PROCESSAMENTO DE SINAIS

Mudança da Taxa de Amostragem Usando Processamento de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Objetivos

- Apresentar os princípios envolvidos usando processamento em tempo discreto para:
  - Redução da taxa de amostragem;
  - Aumento da taxa de amostragem;
  - Reamostragem.

Mudança da Taxa de Amostragem Usando Processamento de Tempo Discreto

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Um sinal de tempo contínuo pode ser representado por um sinal de tempo discreto que consiste nas amostras:

$$x[n] = x_c(nT)$$

- Muitas vezes é necessário a mudança da taxa de amostragem de um sinal de tempo discreto na forma:

$$x'[n] = x_c(nT') \qquad\qquad T' \neq T$$

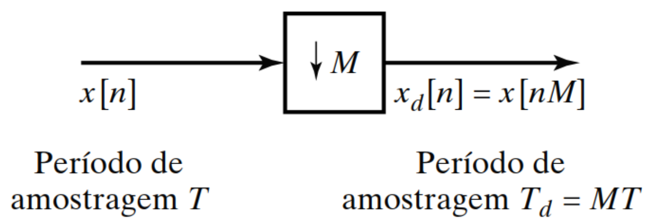
- O objetivo é obter essa nova sequência $x'[n]$ com base em $x[n]$.

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

- A taxa de amostragem pode ser reduzida por um fator M através da definição de uma nova sequência:

$$x_d[n] = x[nM] = x_c(nMT) \qquad\qquad T_d = MT$$



Compressor

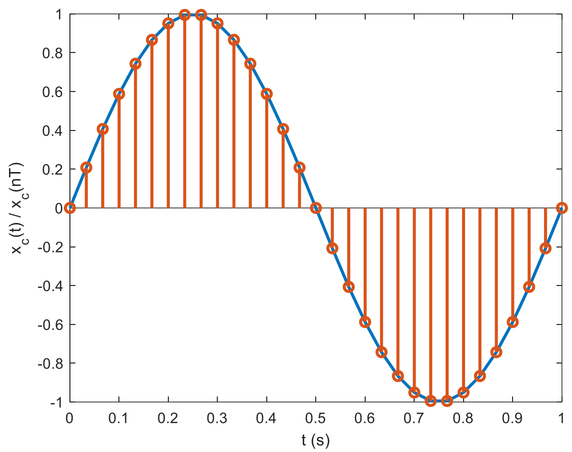
- A sequência $x_d[n]$ é idêntica àquela que seria obtida amostrando o sinal $x_c(t)$ com período de amostragem $T_d = MT$.

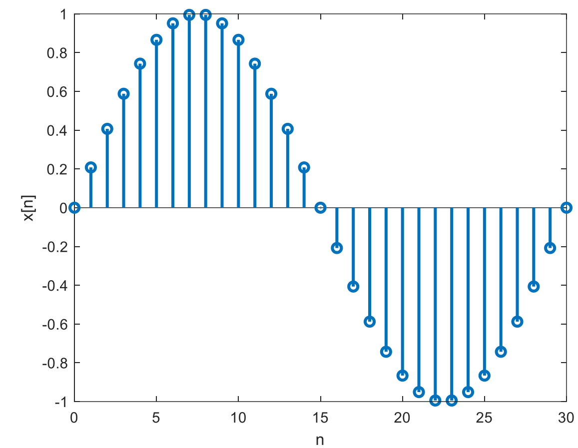
Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

- Considere o sinal $x_c(t) = sen(2\pi t)$.

$$T = \frac{1}{30}\ s$$

$$f_s = 30\ Hz$$

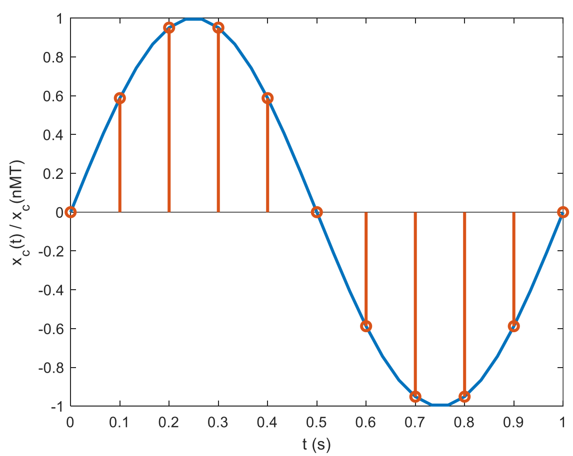


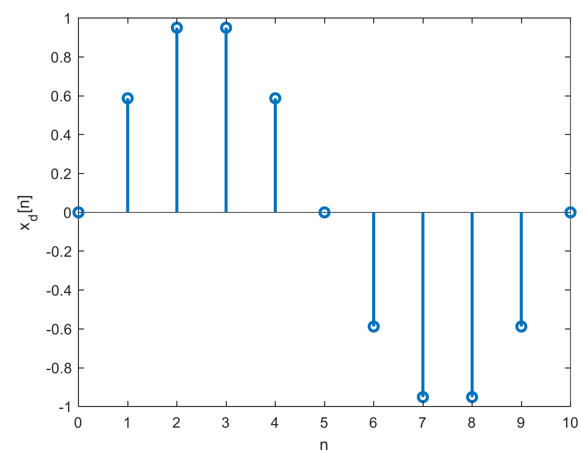


$$M = 3$$

$$T_d = MT = \frac{1}{10}\ s$$

$$f_s = 10\ Hz$$





Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

- Supondo que $X_c(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| \geq \Omega_N$ então $x_d[n]$ é uma representação exata de $x_c(t)$ se:

$$\frac{\pi}{T_d} = \frac{\pi}{MT} \geq \Omega_N$$

- Conclusão:
  - A taxa de amostragem pode ser reduzida por um fator M sem *aliasing* se a taxa de amostragem original for ao menos M vezes a taxa de Nyquist;
  - Ou se o espectro de frequência da sequência $x[n]$ é primeiramente reduzido por um fator M através do uso de um filtro de tempo discreto.

- Definição:
  - A operação de reduzir a taxa de amostragem (incluindo qualquer pré-filtragem) é denominada de subamostragem (*downsampling*).

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A transformada de Fourier de tempo discreto de $x[n] = x_c(nT)$ é:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

Infinitas cópias de $X_c(j\Omega)$ escalonadas em amplitude $\left(\frac{1}{T}\right)$ e em frequência $(\omega = \Omega T)$ e deslocadas por múltiplos inteiros de 2π.

- A transformada de Fourier de tempo discreto de $x_d[n] = x[nM] = x_c(nT_d)$ é:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_d}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T_d} - \frac{2\pi r}{T_d}\right)\right)$$

- Como $T_d = MT$:

$$\boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right)}$$

Infinitas cópias de $X_c(j\Omega)$ escalonadas em amplitude $\left(\frac{1}{MT}\right)$ e em frequência $(\omega = \Omega T_d)$ e deslocadas por múltiplos inteiros de 2π.

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Agora, partindo da expressão:

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right)$$

pode-se representar o índice r como:

$$r = i + kM \qquad \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z} | -\infty < k < \infty \\ i \in \mathbb{Z} | 0 \le i \le M-1 \end{array}$$

$M = 3$

k	$i = 0$ $r = 3k$	$i = 1$ $r = 1 + 3k$	$i = 2$ $r = 2 + 3k$
-2	-6	-5	-4
-1	-3	-2	-1
0	0	1	2
1	3	4	5
2	6	7	8

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Com isso, reescreve-se

$$X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{MT}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi r}{MT}\right)\right)$$

como:

$$\boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1}\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{MT} - \frac{2\pi k}{T} - \frac{2\pi i}{MT}\right)\right)\right]}$$

- Comparando o termo dentro dos colchetes com

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

tem-se:

$$X(e^{j(\omega-2\pi i)/M}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega - 2\pi i}{MT} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$$

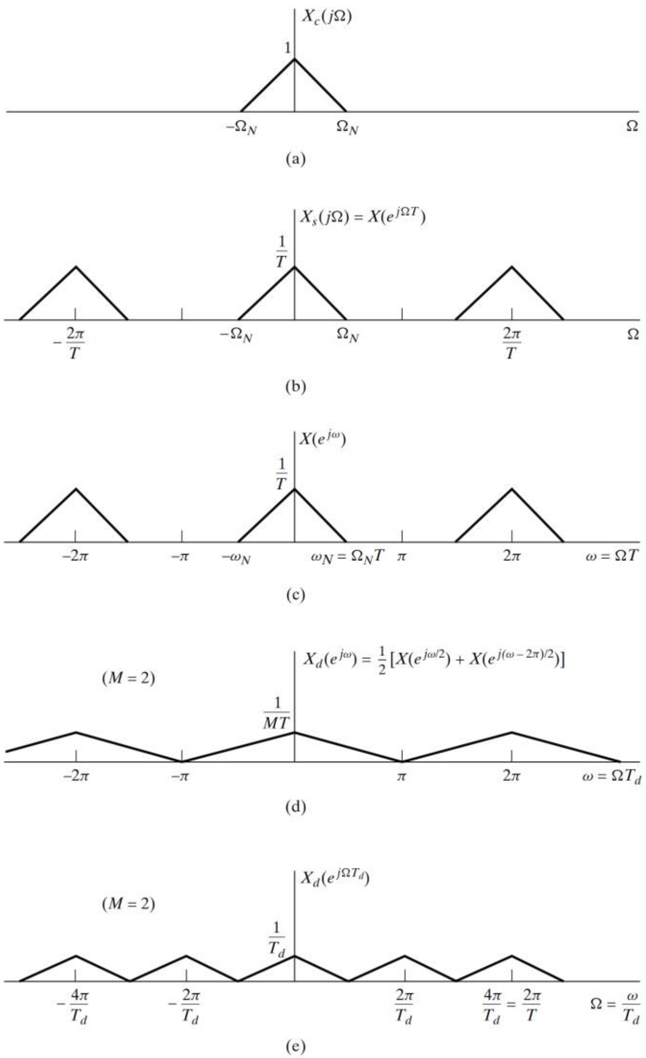
- Logo,

$$\boxed{X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X(e^{j(\omega/M - 2\pi i/M)})} \Rightarrow$$

M cópias de $X(e^{j\omega})$ escalonadas em amplitude $\left(\frac{1}{M}\right)$ e em frequência $\left(\frac{\omega}{M}\right)$ e deslocadas por múltiplos inteiros de 2π.

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Espectro do sinal de entrada.

Espectro do trem de impulsos das amostras (período de amostragem T e $\Omega_s = 4\Omega_N$).

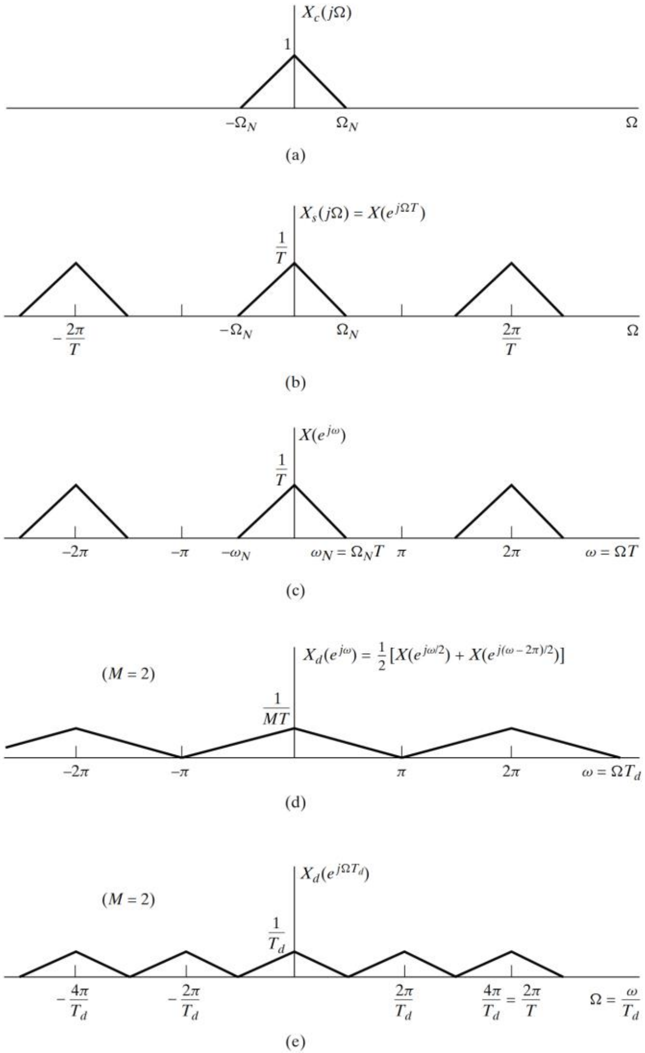
Espectro da sequência $x[n]$ (período de amostragem T).

Espectro da sequência $x_d[n] = x[2n]$ (período de amostragem equivalente $T_d = 2T$ ou $\Omega_s = 2\Omega_N$).

Espectro da sequência $x_d[n] = x[2n]$ em função de Ω onde se observa a redução da frequência de amostragem.

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso



$$\Omega_N = 200\pi \, rad/s$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 800\pi \, rad/s \Rightarrow T = \frac{1}{400} s$$

$$\Omega_s = 4\Omega_N \Rightarrow M \text{ máximo} = 2$$

$$\omega_N = 200\pi \cdot \frac{1}{400} = \frac{\pi}{2} \, rad/amostra$$

$$M = 2 \Rightarrow \omega_N = 200\pi \cdot \frac{1}{400} \cdot 2 = \pi \, rad/amostra$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{MT} = \frac{2\pi}{1/200} = 400\pi \, rad/s$$

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Logo, caso a transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ seja de banda limitada, isto é,

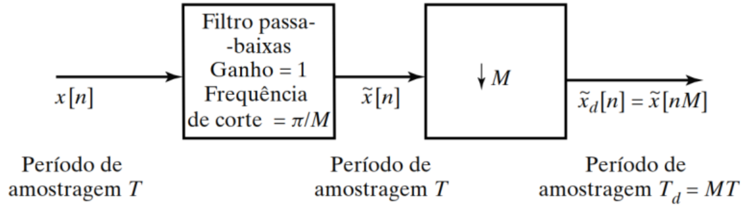
$$X(e^{j\omega}) = 0, \qquad \omega_N \leq |\omega| \leq \pi$$

e

$$\boxed{\frac{2\pi}{M} \geq 2\omega_N} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\pi}{M} \geq \omega_N}$$

então, o sinal com redução de taxa de amostragem $x_d[n] = x[Mn]$ não apresentará *aliasing*.

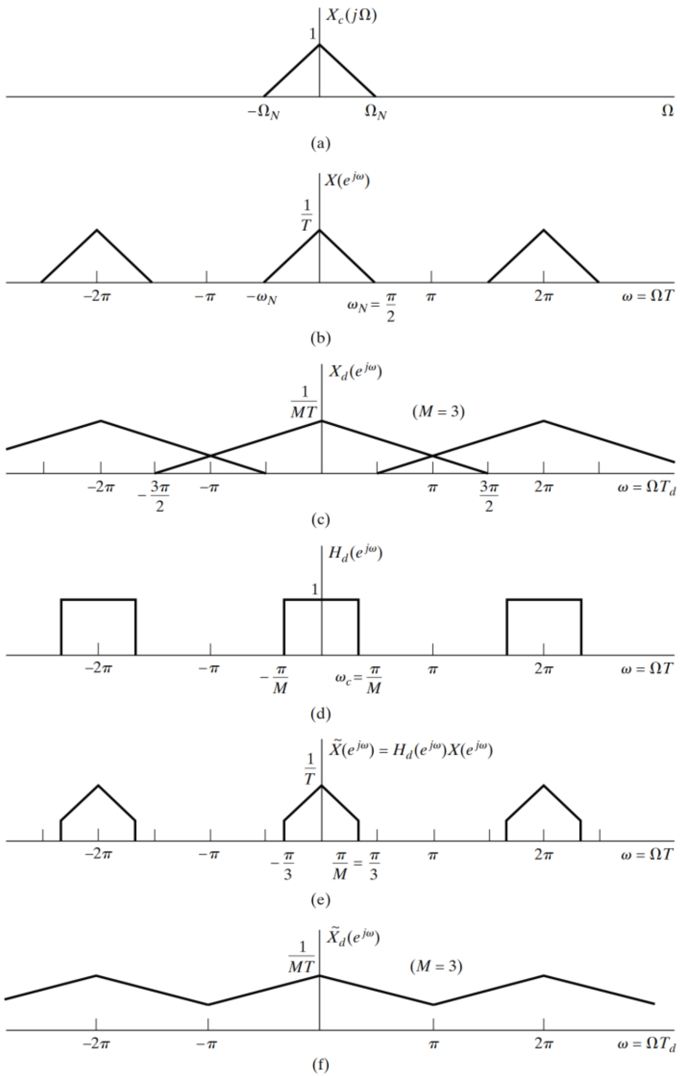
- Por isso, utiliza-se um filtro passa-baixas antes do compressor.



Decimador

Redução da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Decimação

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Espectro do sinal de entrada.

Espectro da sequência $x[n]$ (período de amostragem T e $\Omega_s = 4\Omega_N$).

Espectro da sequência $x_d[n] = x[3n]$ (período de amostragem equivalente $T_d = 3T$).

Filtro passa-baixas de pré-filtragem.

Espectro da sequência $x[n]$ filtrada.

Espectro da sequência $x_d[n] = x[3n]$ em função de Ω.

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

- Deseja-se aumentar a taxa de amostragem de um sinal por um fator L a partir da sequência $x[n]$. Isto é, a partir de

$$x[n] = x_c(nT)$$

deseja-se obter

$$x_i[n] = x_c(nT_i) \qquad T_i = \frac{T}{L}$$

- Esta operação é chamada de superamostragem (*upsampling*).

- Das equações acima:

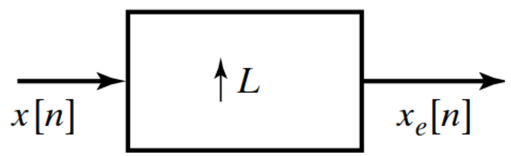
$$x_i[n] = x\left[\frac{n}{L}\right] = x_c\left(n\frac{T}{L}\right), \qquad n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots$$

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- O sistema abaixo é responsável por criar a sequência:

$$x_e[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$



Período de amostragem T

Período de amostragem $T_i = \frac{T}{L}$

Expansor

- Equivalentemente:

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL]$$

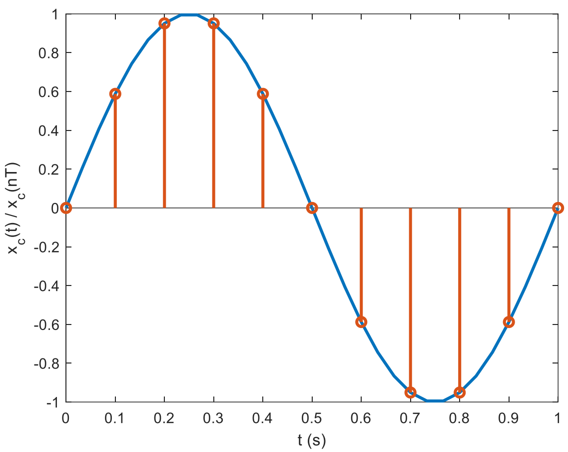
Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

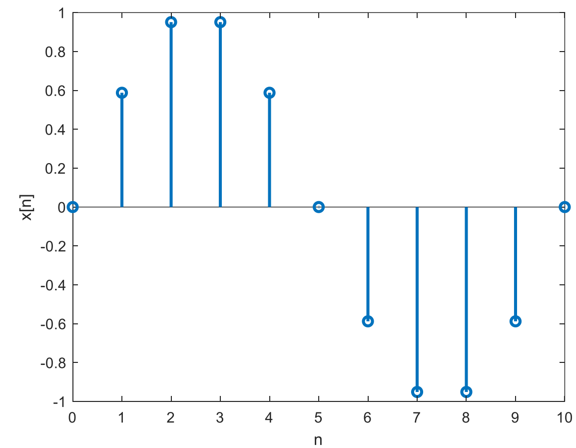
Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere o sinal $x_c(t) = sen(2\pi t)$.

$$T = \frac{1}{10}\ s$$

$$f_s = 10\ Hz$$

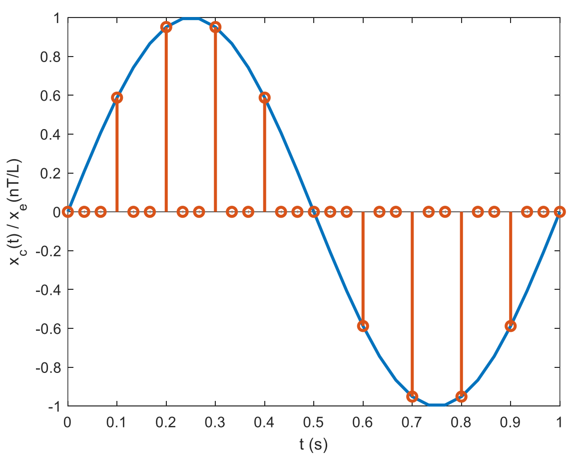


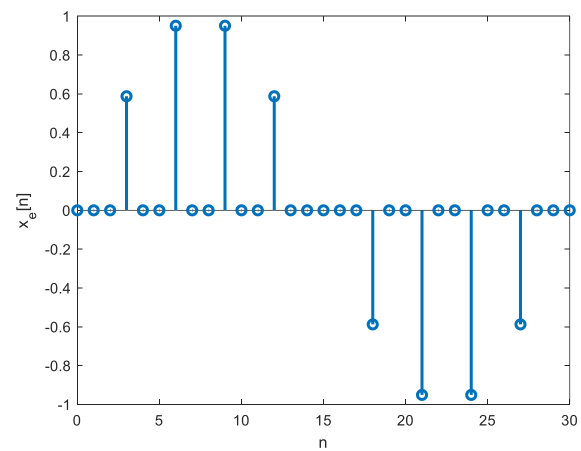


$$L = 3$$

$$T_i = \frac{T}{L} = \frac{1}{30}\ s$$

$$f_s = 30\ Hz$$

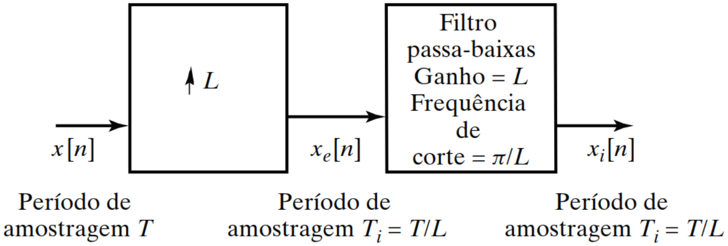




Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A recuperação das amostras que apresentam valor nulo se dá através de um processo análogo à conversão D/C.



Interpolador

- Como

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL]$$

sua transformada de Fourier é

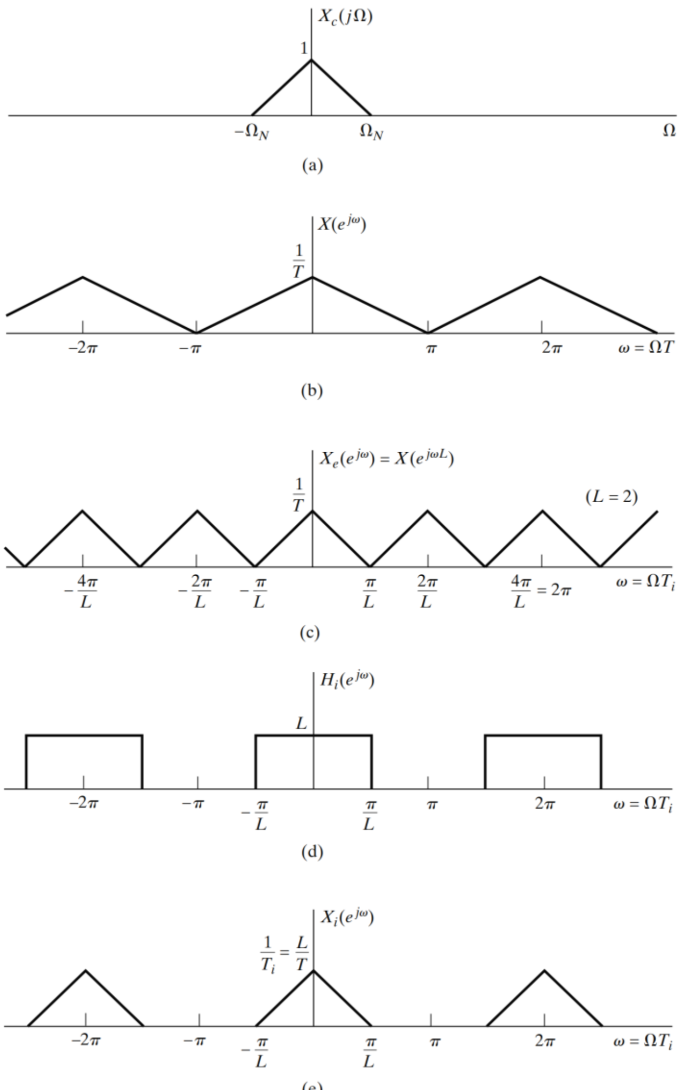
$$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n - kL] \right) e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X_e(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, e^{-j\omega Lk} = X(e^{j\omega L})}$$

Versão escalonada em frequência onde ω é substituído por ωL de forma que:

$$\omega = \Omega T_i = \Omega \frac{T}{L}$$

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação



Espectro do sinal de entrada

Espectro da sequência $x[n]$ (período de amostragem T e $\Omega_s = 2\Omega_N$)

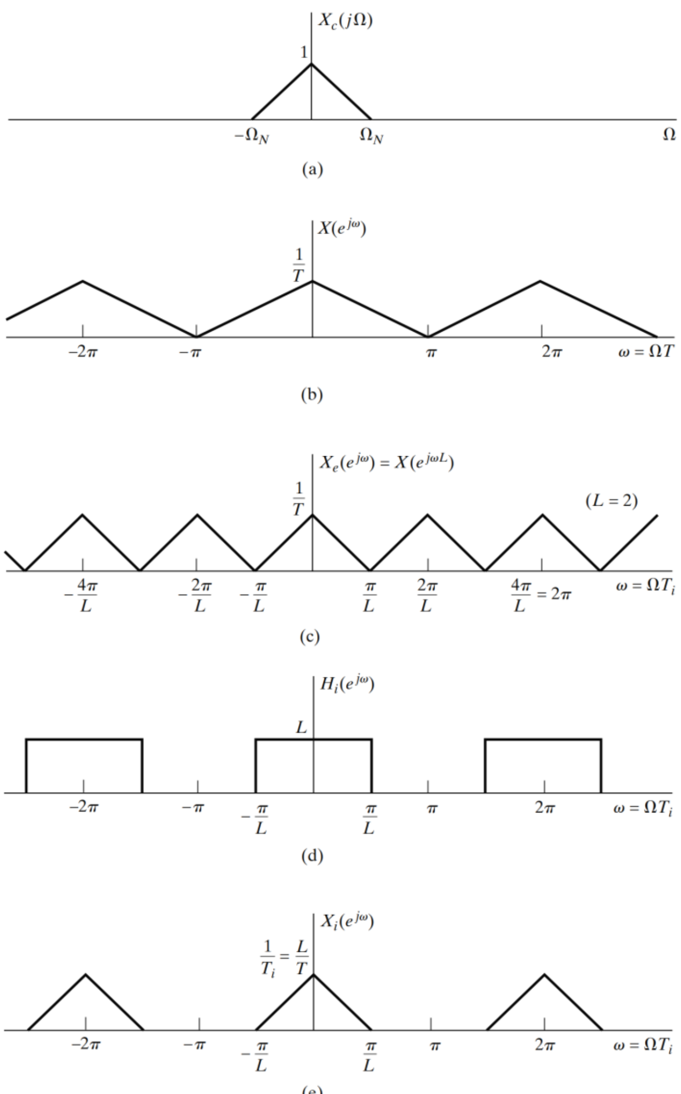
Espectro da sequência $x_e[n]$ (período de amostragem $T_i = \frac{T}{L}$ e $\Omega_s = 2L\Omega_N$)

Espectro do filtro passa-baixas com ganho L e frequência de corte $\frac{\pi}{L}$

Espectro da sequência $x_i[n] = x_c(nT_i) = x_c\left(n\frac{T}{L}\right)$

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

Prof. Dr. Rafael Cardoso



$$\Omega_N = 200\pi \, rad/s$$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 400\pi \, rad/s \;\Rightarrow\; T = \frac{1}{200}\, s$$

$$\Omega_s = 2\Omega_N$$

$$\omega_N = 200\pi \cdot \frac{1}{200} = \pi \, rad/amostra$$

$$L = 2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \omega_N = \dfrac{\pi}{2} \, rad/amostra \\[2ex] \Omega_s = \dfrac{2\pi}{T_i} = \dfrac{2\pi}{T/L} = \dfrac{2\pi}{1/200 \cdot 2} = 800\pi \, rad/s \\[2ex] \Omega_N = \dfrac{\pi/2}{T_i} = \dfrac{\pi/2}{1/200 \cdot 2} = 200\pi \, rad/s \end{cases}$$

Aumento da Taxa de Amostragem por um Fator Inteiro - Interpolação

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- As amostras nulas da sequência $x_e[n]$ são substituídas por elementos obtidos a partir do filtro passa-baixas interpolador. Como a resposta ao impulso do fitro passa-baixas é:

$$h_i[n] = \frac{sen\left({\pi n}/{L}\right)}{{\pi n}/{L}}$$

e considerando que

$$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-kL]$$

a saída do filtro interpolador é

$$x_i[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \frac{sen\left({\pi(n-kL)}/{L}\right)}{{\pi(n-kL)}/{L}}$$

- A partir da resposta ao impulso tem-se:

$$h_i[0] = 1,$$

$$h_i[n] = 0, \qquad n = \pm L, \pm 2L, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$x_i[n] = x\left[\frac{n}{L}\right] = x_c\left(\frac{nT}{L}\right) = x_c(nT_i),$$

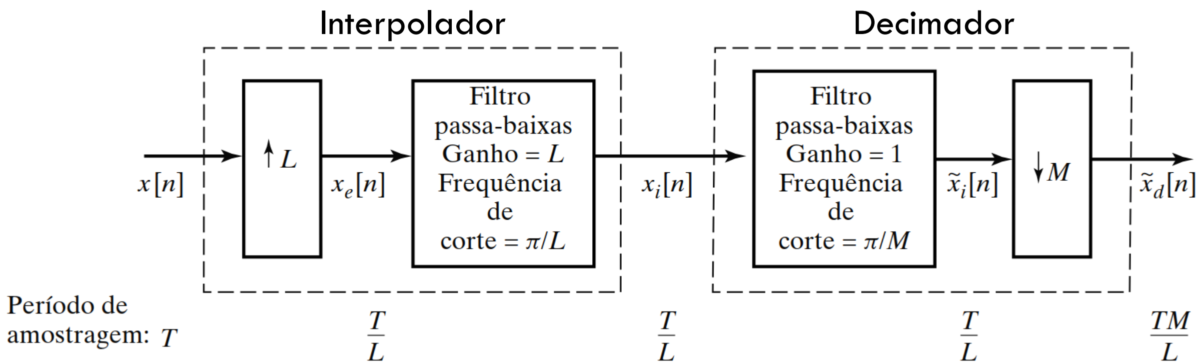
$$para\ n = 0, \pm L, \pm 2L, \ldots$$

Mudança da Taxa de Amostragem por um Fator Não Inteiro - Reamostragem

Mudança da Taxa de Amostragem por um Fator Não Inteiro - Reamostragem

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Utilizando um interpolador e um decimador pode-se alterar a taxa de amostragem por um fator não inteiro.



- O período de amostragem efetivo é

$$\boxed{T' = \frac{TM}{L}}$$

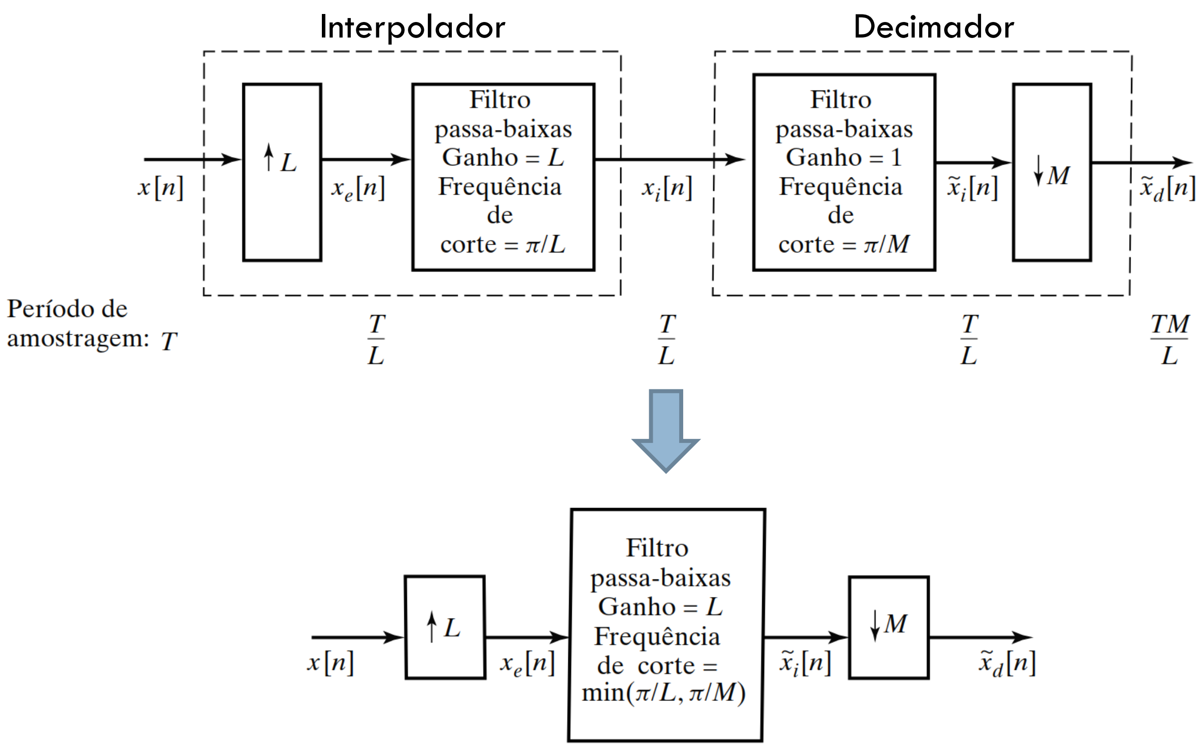
$M > L$ ⇨ Aumenta o período de amostragem

$M < L$ ⇨ Reduz o período de amostragem

Mudança da Taxa de Amostragem por um Fator Não Inteiro - Reamostragem

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Como temos dois filtros passa baixas em cascata o sistema pode ser simplificado.



- A frequência de corte do filtro é $min(\pi/_L, \pi/_M)$.

Mudança da Taxa de Amostragem por um Fator Não Inteiro - Reamostragem

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Um sinal de banda limitada foi amostrado com a taxa de Nyquist, isto é, $\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\Omega_N$.

- Deseja-se alterar o período de amostragem de T para $T' = \frac{3}{2}T = \frac{M}{L}T$.

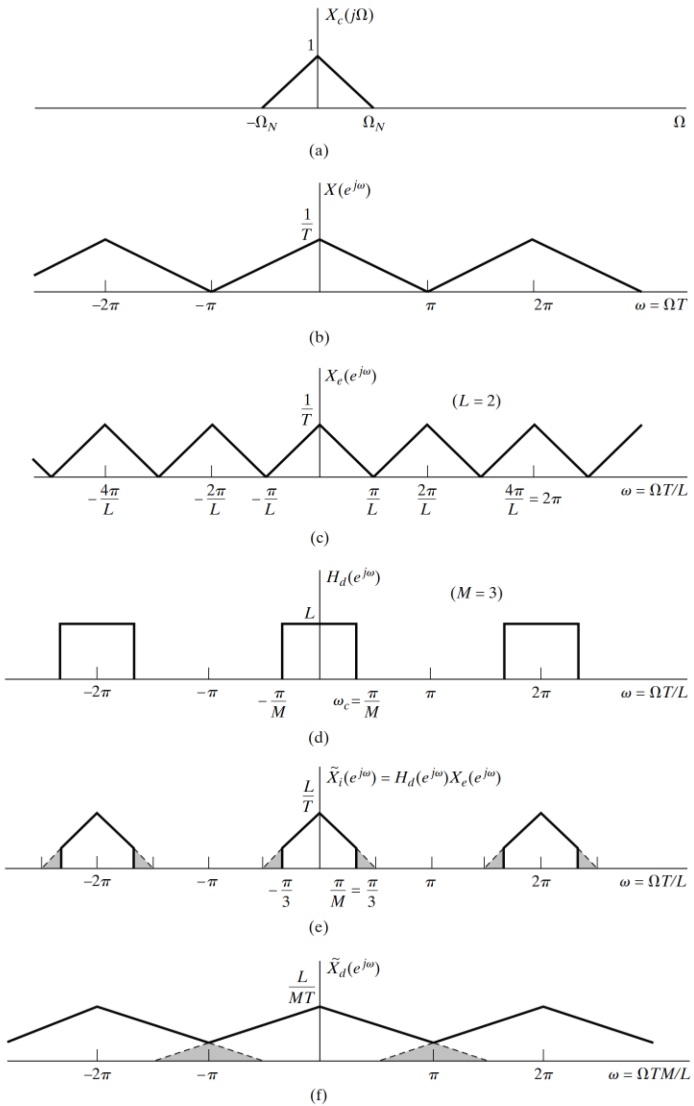
- Logo, $M = 3$ e $L = 2$.

- Consequentemente:

$$\Omega_s' = \frac{L}{M}2\Omega_N = \frac{2}{3}2\Omega_N = \frac{2}{3}\Omega_s$$

Mudança da Taxa de Amostragem por um Fator Não Inteiro - Reamostragem

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Espectro do sinal de entrada

Espectro da sequência $x[n]$ (período de amostragem T e $\Omega_s = 2\Omega_N$)

Espectro da sequência $x_e[n]$ (período de amostragem $T_i = \frac{T}{L}$)

Espectro do filtro passa-baixas com ganho L e frequência de corte $\frac{\pi}{M}$ $\left(min(\pi/_L, \pi/_M)\right)$

Espectro da sequência $\tilde{x}_i[n]$

Espectro da sequência $\tilde{x}_d[n]$ (período de amostragem $T' = \frac{TM}{L} = \frac{3T}{2}$ e $\Omega_s' = \frac{2}{3}2\Omega_N = \frac{2}{3}\Omega_s$)