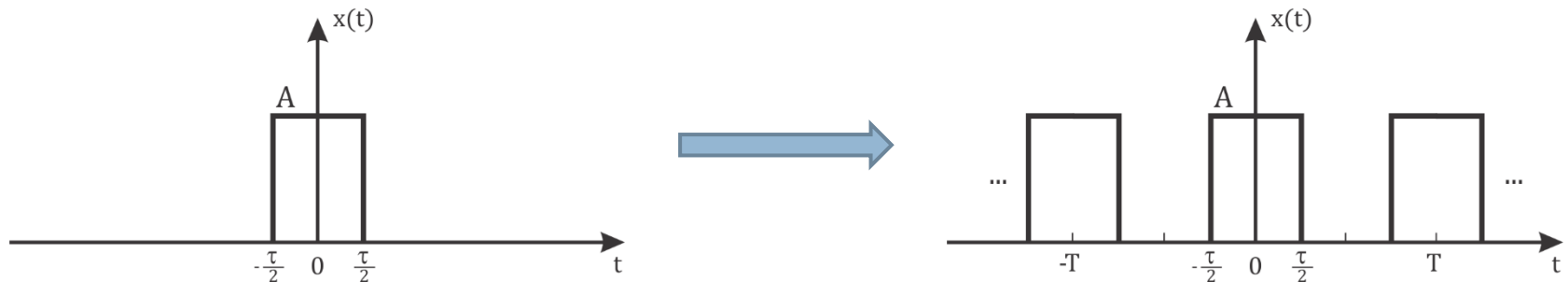
- Como o espectro de frequência $X(F)$ é real, este pode ser representado por:



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período T .

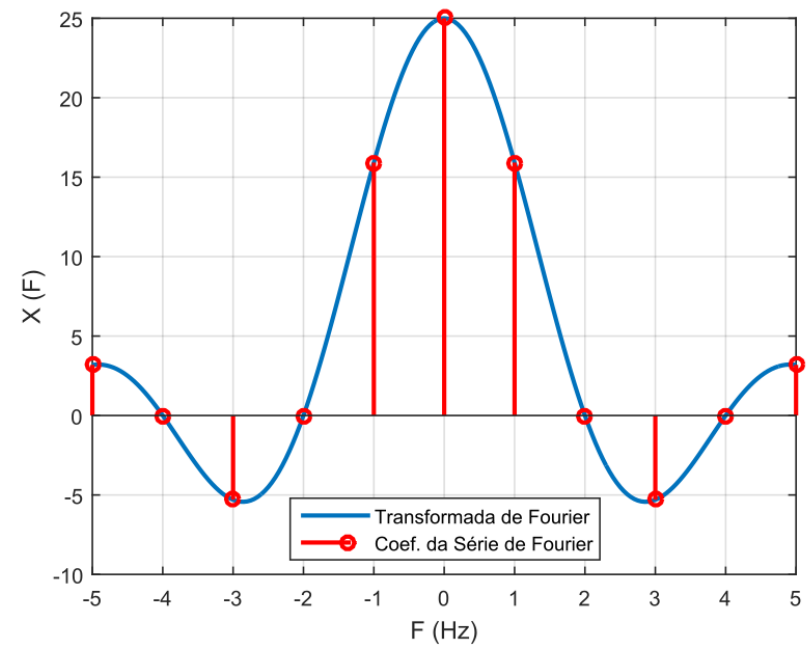
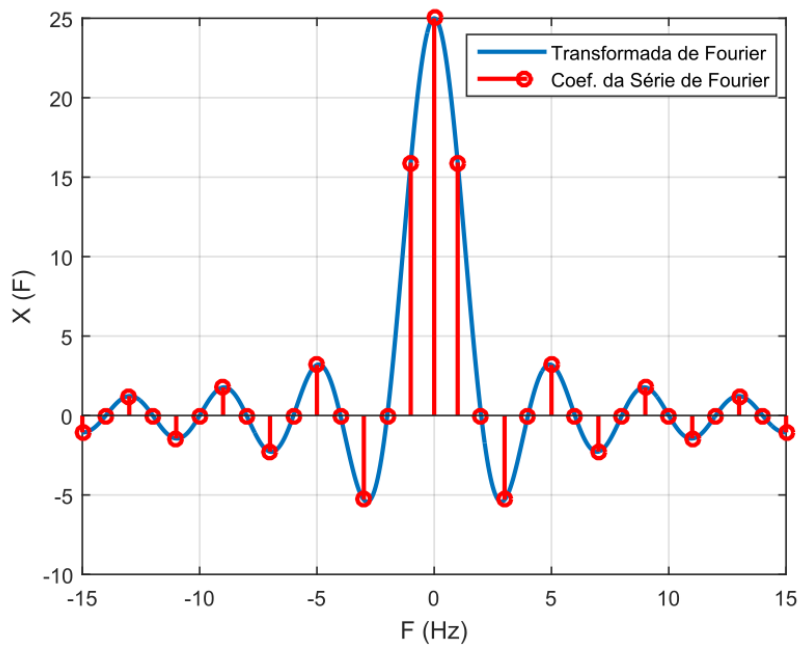


- Mais precisamente, seja $A = 50$ e $T = 1$ s, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

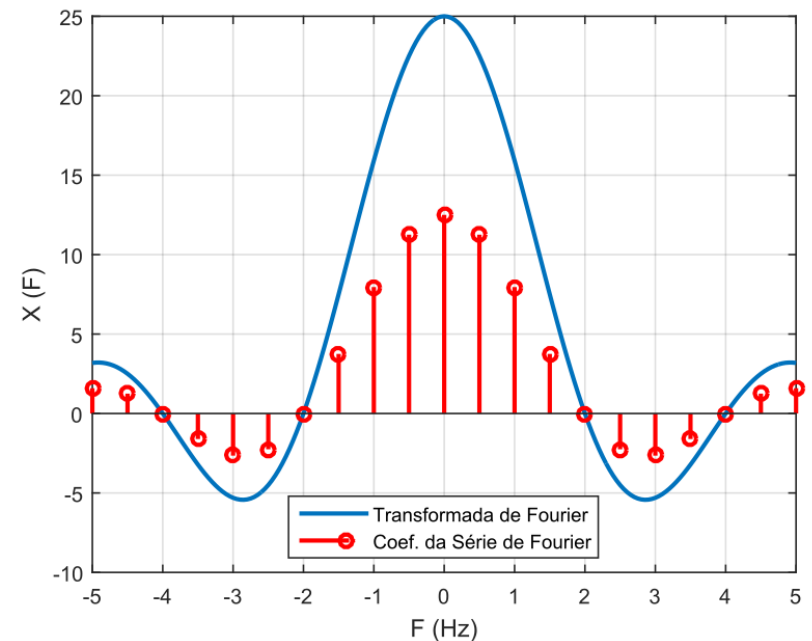
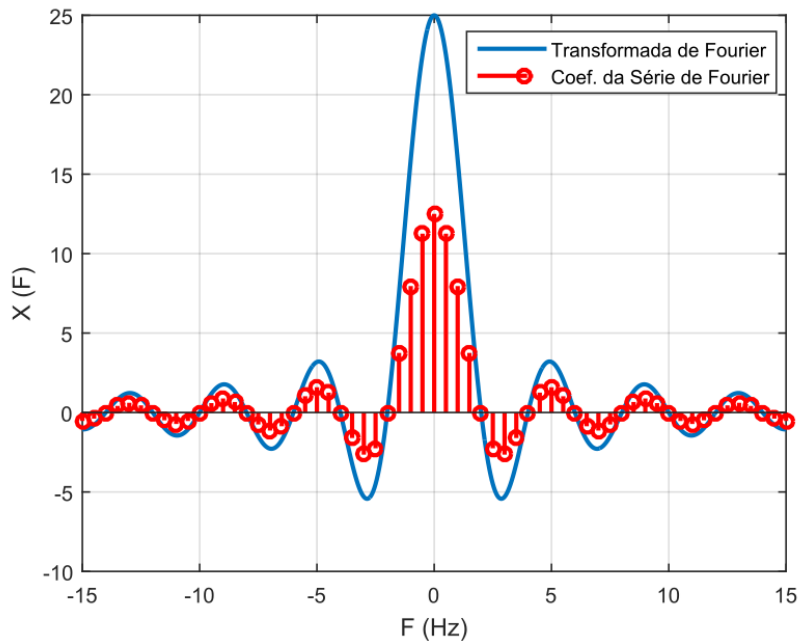
- Sobrepondo os gráficos da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier obtém-se:



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Agora, considere que o sinal periódico mantém $A = 50$, $\tau = 0,5$ s mas o período foi elevado para $T = 2$ s.



Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- O espectro de um sinal não periódico é o envelope do espectro de um sinal periódico (coeficientes de Fourier) obtido pela repetição do sinal não periódico com um período T .
- Os coeficientes de Fourier do sinal periódico são amostras normalizadas de $X(F)$ nas frequências $kf = k/T$. Isto é,

$$c_k = \frac{1}{T} X(kf) = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right).$$

Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Suponha que a série de Fourier fosse definida como

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t}$$

onde

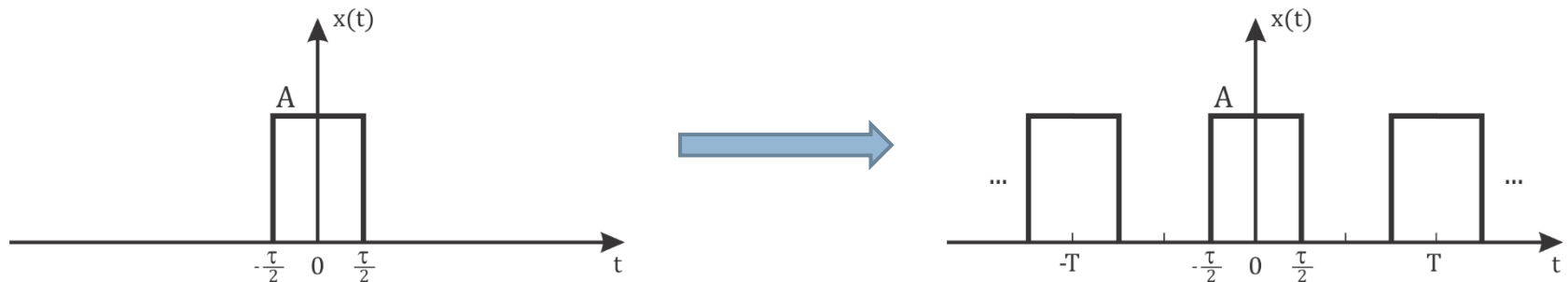
$$c_k = \int_T x(t) e^{-j2\pi k f t} dt$$

- Vamos reanalisar os últimos dois exemplos.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período T .

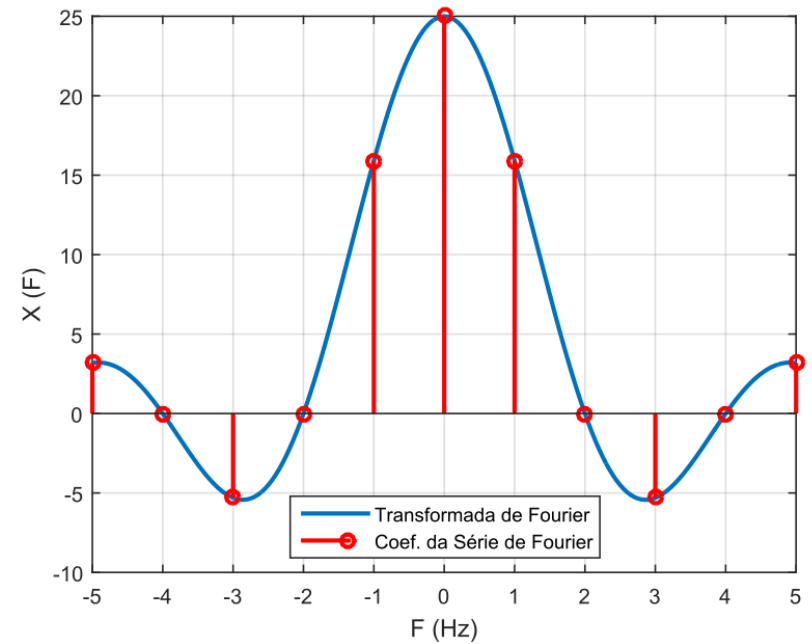
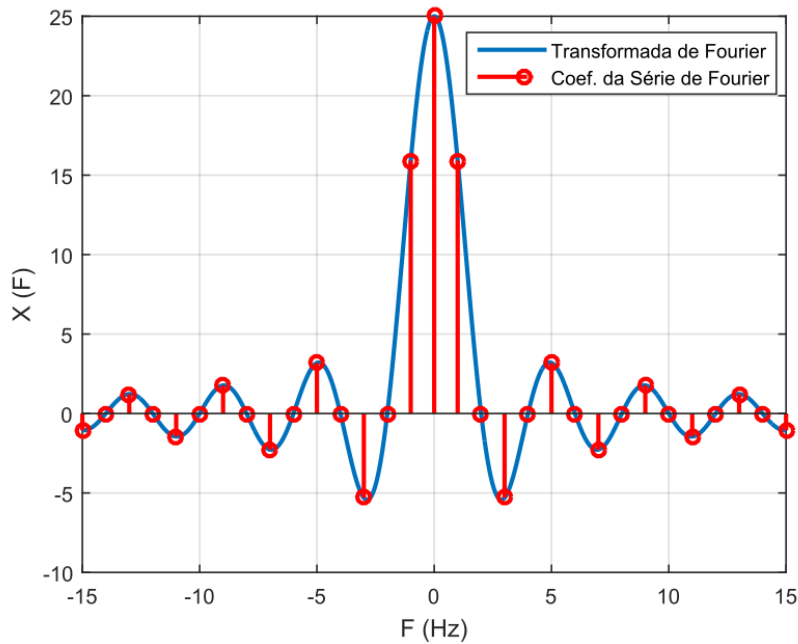


- Mais precisamente, seja $A = 50$ e $T = 1$ s, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

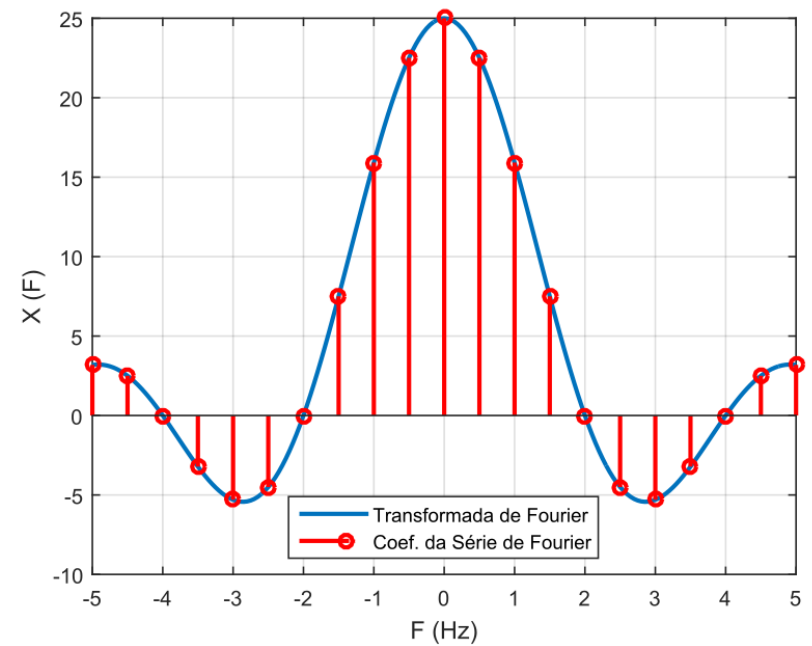
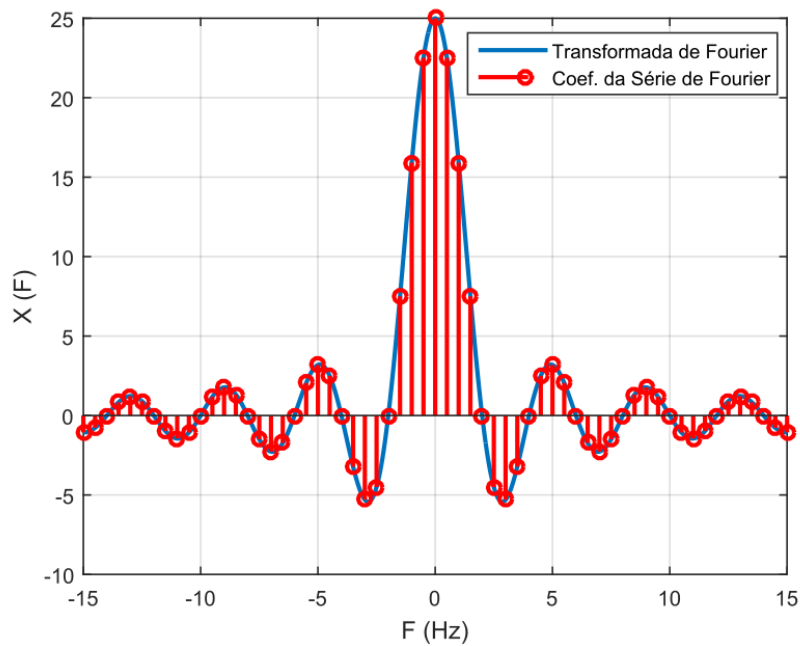
- O sinal periódico possui $A = 50$, $\tau = 0,5 \text{ s}$ e $T = 1 \text{ s}$.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ O sinal periódico possui $A = 50$, $\tau = 0,5 \text{ s}$ e $T = 2 \text{ s}$.



Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Neste caso, os coeficientes de Fourier do sinal periódico são amostras de $X(F)$ nas frequências $kf = k/T$. Isto é,

$$c_k = X(kf) = X\left(\frac{k}{T}\right).$$

- Todavia, somente a análise dos coeficientes c_k podem levar a valores errôneos das amplitudes dos sinais envolvidos na reconstrução do sinal devido a falta do fator $1/T$.

SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS

SÉRIE DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO - DTFS

Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Seja uma sequência $\tilde{x}[n]$ periódica com período N , isto é, $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$, para qualquer valor inteiro de n e r .
- Objetiva-se representar $\tilde{x}[n]$ por uma soma ponderada de exponenciais complexas com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental $2\pi/N$.

Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Estas exponenciais complexas têm a forma

$$e_k[n] = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n + rN],$$

onde, $k \in \mathbb{Z}^+$, e a representação em série de Fourier de $\tilde{x}[n]$ é da forma

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_k \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}. \quad (11)$$

- Devido a periodicidade da exponencial complexa, para $l \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$e_{k+lN}[n] = e^{j(2\pi/N)(k+lN)n} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{j2\pi ln} = e^{j(2\pi/N)kn} = e_k[n].$$

Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Portanto, são necessárias somente N exponenciais complexas com frequências múltiplas inteiras da fundamental $2\pi/N$ para representar a sequência $\tilde{x}[n]$.
- Assim, (11) pode ser representada por

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} . \quad (12)$$

Comparação entre as Séries de Fourier de Tempo Contínuo e Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais de tempo contínuo com período T :
 - ▣ A série de Fourier possui um número infinito de componentes de frequência;
 - ▣ O espaçamento entre esses componentes é $1/T$;
 - ▣ O espectro de frequência pode se estender de $(-\infty, \infty)$.

- Para sinais de tempo discreto com período N :
 - ▣ O espectro de frequência se estende de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0, 2\pi)$;
 - ▣ O espaçamento entre as componentes de frequência será $2\pi/N$ radianos/amostra;
 - ▣ A série de Fourier terá, no máximo, N componentes de frequência.

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para a obtenção dos coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, multiplique-se os dois lados de (12) por $e^{-j(2\pi/N)rn}$ e soma-se de $n = 0$ à $n = N - 1$. Dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)(k-r)n}.$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Alterando a ordem do somatório no lado direito fornece

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \quad (13)$$

- Considerando a identidade de ortogonalidade

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k - r = mN, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z},$$

aplicada ao termo entre colchetes em (13), tem-se

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r].$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Portanto, os coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$ na equação (12) são obtidos a partir do sinal $\tilde{x}[k]$ e da relação

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}.$$

- Observe que a sequência $\tilde{X}[k]$ é periódica com período N .

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A periodicidade pode ser verificada através de

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k + N] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k].\end{aligned}$$

Série de Fourier para Sinais de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Possível de fazer em um computador

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

atentar onde as bibliotecas põe o 1/n

Outras Representações da Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais periódicos reais, $\tilde{X}[k]$ e $\tilde{X}[-k]$ são complexos conjugados, isto é,

$$\begin{aligned}\tilde{X}[k] &= |\tilde{X}[k]|e^{j\theta_k}, \\ \tilde{X}[-k] &= |\tilde{X}[k]|e^{-j\theta_k}.\end{aligned}$$

- A série de Fourier pode ser representada por

$$\tilde{x}[n] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{M-1} |\tilde{X}[k]| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right) + \frac{1}{N} |\tilde{X}[M]| \cos(\pi n)$$

para N par e $M = N/2$. Para N ímpar, $M = (N-1)/2$, e:

$$\tilde{x}[n] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^M |\tilde{X}[k]| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right)$$

Outras Representações da Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Ainda, a série de Fourier pode ser representada por

$$\tilde{x}[n] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{M-1} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right) + \frac{1}{N} |\tilde{X}[M]| \cos(\pi n)$$

para N par e $M = N/2$. Para N ímpar, $M = (N-1)/2$, e:

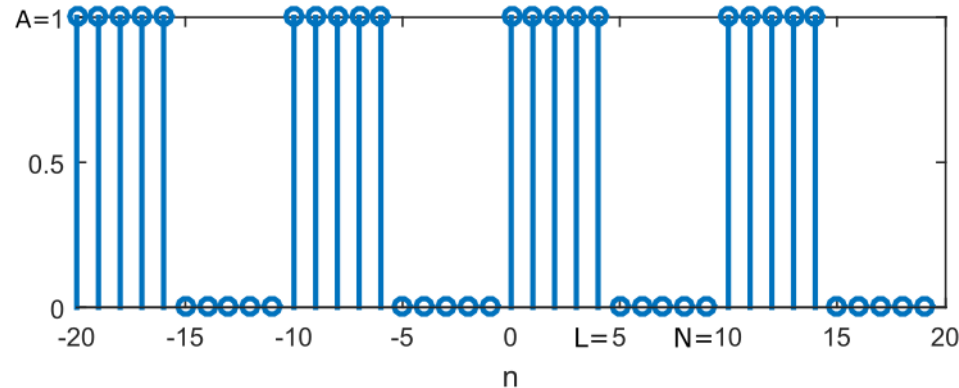
$$\tilde{x}[n] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) - b_k \sin\left(\frac{2\pi}{N} kn\right) \right)$$

$$a_k = 2|\tilde{X}[k]| \cos(\theta_k), \quad b_k = 2|\tilde{X}[k]| \sin(\theta_k)$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine a representação de Fourier para o sinal de tempo discreto periódico ilustrado abaixo.



- Observe que $A = 1$, $L = 5$ e $N = 10$.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Utiliza-se

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}.$$

Isto é,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j(2\pi/N)kn} = A \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/N)kn}$$

$$\sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=1}^5 e^{-j(2\pi/N)k(n-1)} = \sum_{i=1}^j a_1 \cdot q^{i-1}$$

Da teoria de P.G.:

$$a_1 = 1 \quad q = e^{-j(2\pi/N)k} \quad S_n = \sum_{i=1}^j a_1 \cdot q^{i-1} \quad S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Logo,

$$\tilde{X}[k] = A \frac{1 - e^{-j(2\pi/N)Lk}}{1 - e^{-j(2\pi/N)k}} = A e^{-j((L-1)\pi k/N)} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi Lk}{N}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi k}{N}\right)}.$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Tem-se, portanto,

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} AL, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ Ae^{-j((L-1)\pi k/N)} \frac{\text{sen}(\pi Lk/N)}{\text{sen}(\pi k/N)}, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

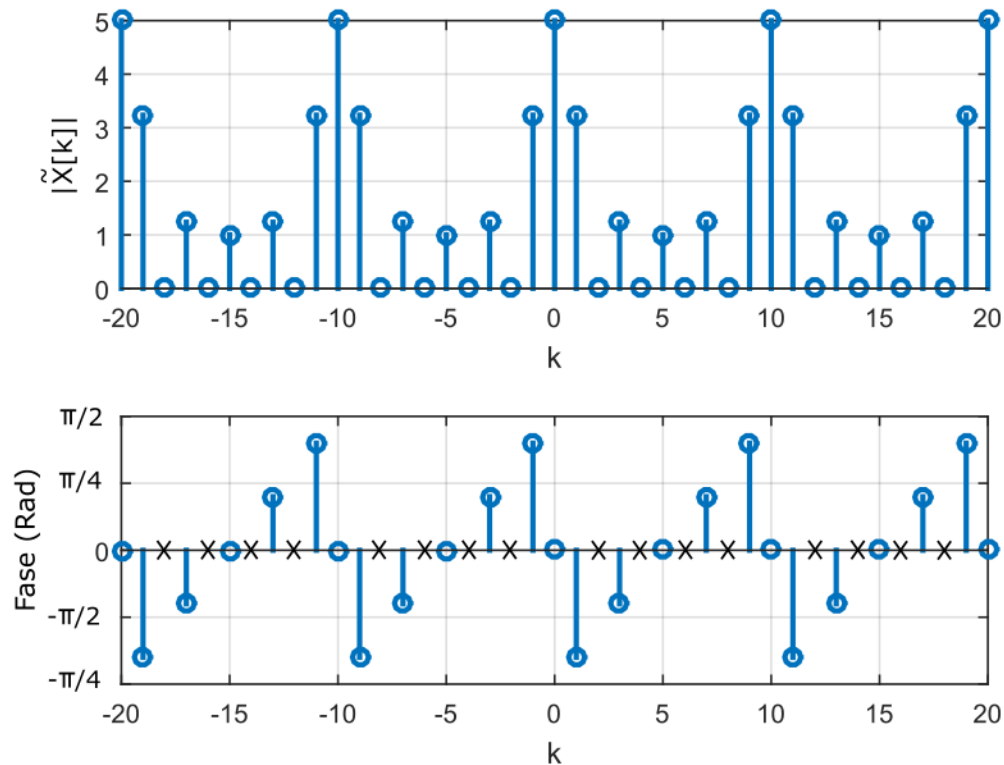
- Substituindo $A = 1$, $L = 5$ e $N = 10$, resulta em

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Módulo e fase dos coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$.



x aparece por que o calculo do modulo vai resultar em 0/0

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

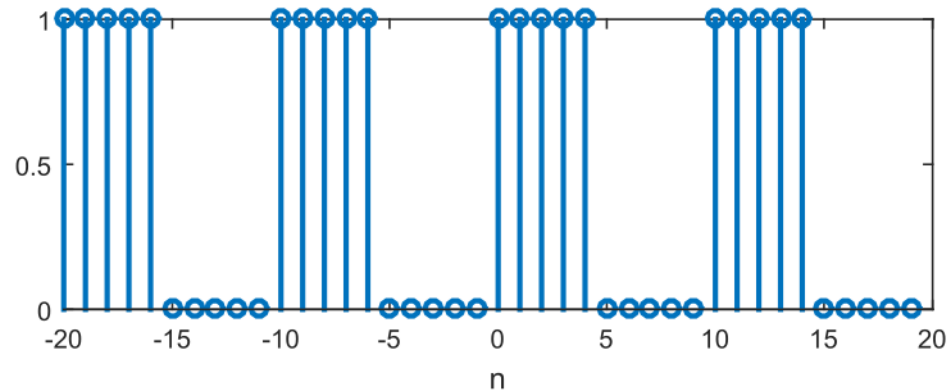
- Frequências presentes no sinal (espectro de frequência).
Observe que a frequência fundamental é $\omega = 2\pi/10 \text{ rad/amostra}$ e que existe um fator $1/N$ associado.

k	Frequência (rad/amostra)	Amplitude	Fase (rads)
0	0	0,5	0
1	$2\pi/10$	0,6472	-1,2566
3	$6\pi/10$	0,2472	-0,6283
5	$10\pi/10$	0,1	0

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Reconstrução do sinal.



SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO - DTFT

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A obtenção da transformada de Fourier de tempo discreto é similar a apresentada para sinais de tempo contínuo.
- Para um sinal de tempo discreto não periódico, a transformada de Fourier é definida por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (14)$$

- Fisicamente, $X(\omega)$ representa as frequências presentes no sinal $x[n]$, isto é, $X(\omega)$ é a decomposição de $x[n]$ em suas componentes de frequência.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Devido ao fato de que para qualquer sinal de tempo discreto a variação de frequência se dá de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0, 2\pi)$, é de se esperar que a transformada de Fourier seja periódica com período 2π .

$$\begin{aligned} X(\omega + 2\pi k) &= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega + 2\pi k)n} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} e^{-j2\pi kn} \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = X(\omega) \end{aligned}$$

Comparação entre as Transformadas de Fourier de Tempo Contínuo e Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais de tempo contínuo:
 - ▣ O espectro de frequência se estende de $(-\infty, \infty)$;
 - ▣ A transformada de Fourier envolve uma integral.

- Para sinais de tempo discreto:
 - ▣ O espectro de frequência se estende de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0, 2\pi)$;
 - ▣ A transformada de Fourier envolve um somatório;
 - ▣ A transformada de Fourier é periódica com período 2π .

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Uma vez que $X(\omega)$ é periódica em ω , é de se esperar que a função tenha expansão em série de Fourier, desde que a série seja convergente.
- Na realidade, a definição da transformada de Fourier de tempo discreto $X(\omega)$ da sequência $x[n]$, dada por (14), tem a forma de uma série de Fourier para um sinal com período 2π .
- Os coeficientes de Fourier nesta expansão são os valores da sequência $x[n]$.

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para demonstrar isso, determina-se a sequência $x[n]$ a partir de $X(\omega)$. Para isso, multiplica-se ambos os lados de (14) por $e^{j\omega m}$ e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi)$, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega m} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \right] e^{j\omega m} d\omega \quad (15)$$

- Se o somatório for convergente, pode-se alterar a ordem da integração e do somatório. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega m} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Da ortogonalidade das exponenciais complexas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- Logo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi x[m], & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (16)$$

- Combinando, (15) e (16), tem-se o resultado desejado,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- Esta equação é a expressão dos coeficientes de uma série de Fourier para uma função periódica $X(\omega)$ com período 2π .

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

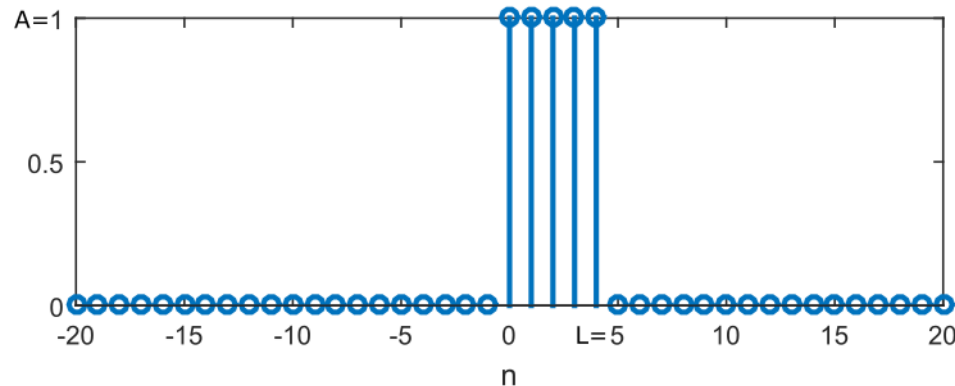
EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine a representação de Fourier para o sinal de tempo discreto não periódico ilustrado abaixo.



- Observe que $A = 1$ e $L = 5$.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A transformada de Fourier de tempo discreto do sinal é calculada por

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\omega n}$$

$$= A \frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= A e^{-j(\omega/2)(L-1)} \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A magnitude e a fase da transformada de Fourier $X(\omega)$ são dados por

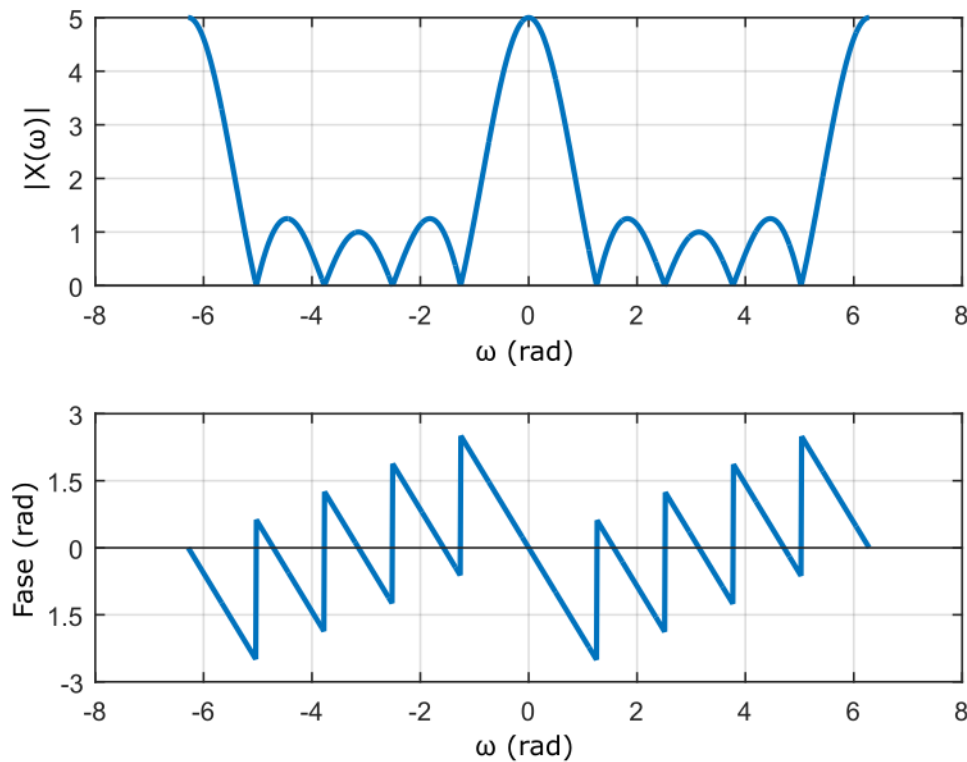
$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A|L & \omega = 0 \\ |A| \left| \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)} \right| & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\angle X(\omega) = \angle A - \angle \frac{\omega}{2} (L - 1) + \angle \frac{\text{sen}(\omega L/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

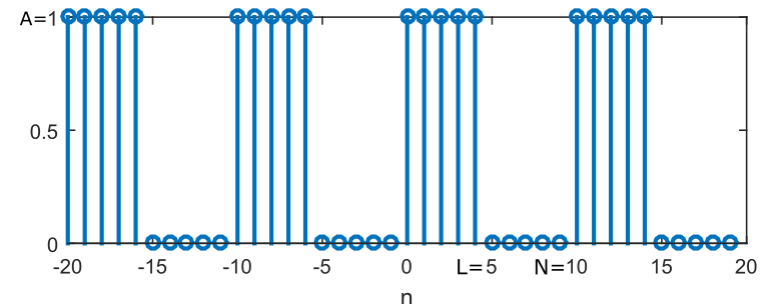
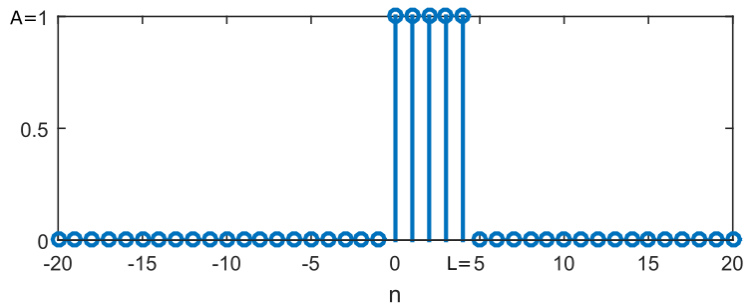
- A magnitude e a fase da transformada de Fourier $X(\omega)$ são mostrados na figura abaixo



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período N .

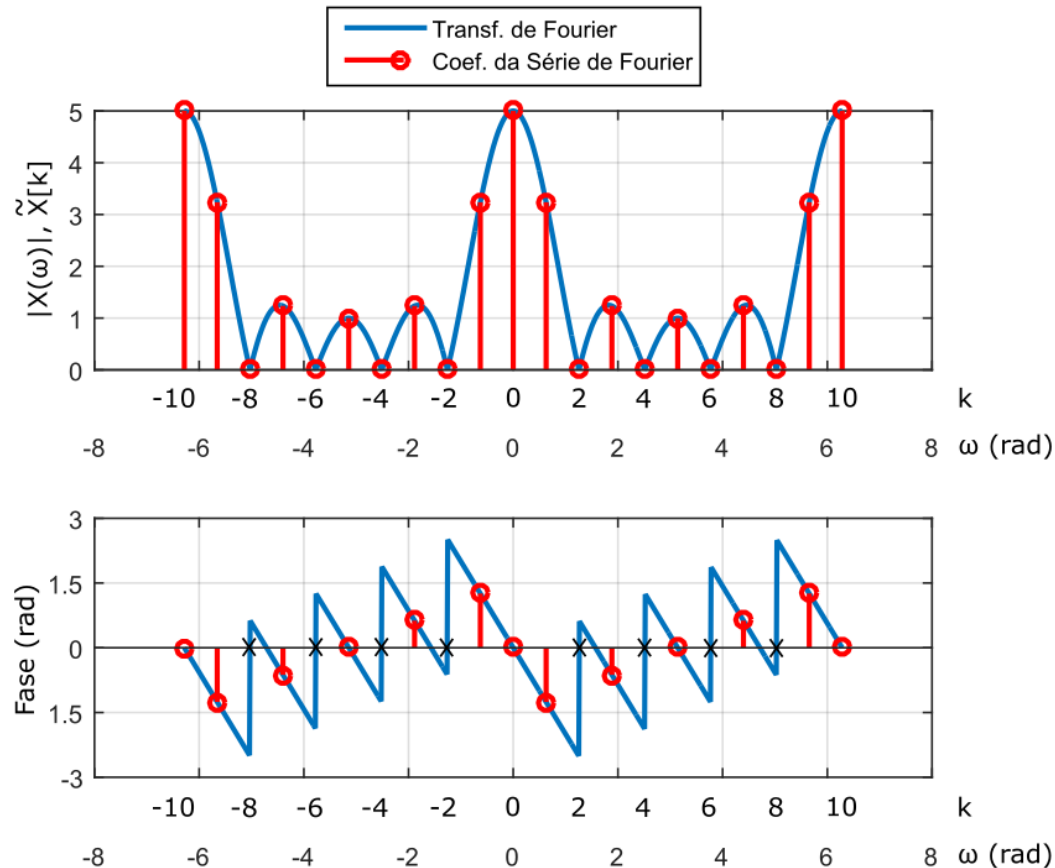


- Mais precisamente, seja $N = 10$, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sobrepondo os gráficos da transformada de Fourier $X(\omega)$ e dos coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ obtém-se:



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Observa-se que os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ têm os valores dados pela avaliação da transformada de Fourier $X(\omega)$ em um conjunto de frequência igualmente espaçadas dado por

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

- Isto é,

$$\tilde{X}[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Ae^{-j(\pi/N)k(L-1)} \frac{\text{sen}\left[(\pi/N)kL\right]}{\text{sen}\left[(\pi/N)k\right]}$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

que tem a mesma forma da equação dos coeficientes $\tilde{X}[k]$ da série de Fourier que foi calculada para o sinal retangular periódico.

SINAIS DE TEMPO DISCRETO DE
DURAÇÃO FINITA

TRANSFORMADA DISCRETA DE
FOURIER - DFT

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Em aplicações práticas, a análise de frequência de sinais é, geralmente, realizada por um processador digital de sinais.
- Para sinais de tempo discreto e periódicos, o uso da série de Fourier de tempo discreto permite a realização da análise sem maiores problemas pois, ambas as equações de análise e de síntese são discretas.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Contudo, sinais de tempo discreto não periódicos possuem um espectro de frequência contínuo o que dificulta a sua representação por processadores digitais de sinais.
- Adicionalmente, a equação de síntese envolve uma integral, o que também aumenta a complexidade de implementação digital.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n} d\omega$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Assim, pensando na implementação computacional de um algoritmo de análise em frequência, é interessante se dispor de equações que sejam de fácil avaliação por um processador digital de sinais.
- Como mencionado, a implementação digital da série de Fourier de tempo discreto não é problema, mas a implementação da transformada de Fourier, por esta ser contínua em ω merece atenção.

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A relação que há entre a transformada de Fourier $X(\omega)$ e os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ é o ponto de partida.
- Considere uma sequência não periódica $x[n]$ que possua transformada de Fourier $X(\omega)$.
- Já foi visto que a amostragem de $X(\omega)$ em frequências $\omega_k = 2\pi k/N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, fornece os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ de um sinal periódico obtido a partir da repetição do sinal $x[n]$ com um período N . Isto é,

$$\tilde{X}[k] = X(\omega) \Big|_{\omega=(2\pi/N)k} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad (17)$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para se obter uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ a partir da sequência de amostras $\tilde{X}[k]$ utiliza-se a equação de síntese da série de Fourier de tempo discreto (12). Isto é,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad (18)$$

- Substituindo a definição da transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j\omega m}$$

em (17) e, posteriormente, em (18), resulta

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi/N)km} \right] e^{j(2\pi/N)kn}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Alterando a ordem dos somatórios resulta em

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \tilde{p}[n-m]$$

convolução

onde o termo entre colchetes é a série de Fourier de um trem de impulsos periódico, isto é,

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN]$$

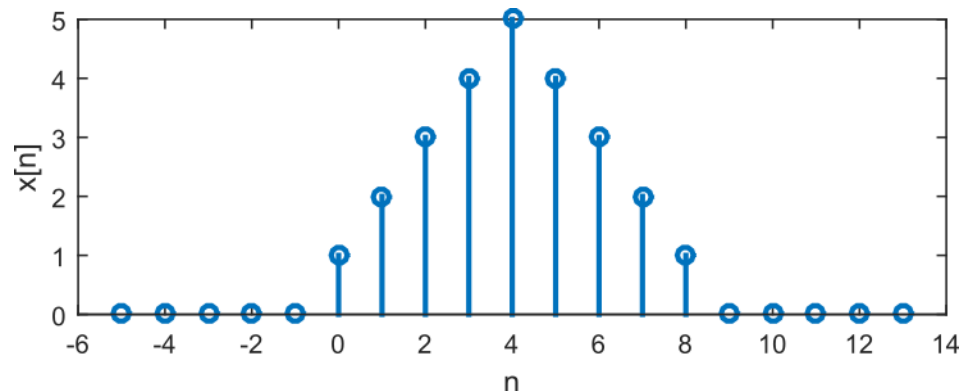
e, portanto,

$$\tilde{x}[n] = x[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \quad (19)$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

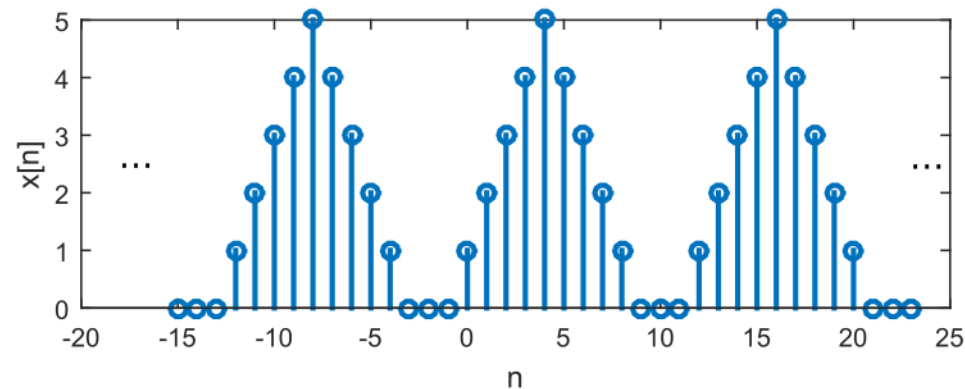
- A equação (19) mostra que o sinal reconstruído a partir das amostras $\tilde{X}[k]$ obtidas a partir de $X(\omega)$ é periódico com período N e é formado por cópias da sequência $x[n]$ deslocada de múltiplos inteiros de N .
- Considere o sinal abaixo que tem comprimento 9.



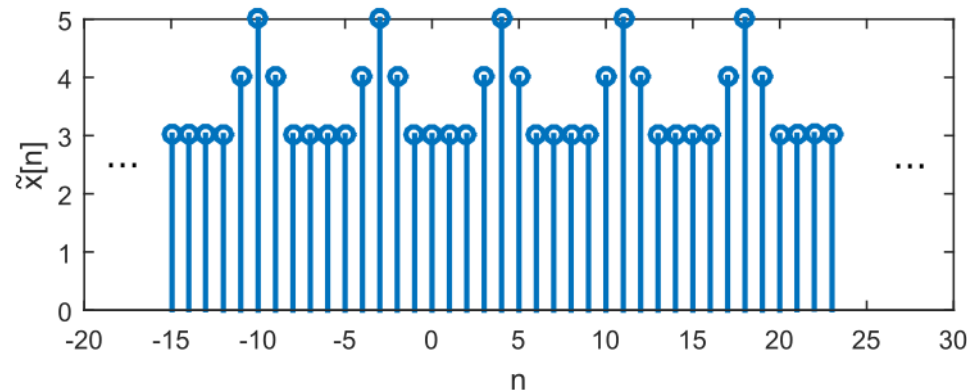
Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Usando (19) com $N = 12$ resulta em



- Usando (19) com $N = 7$ tem-se



Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Fica evidente que para que um período do sinal periódico seja igual ao sinal não periódico original, deve-se ter N maior ou igual ao comprimento do sinal não periódico original.
- Nesse caso, $x[n]$ pode ser obtido a partir da sequência $\tilde{x}[k]$, isto é,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Dessa forma, a partir de uma sequência não periódica $x[n]$, pode-se formar uma sequência periódica $\tilde{x}[k]$ e utilizar a série de Fourier de tempo discreto para representá-la.
- Posto de outra forma, pode-se a partir da sequência de coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, se obter a sequência periódica $\tilde{x}[k]$, utilizando-se as equações da série de Fourier, para, finalmente, se determinar $x[n]$ utilizando

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Assim, como o sinal não periódico a ser analisado tem N termos, a relação dos coeficientes de Fourier e a reconstrução do sinal a partir de uma sequência periódica é dada por

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Quando a série de Fourier de tempo discreto é empregada para a representação de sequências não periódicas ela é chamada de Transformada Discreta de Fourier (DFT).

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS

EQUAÇÃO DE ANÁLISE

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$$

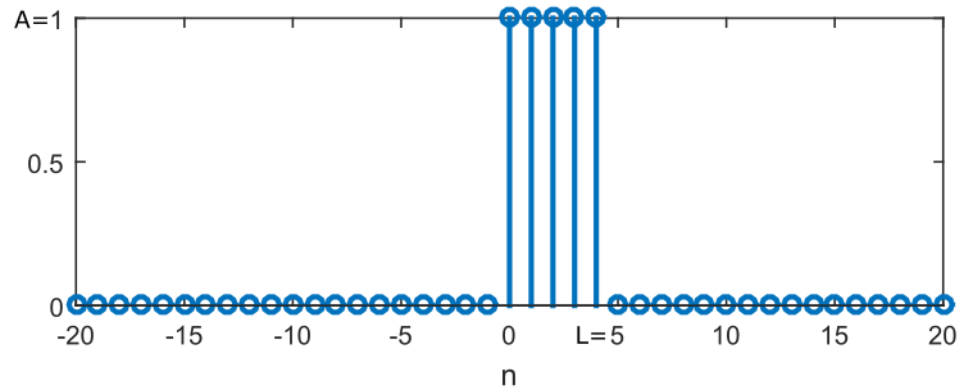
EQUAÇÃO DE SÍNTESE

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Determine a DFT para o sinal de tempo discreto não periódico ilustrado abaixo.

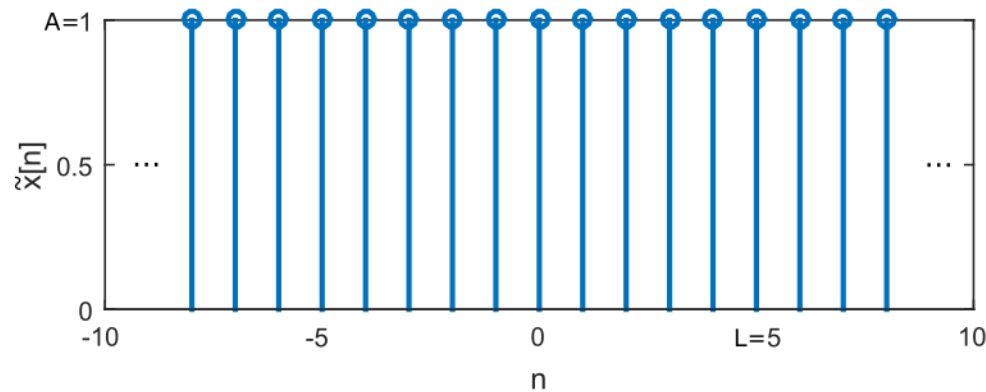


- Considere, inicialmente, $N = 5$ e, posteriormente, $N = 10$.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para $N = 5$, a sequência periódica $\tilde{x}[n]$ cuja série de Fourier de tempo discreto corresponde a DFT de $x[n]$ é mostrada abaixo.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Para, $A = 1$ e $L = N = 5$ tem-se:

$$X[k] = \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j(2\pi/5)kn}$$

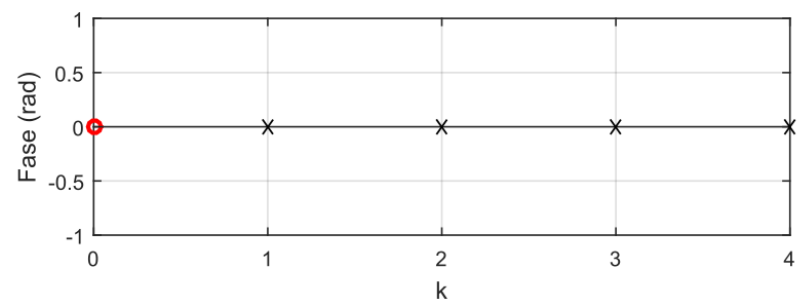
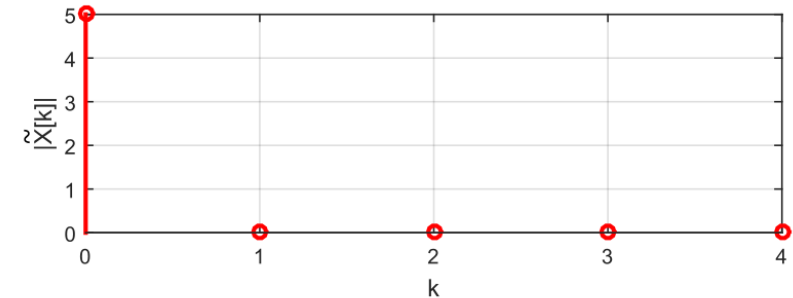
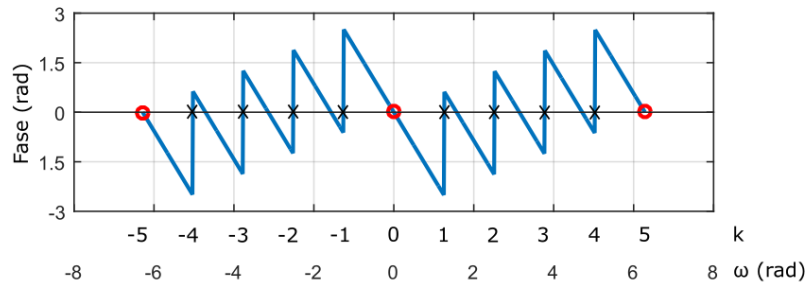
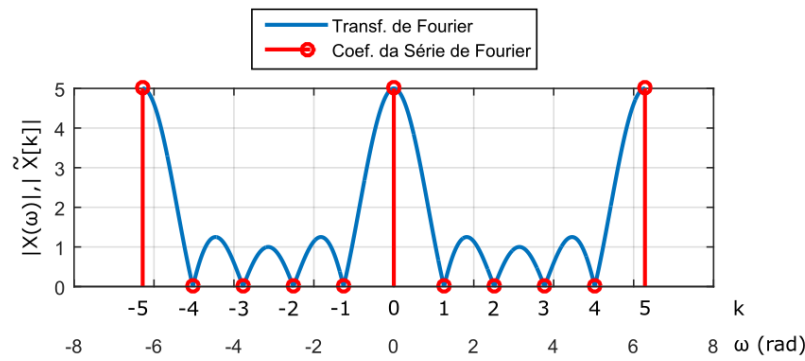
$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

$$X[k] = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ 0, & 1 \leq k \leq 4 \end{cases}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

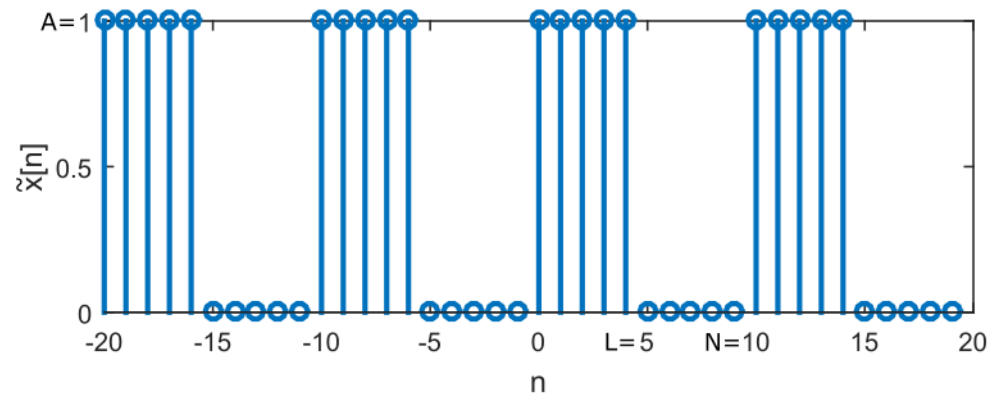
- A relação da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier é mostrada abaixo.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para $N = 10$, a sequência periódica $\tilde{x}[n]$ cuja série de Fourier de tempo discreto corresponde a DFT de $x[n]$ é mostrada abaixo.



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

□ Para, $A = 1$ e $L = 5$ e $N = 10$ tem-se:

$$X[k] = \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} = \sum_{n=0}^9 e^{-j(2\pi/10)kn}$$

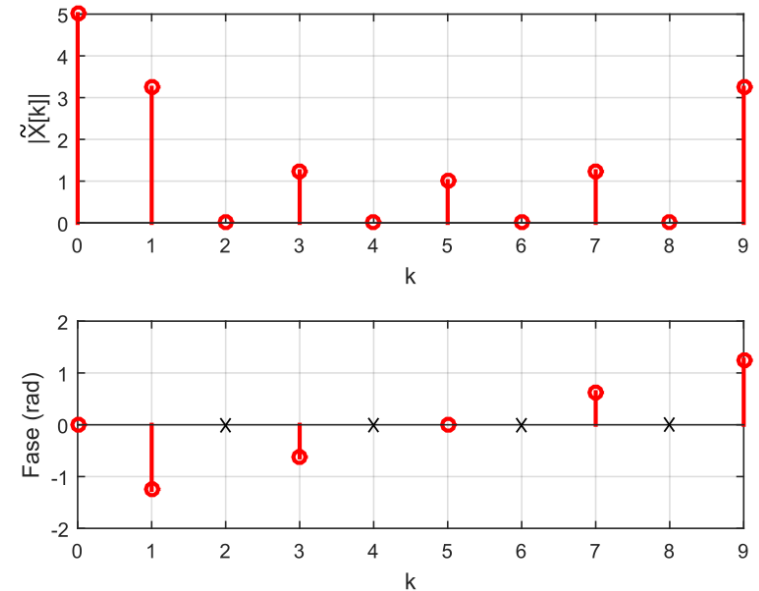
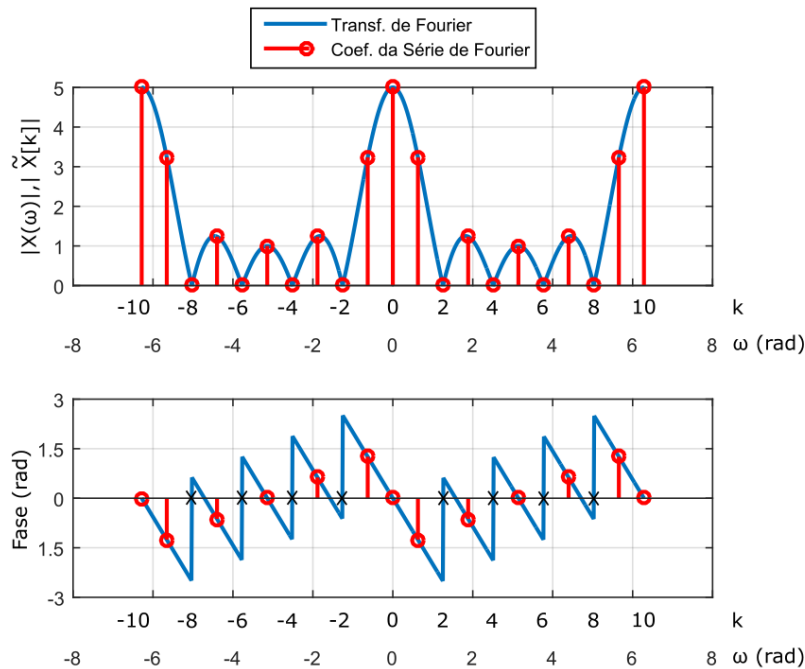
$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 10, \pm 20, \dots \\ e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, & \text{Caso contrário} \end{cases}$$

$$X[k] = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ e^{-j(4\pi k/10)} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{\text{sen}(\pi k/10)}, & 1 \leq k \leq 9 \end{cases}$$

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A relação da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier é mostrada abaixo.



Melhoria na Exibição da DFT

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Embora a DFT calculada com L pontos seja suficiente para representar unicamente a sequência $x[n]$, ela não fornece detalhes suficientes sobre as características espectrais de $x[n]$.

transformada de Fourier da resposta ao impulso
é igual a resposta em frequência
vai usar para calcular a resposta ao impulso

- Para se melhorar a exibição do espectro de frequência (interpolação), deve-se amostrar mais pontos do espectro $x(\omega)$. Isto é, deve-se aumentar o valor de N em $\omega_k = 2\pi k/N$, onde $N > L$. Para isso, se acrescenta $N - L$ zeros na sequência $x[n]$.

zero padding

Se quer mais resolução tem que amostrar mais pontos

wavelet vs stft vs fft vs dft