PROCESSAMENTO DE SINAIS

Análise de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

- Apresentar os conceitos de análise em frequência baseados na análise de Fourier.

- Descrever a análise em frequência para sinais de tempo contínuo periódicos e não periódicos.

- Descrever a análise em frequência para sinais de tempo discreto periódicos e não periódicos.

Princípio da Análise de Fourier

- Decompor um sinal em termos de componentes senoidais (exponenciais complexas).

↓

- Representação no domínio da frequência.

↓

- Determinação do espectro de frequência do sinal.

Possíveis Representações

TEMPO	SINAL PERIÓDICO	SINAL NÃO PERIÓDICO
CONTÍNUO	Série de Fourier	Transformada de Fourier
DISCRETO	Série de Fourier de Tempo Discreto	Transformada de Fourier de Tempo Discreto

vou usar esse no projeto

SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO PERIÓDICOS

SÉRIE DE FOURIER - FS

Série de Fourier

- Considere um sinal periódico $\underbrace{x(t)}_{\text{continuo}}$ com período T.

- Objetiva-se representar o sinal $x(t)$ através de uma combinação linear de exponenciais harmonicamente relacionadas da forma

e^(2*pi*f*k*t) = cos(2*pi*f*k*t) + j*sen(2*pi*f*k*t)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t} \qquad (1)$$

que é periódica com período fundamental $T = {}^{1}\!/_{f}$.

- A representação (1) é denominada de Série de Fourier de $x(t)$.

Série de Fourier

- Observe que

$$e^{j2\pi kft} = cos(2\pi kft) + jsen(2\pi kft)$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- A frequência f determina o período fundamental de $x(t)$ enquanto os coeficientes c_k determinam a forma do sinal.

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

- Multiplicando-se (1), em ambos os lados, por $e^{-j2\pi flt}$, onde l é um inteiro, e integrando-se sobre um período tem-se:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi lft}dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-j2\pi lft}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kft}\right)dt \qquad (2)$$

- O lado direito resulta em

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{j2\pi f(k-l)t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left.\frac{e^{j2\pi f(k-l)t}}{j2\pi f(k-l)}\right|_{t_0}^{t_0+T}$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Substituindo-se os limites de integração, para $k \neq l$, o resultado é zero.
- Se $k = l$, tem-se

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt = t\Big|_{t_0}^{t_0+T} = T$$

- Consequentemente, (2) torna-se

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi lft}dt = c_l T$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\{c_k\}$

- Logo, os coeficientes e Fourier podem ser calculados por

$$c_l = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-j2\pi lft}dt$$

- Como t_0 é arbitrário, pode-se integrar em qualquer intervalo T. Assim,

$$c_l = \frac{1}{T}\int_{T} x(t)e^{-j2\pi lft}dt$$

Convergência da Série de Fourier

- ***Teorema de Fourier***

"Seja $x(t)$ periódica com período T. Adicionalmente, sejam $x(t)$ e $x'(t)$ seccionalmente contínuas no intervalo $[t_0, t_0 + T]$. Então,a série de Fourier de $x(t)$ converge para $x(t)$ em todos os pontos onde é contínua e para ${[x(t^+)+x(t^-)]}/_{2}$ onde $x(t)$ é descontínua."

Série de Fourier para Sinais de Tempo Contínuo

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi kft}dt$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kft}$

Outras Representações da Série de Fourier

- Para sinais periódicos reais, c_k e c_{-k} são complexos conjugados, isto é,

$$c_k = |c_k|e^{j\theta_k},$$
$$c_{-k} = |c_k|e^{-j\theta_k}.$$

- Com isso, a série de Fourier pode ser representada por

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|cos(2\pi kft + \theta_k) \quad (3)$$

Em sinais reais

onde c_0 é real.

Outras Representações da Série de Fourier

- Outra representação pode ser obtida expandindo-se o termo cosenoidal de (3)

$$cos(2\pi kft + \theta_k) = cos(2\pi kft)cos(\theta_k) - sen(2\pi kft)sen(\theta_k).$$

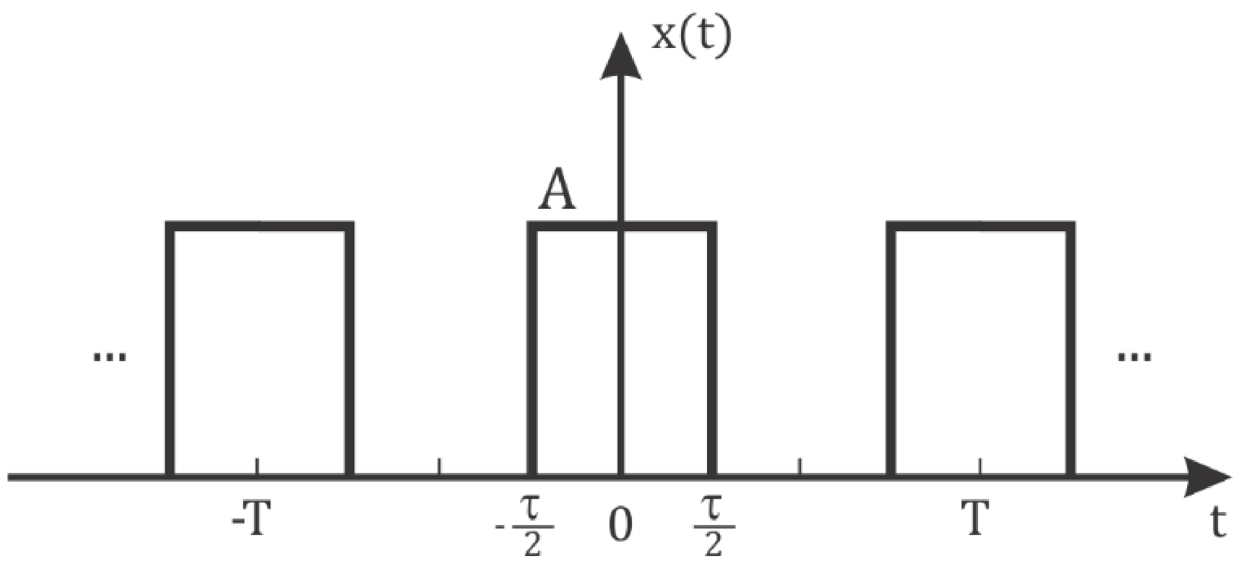
- Logo,

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k cos(2\pi kft) - b_k sen(2\pi kft)\right),$$

$$a_0 = c_0,$$
$$a_k = 2|c_k|cos(\theta_k),$$
$$b_k = 2|c_k|sen(\theta_k).$$

Exemplo

- Determine a representação de Fourier para o sinal ilustrado abaixo.



- Considere $A = 50$, $T = 1\ s$ e $\tau = 0{,}5T$.

Exemplo

- Utiliza-se

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi kft}dt$$

com limites de integração de ${}^{-\tau}/_{2}$ a ${}^{\tau}/_{2}$.

- Para $k = 0$ (fornece o nível CC do sinal):

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Adt = \frac{A\tau}{T}$$

Exemplo

- Para $k \neq 0$:

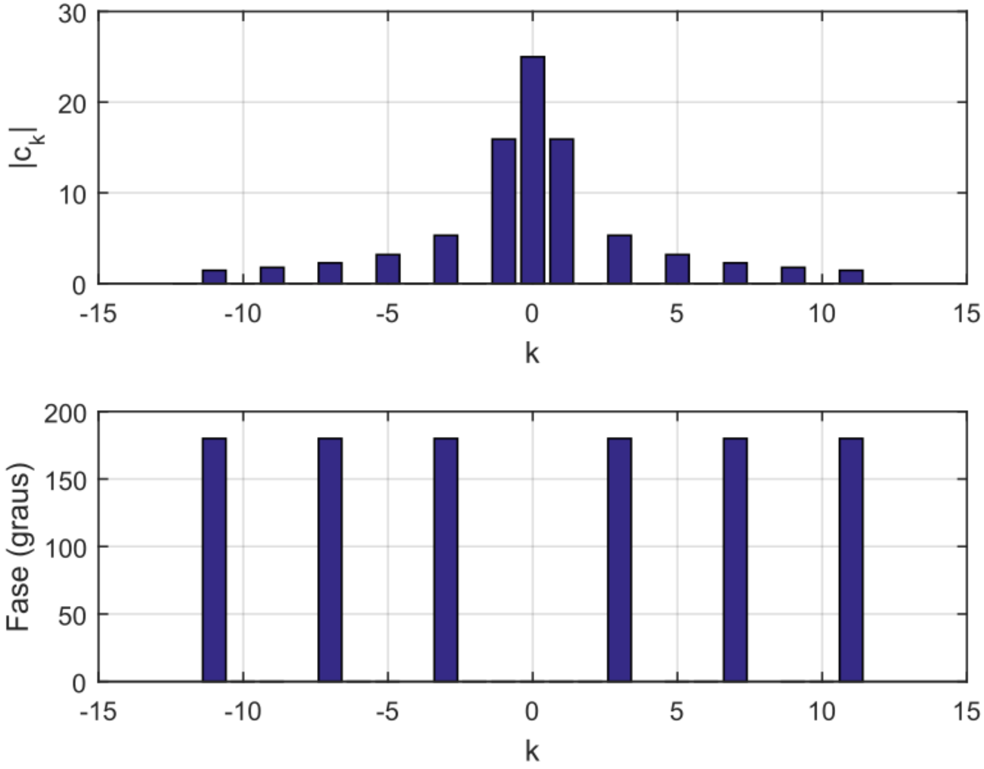
$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ae^{-j2\pi kf}\,dt = \frac{A}{T}\left[\frac{e^{-j2\pi kft}}{-j2\pi kf}\right]\Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}$$

$$= \frac{A}{\pi kfT}\frac{e^{j\pi kf\tau} - e^{-j\pi kf\tau}}{j2}$$

$$= \frac{A\tau}{T}\frac{sen(\pi kf\tau)}{\pi kf\tau}, \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

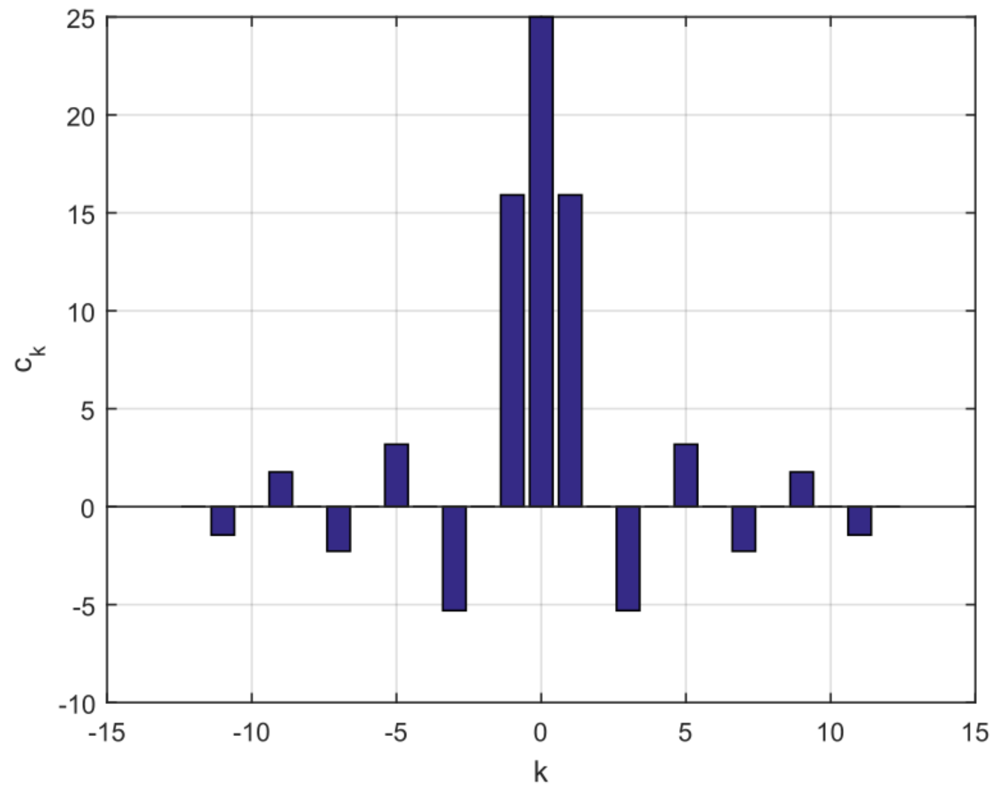
Exemplo

- Módulo e fase dos coeficientes de Fourier c_k para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.



Exemplo

- Como os coeficientes são todos reais, pode-se agrupar a magnitude e a fase em um único gráfico.



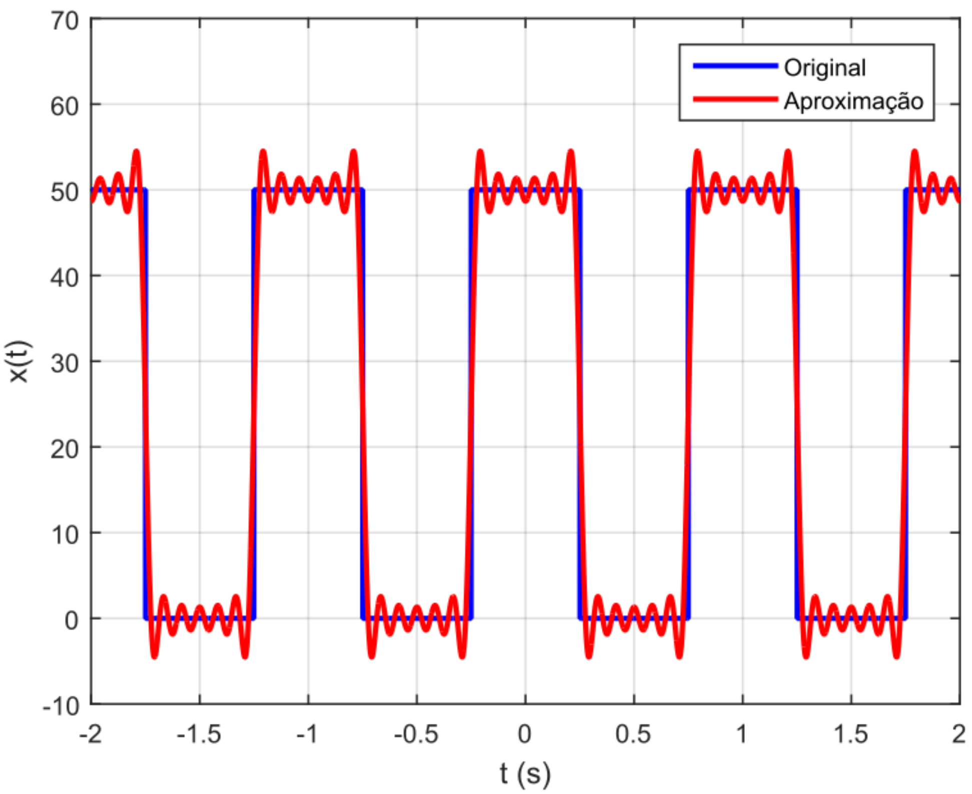
Exemplo

- Frequências presentes no sinal (espectro de frequência). Observe que a frequência fundamental é $f = 1\,Hz$.

k	Frequência (Hz)	Amplitude	Fase (graus)
0	CC	25	0
1	1	31,83	0
3	3	10,61	180
5	5	6,37	0
7	7	4,55	180
9	9	3,53	0
11	11	2,89	180

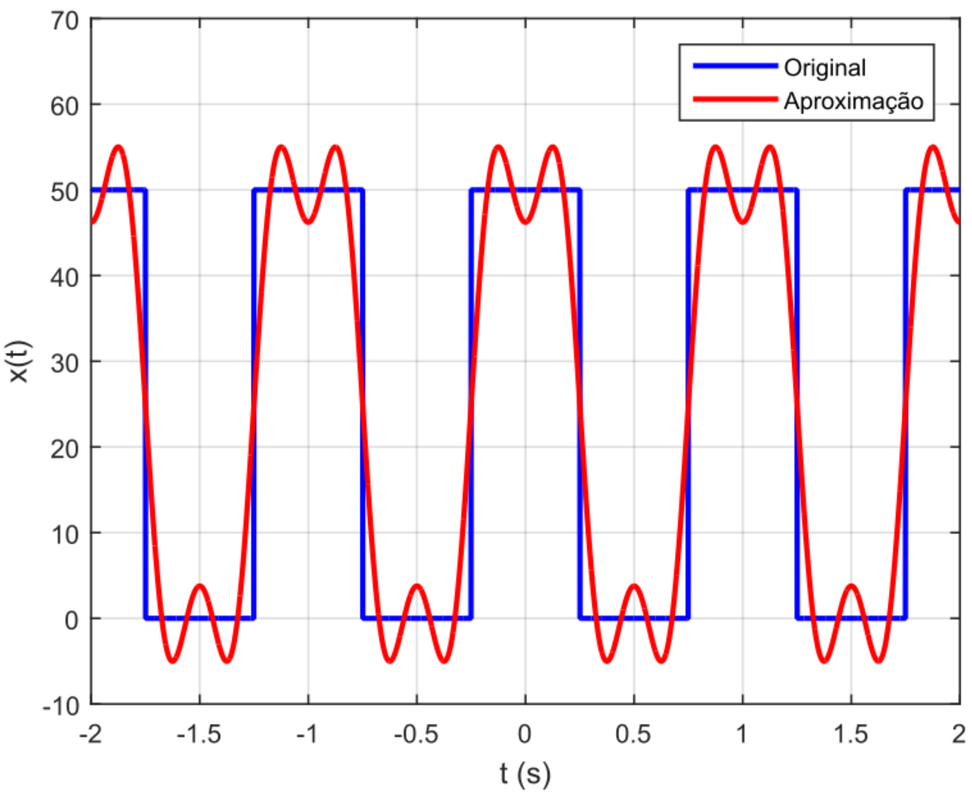
Exemplo

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12.$



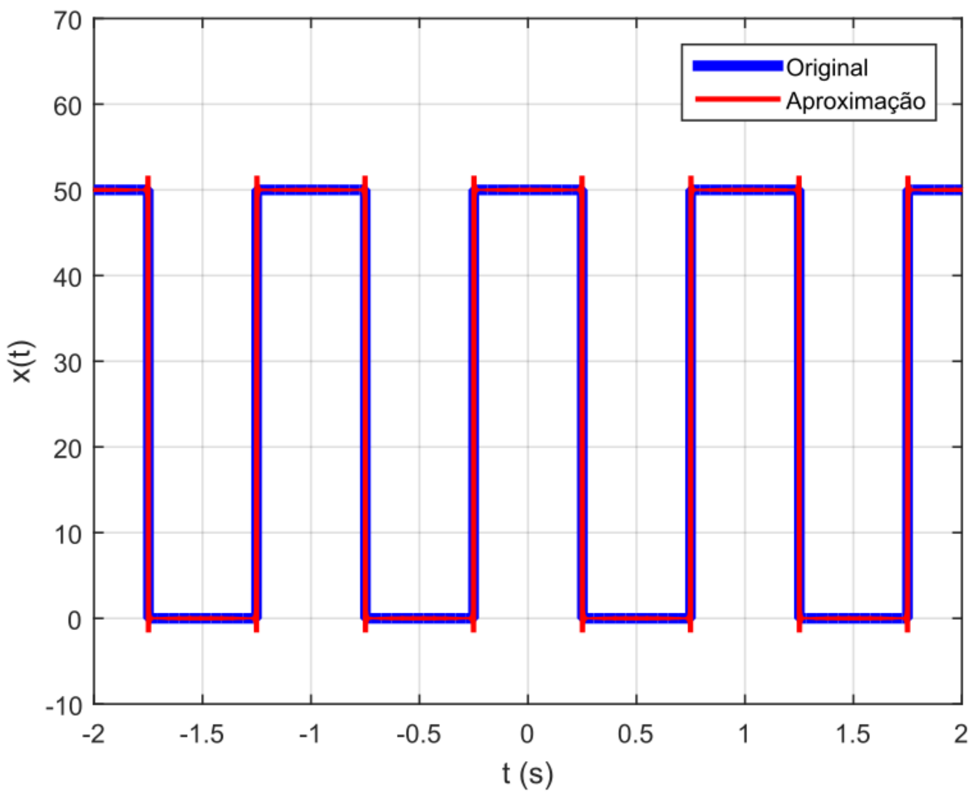
Exemplo

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 3$.



Exemplo

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 1500$.



Exemplo

- Fica evidente a influência dos coeficientes c_k na forma do sinal reconstruído.

- Para ilustrar a influência da frequência fundamental na reconstrução do sinal, considere o mesmo sinal $x(t)$ analisado, porém, com período $T = 0{,}1\ s$.

- Adicionalmente, sejam os dois casos já utilizados para a variação de k:
  - $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12,$
  - $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3.$

Exemplo

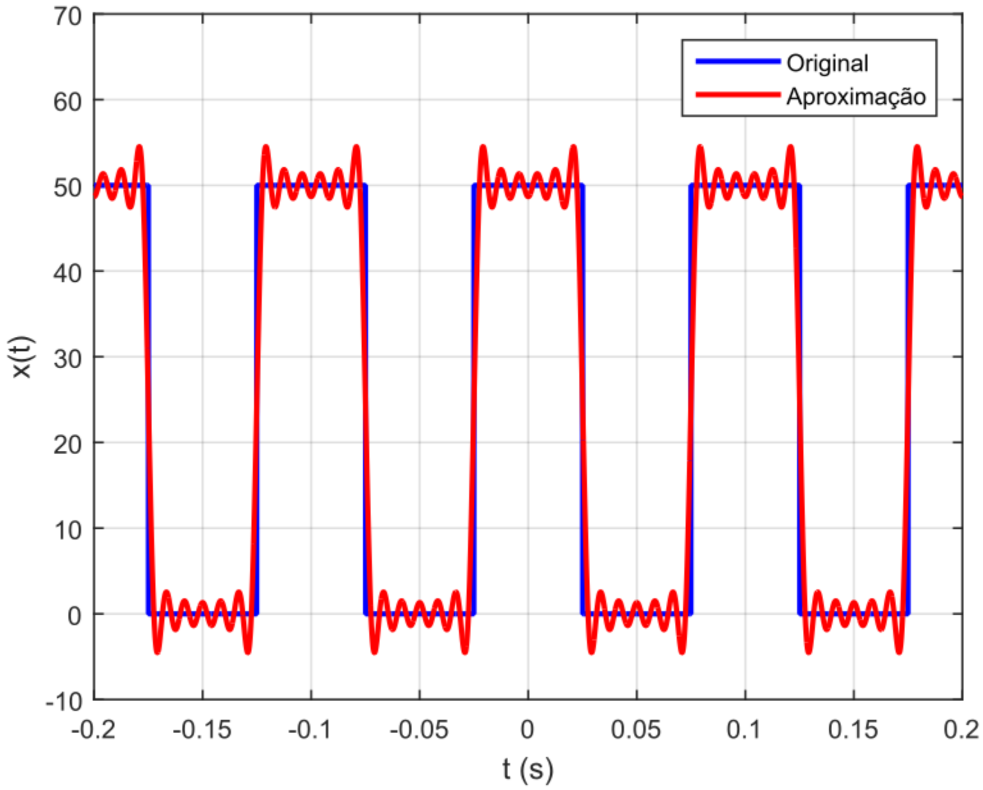
- Como a frequência fundamental é $f = 10\ Hz$ tem-se:

k	Frequência (Hz)	Amplitude	Fase (graus)
0	CC	25	0
1	10	31,83	0
3	30	10,61	180
5	50	6,37	0
7	70	4,55	180
9	90	3,53	0
11	110	2,89	180

- Como a forma da onda é a mesma, tem-se os mesmos componentes. Porém, agora, múltiplos de $10\ Hz$.

Exemplo

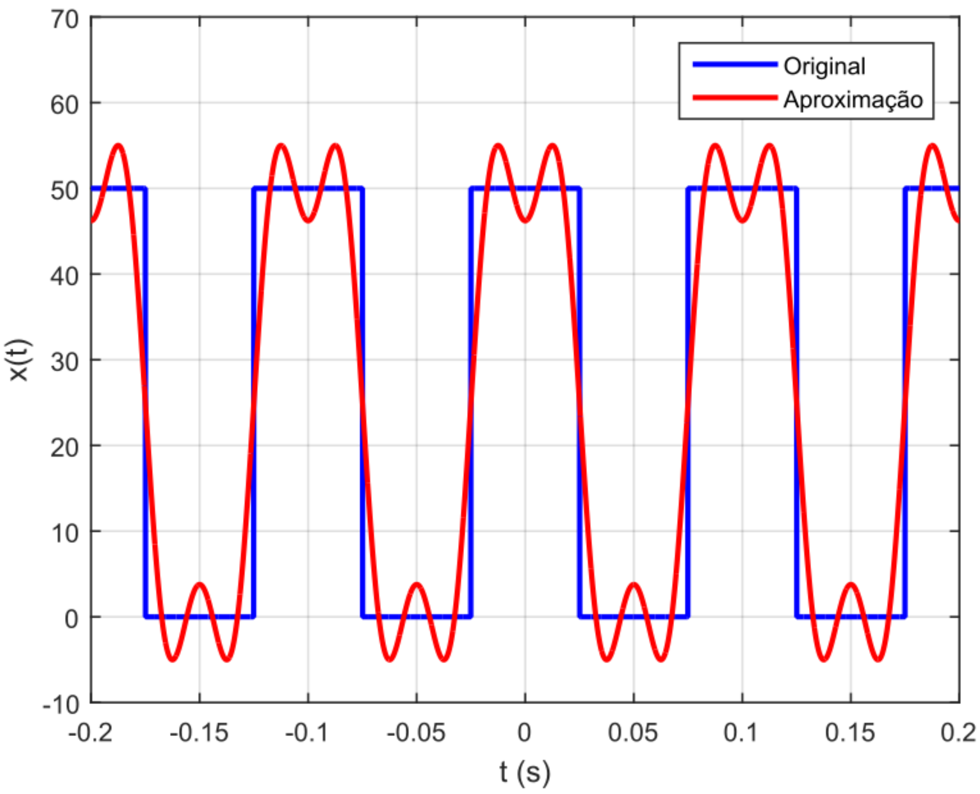
- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 12$.



- A forma de onda é igual ao caso anterior. Porém, o período fundamental, agora, é $T = 0{,}1\ s$.

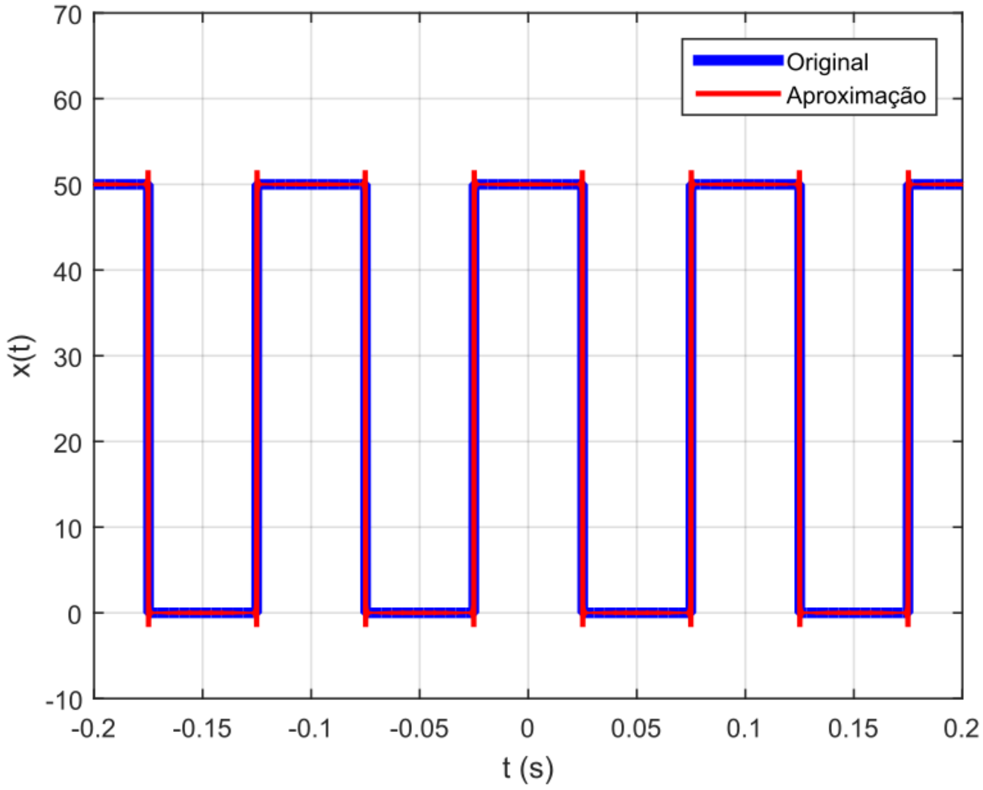
Exemplo

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$.



Exemplo

- Aproximação para $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm 1500.$

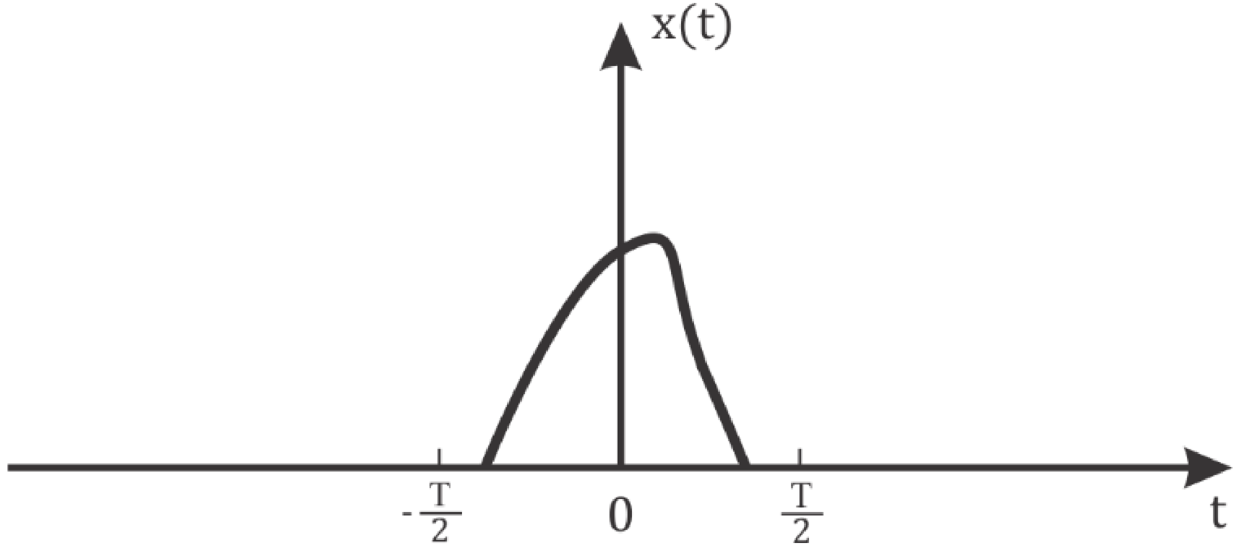


SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO NÃO PERIÓDICOS

TRANSFORMADA DE FOURIER - FT

Transformada de Fourier

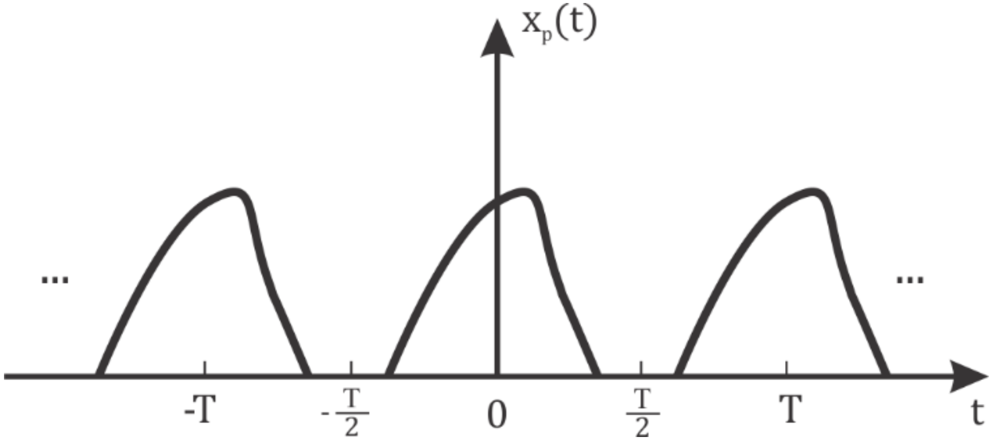
- Considere um sinal de tempo contínuo não periódico $x(t)$:



- Deseja-se determinar seu espectro de frequência.

Transformada de Fourier

- Se o sinal fosse periódico, com período T, a série de Fourier poderia ser aplicada. Para isso, a partir do sinal $x(t)$, pode-se criar um sinal periódico $x_p(t)$.



- É evidente que

$$x(t) = \lim_{T \to \infty} x_p(t).$$

Transformada de Fourier

- Isso leva à ideia de se usar a série de Fourier para se determinar o espectro de $x(t)$ considerando-se o limite de $T \to \infty$.
- Inicialmente, considere as equações da série de Fourier para $x_p(t)$, isto é,

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f t}, \qquad f = \frac{1}{T}, \tag{4}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_p(t) e^{-j2\pi k f t} dt. \tag{5}$$

Transformada de Fourier

- Como $x_p(t) = x(t)$ para $-{}^{T}/_{2} \leq t \leq {}^{T}/_{2}$, (5) pode ser reescrita como

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi kft}dt\,.$$

- Uma vez que $x(t) = 0$ para $|t| > {}^{T}/_{2}$, os limites de integração podem ser substituídos por $-\infty$ e ∞:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi kft}dt. \qquad (6)$$

Transformada de Fourier

- Define-se a transformada de Fourier de $x(t)$ como

$$\boxed{X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt} \tag{7}$$

F!=f

que é função da variável contínua F e não depende de T ou de f.

- Comparando-se (7) com (6), observa-se que

$$c_k = \frac{1}{T}X(kf), \tag{8}$$

$$Tc_k = X(kf) = X\left(\frac{k}{T}\right).$$

Transformada de Fourier

- Isso significa que os coeficientes de Fourier são amostras de $X(F)$ tomadas em múltiplos inteiros de f e escalonadas por um fator ${}^{1}/_{T}$.

- Substituindo (8) na equação de síntese (4) fornece

$$x_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi k f t} \qquad (9)$$

que ainda diz respeito a um sinal periódico.

Transformada de Fourier

- Para eliminar esta questão, deve-se calcular o limite de (9) para $T \to \infty$. Isto é,

$$\lim_{T\to\infty} x_p(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) e^{j2\pi kft}.$$

- Para isso, inicialmente, considera-se $\Delta F = {}^{1}/_{T}$. Assim:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2\pi k\Delta F t} \Delta F.$$

Transformada de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- É evidente que a medida que $T \to \infty$, $x_p(t) \to x(t)$.
  - Com isso, ΔF torna-se o diferencial dF;
  - E $\mathrm{k}\Delta F$ se torna a variável contínua F.
  - O somatório torna-se uma integral em relação a frequência variável F.

Transformada de Fourier

- Logo,

$$\lim_{T\to\infty} x_p(t) = x(t) = \lim_{\Delta F\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F)e^{j2\pi k\Delta F t}\Delta F.$$

- E a transformada inversa de Fourier de $X(F)$ é definida por

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F)e^{j2\pi F t}dF.} \qquad (10)$$

Transformada de Fourier para Sinais de Tempo Contínuo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO CONTÍNUO NÃO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF$

Transformada de Fourier

- Para se expressar as equações que descrevem a transformada de Fourier em função da frequência em rad/s considera-se $\Omega = 2\pi F$. Logo, $dF = {}^{d\Omega}/_{2\pi}$.

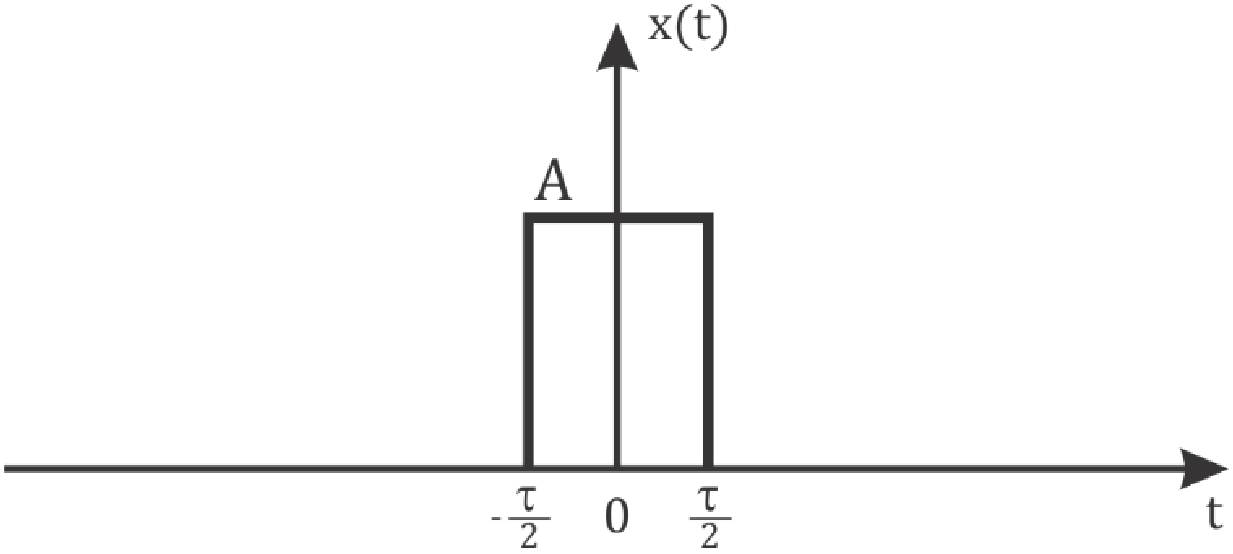
- Consequentemente,

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt,$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega.$$

Exemplo

- Determine a transformada de Fourier do sinal representado abaixo.



- Considere $A = 50$ e $\tau = 0{,}5\ s$.

Exemplo

- Utiliza-se

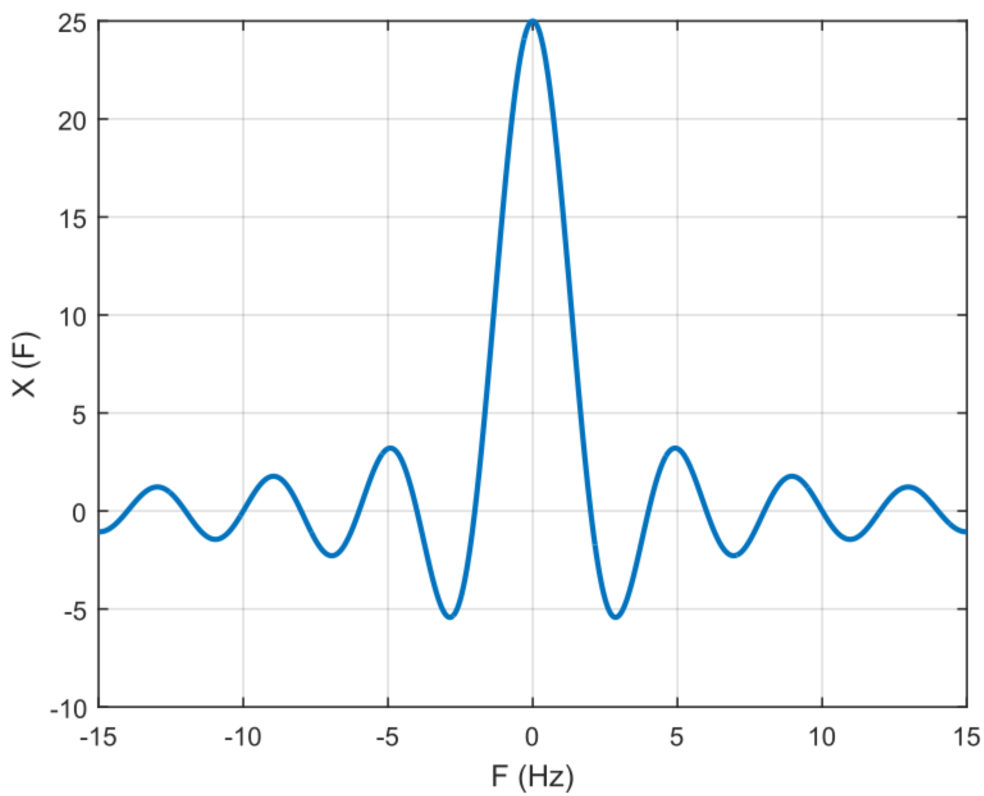
$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

que para o sinal em questão pode ser alterada para

$$X(F) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi Ft} dt = A\tau \frac{sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau}.$$

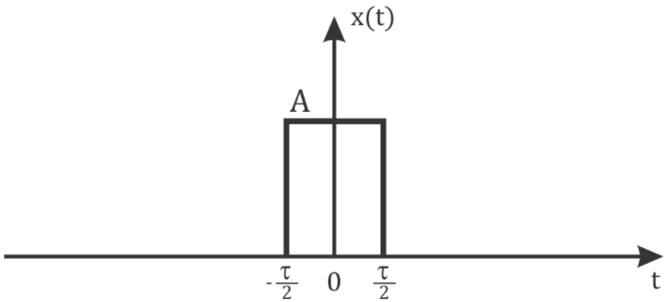
Exemplo

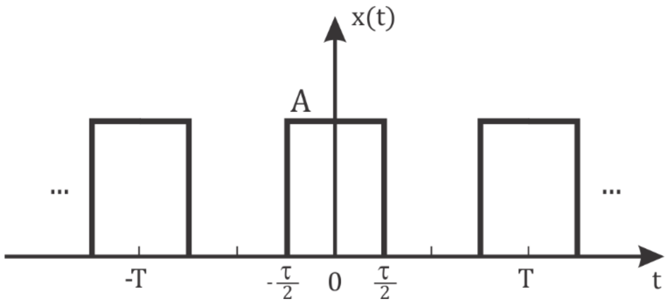
- Como o espectro de frequência X(F) é real, este pode ser representado por:



Exemplo

- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período T.



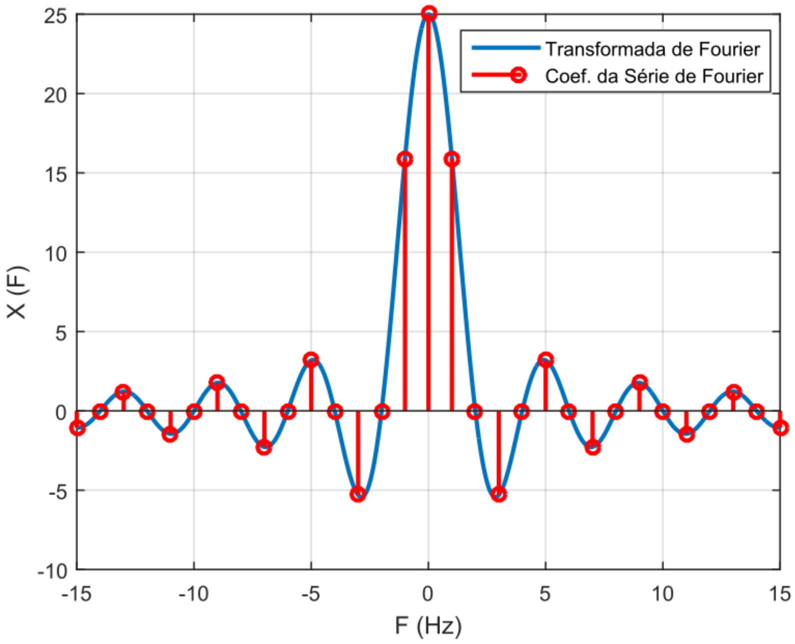


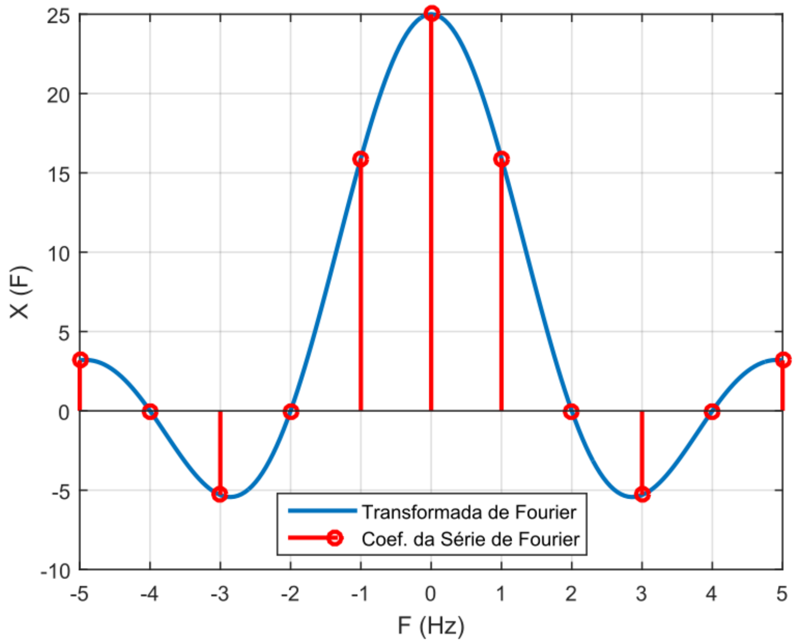
- Mais precisamente, seja $A = 50$ e $T = 1\ s$, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sobrepondo os gráficos da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier obtém-se:

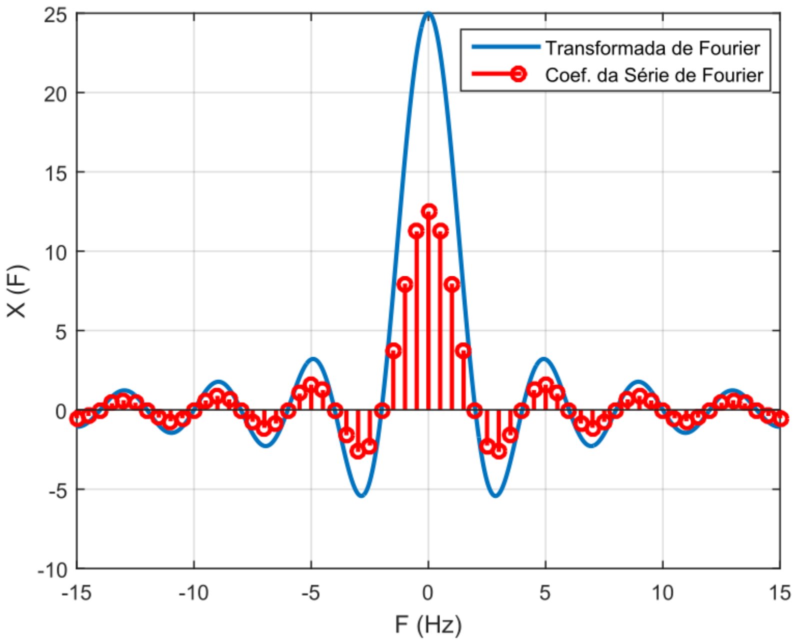


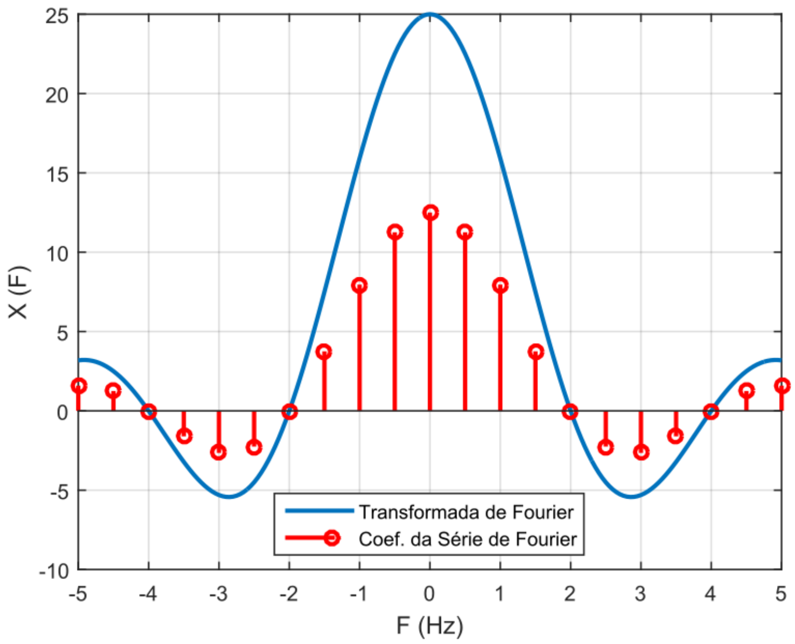


Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Agora, considere que o sinal periódico mantém $\mathrm{A} = 50,\ \tau = 0{,}5\ s$ mas o período foi elevado para $T = 2\ s$.





Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

- O espectro de um sinal não periódico é o envelope do espectro de um sinal periódico (coeficientes de Fourier) obtido pela repetição do sinal não periódico com um período T.

- Os coeficientes de Fourier do sinal periódico são amostras normalizadas de $X(F)$ nas frequências $kf = {}^{k}/_{T}$. Isto é,

$$c_k = \frac{1}{T} X(kf) = \frac{1}{T} \mathrm{X}\left(\frac{k}{T}\right).$$

Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Suponha que a série de Fourier fosse definida como

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kft}$$

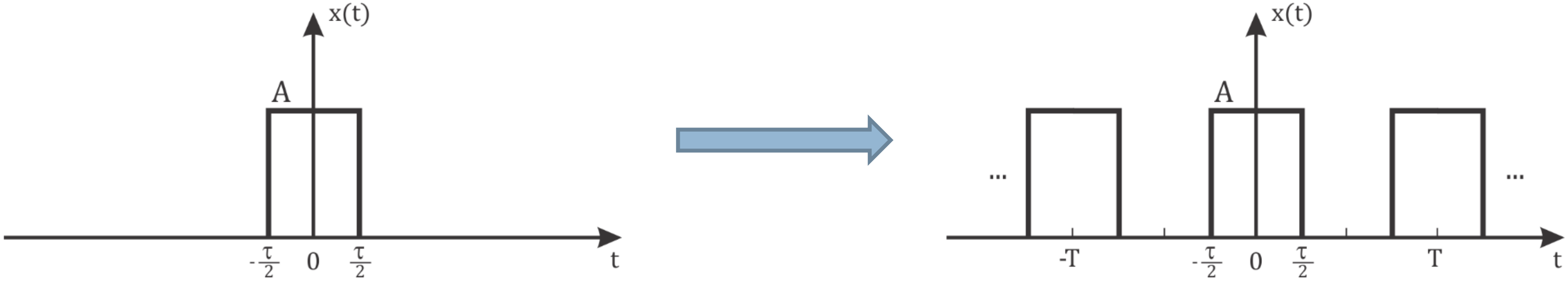
onde

$$c_k = \int_T x(t)e^{-j2\pi kft}dt$$

- Vamos reanalisar os últimos dois exemplos.

Exemplo

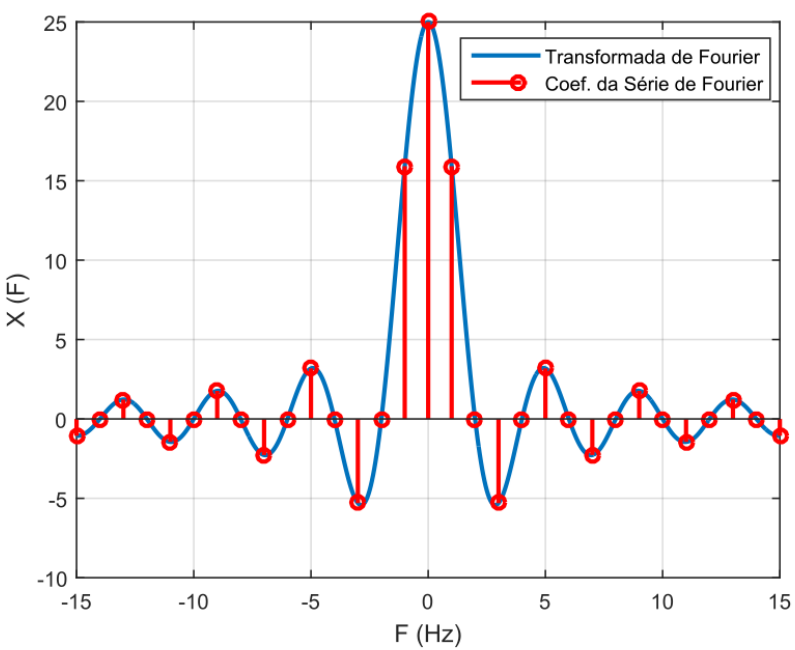
- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período T.

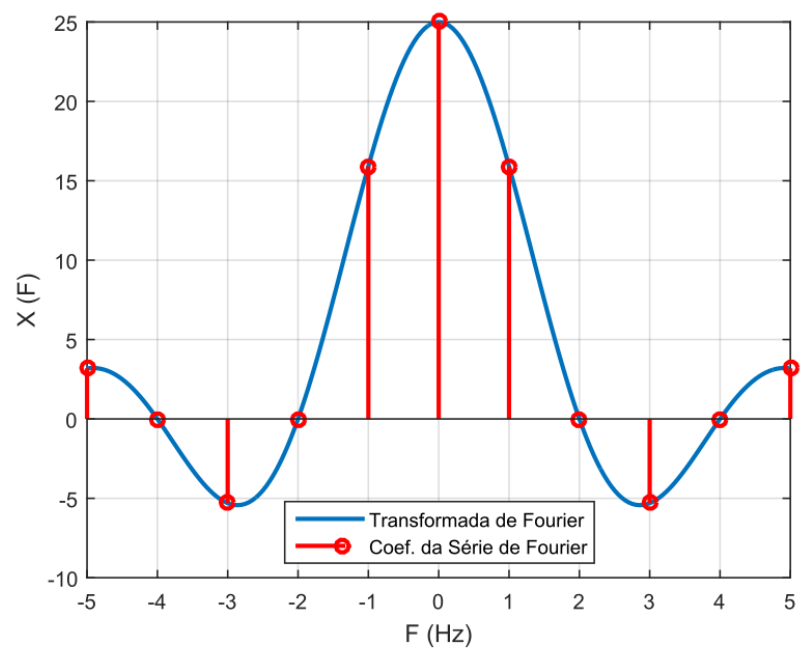


- Mais precisamente, seja $A = 50$ e $T = 1\ s$, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

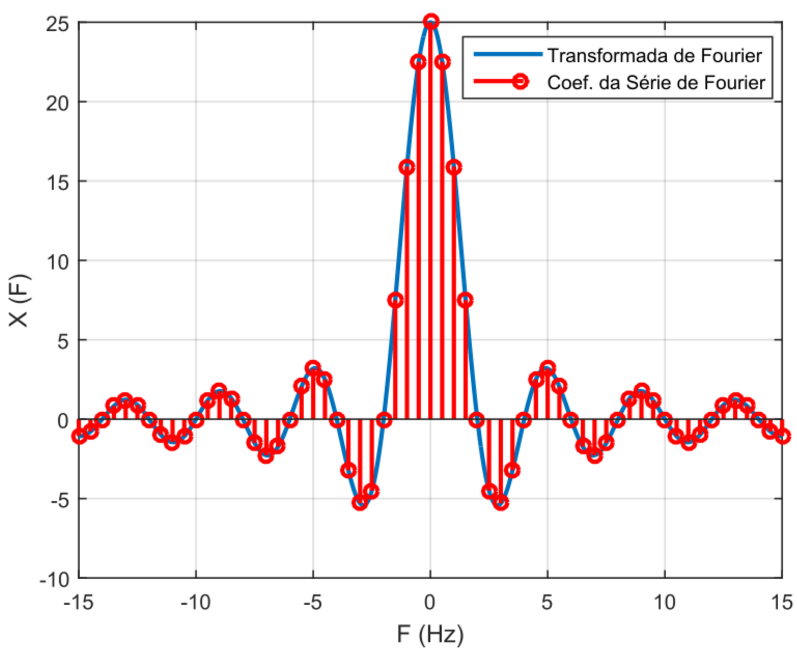
- O sinal periódico possui $A = 50,\ \tau = 0{,}5\ s$ e $T = 1\ s$.

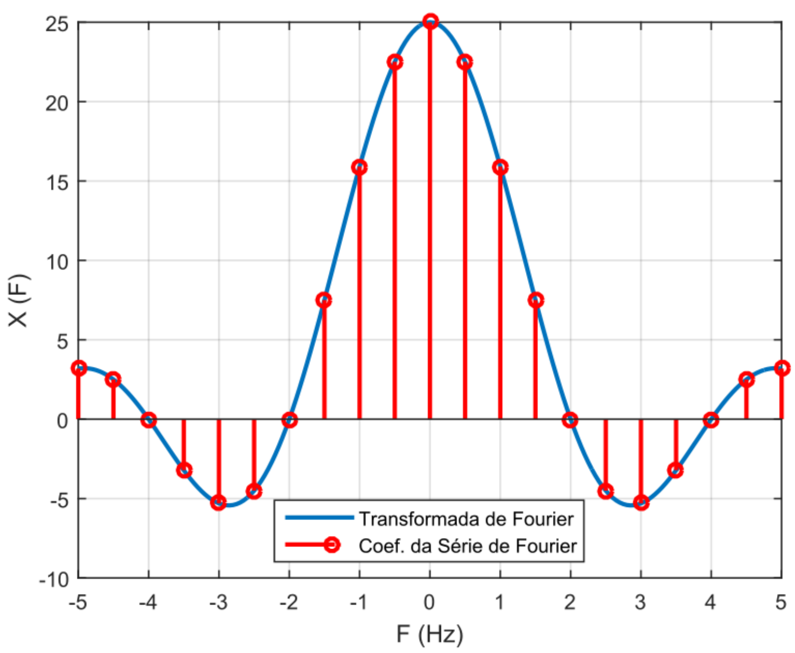




Exemplo

- O sinal periódico possui $A = 50$, $\tau = 0{,}5\ s$ e $T = 2\ s$.





Relação entre a Transformada e a Série de Fourier

- Neste caso, os coeficientes de Fourier do sinal periódico são amostras de $X(F)$ nas frequências $kf = {}^{k}/_{T}$. Isto é,

$$c_k = X(kf) = \mathrm{X}\left(\frac{k}{T}\right).$$

- Todavia, somente a análise dos coeficientes c_k podem levar a valores errôneos das amplitudes dos sinais envolvidos na reconstrução do sinal devido a falta do fator ${}^{1}/_{T}$.

SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS

SÉRIE DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO - DTFS

Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Seja uma sequência $\tilde{x}[n]$ periódica com período N, isto é, $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + rN]$, para qualquer valor inteiro de n e r.

- Objetiva-se representar $\tilde{x}[n]$ por uma soma ponderada de exponenciais complexas com frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental ${}^{2\pi}/_{N}$.

Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Estas exponenciais complexas têm a forma

$$e_k[n] = e^{j\left(2\pi/_N\right)kn} = e_k[n + rN],$$

onde, $k \in \mathbb{Z}^+$, e a representação em série de Fourier de $\tilde{x}[n]$ é da forma

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k} \tilde{X}[k]e^{j\left(2\pi/_N\right)kn}. \tag{11}$$

- Devido a periodicidade da exponencial complexa, para $l \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$e_{k+lN}[n] = e^{j\left(2\pi/_N\right)(k+lN)n} = e^{j\left(2\pi/_N\right)kn}e^{j2\pi ln} = e^{j\left(2\pi/_N\right)kn} = e_k[n].$$

Série de Fourier de Tempo Discreto

- Portanto, são necessárias somente N exponenciais complexas com frequências múltiplas inteiras da fundamental ${}^{2\pi}/_{N}$ para representar a sequência $\tilde{x}[n]$.

- Assim, (11) pode ser representada por

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j({}^{2\pi}/_{N})kn}.} \tag{12}$$

Comparação entre as Séries de Fourier de Tempo Contínuo e Discreto

- Para sinais de tempo contínuo com período T:
  - A série de Fourier possui um número infinito de componentes de frequência;
  - O espaçamento entre esses componentes é ${}^{1}/_{T}$;
  - O espectro de frequência pode se estender de $(-\infty, \infty)$.

- Para sinais de tempo discreto com período N:
  - O espectro de frequência se estende de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0, 2\pi)$;
  - O espaçamento entre as componentes de frequência será ${}^{2\pi}/_{N}$ radianos;
  - A série de Fourier terá, no máximo, N componentes de frequência.

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

- Para a obtenção dos coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, multiplica-se os dois lados de (12) por $e^{-j(2\pi/N)rn}$ e soma-se de $n = 0$ à $n = N - 1$. Dessa forma,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)(k-r)n}.$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Alterando a ordem do somatório no lado direito fornece

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} \right]. \qquad (13)$$

- Considerando a identidade de ortogonalidade

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)(k-r)n} = \begin{cases} 1, & k-r = mN, \quad m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & caso\ contrário, \end{cases}$$

aplicada ao termo entre colchetes em (13), tem-se

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)rn} = \tilde{X}[r].$$

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

- Portanto, os coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$ na equação (12) são obtidos a partir do sinal $\tilde{x}[k]$ e da relação

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}.$$

- Observe que a sequência $\tilde{X}[k]$ é periódica com período N.

Determinação dos Coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A periodicidade pode ser verificada através de

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)(k+N)n}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \right) e^{-j2\pi n} = \tilde{X}[k].$$

Série de Fourier para Sinais de Tempo Discreto

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(2\pi/N\right)kn}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\left(2\pi/N\right)kn}$

Outras Representações da Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais periódicos reais, $\tilde{X}[k]$e $\tilde{X}[-k]$são complexos conjugados, isto é,

$$\tilde{X}[k] = |\tilde{X}[k]|e^{j\theta_k},$$
$$\tilde{X}[-k] = |\tilde{X}[k]|e^{-j\theta_k}.$$

- A série de Fourier pode ser representada por

$$\tilde{x}[k] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{M}|\tilde{X}[k]|cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right)$$

onde, $M = {}^{N}/_{2}$, se N for par e $M = {}^{(N-1)}/_{2}$, se N for ímpar.

Outras Representações da Série de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Ainda, a série de Fourier pode ser representada por

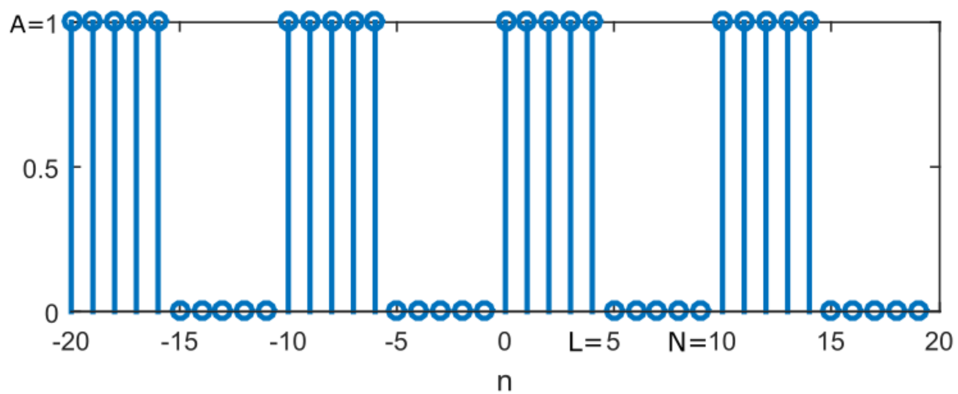
$$\tilde{x}[k] = \frac{\tilde{X}[0]}{N} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{M}\left(a_k cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - b_k sen\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right)$$

onde, $M = {}^{N}/_{2}$, se N for par e $M = {}^{(N-1)}/_{2}$, se N for ímpar. Adicionalmente,

$$a_k = 2\frac{|\tilde{X}[k]|}{N}cos(\theta_k), \qquad b_k = 2\frac{|\tilde{X}[k]|}{N}sen(\theta_k)$$

Exemplo

- Determine a representação de Fourier para o sinal de tempo discreto periódico ilustrado abaixo.



- Observe que $A = 1$, $L = 5$ e $N = 10$.

Exemplo

- Utiliza-se

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\left(2\pi/_N\right)kn}.$$

Isto é,

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{L-1} A e^{-j\left(2\pi/_N\right)kn} = A \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(2\pi/_N\right)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = A \frac{1 - e^{-j\left(2\pi/_N\right)Lk}}{1 - e^{-j\left(2\pi/_N\right)k}} = A e^{-j\left((L-1)\pi k/_N\right)} \frac{sen\left(\pi Lk/_N\right)}{sen\left(\pi k/_N\right)}.$$

Exemplo

- Tem-se, portanto,

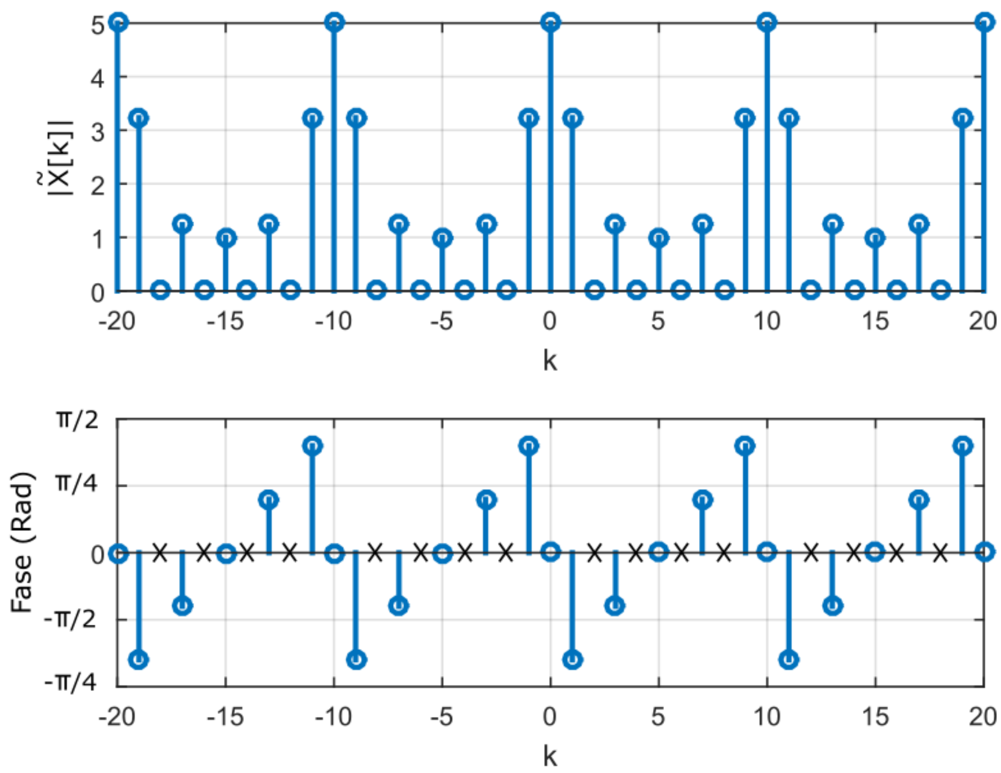
$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} AL, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ Ae^{-j\left(\left.(L-1)\pi k\right/N\right)} \dfrac{sen\left(\left.\pi L k\right/N\right)}{sen\left(\left.\pi k\right/N\right)}, & Caso\ contrário \end{cases}$$

- Substituindo $A = 1$, $L = 5$ e $N = 10$, resulta em

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ e^{-j\left(\left.4\pi k\right/10\right)} \dfrac{sen\left(\left.\pi k\right/2\right)}{sen\left(\left.\pi k\right/10\right)}, & Caso\ contrário \end{cases}$$

Exemplo

- Módulo e fase dos coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$.



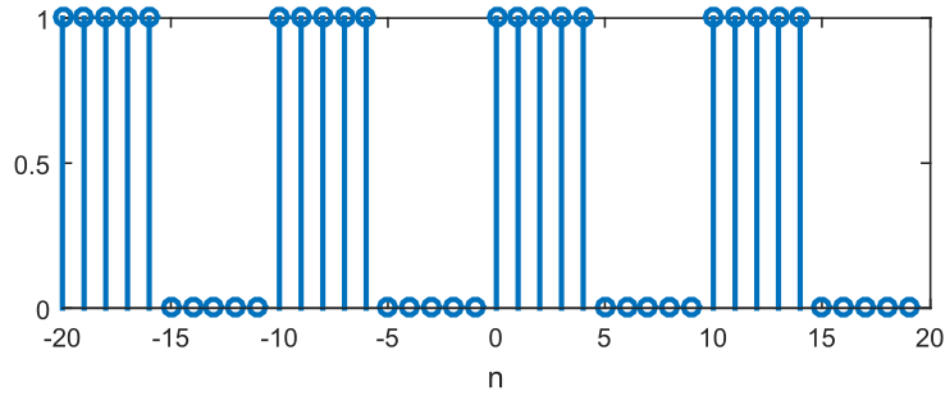
Exemplo

- Frequências presentes no sinal (espectro de frequência). Observe que a frequência fundamental é $\omega = {}^{2\pi}/_{10}\ rad/amostra$ e que existe um fator ${}^{1}/_{N}$ associado.

k	Frequência (rad/amostra)	Amplitude	Fase (rads)
0	0	0,5	0
1	${}^{2\pi}/_{10}$	0,6472	-1,2566
3	${}^{6\pi}/_{10}$	0,2472	-0,6283
5	${}^{10\pi}/_{10}$	0,1	0

Exemplo

- Reconstrução do sinal.



SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS

TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO - DTFT

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A obtenção da transformada de Fourier de tempo discreto é similar a apresentada para sinais de tempo contínuo.
- Para um sinal de tempo discreto não periódico, a transformada de Fourier é definida por

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{14}$$

- Fisicamente, $X(\omega)$ representa as frequência presentes no sinal $x[n]$, isto é, $X(\omega)$ é a decomposição de $x[n]$ em suas componentes de frequência.

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Devido ao fato de que para qualquer sinal de tempo discreto a variação de frequência se dá de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0,2\pi)$, é de se esperar que a transformada de Fourier seja periódica com período 2π.

$$X(\omega + 2\pi k) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}e^{-j2\pi kn}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

Comparação entre as Transformadas de Fourier de Tempo Contínuo e Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para sinais de tempo contínuo:
  - O espectro de frequência se estende de $(-\infty, \infty)$;
  - A transformada de Fourier envolve uma integral.

- Para sinais de tempo discreto:
  - O espectro de frequência se estende de $[-\pi, \pi)$ ou de $[0,2\pi)$;
  - A transformada de Fourier envolve um somatório;
  - A transformada de Fourier é periódica com período 2π.

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Uma vez que $X(\omega)$ é periódica em ω, é de se esperar que a função tenha expansão em série de Fourier, desde que a série seja convergente.

- Na realidade, a definição da transformada de Fourier de tempo discreto $X(\omega)$ da sequência $x[n]$, dada por (14), tem a forma de uma série de Fourier para um sinal com período 2π.

- Os coeficientes de Fourier nesta expansão são os valores da sequência $x[n]$.

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para demonstrar isso, determina-se a sequência $x[n]$ a partir de $X(\omega)$. Para isso, multiplica-se ambos os lados de (14) por $e^{j\omega m}$ e integra-se no intervalo $[-\pi, \pi)$, isto é,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]e^{j\omega m}d\omega \quad (15)$$

- Se o somatório for convergente, pode-se alterar a ordem da integração e do somatório. Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega m}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\,d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Da ortogonalidade das exponenciais complexas,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- Logo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}\, d\omega = \begin{cases} 2\pi x[m], & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (16)$$

- Combinando, (15) e (16), tem-se o resultado desejado,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega m} d\omega$$

- Esta equação é a expressão dos coeficientes de uma série de Fourier para uma função periódica $X(\omega)$ com período 2π.

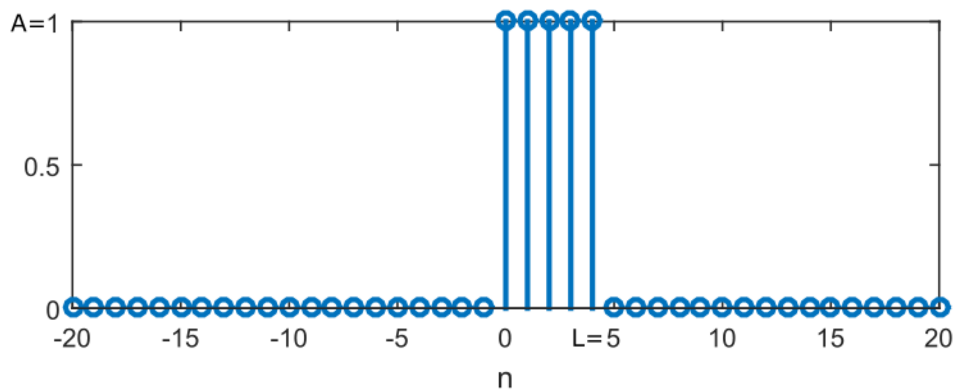
Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

Exemplo

- Determine a representação de Fourier para o sinal de tempo discreto não periódico ilustrado abaixo.



- Observe que $A = 1$ e $L = 5$.

Exemplo

- A transformada de Fourier de tempo discreto do sinal é calculada por

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j\omega n}$$

$$= A\frac{1 - e^{-j\omega L}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= Ae^{-j\left(\omega/_2\right)(L-1)}\frac{sen\left(\omega L/_2\right)}{sen\left(\omega/_2\right)}$$

Exemplo

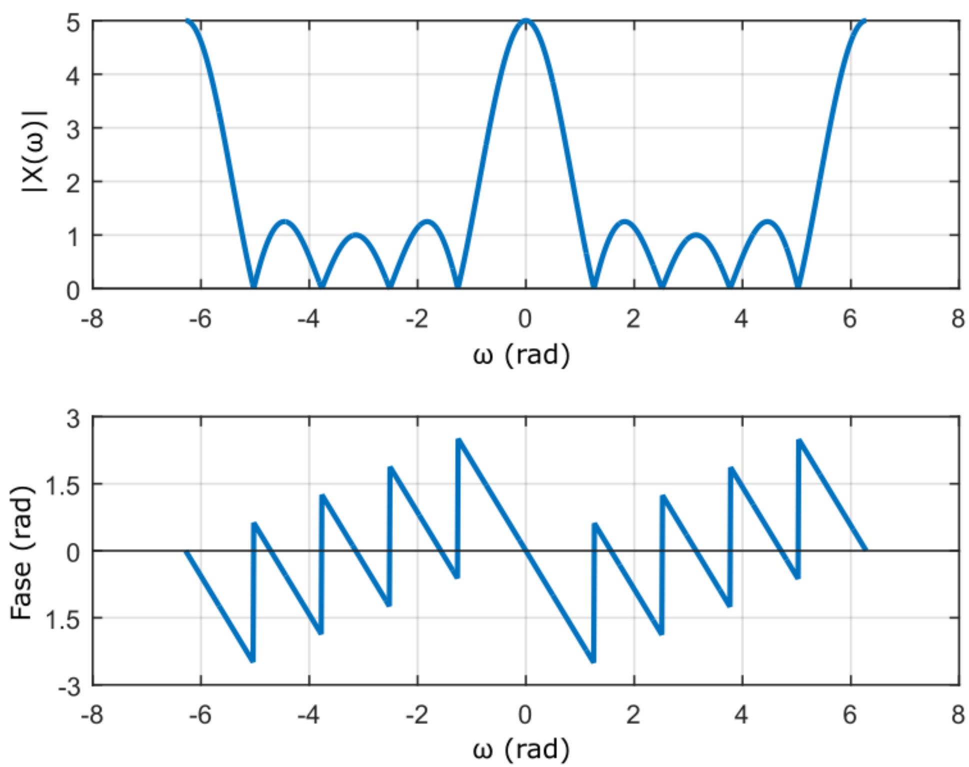
- A magnitude e a fase da transformada de Fourier $X(\omega)$ são dados por

$$|X(\omega)| = \begin{cases} |A|L & , \qquad \omega = 0 \\ |A|\left|\dfrac{sen\left(\omega L/_2\right)}{sen\left(\omega/_2\right)}\right|, & \qquad caso\ contrário \end{cases}$$

$$\angle X(\omega) = \angle A - \angle\frac{\omega}{2}(L-1) + \angle\frac{sen\left(\omega L/_2\right)}{sen\left(\omega/_2\right)}$$

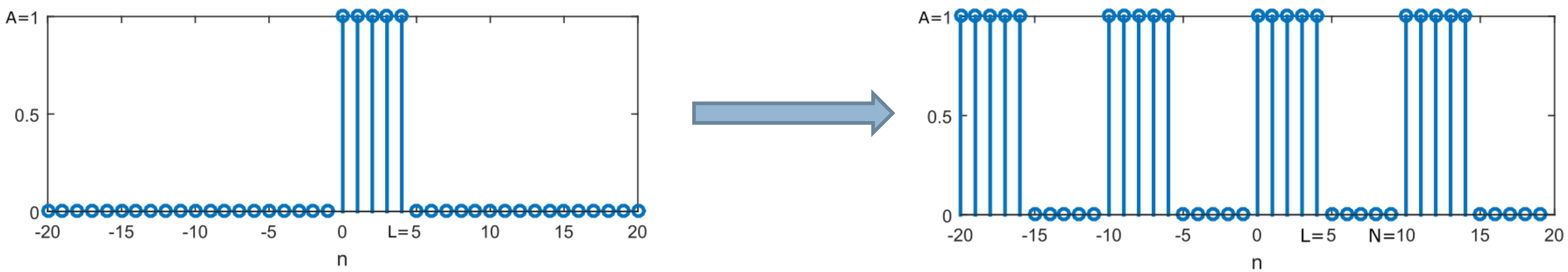
Exemplo

- A magnitude e a fase da transformada de Fourier $X(\omega)$ são mostrados na figura abaixo



Exemplo

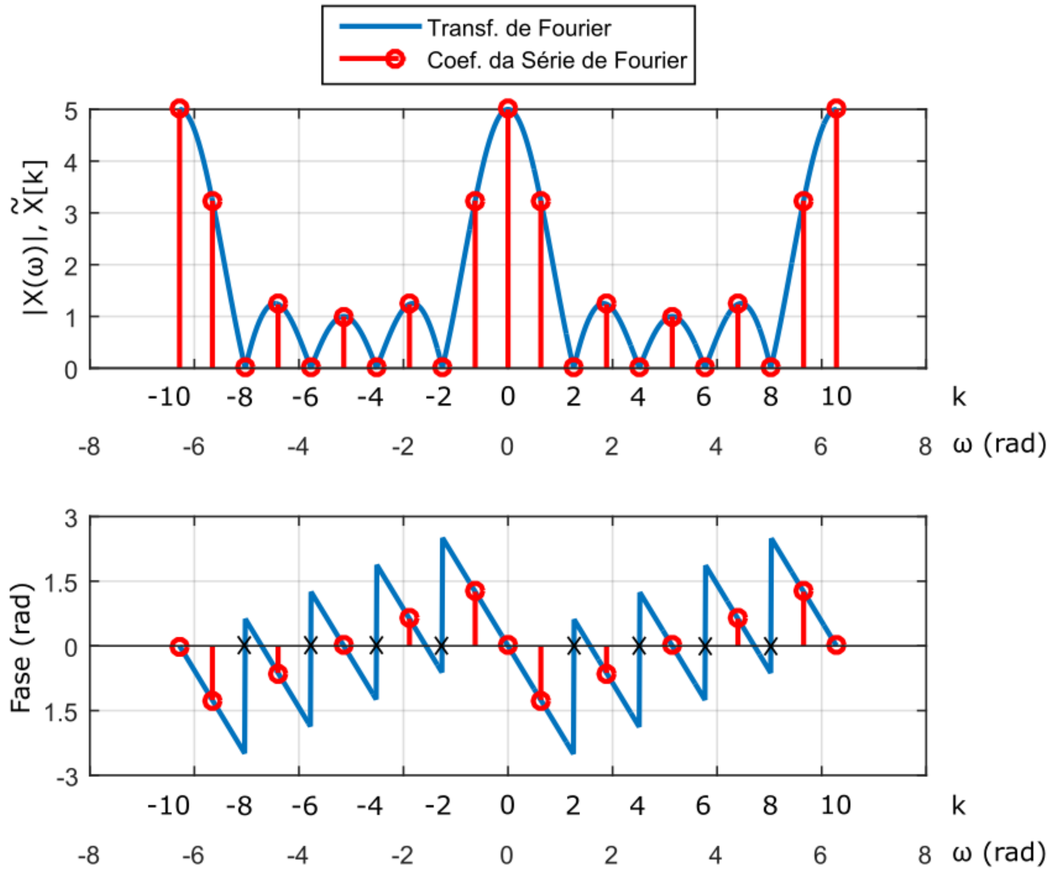
- Considere que o pulso retangular analisado se repete com período N.



- Mais precisamente, seja $N = 10$, como considerado no sinal periódico utilizado para a obtenção da série de Fourier.

Exemplo

- Sobrepondo os gráficos da transformada de Fourier $X(\omega)$ e dos coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ obtém-se:



Exemplo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Observa-se que os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ têm os valores dados pela avaliação da transformada de Fourier $X(\omega)$ em um conjunto de frequência igualmente espaçadas dado por

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

- Isto é,

$$\tilde{X}[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = Ae^{-j(\pi/N)k(L-1)}\frac{sen[(\pi/N)kL]}{sen[(\pi/N)k]}$$
$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

que tem a mesma forma da equação dos coeficientes $\tilde{X}[k]$ da série de Fourier que foi calculada para o sinal retangular periódico.

SINAIS DE TEMPO DISCRETO DE DURAÇÃO FINITA

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER - DFT

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Em aplicações práticas, a análise de frequência de sinais é, geralmente, realizada por um processador digital de sinais.
- Para sinais de tempo discreto e periódicos, o uso da série de Fourier de tempo discreto permite a realização da análise sem maiores problemas pois, ambas as equações de análise e de síntese são discretas.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j(2\pi/N)kn}$

Transformada Discreta de Fourier

- Contudo, sinais de tempo discreto não periódicos possuem um espectro de frequência contínuo o que dificulta a sua representação por processadores digitais de sinais.
- Adicionalmente, a equação de síntese envolve uma integral, o que também aumenta a complexidade de implementação digital.

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO NÃO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

Transformada Discreta de Fourier

- Assim, pensando na implementação computacional de um algoritmo de análise em frequência, é interessante se dispor de equações que sejam de fácil avaliação por um processador digital de sinais.

- Como mencionado, a implementação digital da série de Fourier de tempo discreto não é problema, mas a implementação da transformada de Fourier, por esta ser contínua em ω merece atenção.

Transformada Discreta de Fourier

- A relação que há entre a transformada de Fourier $X(\omega)$ e os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ é o ponto de partida.

- Considere uma sequência não periódica $x[n]$ que possua transformada de Fourier $X(\omega)$.

- Já foi visto que a amostragem de $X(\omega)$ em frequências $\omega_k = {}^{2\pi k}/_{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, fornece os coeficientes da série de Fourier $\tilde{X}[k]$ de um sinal periódico obtido a partir da repetição do sinal $x[n]$ com um período N. Isto é,

$$\tilde{X}[k] = X(\omega)\Big|_{\omega=\left({}^{2\pi}/_{N}\right)k} = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \qquad (17)$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para se obter uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ a partir da sequência de amostras $\tilde{X}[k]$ utiliza-se a equação de síntese da série de Fourier de tempo discreto (12). Isto é,

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j(2\pi/N)kn} \tag{18}$$

- Substituindo a definição da transformada de Fourier

$$X(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}$$

em (17) e, posteriormente, em (18), resulta

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(2\pi/N)km}\right]e^{j(2\pi/N)kn}$$

Transformada Discreta de Fourier

- Alterando a ordem dos somatórios resulta em

$$\tilde{x}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)}\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\tilde{p}[n-m]$$

onde o termo entre colchetes é a série de Fourier de um trem de impulsos periódico, isto é,

$$\tilde{p}[n-m] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi/N)k(n-m)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-m-rN]$$

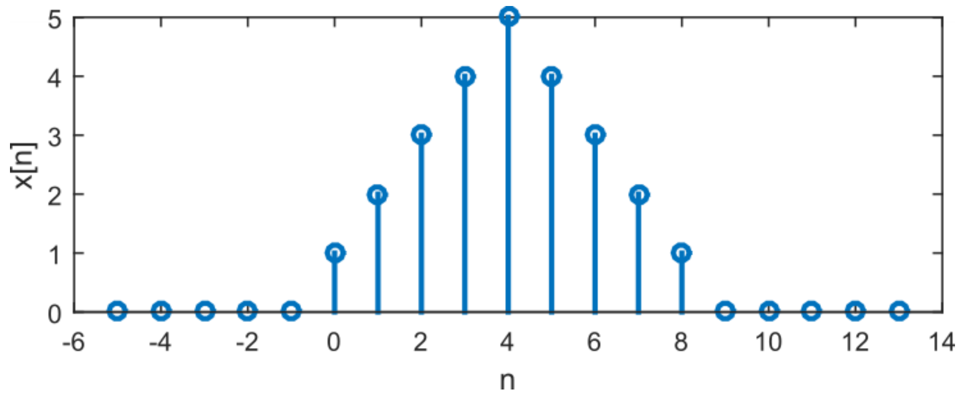
e, portanto,

$$\tilde{x}[n] = \mathrm{x}[n] * \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]. \qquad (19)$$

Transformada Discreta de Fourier

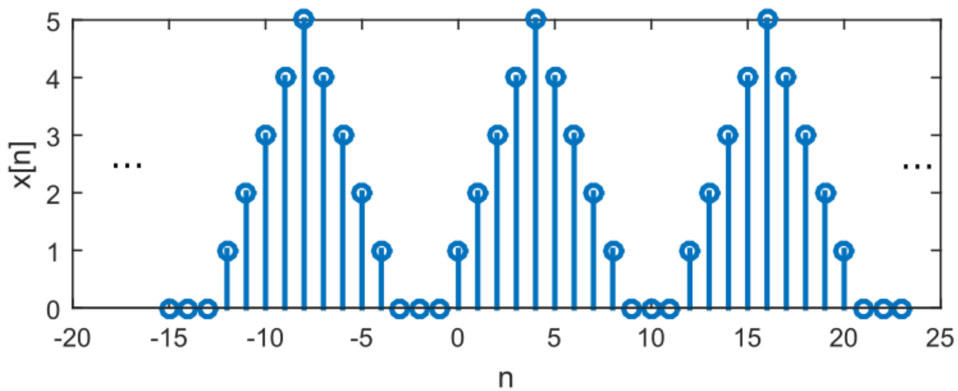
- A equação (19) mostra que o sinal reconstruído a partir das amostras $\tilde{X}[k]$ obtidas a partir de $X(\omega)$ é periódico com período N e é formado por cópias da sequência $x[n]$ deslocada de múltiplos inteiros de N.

- Considere o sinal abaixo que tem comprimento 9.

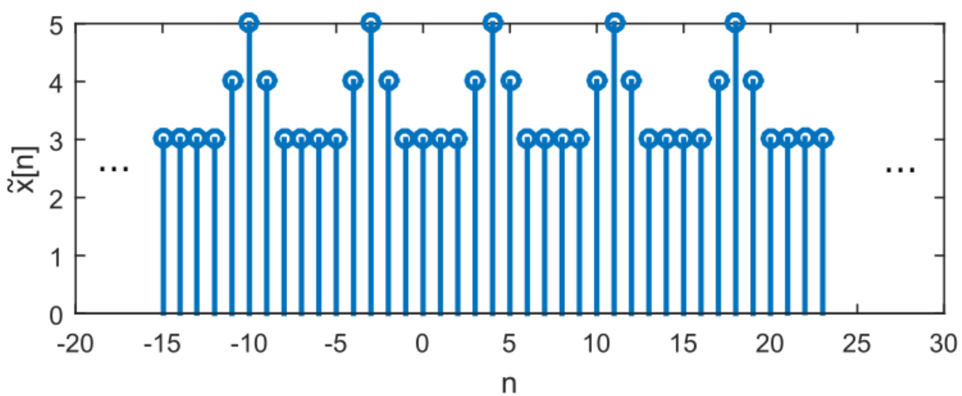


Transformada Discreta de Fourier

- Usando (19) com $N = 12$ resulta em



- Usando (19) com $N = 7$ tem-se



Transformada Discreta de Fourier

- Fica evidente que para que um período do sinal periódico seja igual ao sinal não periódico original, deve-se ter N maior ou igual ao comprimento do sinal não periódico original.

- Nesse caso, $x[n]$ pode ser obtido a partir da sequência $\tilde{x}[k]$, isto é,

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Transformada Discreta de Fourier

- Dessa forma, a partir de uma sequência não periódica $x[n]$, pode-se formar uma sequência periódica $\tilde{x}[k]$ e utilizar a série de Fourier de tempo discreto para representá-la.

- Posto de outra forma, pode-se a partir da sequência de coeficientes de Fourier $\tilde{X}[k]$, se obter a sequência periódica $\tilde{x}[k]$, utilizando-se as equações da série de Fourier, para, finalmente, se determinar $x[n]$ utilizando

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

Transformada Discreta de Fourier

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Assim, como o sinal não periódico a ser analisado tem N termos, a relação dos coeficientes de Fourier e a reconstrução do sinal a partir de uma sequência periódica é dada por

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

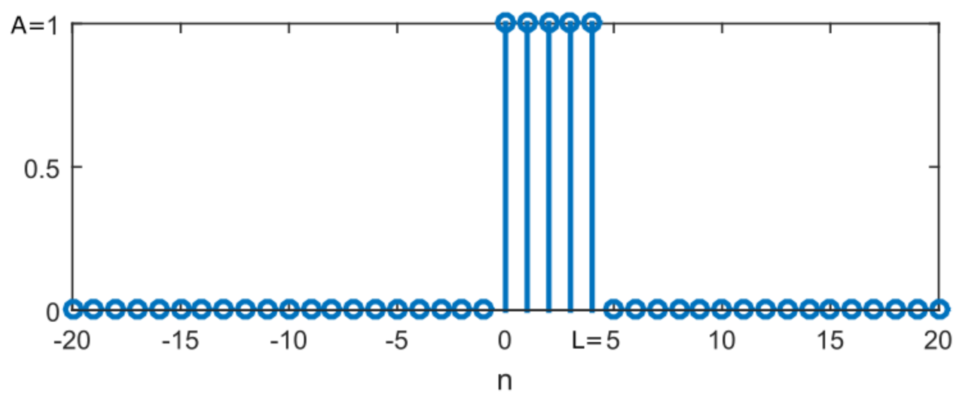
Transformada Discreta de Fourier

- Quando a série de Fourier de tempo discreto é empregada para a representação de sequências não periódicas ela é chamada de Transformada Discreta de Fourier (DFT).

ANÁLISE EM FREQUÊNCIA DE SINAIS DE TEMPO DISCRETO PERIÓDICOS	
EQUAÇÃO DE ANÁLISE	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn}$
EQUAÇÃO DE SÍNTESE	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}$

Exemplo

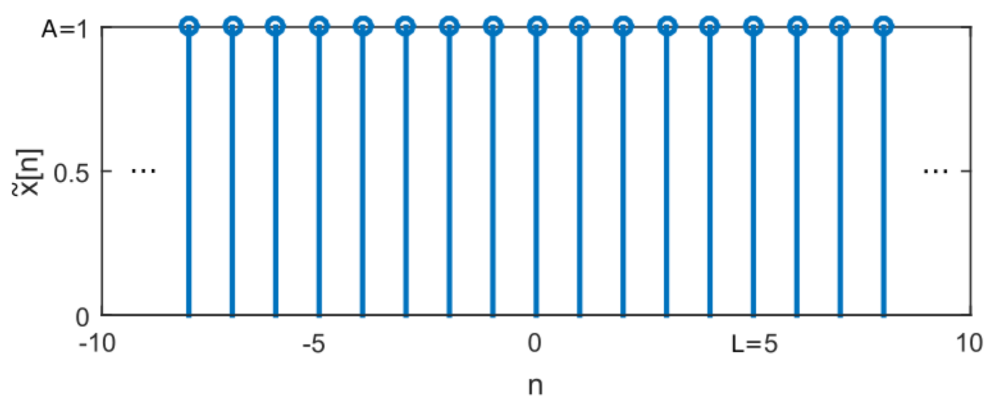
- Determine a DFT para o sinal de tempo discreto não periódico ilustrado abaixo.



- Considere, inicialmente, $N = 5$ e, posteriormente, $N = 10$.

Exemplo

- Para $N = 5$, a sequência periódica $\tilde{x}[n]$ cuja série de Fourier de tempo discreto corresponde a DFT de $x[n]$ é mostrada abaixo.



Exemplo

- Para, $A = 1$ e $L = N = 5$ tem-se:

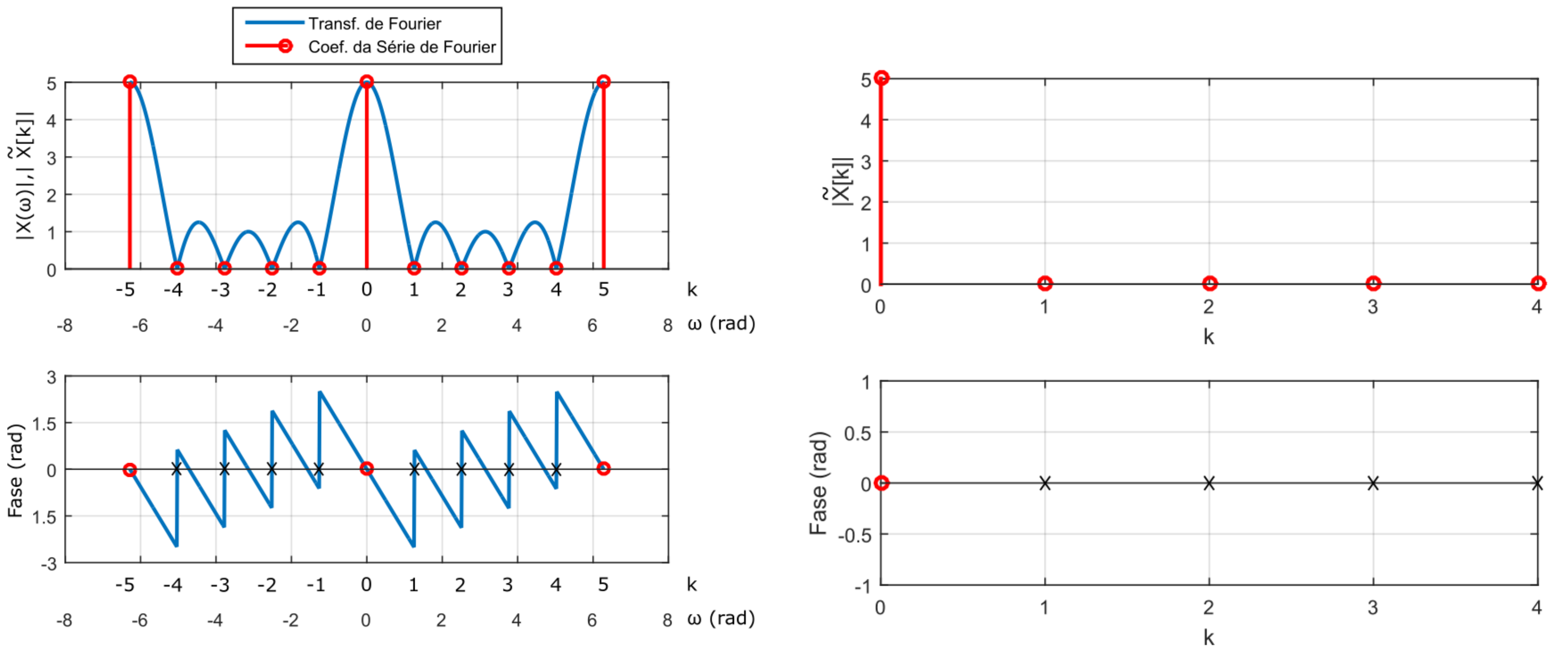
$$X[k] = \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/_N\right)kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(2\pi/_5\right)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \ldots \\ 0, & Caso\ contrário \end{cases}$$

$$X[k] = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ 0, & k \leq k \leq 4 \end{cases}$$

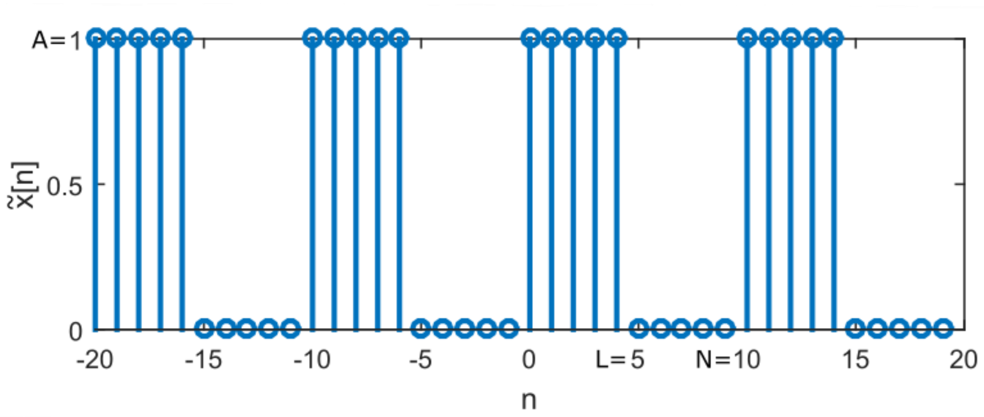
Exemplo

- A relação da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier é mostrada abaixo.



Exemplo

- Para $N = 10$, a sequência periódica $\tilde{x}[n]$ cuja série de Fourier de tempo discreto corresponde a DFT de $x[n]$ é mostrada abaixo.



Exemplo

- Para, $A = 1$ e $L = 5$ e $N = 10$ tem-se:

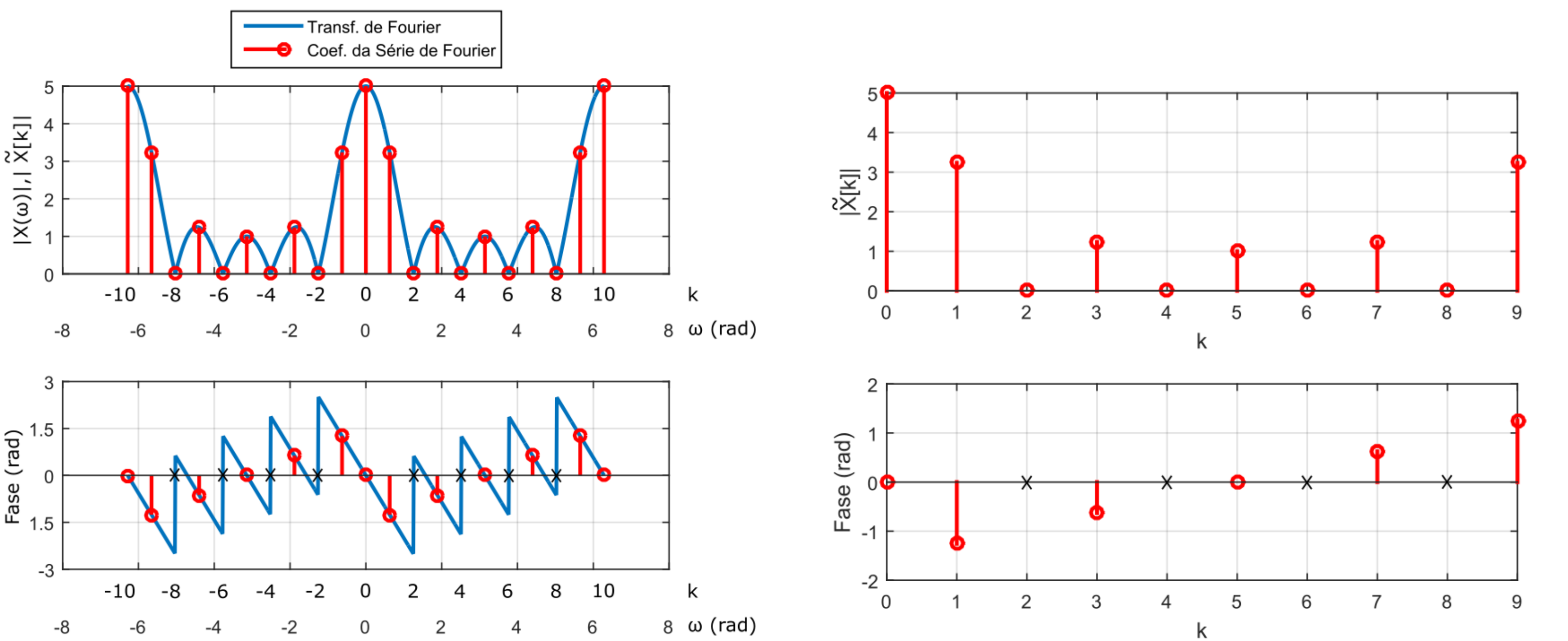
$$X[k] = \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\left(2\pi/_N\right)kn} = \sum_{n=0}^{9} e^{-j\left(2\pi/_{10}\right)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \begin{cases} 5, & k = 0, \pm 10, \pm 20, \dots \\ e^{-j\left(4\pi k/_{10}\right)} \dfrac{sen\left(\pi k/_2\right)}{sen\left(\pi k/_{10}\right)}, & Caso\ contrário \end{cases}$$

$$X[k] = \begin{cases} 5, & k = 0 \\ e^{-j\left(4\pi k/_{10}\right)} \dfrac{sen\left(\pi k/_2\right)}{sen\left(\pi k/_{10}\right)}, & 1 \le k \le 9 \end{cases}$$

Exemplo

- A relação da transformada de Fourier e dos coeficientes da série de Fourier é mostrada abaixo.



Melhoria na Exibição da DFT

- Embora a DFT calculada com L pontos seja suficiente para representar unicamente a sequência $x[n]$, ela não fornece detalhes suficientes sobre as características espectrais de $x[n]$.

- Para se melhorar a exibição do espectro de frequência, deve-se amostrar mais pontos do espectro $x(\omega)$. Isto é, deve-se aumentar o valor de N em $\omega_k = {}^{2\pi k}/_{N}$, onde $N > L$. Para isso, se acrescenta $N - L$ zeros na sequência $x[n]$.