PROCESSAMENTO DE SINAIS

Projeto de Filtros em Tempo Discreto IIR e FIR

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

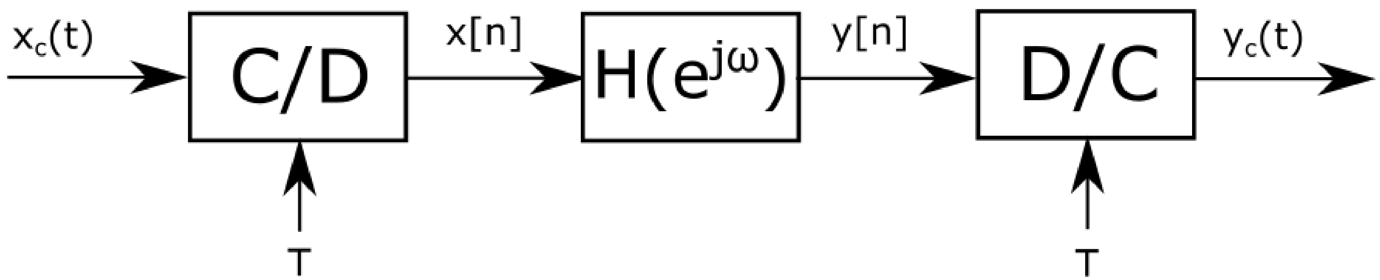
- Apresentar os conceitos básicos para o projeto de filtros IIR e FIR.
- Descrever as aproximações de filtros de tempo contínuo.
- Projetar funções de transferência de filtros de tempo contínuo.

Etapas do Projeto de Filtros

- Especificação das características e propriedades do filtro.
- Aproximação das especificações através de um sistema de tempo discreto causal.
  - Depende da aplicação.
- Realização do sistema.
  - Depende da tecnologia em que o filtro será implementado.

Estrutura Típica para Filtragem

- Sistema típico para a filtragem de sinais de tempo contínuo por um filtro de tempo discreto:



- Se as condições estabelecidas pelo critério de Nyquist são atendidas:

$$H_{ef}(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\overbrace{\Omega T}^{\omega}}\right), & |\Omega| < \dfrac{\pi}{T} \\ 0, & |\Omega| > \dfrac{\pi}{T} \end{cases}$$

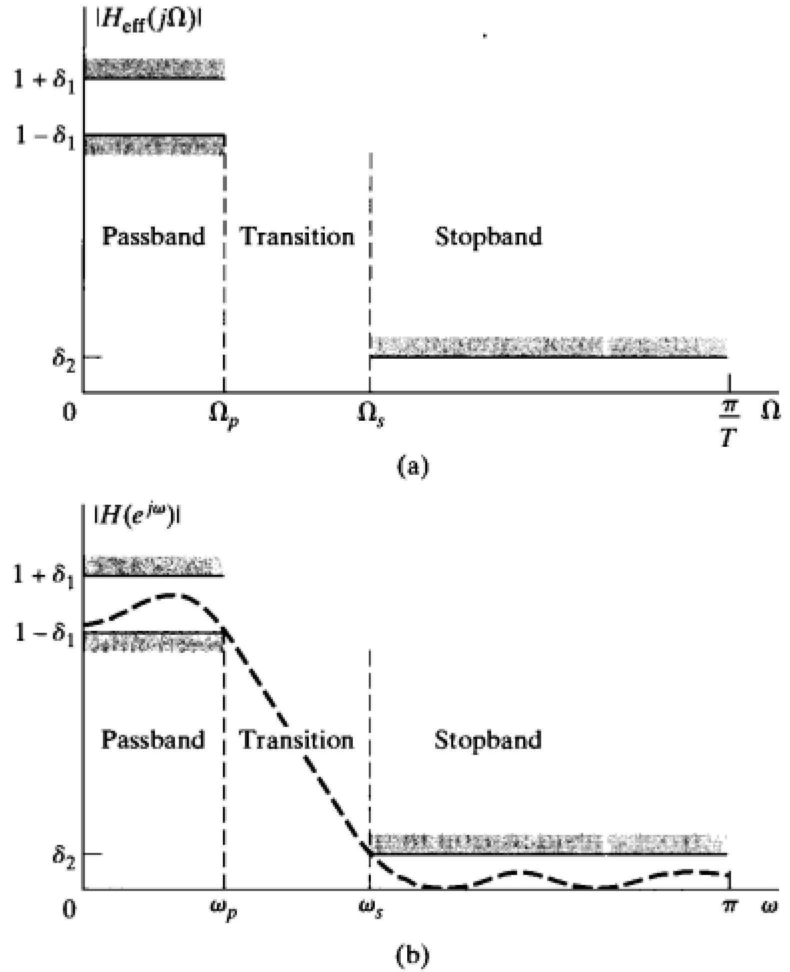
Mapeamento das Especificações do Filtro

- Dadas as especificações de um filtro de tempo contínuo desejado, as especificações do filtro de tempo discreto são:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_{ef}\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| < \pi$$

onde $\omega = \Omega T$.

Mapeamento das Especificações do Filtro



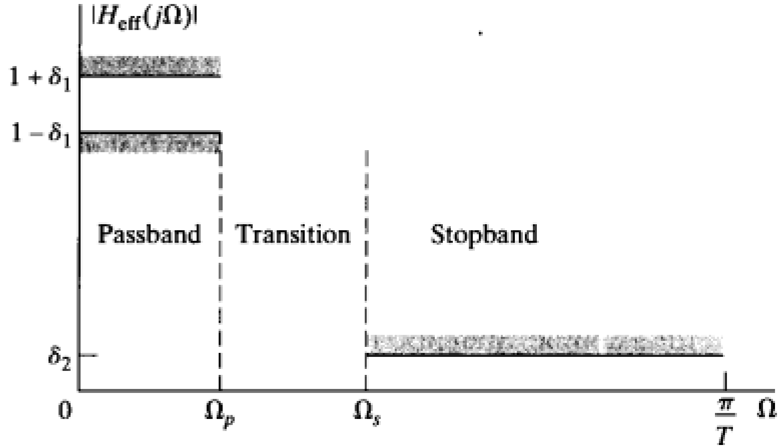
$$\omega_p = \Omega_p T$$

$$\omega_s = \Omega_s T$$

Mapeamento das Especificações do Filtro

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Exemplo:
  - Determinar as especificações de tempo discreto de um filtro passa baixas para um sistema amostrado a uma taxa de 10.000 amostras/s ($T = 10^{-4}\ s$).
  - As especificações do filtro de tempo contínuo são:
    - $1 - 0{,}01 \leq |H_{ef}(j\Omega)| \leq 1 + 0{,}01 \quad , \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi(2.000)\ rad/s$
    - $|H_{ef}(j\Omega)| \leq 0{,}001 \quad , \quad \Omega \geq 2\pi(3.000)\ rad/s$



(a)

$$\delta_1 = 0{,}01$$
$$\delta_2 = 0{,}001$$
$$\Omega_p = 2\pi(2.000)\ rad/s$$
$$\Omega_s = 2\pi(3.000)\ rad/s$$

Mapeamento das Especificações do Filtro

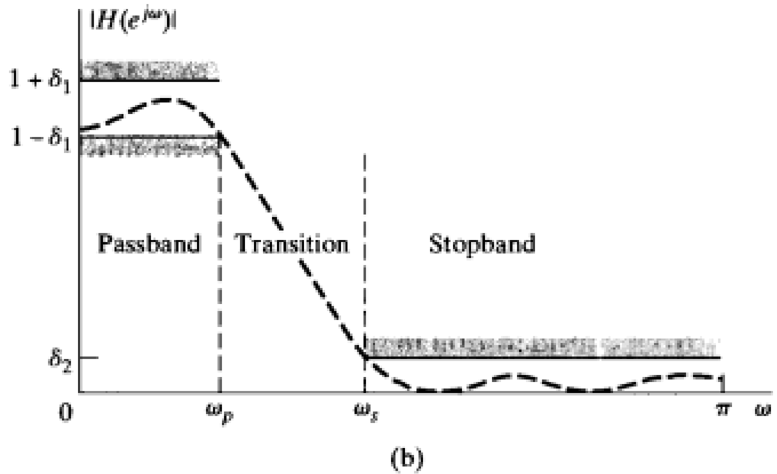
- Especificações em dB:
  - Ganho ideal na banda passante: $20 \cdot log_{10}(1) = 0\ dB$
  - Ganho máximo na banda passante: $20 \cdot log_{10}(1{,}01) = 0{,}086\ dB$
  - Ganho mínimo na banda passante: $20 \cdot log_{10}(0{,}99) = -0{,}087\ dB$
  - Ganho máximo na banda de rejeição: $20 \cdot log_{10}(0{,}001) = -60\ dB$

- Devido ao conversor discreto para contínuo (D/C), considerando a taxa de amostragem de 10.000 amostras/s, o ganho do sistema acima de $\Omega = 2\pi(5.000)\ rad/s$ é nulo.

Mapeamento das Especificações do Filtro

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considerando $\omega = \Omega T$, com $T = \frac{1}{10.000}\ s$, as especificações do filtro de tempo contínuo são:
  - $1 - 0{,}01 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + 0{,}01 \quad , \quad 0 \leq \omega \leq 0{,}4\pi\ rad/amostra$
  - $|H(e^{j\omega})| \leq 0{,}001 \quad , \quad \omega \geq 0{,}6\pi\ rad/amostra$



$\delta_1 = 0{,}01$

$\delta_2 = 0{,}001$

$\omega_p = 0{,}4\pi\ rad/amostra$

$\omega_s = 0{,}6\pi\ rad/amostra$

Projeto de Filtros em Tempo Discreto IIR a Partir de Filtros em Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- O projeto envolve a transformação de um filtro de tempo contínuo em um filtro de tempo discreto que satisfaça as especificações dadas.

- Métodos:
  - Invariância ao impulso.
  - Transformada Bilinear.

Projeto de Filtros em Tempo Discreto FIR

- O projeto de filtros FIR se dá por aproximação direta da resposta em frequência desejada para o filtro em tempo discreto.

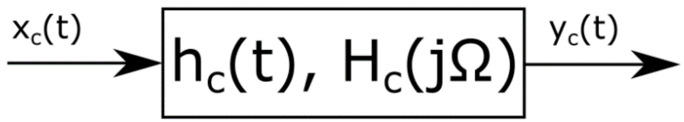
- Método:
  - Janelamento.

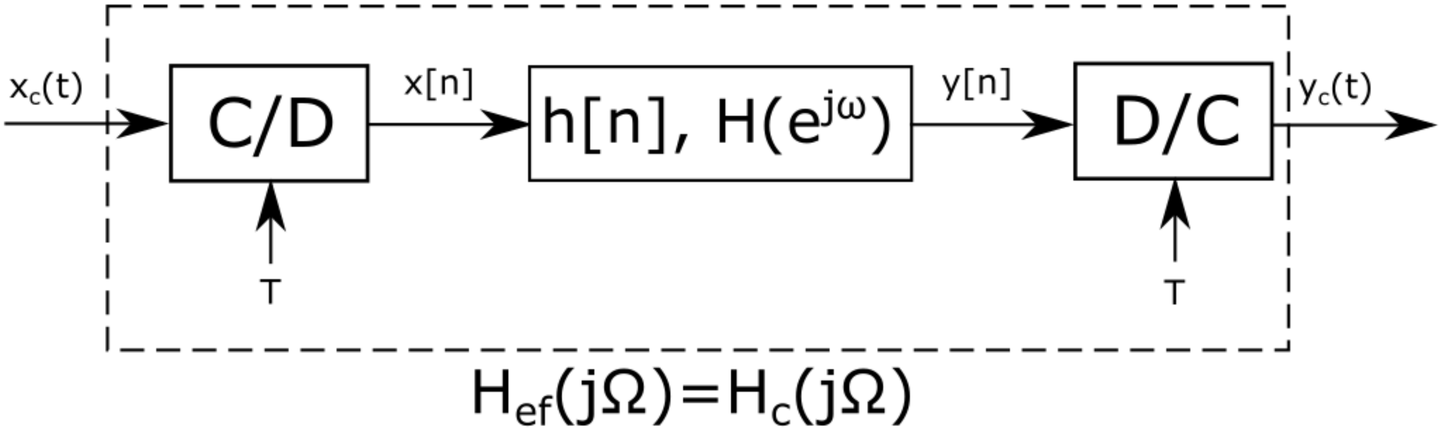
Projeto de Filtros IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um filtro de tempo contínuo o qual desejamos implementar em tempo discreto:





Método da Invariância ao Impulso

- Considere um filtro de tempo contínuo com resposta em frequência $H_c(j\Omega)$ **de banda limitada**, isto é,

$$H_c(j\Omega) = 0, \qquad |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$$

- Escolhendo a resposta ao impulso do filtro de tempo discreto como sendo proporcional a amostras igualmente espaçadas das resposta ao impulso do filtro de tempo contínuo tem-se:

$$h[n] = Th_c(nT)$$

Método da Invariância ao Impulso

- A transformada de Fourier de tempo discreto de $h[n]$ é

$$H\left(e^{j\omega}\right) = T \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

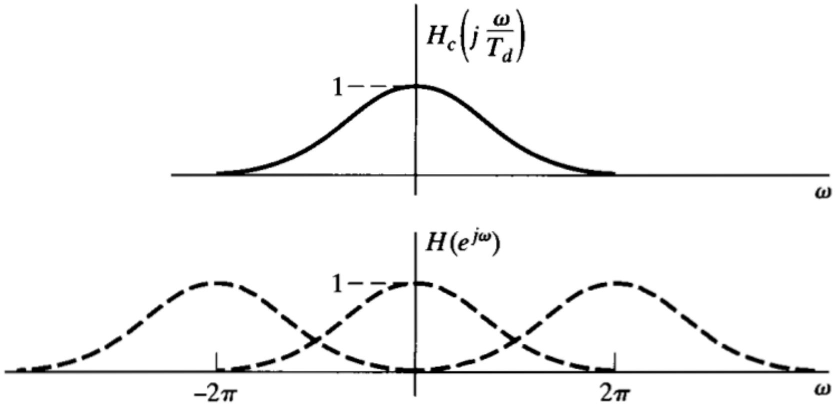
- Da hipótese que o filtro de tempo contínuo tem banda limitada, e com um conversor D/C com filtro de reconstrução ideal,

$$H_{ef}(j\Omega) = H\left(e^{j\omega}\right) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right), \qquad |\omega| \leq \pi$$

Método da Invariância ao Impulso

- Na prática todos os filtros de tempo contínuos não são exatamente de banda limitada e um pouco de *alias* ocorrerá.

- Todavia, se a resposta em frequência do filtro tender a zero nas altas frequências, o *alias* será desprezível.



Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Dado um filtro de tempo contínuo com função de transferência

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$$

ilaplace -> inversa de laplace no matlab

- Sua resposta ao impulso é

c2d(H,Ts)

$$h_c(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

- A resposta ao impulso do filtro de tempo discreto é obtida amostrando $Th_c(t)$, isto é,

$$h[n] = Th_c(nT) = \sum_{k=1}^{N} TA_k e^{s_k T n} u[n]$$

$$h[n] = \sum_{k=1}^{N} TA_k (e^{s_k T})^n u[n]$$

- Calculando a transformada z de $h[n]$ resulta

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}} \qquad (1)$$

- Observe que os polos s_k do filtro de tempo contínuo foram mapeados em $e^{s_k T}$ no filtro de tempo discreto.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Exemplo:
  - Considere o projeto de um filtro em tempo discreto, amostrado com $T = \frac{1}{10.000}\ s$, que seja equivalente ao filtro com as seguintes especificações:

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 2 \cdot \pi \cdot 1.000\, rad/s$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad |\Omega| \geq 2 \cdot \pi \cdot 1.500\, rad/s$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como a resposta do filtro Butterworth é monotônica, então,

$$|H_c(j2 \cdot \pi \cdot 1.000)| \geq 0{,}89125$$

$$|H_c(j2 \cdot \pi \cdot 1.500)| \leq 0{,}17783$$

- A magnitude ao quadrado do filtro Butterworth é dada por

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- É preciso determinar a ordem do filtro N e a frequência de corte Ω_c que atendam as especificações desejadas.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

- Da equação do módulo ao quadrado com as especificações tem-se

$$1+\left(\frac{2\cdot\pi\cdot 1.000}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0{,}89125}\right)^2$$

e

$$1+\left(\frac{2\cdot\pi\cdot 1.500}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0{,}17783}\right)^2$$

- É preciso determinar a ordem do filtro N e a frequência de corte Ω_c que atendam as especificações desejadas.

- A solução para as equações é $N=5{,}8858$ e $\Omega_c=7.047{,}4\ rad/s$.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como a ordem do filtro deve ser um número inteiro,

$$N = 6$$

- Com isso, considerando a restrição na banda de passagem

$$\Omega_c = 7.032\, rad/s$$

- Temos que verificar as especificações do filtro para os valores de N e Ω_c calculados.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Em $\Omega_p = 2 \cdot \pi \cdot 1.000\, rad/s$

$$\left|H_c(j\Omega_p)\right| = 0{,}89125 \Rightarrow$$

Atende exatamente as especificações.

- Em $\Omega_s = 2 \cdot \pi \cdot 1.500\, rad/s$

$$\left|H_c(j\Omega_p)\right| = 0{,}1700 \Rightarrow$$

Excede as especificações.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Definidas a frequência de corte Ω_c e a ordem do filtro N, resta o cálculo dos polos do filtro de tempo contínuo $H_c(s)$.

- Para isso, considere a relação válida para a aproximação Butterworth

$$|H_c(s)|^2 = H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Logo, os polos são calculados através do denominador, isto é,

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Assim,

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

$$\frac{s^{2N}}{(j\Omega_c)^{2N}} = -1$$

$$s^{2N} = -1(j\Omega_c)^{2N}$$

$$s_k = \sqrt[2N]{-1}\sqrt[2N]{(j\Omega_c)^{2N}}$$

$$s_k = \sqrt[2N]{-1}(j\Omega_c)$$

$$s_k = \Omega_c e^{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)(2k+N-1)}, \qquad k = 0,1,\dots,2N-1$$

Observação:

$$z = \rho\big(cos(\theta) + jsen(\theta)\big)$$

$$\sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{\rho} \cdot e^{j\left(\frac{\theta}{N}+\frac{2\pi k}{N}\right)}, k = 0,1,\dots,N-1$$

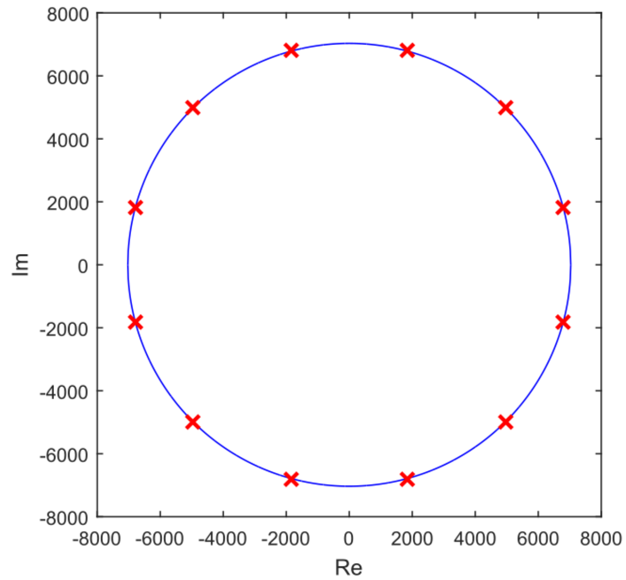
Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A expressão

$$s_k = \Omega_c e^{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)(2k+N-1)}, \qquad k = 0,1,\ldots,2N-1$$

fornece 12 polos igualmente espaçados, isto é,



Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Escolhendo os 6 polos estáveis tem-se

$$s_{1,2} = [-1{,}82 \pm j6{,}792] \cdot 10^3$$

$$s_{3,4} = [-4{,}972 \pm j4{,}972] \cdot 10^3$$

$$s_{5,6} = [-6{,}792 \pm j1{,}82] \cdot 10^3$$

- Portanto,

$$H_c(s) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)(s-s_6)}$$

$$H_c(s) = \frac{1}{(s^2+3.640{,}05s+4{,}95\cdot 10^7)(s^2+9.944{,}82s+4{,}95\cdot 10^7)(s^2+13.584{,}87s+4{,}95\cdot 10^7)}$$

que ainda necessita ter o ganho CC ajustado para 1.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para o ajuste do ganho CC multiplicamos o numerador por $(4{,}95 \cdot 10^7)^3$.

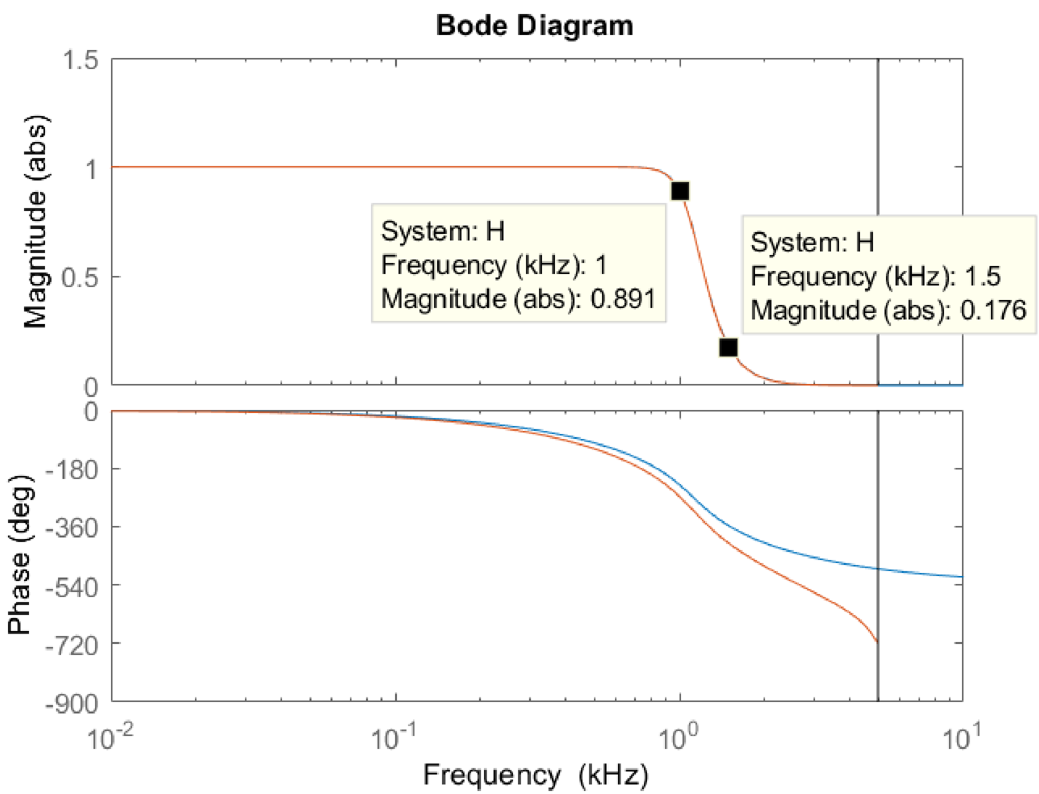
$$H_c(s) = \frac{(4{,}95 \cdot 10^7)^3}{(s^2 + 3.640{,}05s + 4{,}95 \cdot 10^7)(s^2 + 9.944{,}82s + 4{,}95 \cdot 10^7)(s^2 + 13.584{,}87s + 4{,}95 \cdot 10^7)}$$

- Expandindo $H(s)$ em frações parciais e utilizando a transformação (1) resulta, após a combinação dos termos complexos, em

$$H(z) = \frac{0{,}2871 - 0{,}4466z^{-1}}{1 - 1{,}2971z^{-1} + 0{,}6949z^{-2}} + \frac{-2{,}1428 + 1{,}1455z^{-1}}{1 - 1{,}0691z^{-1} + 0{,}3699z^{-2}} + \frac{1{,}8557 - 0{,}6303z^{-1}}{1 - 0{,}9972z^{-1} + 0{,}2570z^{-2}}$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Invariância ao Impulso

- A resposta em frequência para os filtros é:



Projeto de Filtros IIR pelo Método da Transformada Bilinear

tustin

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Este método evita o fenômeno de *aliasing* que ocorre no método da invariância ao impulso.

- A transformada Bilinear corresponde a substituição de s por

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \qquad (2)$$

de forma que

$$H(z) = H_c\left(\frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)\right)$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Isolando z na equação (2) tem-se

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$$

- Substituindo $s = \sigma + j\Omega$ tem-se

$$z = \frac{1 + \sigma\frac{T}{2} + j\Omega\frac{T}{2}}{1 - \sigma\frac{T}{2} - j\Omega\frac{T}{2}} \qquad (3)$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

- Calculando o módulo de z tem-se

$$|z| = \sqrt{\frac{\left(1+\sigma\frac{T}{2}\right)^2 + \left(\Omega\frac{T}{2}\right)^2}{\left(1-\sigma\frac{T}{2}\right)^2 + \left(\Omega\frac{T}{2}\right)^2}}$$

- Assim, se:

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1 \quad para \quad \forall\Omega$$

$$\sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1 \quad para \quad \forall\Omega$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow |z| = 1 \quad para \quad \forall\Omega$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Conclusões que são obtidas:
  - $\sigma < 0$ corresponde a valores de s no semiplano esquerdo.
  - Esses valores de s são mapeados dentro de um círculo de raio unitário.
  - $\sigma > 0$ corresponde a valores de s no semiplano direito.
  - Esses valores de s são mapeados fora de um círculo de raio unitário.
- Com isso, filtros de tempo contínuo estáveis (polos no semiplano esquerdo) e causais são mapeados em filtros de tempo discreto estáveis (polos dentro do círculo unitário) e causais.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Outras conclusões:
  - $\sigma = 0$ corresponde a valores de s no eixo imaginário.
  - Esses valores de s são mapeados sobre a circunferência de raio unitário.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

- Vamos ver qual é a relação entre ω e Ω quando a transformada Bilinear é usada.

- Seja

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

- Substituindo $s = \mathrm{j}\Omega \Rightarrow z = e^{j\omega}$. Logo,

$$\mathrm{j}\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right)$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Multiplicando por $\frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}}}$ tem-se

$$\mathrm{j}\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}\right)\frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}}}$$

$$\mathrm{j}\Omega = \frac{2}{T}\left(\frac{e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}}{e^{\frac{j\omega}{2}} + e^{-\frac{j\omega}{2}}}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{2j \cdot sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{j \cdot sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}{cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)$$

$$\boxed{\Omega = \frac{2}{T}\left(tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega = 2tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)}$$

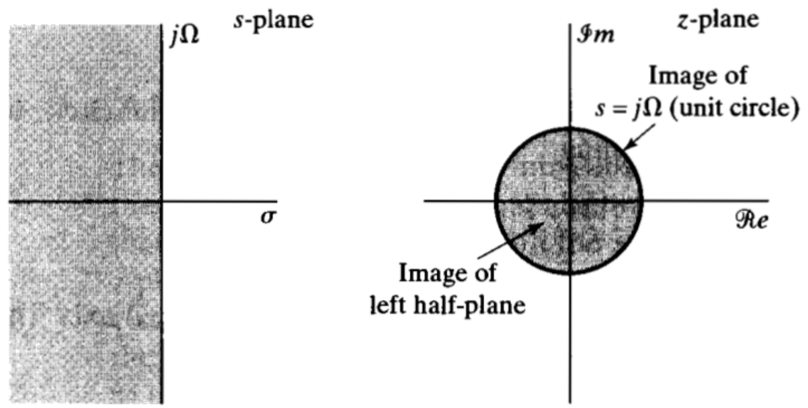
Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Propriedades da transformada Bilinear:
  - A transformada Bilinear mapeia o plano s no z da seguinte forma:

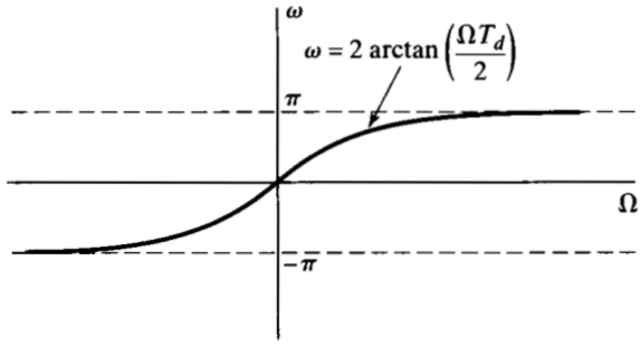
$$0 \leq \Omega < \infty \Rightarrow 0 \leq \omega \leq \pi$$

$$-\infty < \Omega \leq 0 \Rightarrow -\pi \leq \omega \leq 0$$



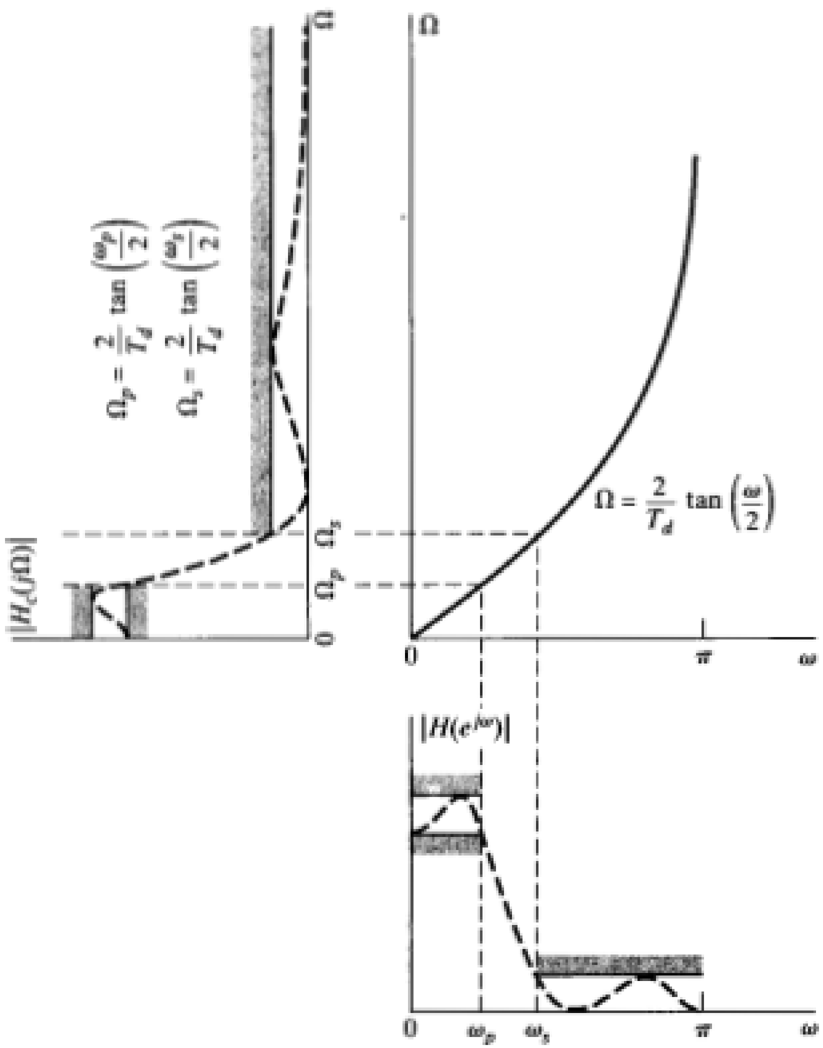
Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

- Evita o efeito de *aliasing* por mapear o eixo $j\Omega$ no círculo unitário.
- Todavia, esse mapeamento não é linear.



- Esse comportamento não linear na frequência deve ser compensado no projeto do filtro.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear



Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

- Exemplo:
  - Considere o projeto de um filtro em tempo discreto, amostrado com $T = \frac{1}{10.000}\ s$, que seja equivalente ao filtro com as seguintes especificações:

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 2 \cdot \pi \cdot 1.000\, rad/s$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad |\Omega| \geq 2 \cdot \pi \cdot 1.500\, rad/s$$

  - Como ocorrerá distorção na frequência, estas especificações devem ser revistas.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- O filtro de tempo discreto deve ter frequências:

$$\omega_p = \Omega_p T = 2 \cdot \pi \cdot 1.000 \cdot \frac{1}{10.000} = 0{,}2 \cdot \pi \; rad/s$$

$$\omega_s = \Omega_s T = 2 \cdot \pi \cdot 1.500 \cdot \frac{1}{10.000} = 0{,}3 \cdot \pi \; rad/s$$

- Se aplicarmos a transformada bilinear no H(s) do exemplo anterior (invariância ao impulso), sem compensação da frequência, teremos:

$$\omega_p = 2tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T}{2}\right) = 0{,}194 \cdot \pi \; rad/s$$

$$\omega_s = 2tan^{-1}\left(\frac{\Omega_s T}{2}\right) = 0{,}28 \cdot \pi \; rad/s$$

- Neste caso o sistema como um todo se comportará com um filtro de tempo contínuo com frequências:

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0{,}194 \cdot \pi}{1/_{10.000}} = 969{,}9 \; Hz$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0{,}28 \cdot \pi}{1/_{10.000}} = 1.400 \; Hz$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considerando a relação $\omega = \Omega T$ tem-se

$$0{,}89125 \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1, \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0{,}2 \cdot \pi$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 0{,}17783, \qquad 0{,}3 \cdot \pi \leq |\omega| \leq \pi$$

- Usando a relação $\Omega = \frac{2}{T} tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$ se faz a compensação.

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq \underbrace{\frac{2}{T} tan\left(\frac{0{,}2\pi}{2}\right)}_{2 \cdot \pi \cdot 1.034{,}25\ rad/s} rad/s$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad |\Omega| \geq \underbrace{\frac{2}{T} tan\left(\frac{0{,}3\pi}{2}\right)}_{2 \cdot \pi \cdot 1.621{,}87\ rad/s} rad/s$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como a resposta do filtro Butterworth é monotônica, então,

$$\left|H_c\left(j\frac{2}{T}tan(0{,}1\pi)\right)\right| \geq 0{,}89125$$

$$\left|H_c\left(j\frac{2}{T}tan(0{,}15\pi)\right)\right| \leq 0{,}17783$$

- A magnitude do quadrado do filtro Butterworth é dada por

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- É preciso determinar a ordem do filtro N e a frequência de corte Ω_c que atendam as especificações com a compensação na frequência.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Da equação do módulo ao quadrado com as especificações tem-se

$$1+\left(\frac{\frac{2}{T}tan(0{,}1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0{,}89125}\right)^2$$

e

$$1+\left(\frac{\frac{2}{T}tan(0{,}1\pi)}{\Omega_c}\right)^{2N}=\left(\frac{1}{0{,}17783}\right)^2$$

- É preciso determinar a ordem do filtro N e a frequência de corte Ω_c que atendam as especificações desejadas.

- A solução para as equações é $N=5{,}304$ e $\Omega_c=7.381{,}09\ rad/s$.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Ao contrario do impulso, o por método bilinear funciona para todo tipo de filtro

- Como a ordem do filtro deve ser um número inteiro,

$$N = 6$$

- Com isso, considerando a restrição na banda de rejeição

$$\Omega_c = 7.662\, rad/s$$

- Temos que verificar as especificações do filtro para os valores de N e Ω_c calculados.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Em $\Omega_p = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{0{,}2\pi}{2}\right)\ rad/s$

$$\left|H_c(j\Omega_p)\right| = 0{,}9372 \Rightarrow$$

Excede as especificações.

- Em $\Omega_s = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{0{,}3\pi}{2}\right) rad/s$

$$\left|H_c(j\Omega_p)\right| = 0{,}17783 \Rightarrow$$

Atende exatamente as especificações.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Definidas a frequência de corte Ω_c e a ordem do filtro N, resta o cálculo dos polos do filtro de tempo contínuo $H_c(s)$.

- Para isso, considere a relação válida para a aproximação Butterworth

$$|H_c(s)|^2 = H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- Logo, os polos são calculados através do denominador, isto é,

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Assim,

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N} = 0$$

$$\frac{s^{2N}}{(j\Omega_c)^{2N}} = -1$$

$$s^{2N} = -1(j\Omega_c)^{2N}$$

$$s_k = \sqrt[2N]{-1}\sqrt[2N]{(j\Omega_c)^{2N}}$$

$$s_k = \sqrt[2N]{-1}(j\Omega_c)$$

$$s_k = \Omega_c e^{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)(2k+N-1)}, \qquad k = 0,1,\ldots,2N-1$$

Observação:

$$z = \rho\big(cos(\theta) + jsen(\theta)\big)$$

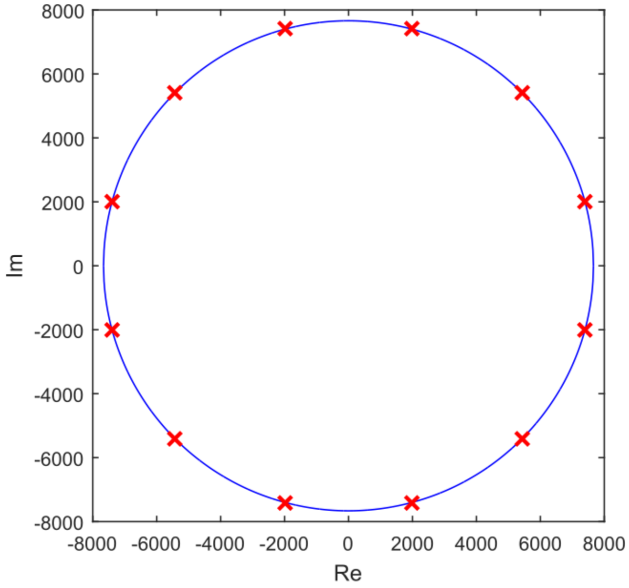
$$\sqrt[N]{z} = \sqrt[N]{\rho} \cdot e^{j\left(\frac{\theta}{N}+\frac{2\pi k}{N}\right)}, k = 0,1,\ldots,N-1$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

- A expressão

$$s_k = \Omega_c e^{\left(\frac{j\pi}{2N}\right)(2k+N-1)}, \qquad k = 0,1,\ldots,2N-1$$

fornece 12 polos igualmente espaçados, isto é,



Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Escolhendo os 6 polos estáveis tem-se

$$s_{1,2} = [-1{,}983 \pm j7{,}401] \cdot 10^3$$

$$s_{3,4} = [-5{,}418 \pm j5{,}418] \cdot 10^3$$

$$s_{5,6} = [-7{,}401 \pm j1{,}983] \cdot 10^3$$

- Portanto,

$$H_c(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4)(s - s_5)(s - s_6)}$$

$$H_c(s) = \frac{1}{(s^2 + 3.966{,}3s + 5{,}87 \cdot 10^7)(s^2 + 10.836{,}14s + 5{,}87 \cdot 10^7)(s^2 + 14.802{,}45s + 5{,}87 \cdot 10^7)}$$

que ainda necessita ter o ganho CC ajustado para 1.

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para o ajuste do ganho CC multiplicamos o numerador por $(5{,}87 \cdot 10^7)^3$.

$$H_c(s) = \frac{(5{,}87 \cdot 10^7)^3}{(s^2 + 3.966{,}3s + 5{,}87 \cdot 10^7)(s^2 + 10.836{,}14s + 5{,}87 \cdot 10^7)(s^2 + 14.802{,}45s + 5{,}87 \cdot 10^7)}$$

- Utilizando a transformada

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

com $T = \dfrac{1}{10.000}$ tem-se

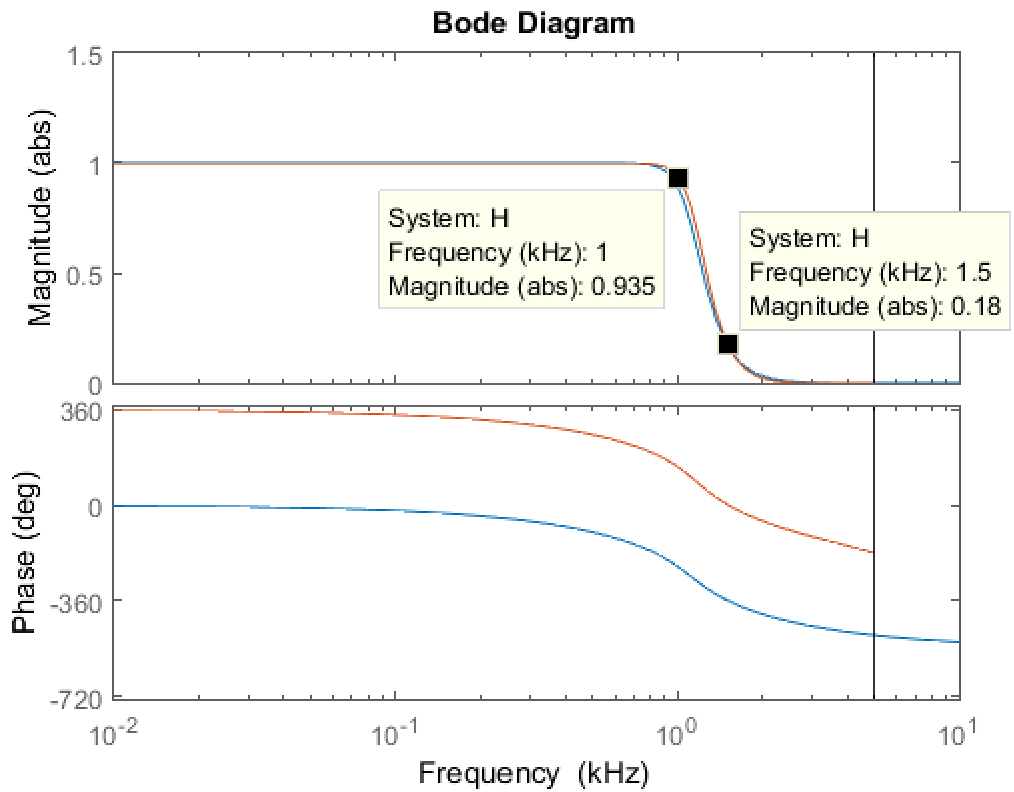
$$H(z) = \frac{0{,}0007378(1 + 6z^{-1} + 15z^{-2} + 20z^{-3} + 15z^{-4} + 6z^{-5} + z^{-6})}{(1 - 1{,}2686z^{-1} + 0{,}7051z^{-2})(1 - 1{,}0106z^{-1} + 0{,}3583z^{-2})(1 - 0{,}9044z^{-1} + 0{,}2155z^{-2})}$$

Projeto de Filtro IIR pelo Método da Transformada Bilinear

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A resposta em frequência para os filtros é:

butter cria um filtro já descretizado do



Projeto de Filtros FIR por Janelamento

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Este método parte de uma resposta em frequência ideal desejada, isto é,

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}$$

onde $h_d[n]$ é a resposta ao impulso correspondente, a qual pode ser expressa como

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A maneira mais simples para se obter um filtro FIR causal, a partir de $h_d[n]$, é definimos um novo sistema com reposta ao impulso:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \leq n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \qquad (4)$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Genericamente, $h[n]$ pode ser obtida como o produto da resposta ao impulso desejada e uma janela de duração finita $w[n]$, isto é,

$$h[n] = h_d[n]w[n]$$

- Para se obter (4), a janela usada é uma janela retangular,

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Do teorema da modulação,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

- Assim, se $w[n] = 1$, para todo n, (não há truncamento) e

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$$

ou seja, $W(e^{j\omega})$ é um trem de impulsos periódicos com período 2π. Logo,

$$H(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega})$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Se $w[n]$ é escolhida tal que $W(e^{j\omega})$ está concentrado em uma banda de frequências estreitas ao redor de $\omega = 0$, então,

$$H(e^{j\omega}) \approx H_d(e^{j\omega})$$

exceto onde $H_d(e^{j\omega})$ muda abruptamente.

- Deseja-se que a janela $w[n]$ seja o mais curta possível para reduzir o custo computacional.
- Ao mesmo tempo, deseja-se que $W(e^{j\omega})$ se aproxime de um impulso.
- Estes dois requisitos são conflitantes.

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para uma janela retangular

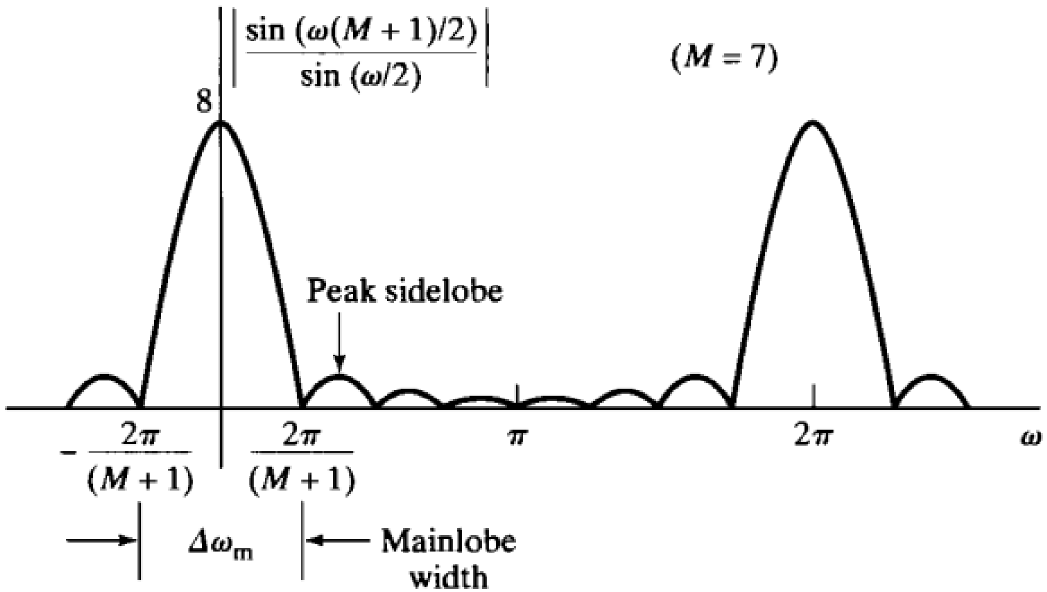
$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

- Sua resposta em frequência é

$$W\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=0}^{M} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\frac{\omega M}{2}} \frac{sen\left(\frac{\omega(M+1)}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

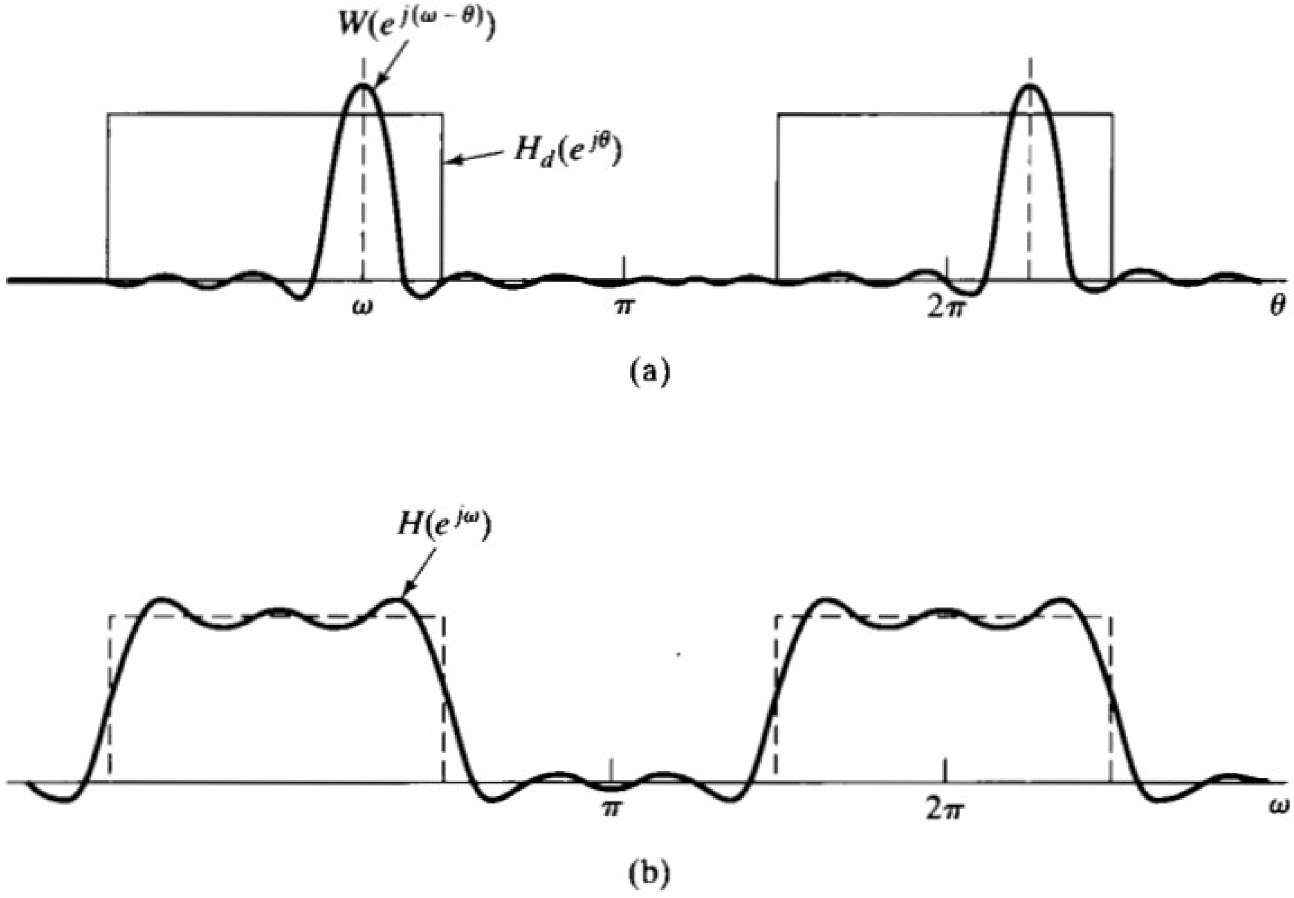
Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Para $M = 7$ tem-se



- Se M aumenta:
  - A largura dos lóbulos principal e laterais são reduzidas.
  - O pico dos lóbulos principais e laterais são aumentadas.

Projeto de Filtro FIR por Janelamento



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Principais janelas usadas:
  - Retangular

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

  - Bartlett (triangular)

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{2n}{M}, & 0 \leq n \leq \dfrac{M}{2} \\ 2 - \dfrac{2n}{M}, & \dfrac{M}{2} < n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Principais janelas usadas:
  - Hanning

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}5 - 0{,}5cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

  - Hamming

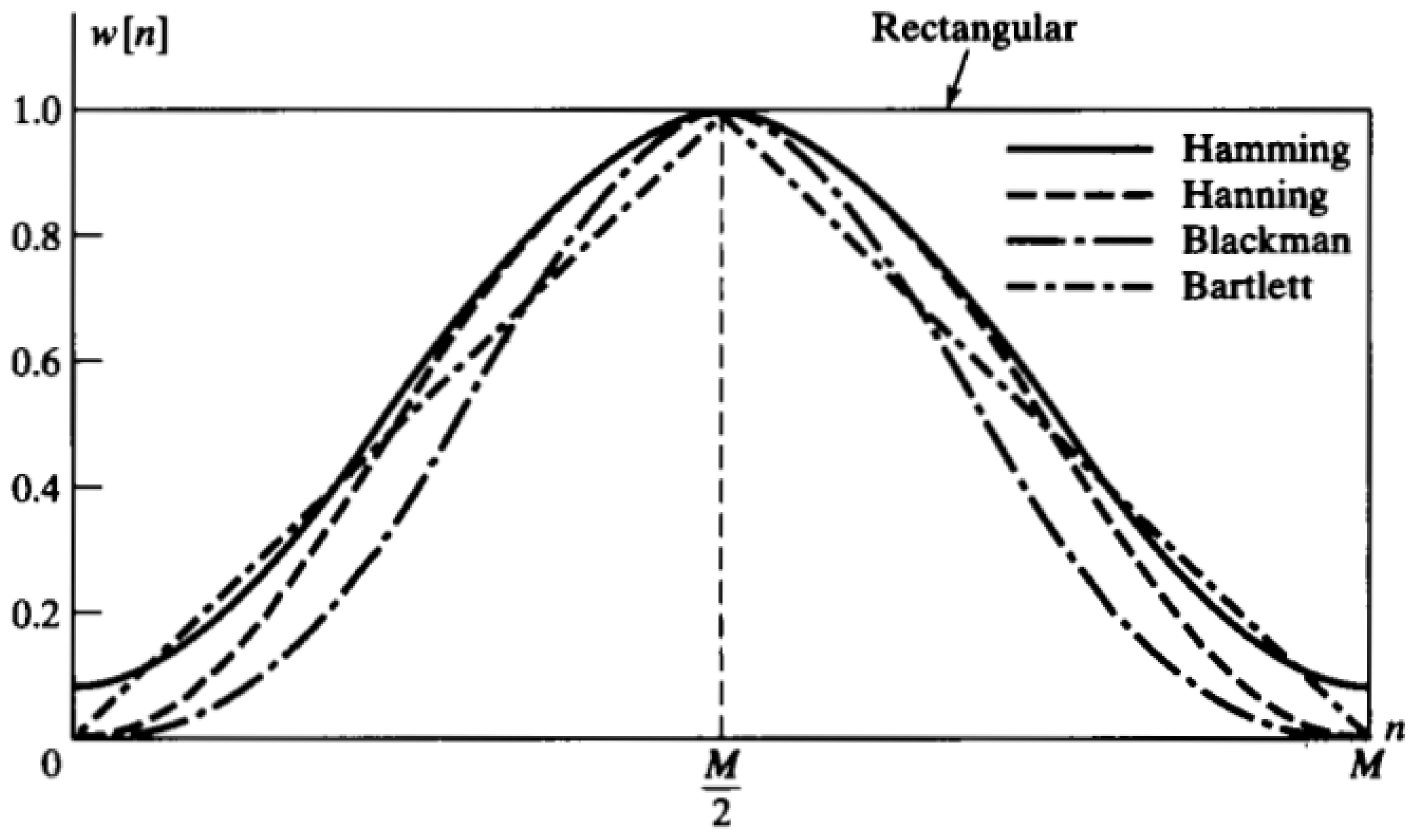
$$w[n] = \begin{cases} 0{,}54 - 0{,}46cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Principais janelas usadas:
  - Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0{,}42 - 0{,}5cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) + 0{,}08cos\left(\frac{4\pi n}{M}\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

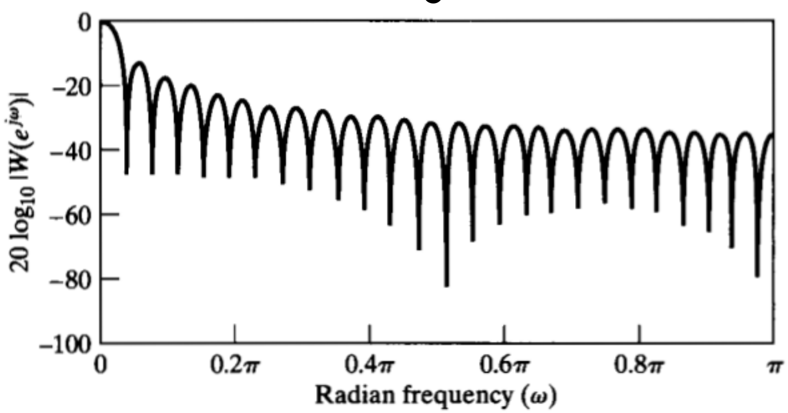


Projeto de Filtro FIR por Janelamento

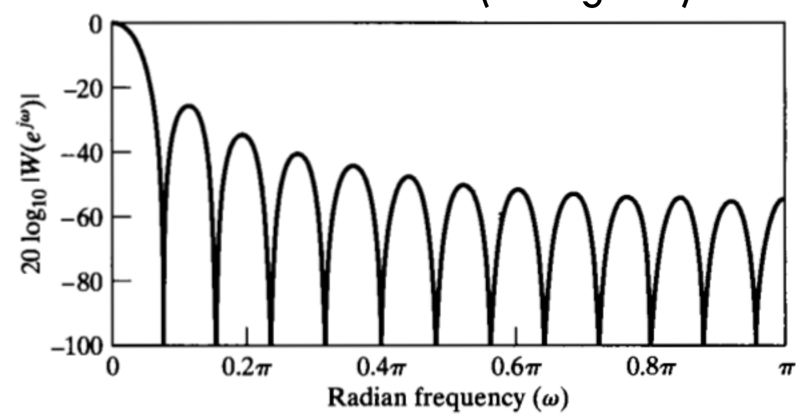
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para $M = 50$:

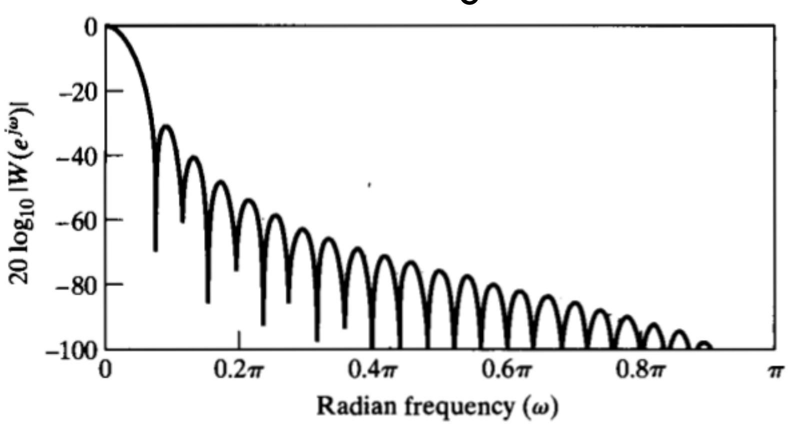
Retangular



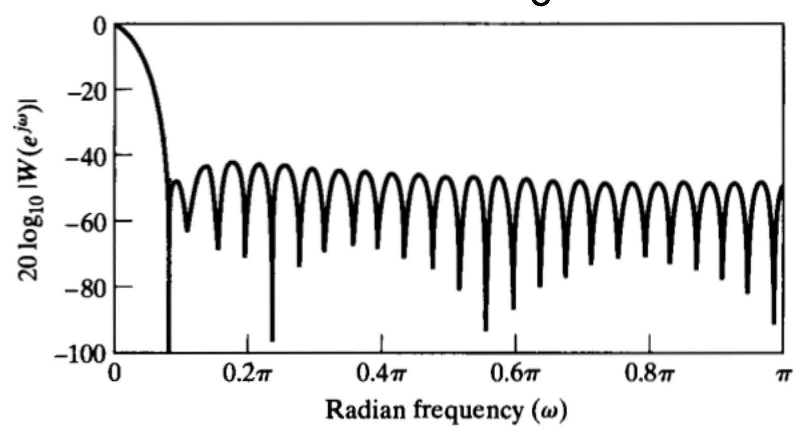
Bartlett (triangular)



Hanning



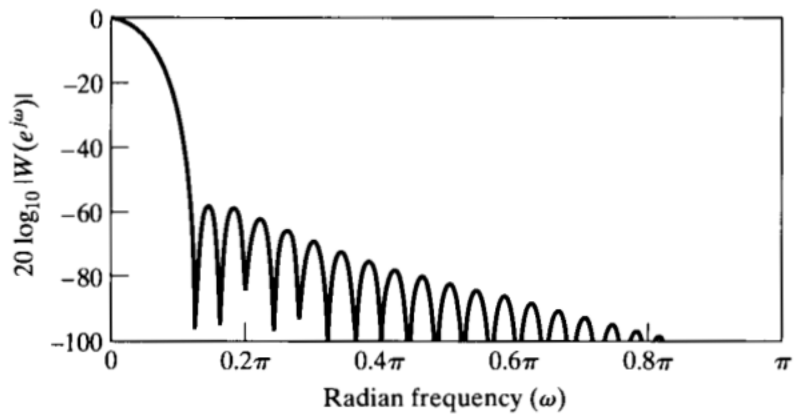
Hamming



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Para $M = 50$:

Blackmann



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Para $M = 50$:

Tipo de Janela	Pico do Lóbulo Lateral (Relativa) em dB	Largura do Lóbulo Principal
Retangular	-13	$\frac{4\pi}{(M+1)}$
Bartlett (triangular)	-25	$\frac{8\pi}{M}$
Hanning	-31	$\frac{8\pi}{M}$
Hamming	-41	$\frac{8\pi}{M}$
Blackmann	-57	$\frac{12\pi}{M}$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A janela retangular tem largura do lóbulo principal menor.
  - Isso fornece maior queda na transição.

- Por outro lado, o lóbulo lateral tem apenas $-13\ dB$ de atenuação.
  - Isso gera maiores oscilações na resposta em frequência aproximada.

- A escolha da janela, portanto, é um compromisso entre:
  - Transição em descontinuidades $\Rightarrow$ largura do lóbulo principal.
  - Oscilações da resposta desejada $\Rightarrow$ atenuação dos lóbulos laterais.

- Um compromisso entre largura do lóbulo principal e área dos lóbulos laterais é o foco da janela de Kaiser.

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A janela de Kaiser é definida por

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\beta\left(1-\left(\dfrac{(n-\alpha)}{\alpha}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{I_0(\beta)}, & 0 \le n \le M \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{M}{2}$$

$$\beta = \begin{cases} 0{,}1102(A-8{,}7), & A > 50 \\ 0{,}5842(A-21)^{0{,}4} + 0{,}07886(A-21), & 21 \le A \le 50 \\ 0, & A < 21 \end{cases}$$

$$A = -20log_{10}\delta$$

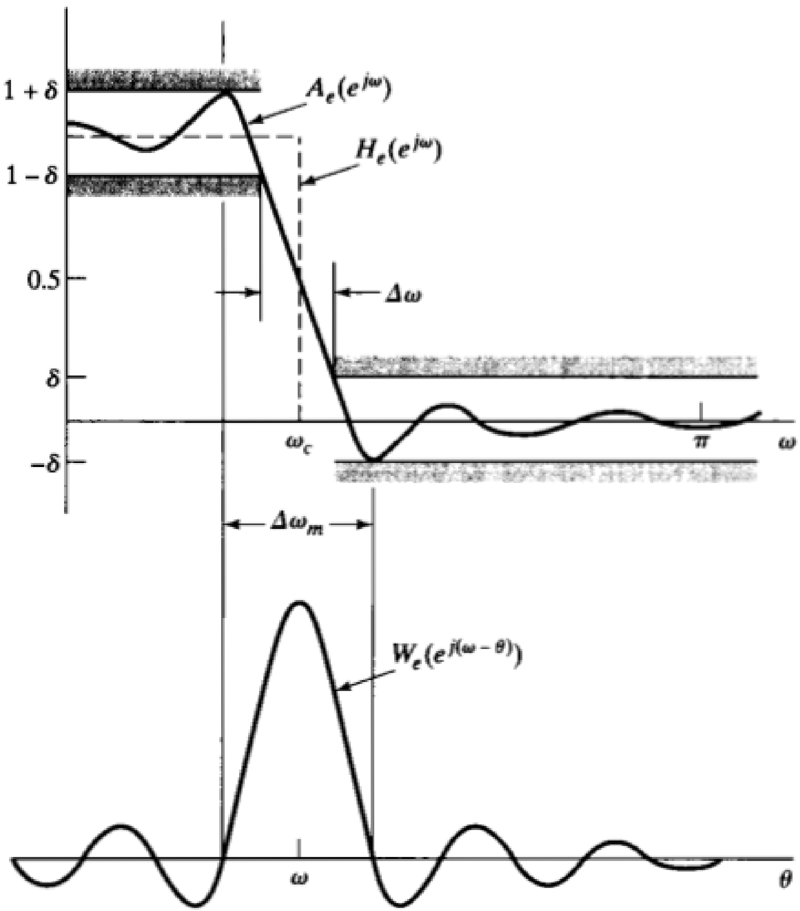
δ – erro nas bandas passante e de rejeição

$$M = \frac{A-8}{2{,}285\Delta\omega}$$

M com uma tolerância de ± 2

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento



$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- $I_0[\cdot]$ é uma função modificada de Bessel de ordem zero de primeira espécie:

$$I_0[x] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x\cdot cos(\theta)}\, d\theta$$

$$I_0[x] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}\right]^2$$

$$I_0[x] \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

Para $x > 10$, com erro de 1%.

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Observações:
  - $\beta = 0$ ⇨ Janela retangular
  - $\beta \uparrow$ ⇨ Maior atenuação nos lóbulos laterais ⇨ Menor ondulação.

    Maior largura do lóbulo principal ⇨ Menor taxa de atenuação na transição do filtro.
  - $M \uparrow$ ⇨ Menor largura do lóbulo principal ⇨ Maior taxa de atenuação na transição do filtro.

    Mantém a atenuação nos lóbulos laterais.

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Exemplo:
  - Considere o projeto de um filtro em tempo discreto, amostrado com $T = \frac{1}{10.000}\ s$, que seja equivalente ao filtro com as seguintes especificações:

$$0{,}89125 \leq |H_c(j\Omega)| \leq 1, \qquad 0 \leq |\Omega| \leq 2 \cdot \pi \cdot 1.000\ rad/s$$

$$|H_c(j\Omega)| \leq 0{,}17783, \qquad |\Omega| \geq 2 \cdot \pi \cdot 1.500\ rad/s$$

  - As especificações do filtro em tempo discreto devem ser:

$$\overbrace{1 - 0{,}10875}^{0{,}89125} \leq \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq 1 + 0{,}10875, \qquad 0 \leq |\omega| \leq 0{,}2 \cdot \pi\ rad/amostra$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \leq \underbrace{0{,}10875}_{\delta}, \qquad |\omega| \geq 0{,}3 \cdot \pi\ rad/amostra$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Os parâmetros da janela de Kaiser são:

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0{,}1 \cdot \pi$$

$$A = -20log_{10}(\delta) = -20log_{10}(0{,}10875) = 19{,}271$$

$$M = \frac{A - 8}{2{,}285\Delta\omega} = 15{,}702 \pm 2$$

$$M = 16 \pm 2 \qquad\qquad M = 16 \Rightarrow \alpha = \frac{M}{2} = 8$$

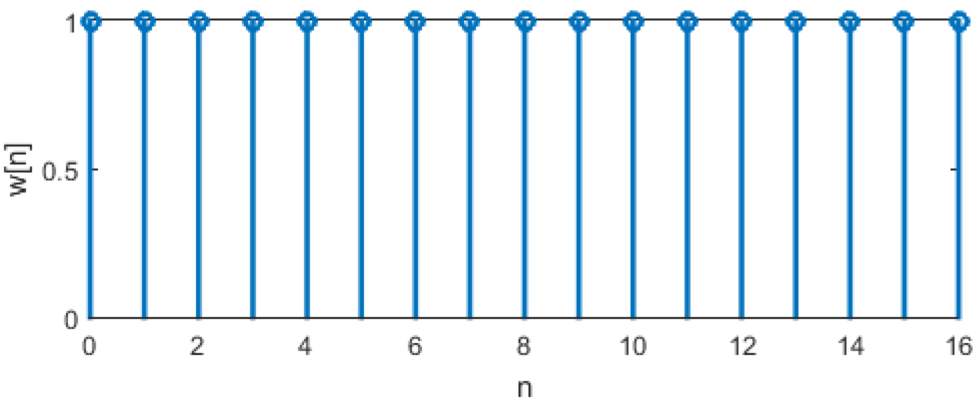
- Como $A < 21$:

$$\beta = 0$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A janela de Kaiser calculada é:

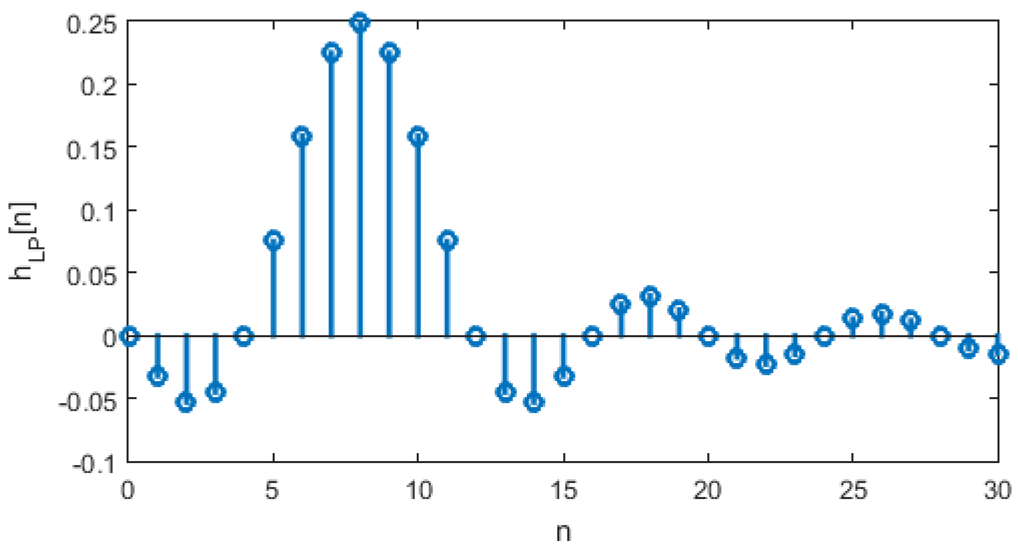
$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{I_0[0]}{I_0(0)} = 1, & 0 \leq n \leq 16 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A resposta ao impulso de um filtro passa baixas ideal é:

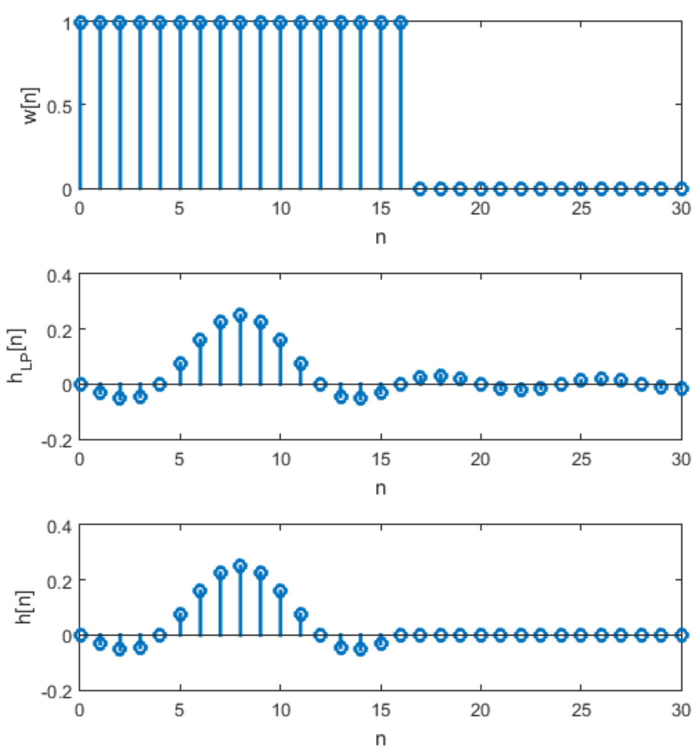
$$h_{PB}[n] = \frac{sen\big(\omega_c(n-\alpha)\big)}{\pi(n-\alpha)}$$



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

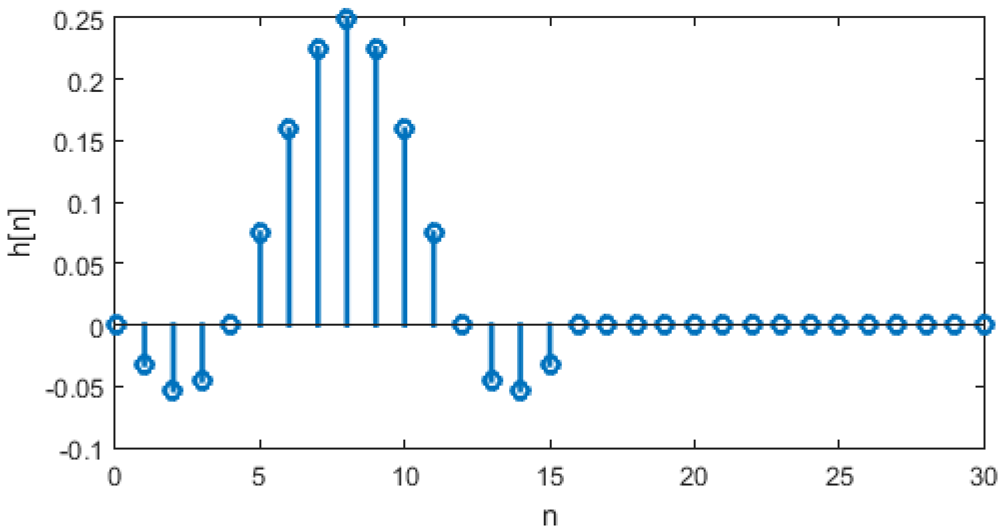
- A resposta ao impulso do filtro FIR desejado é calculada por:

$$h[n] = h_{PB}[n]w[n]$$



Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A resposta ao impulso do filtro FIR desejado é:

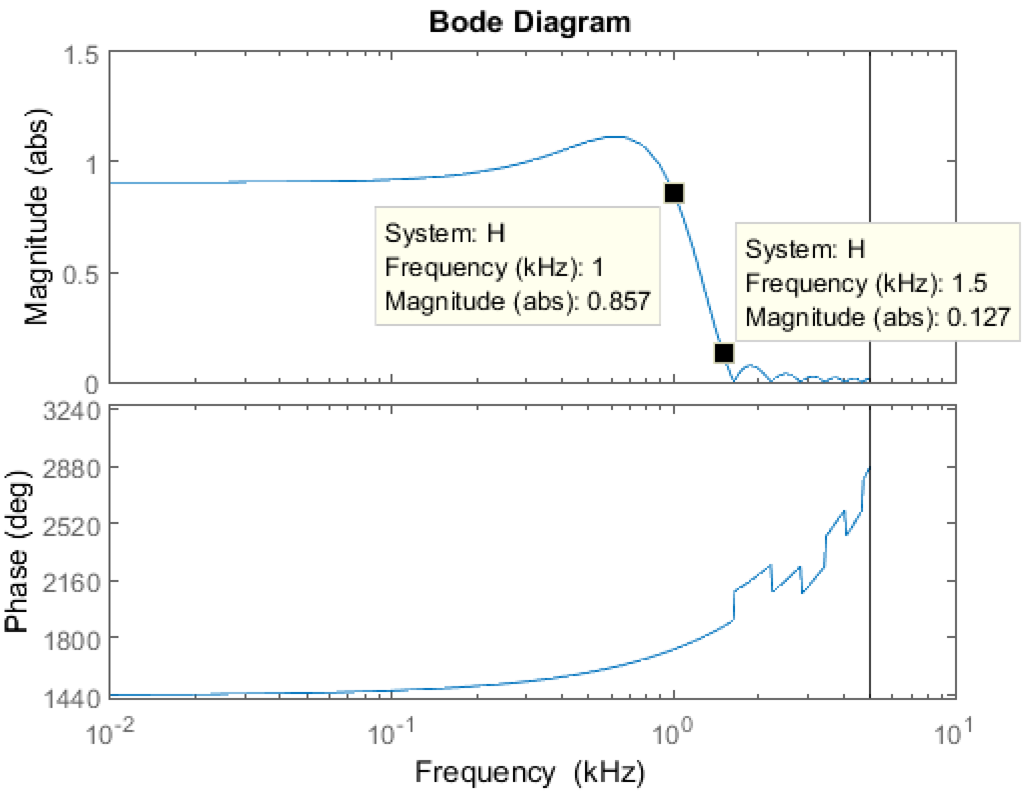


- Logo, o filtro é dado por:

$$H(z) = h(0)z^{0} + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(16)z^{-16}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A resposta em frequência do filtro FIR, para $M = 16$ é:



O filtro não atende as especificações em $\Omega_p = 1.000\ Hz$:

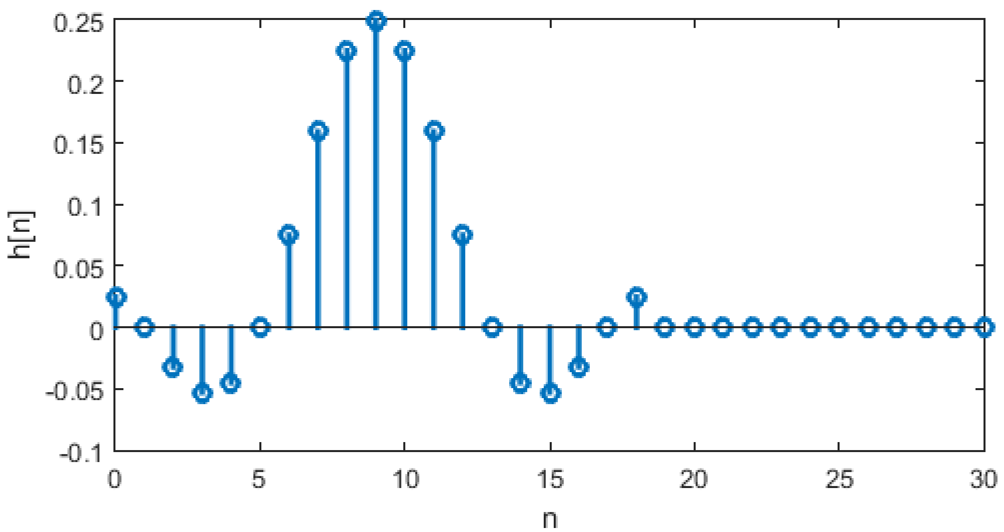
$$0.89125 \leq \left|H_c(j\Omega_p)\right| \leq 1{,}10875$$

Também não atende as especificações em $\Omega_s = 1.500\ Hz$:

$$|H_c(j\Omega_s)| \leq 0{,}10875$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- Reprojetando o filtro com $M = 18$, a resposta ao impulso do filtro FIR torna-se:

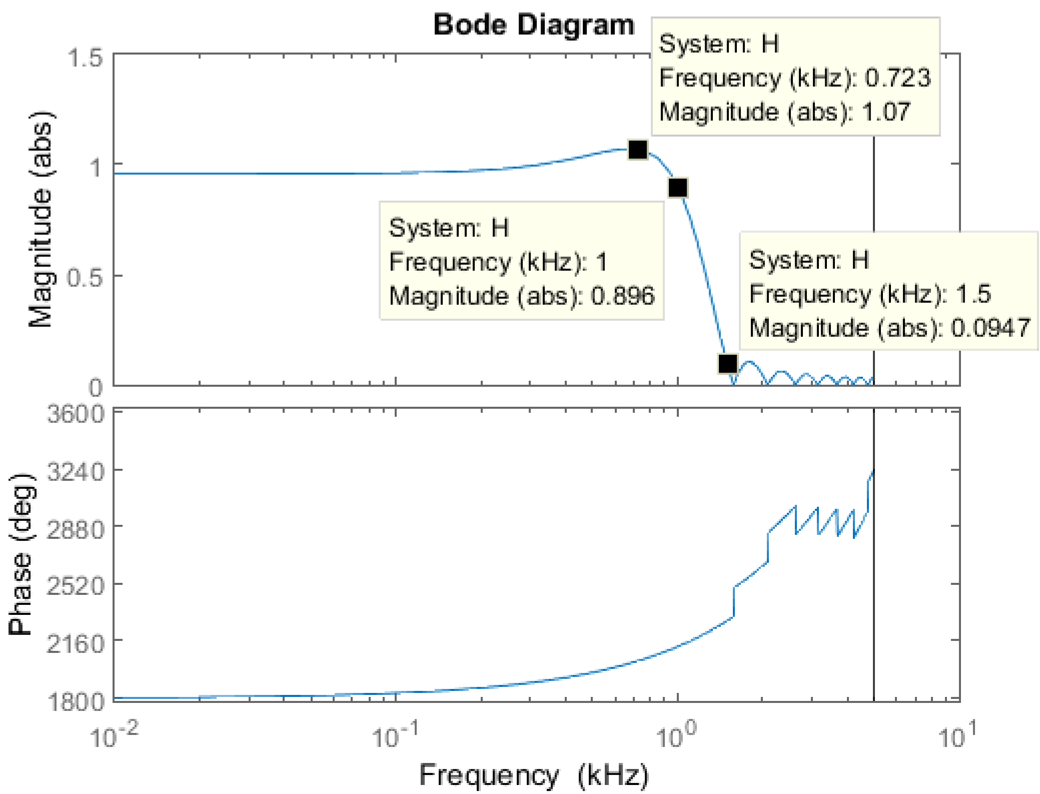


- Logo, o filtro é dado por:

$$H(z) = h(0)z^0 + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots + h(18)z^{-18}$$

Projeto de Filtro FIR por Janelamento

- A resposta em frequência do filtro FIR, para $M = 18$ é:



O filtro atende as especificações em $\Omega_p = 1.000\ Hz$:

$$0{,}89125 \leq \left|H_c\left(j\Omega_p\right)\right| \leq 1{,}10875$$

Também atende as especificações em $\Omega_s = 1.500\ Hz$:

$$|H_c(j\Omega_s)| \leq 0{,}10875$$