PROCESSAMENTO DE SINAIS

Propriedades de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Campus Pato Branco
Departamento de Elétrica

BY NC ND

Propriedades de Sistemas LIT

- A resposta ao impulso $h[n]$ caracteriza completamente sistemas LIT.

- A partir de $h[n]$ e da convolução

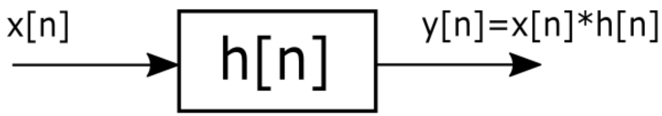
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

pode-se determinar a saída $y[n]$ para qualquer entrada $x[n]$.

- A partir da convolução serão obtidas importantes propriedades dos sistemas LIT.

Comutatividade

- Considere o sistema



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Fazendo: $m = n - k \Longrightarrow k = n - m$

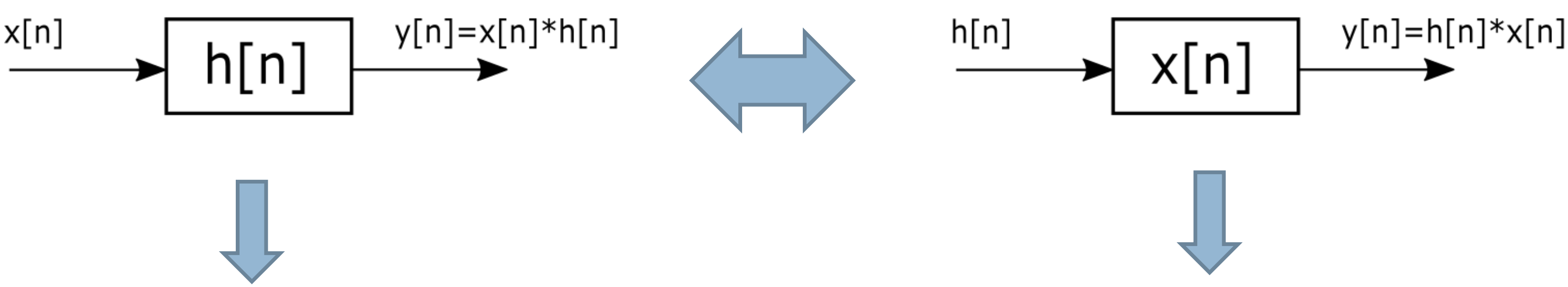
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = h[n] * x[n]$$

Assim,

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Comutatividade

- Um sistema LIT com entrada $x[n]$ e resposta ao impulso $h[n]$ terá a mesma saída de um sistema LIT com entrada $h[n]$ e resposta ao impulso $x[n]$.



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

$$\boxed{y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]}$$

Distributividade

- A convolução é distributiva sobre a adição.

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](h_1[n-k] + h_2[n-k])$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x[k]h_1[n-k] + x[k]h_2[n-k])$$

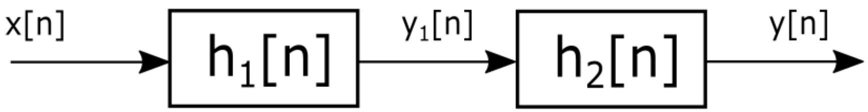
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_1[n-k] + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_2[n-k]$$

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[k] * h_1[n] + x[k] * h_2[n]$$

Conexão em Cascata

- Considere dois sistemas em série:



- Seja:

$$x[n] = \delta[n] \Longrightarrow y_1[n] = h_1[n]$$

- A saída do segundo sistema será, pela convolução,

$$y[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

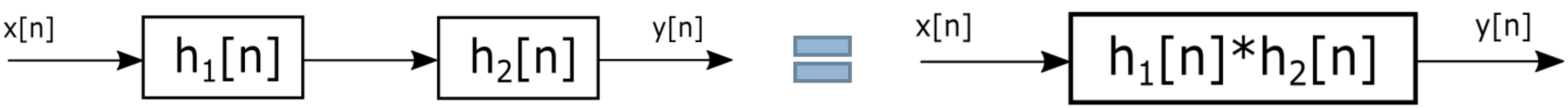
- Como a entrada $x[n] = \delta[n]$, temos que a saída $y[n] = h[n]$, onde

$$\boxed{h[n] = h_1[n] * h_2[n]}$$

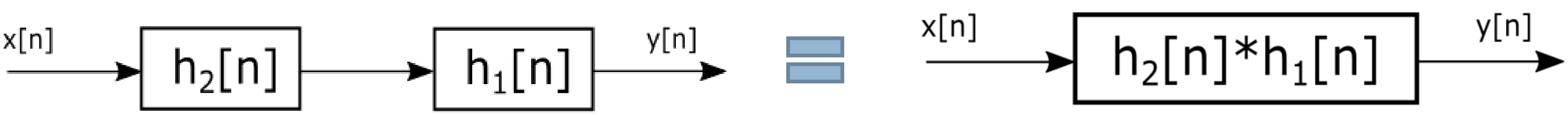
Resposta ao impulso do sistema em cascata.

Conexão em Cascata

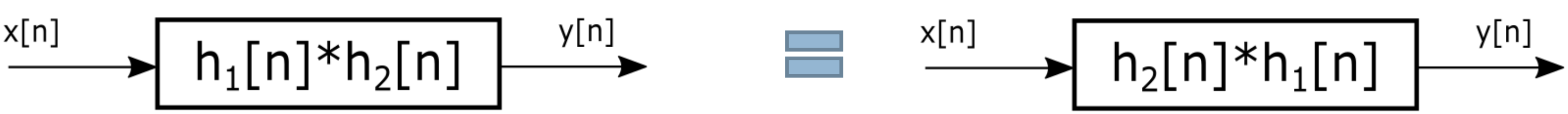
- Assim,



- Da comutatividade da convolução:

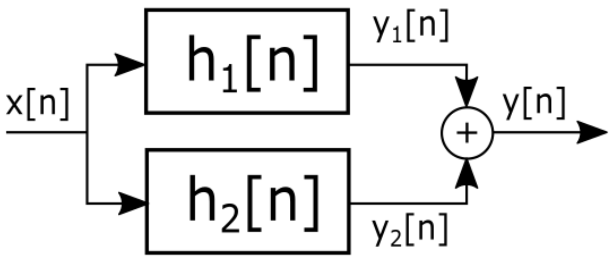


- Obviamente,



Conexão em Paralelo

- Considere dois sistemas em paralelo:



- Da figura,

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

$$y[n] = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

- Da propriedade da distributividade da convolução tem-se

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

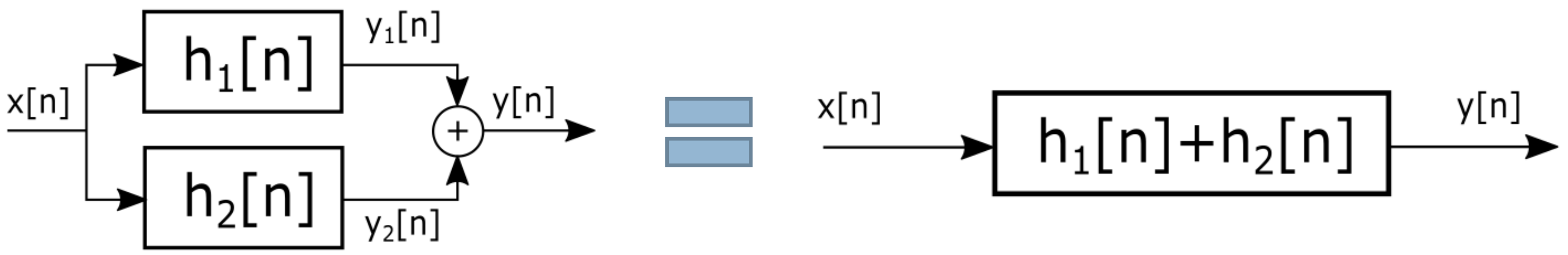
- De onde se obtém a resposta ao impulso equivalente do sistema:

$$\boxed{h[n] = h_1[n] + h_2[n]} \Rightarrow$$

Resposta ao impulso do sistema em paralelo.

Conexão em Paralelo

- Assim,



Estabilidade x Resposta ao Impulso

- Um sistema é estável no sentido BIBO se, dada uma entrada limitada, sua saída também é limitada, para qualquer valor de n.

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \text{para todo } n\,.$$ ⇨ Entrada limitada

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \text{para todo } n\,.$$ ⇨ Saída limitada

Estabilidade x Resposta ao Impulso

- Considere a relação entrada saída de um sistema LIT dada pela convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

- Calculando o módulo de $y[n]$ tem-se

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|$$

- Se $x[n]$ é limitada, isto é, $|x[n]| \leq B_x$, então,

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

Estabilidade x Resposta ao Impulso

- Portanto, para que a saída seja limitada, isto é, $|y[n]| \leq B_y$, da expressão

$$|y[n]| \leq B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

conclui-se que

$$\boxed{S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty}$$

- **Sistemas LIT são estáveis se, e somente se, sua resposta ao impulso for absolutamente somável.**

Estabilidade x Resposta ao Impulso

- Exemplo:
  - Determine que condição deve ser satisfeita para que um sistema com a seguinte resposta ao impulso seja estável.

$$h[n] = a^n u[n]$$

- Solução:
  - Deve-se analisar a condição:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Estabilidade x Resposta ao Impulso

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Aplicando a condição tem-se

$$h[n] = a^n u[n]$$

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1 + |a| + |a|^2 + \cdots$$

S , portanto, é a soma dos infinitos termos uma P.G. com razão $q = |a|$ e primeiro termo $a_1 = 1$. A soma dos infinitos termos da P.G. é:

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_1\, q^{i-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_1\, q^k \qquad\qquad S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Logo, a soma irá convergir, **se $|a| < 1$**, para

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$$

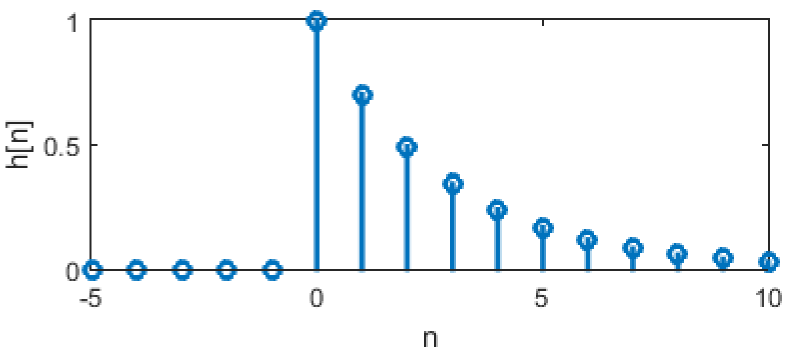
Estabilidade x Resposta ao Impulso

- Portanto, o sistema será estável se

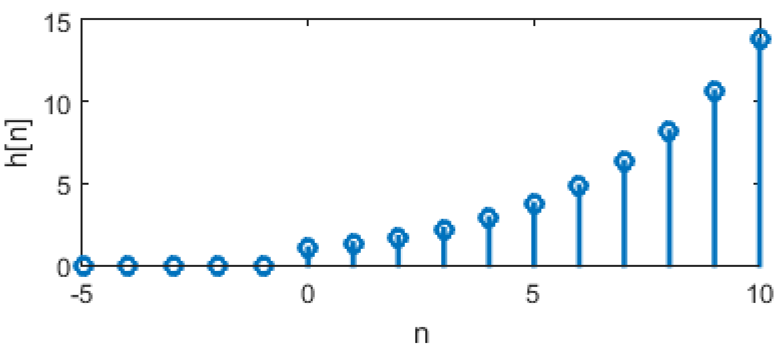
$$|a| < 1$$

- Isto significa que a resposta ao degrau deve decair exponencialmente para zero a medida que $n \to \infty$.

Sistema estável:
$h[n] = 0.7^n u[n]$



Sistema instável:
$h[n] = 1.3^n u[n]$



Causalidade x Resposta ao Impulso

- Um sistema é causal se em um dado instante de tempo $n = n_0$, sua saída $y[n_0]$ depender somente de valores de $x[n]$ para $n \leq n_0$.

- Para sistemas LIT pode-se determinar se um sistema é causal ou não através de sua resposta ao impulso.

Causalidade x Resposta ao Impulso

- Considere a saída de um sistema LIT no instante de tempo $n = n_0$, calculada pela convolução:

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n_0 - k]$$

- Vamos separar em dois somatórios, um com os valores presente e passados da entrada ($x[n], n \leq n_0$) e outro com os valores futuros da entrada ($x[n], n > n_0$).

Causalidade x Resposta ao Impulso

- Assim,

$$y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{-1} \underbrace{h[k]x[n_0-k]}_{\text{Valores futuros da entrada.}} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n_0-k]$$

$$\begin{aligned} y[n_0] = \{\cdots + h[-2]x[n_0+2] + h[-1]x[n_0+1]\} + \\ \{h[0]x[n_0] + h[1]x[n_0-1] + h[2]x[n_0+2] + \cdots\} \end{aligned}$$

- Para que a saída não dependa de valores futuros da entrada,

$$\boxed{h[n] = 0, \qquad n < 0} \Longrightarrow \text{Sistema causal.}$$

Causalidade x Resposta ao Impulso

- Para sistemas LIT causais o somatório de convolução pode ser alterado para

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

- Se a sequência de entrada $x[n]$ for causal, isto é, $x[n] = 0$ para $n < 0$, a convolução se torna

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

Causalidade x Resposta ao Impulso

- Exemplo:
  - Calcule a resposta ao degrau de um sistema LIT com resposta ao impulso

$$h[n] = a^n u[n], \qquad |a| < 1$$

- Solução:
  - Como tanto o sistema como a entrada são causais, utilizaremos a expressão

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k u[k]u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} a^k = \sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1}$$

Causalidade x Resposta ao Impulso

- Tem-se, portanto, a soma de $(n+1)$ termos de uma P.G. com razão $q = a$ e primeiro termo $a_1 = 1$, isto é:

$$y[n] = \sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1}$$

A soma de n termos da P.G. é:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1\, q^{i-1} \qquad\qquad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Logo,

$$y[n] = \begin{cases} \dfrac{(1-a^{n+1})}{1-a} & , n \geq 0 \\ 0 & , caso\ contrário \end{cases}$$

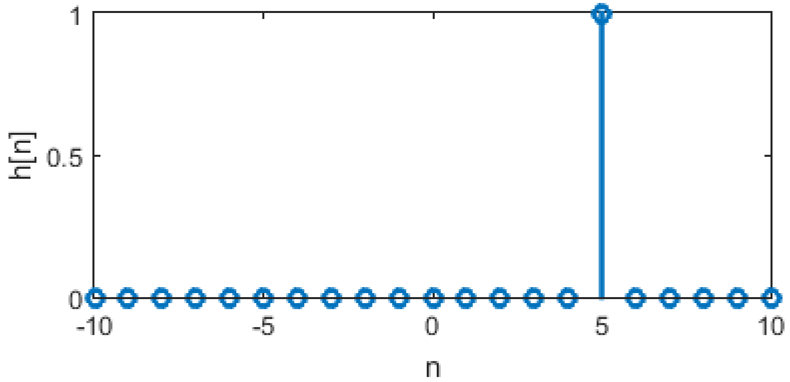
Exemplos de Respostas ao Impulso

- Atraso Ideal

$$y[n] = x[n - n_d], \qquad n_d \in \mathbb{Z}^+$$

$$h[n] = \delta[n - n_d], \qquad n_d \in \mathbb{Z}^+$$

Para $n_d = 5$:



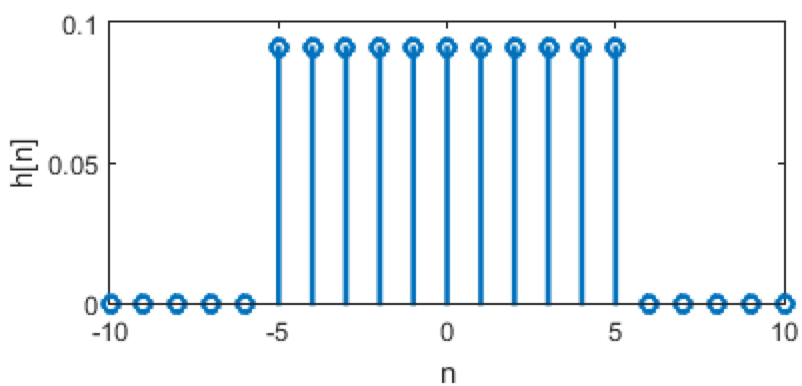
Exemplos de Respostas ao Impulso

- Média Móvel

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$

$$h[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \le n \le M_2 \\ 0\,, & Caso\ contrário \end{cases}$$

Para $M_1 = 5$ e $M_2 = 5$:

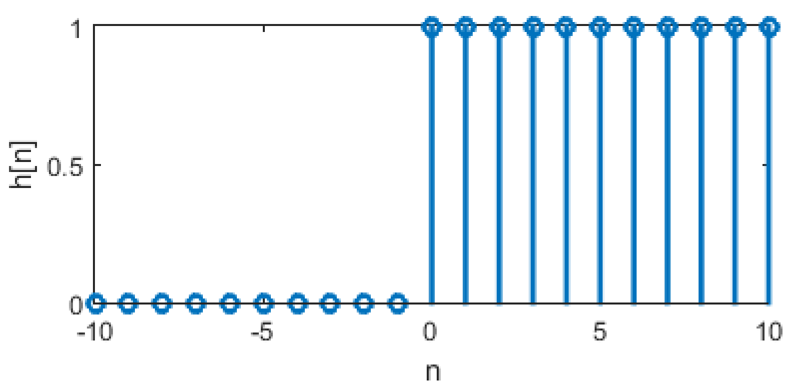


Exemplos de Respostas ao Impulso

- Acumulador

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$h[n] = u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

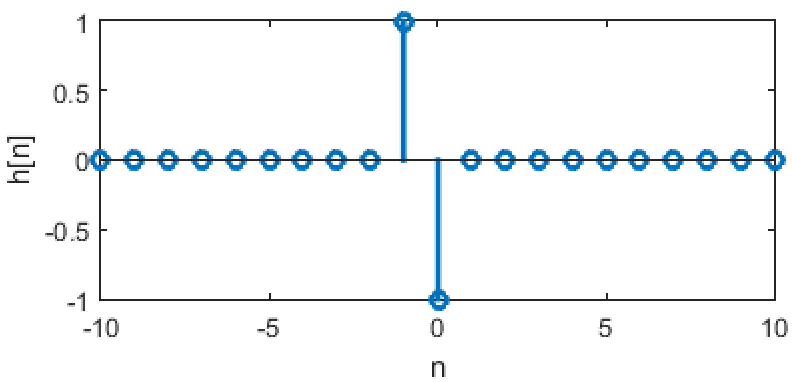


Exemplos de Respostas ao Impulso

- Diferença progressiva (*forward*)

$$y[n] = x[n+1] - x[n]$$

$$h[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$$

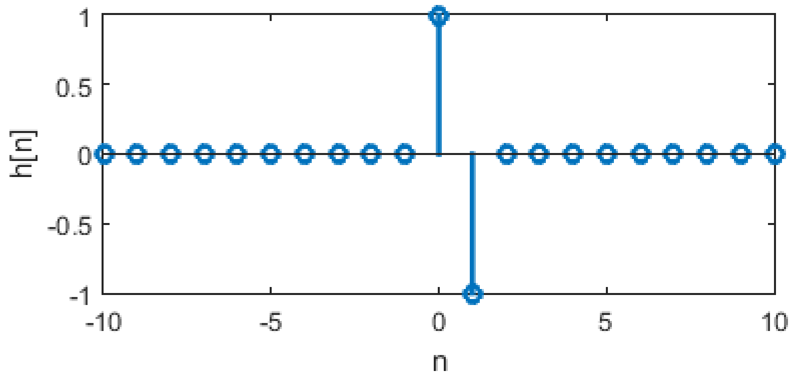


Exemplos de Respostas ao Impulso

- Diferença regressiva (back*ward*)

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

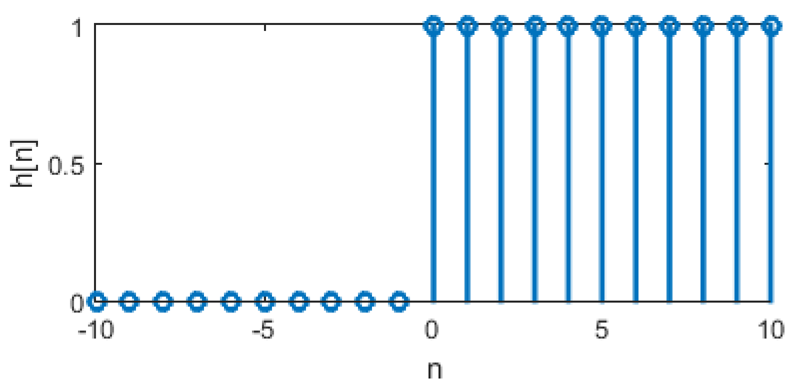
$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$



Sistemas IIR

- Sistemas com resposta ao impulso $h[n]$ com número infinito de amostras não nulas é denominado:
  - IIR – Inf*inite-Duration Impulse Response*

  - *Exemplo: Acumulador.*



Sistemas IIR

- A saída de um sistema LIT causal IIR pode ser calculada por

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[\infty]x[-\infty]$$

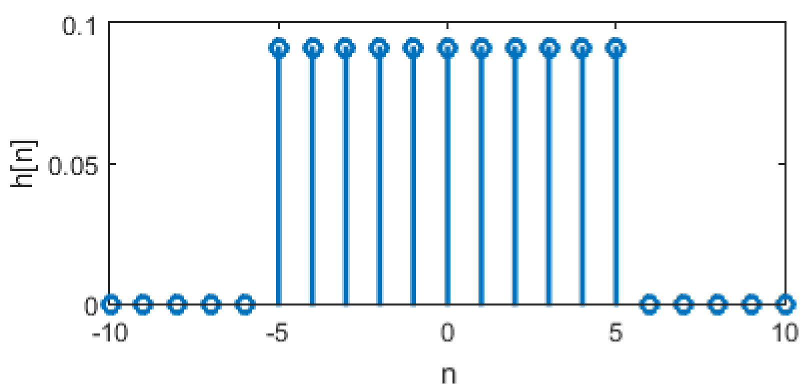
- Se a sequência de entrada $x[n]$ também for causal

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[n]x[0]$$

Sistemas FIR

- Sistemas com resposta ao impulso $h[n]$ com número finito de amostras não nulas é denominado:
  - FIR – *Finite-Duration Impulse Response*
  - *Exemplo: Sistema de média móvel.*



Sistemas IIR

- A saída de um sistema LIT causal FIR ($h[n]$ com M elementos) pode ser calculada por

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k] = \sum_{k=n-(M-1)}^{n} x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[M-1]x[n-(M-1)]$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere a soma de convolução:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

  - Dada a resposta ao impulso $h[n]$ de um sistema e qualquer entrada $x[n]$, teoricamente, pode-se calcular a saída $y[n]$.
  - Para sistemas FIR, a convolução é uma implementação natural.
  - Para sistemas IIR, implementações práticas são impossíveis.

- Sistemas IIR não são implementáveis?
  - Sim, são.
  - Utilizamos equações de diferenças.
  - Equações de diferenças também são usadas para a representação de filtros FIR.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Um sistema LIT causal pode ser representado pela seguinte **equação de diferenças linear com coeficientes constantes** de N-ésima ordem:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_k \, x[n-m]$$

ou

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k \, y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} b_k \, x[n-m] \qquad , \qquad a_0 \equiv 1$$

- Exemplo 1:
  - Representação do acumulador por equações de diferenças.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

  - Problema:
    - Requer o armazenamento de todas as amostras de entrada $x[n]$ para $0 \le k \le n$.
    - Como n é crescente, haverá problemas de disponibilidade de memória.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

- Representação do acumulador por equações de diferenças.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

Para $n - 1$ tem-se:

$$y[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

Separando $x[n]$ da soma, na definição do sistema, pode-se escrever:

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]$$

Logo,

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Rearanjando para a forma geral

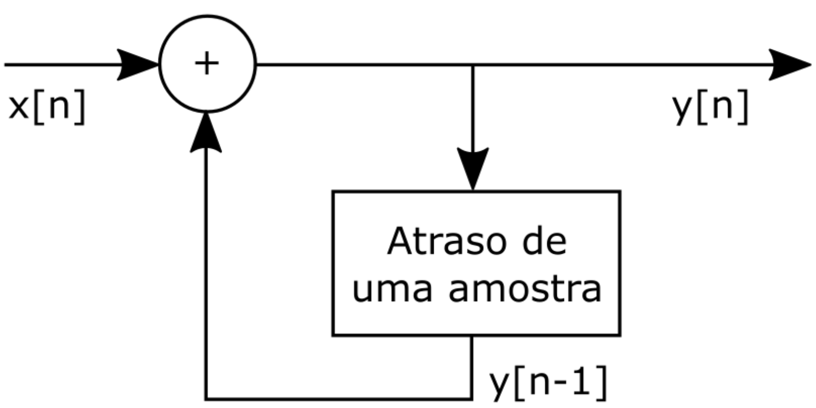
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_k \, x[n-m]$$

tem-se

$$y[n] - y[n-1] = x[n]$$ Equação recursiva

de onde

$$N = 1, \qquad a_0 = 1, \qquad a_1 = -1, \qquad M = 0 \quad e \quad b_0 = 1$$



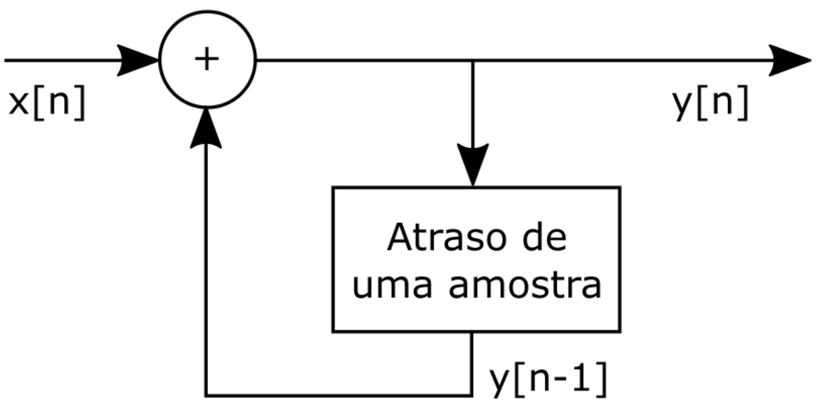
Sistema recursivo

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

A implementação recursiva do acumulador é:

$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$ Equação recursiva



Sistema recursivo

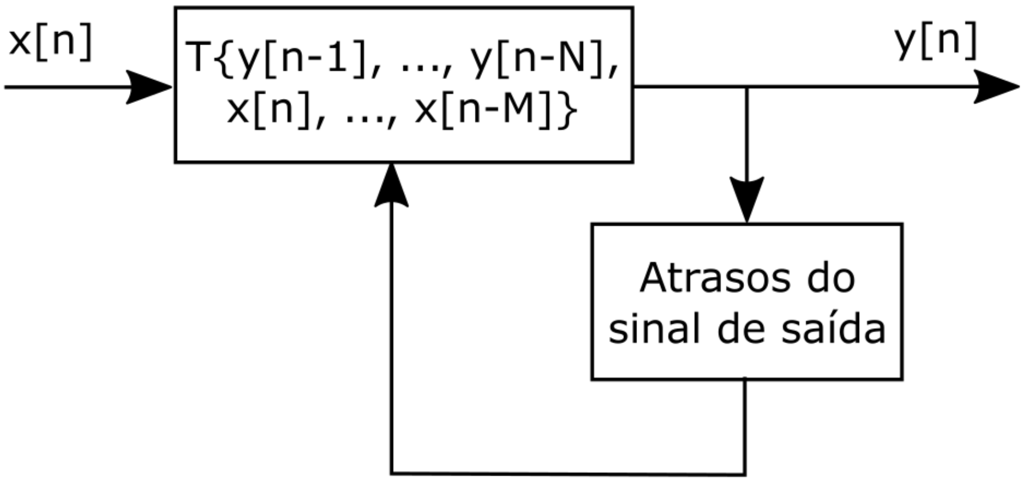
A implementação utiliza **uma soma** e **uma posição de memória.**

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Sistema recursivo:
  - A saída $y[n]$, no instante n, depende de valores passados da saída $y[n-1], y[n-2], \ldots$
  - De maneira geral

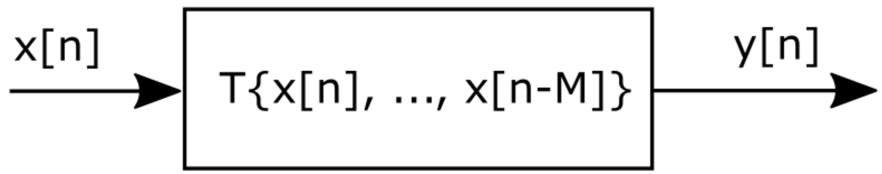
$$y[n] = T\{y[n-1], y[n-2], \ldots, y[n-N], x[n], x[n-1], \ldots, x[n-M]\}$$



Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

- Sistema não recursivo:
  - A saída $y[n]$, no instante n, não depende de valores passados da saída.
  - De maneira geral

$$y[n] = T\{x[n], x[n-1], \dots, x[n-M]\}$$



  - Para um sistema causal FIR tem-se:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k]$$

$$y[n] = h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \cdots + h[M]x[n-M]$$

$$y[n] = T\{x[n], x[n-1], \cdots, x[n-M]\}$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

- Exemplo 2:
  - Representação do sistema de média móvel por equações de diferenças.

$$y[n] = \frac{1}{M_2+1}\sum_{k=0}^{M_2} x[n-k]$$

  - Esta expressão já um caso especial de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_k\, x[n-m]$$

com $N = 0,\ a_0 = 1,\ M = M_2$ e $b_k = {}^{1}/_{(M_2+1)}$ para $0 \leq k \leq M_2$.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

O referido sistema de média móvel tem resposta ao impulso

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)}(u[n] - u[n - M_2 - 1])$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$h[n] = \frac{1}{(M_2 + 1)}\underbrace{(\overbrace{\delta[n] - \delta[n - M_2 - 1]}^{\text{Sistemas em paralelo}}) * u[n]}_{\text{Sistemas em cascata}}$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

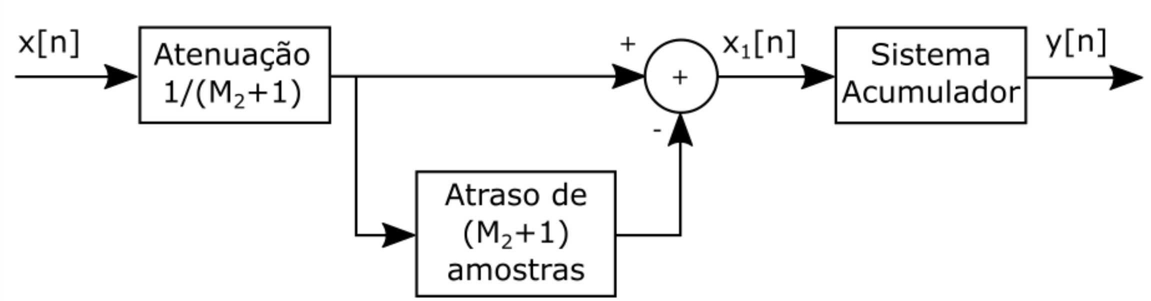
Ainda considerando

$$h[n] = \frac{1}{(M_2+1)} \underbrace{\overbrace{(\delta[n] - \delta[n-M_2-1])}^{\text{Sistemas em paralelo}} * u[n]}_{\text{Sistemas em cascata}}$$

$\delta[n]$ ⇒ Sistema unitário

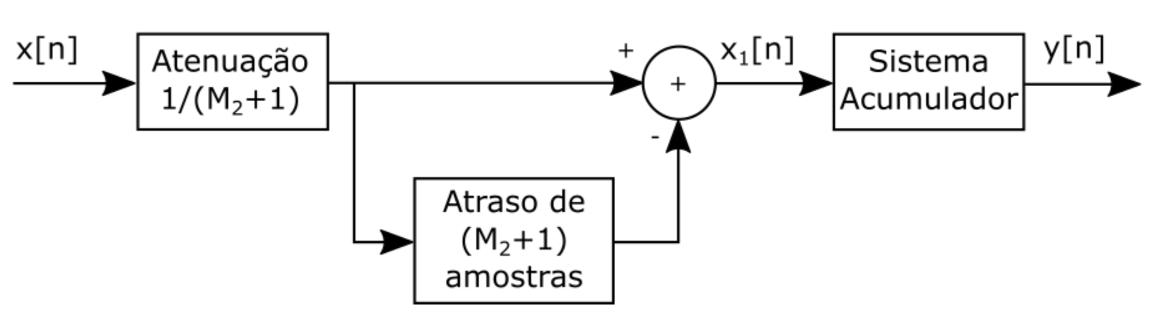
$\delta[n-M_2-1]$ ⇒ Atraso de M_2+1 amostras

$u[n]$ ⇒ Acumulador



Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Do diagrama



$$x_1[n] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n - M_2 - 1])$$

Da equação do acumulador

$$y[n] - y[n-1] = x_1[n]$$

Logo

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n - M_2 - 1])$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- A equação de diferenças do sistema de média móvel

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{(M_2+1)}(x[n] - x[n-M_2-1])$$

Tem a forma de

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_k\, x[n-m]$$

com $N = 1,\ a_0 = 1,\ \ a_1 = -1,\ \ M = M_2$ e
$b_0 = {}^{1}/_{(M_2+1)},\ \ b_{M_2+1} = -{}^{1}/_{(M_2+1)}$ e $b_k = 0$ caso contrário.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

- Primeira representação:

$$y[n] = \frac{1}{M_2 + 1} \sum_{k=0}^{M_2} x[n-k]$$

  - Utiliza $\boldsymbol{M_2}$ **somas** e **1 produto.**

- Segunda representação:

$$y[n] - y[n-1] = \frac{1}{(M_2 + 1)} (x[n] - x[n - M_2 - 1])$$

  - Utiliza **2 somas** e **1 produto.**
  - Armazena $y[n-1]$.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- **Cálculo Recursivo de Equações de Diferenças**
  - Um sistema é descrito pela seguinte equação de diferenças

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

  - A saída do sistema para uma entrada $x[n]$ não é única.
  - A saída também depende da condição inicial $y[n-1]$.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Suponha que um sinal de entrada $x[n]$ seja aplicado para $n \geq 0$.
- Suponha uma possível condição inicial $y[-1] \neq 0$.
- Recursivamente tem-se:

$$
\begin{gathered}
y[0] = ay[-1] + x[0] \\
y[1] = ay[0] + x[1] = a^2 y[-1] + ax[0] + x[1] \\
y[2] = ay[1] + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + ax[1] + x[2] \\
\vdots \\
y[n] = ay[n-1] + x[n] \\
y[n] = a^{n+1} y[-1] + a^n x[0] + a^{n-1} x[1] + \cdots + ax[n-1] + x[n] \\
y[n] = \underbrace{a^{n+1} y[-1]}_{\text{Resposta à condição inicial}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k]}_{\text{Resposta à função forçante}}, \qquad n \geq 0
\end{gathered}
$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

- Se o sistema **está relaxado**, $y[-1] = 0$.
- Com isso, tem-se a resposta à função forçante (ou ao estado zero):

$$y_f[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \qquad n \geq 0$$

- Se considerarmos

$$\left.\begin{aligned} h[n] &= a^n u[n] \\ y_f[n] &= h[n] * x[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Sistema IIR}$$

- Como o índice k do somatório inicia em 0, o sistema é causal.
- Como o índice k do somatório termina em n, s sequência $x[n]$ é causal, uma vez que $x[n-k] = 0$ para $k > n$.

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

Com isso, **se o sistema for relaxado,** a partir da solução da equação de diferenças

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

que é

$$y_f[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \qquad n \geq 0$$

mostrou-se que a equação de diferenças acima descreve um sistema LIT IIR com resposta ao impulso dada por

$$h[n] = a^n u[n]$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Agora, considere o sistema **não relaxado**, isto é, $y[-1] \neq 0$.
- Também considere $x[n] = 0$ para $-\infty < n < \infty$. Com isso, tem-se a resposta natural (resposta de entrada zero ou homogênea):

$$y_h[n] = a^{n+1}y[-1], \qquad n \geq 0$$

- Neste caso, o sistema produz uma saída mesmo sem ser excitado.
- A resposta completa do sistema **não relaxado** é

$$y[n] = y_h[n] + y_f[n]$$

$$y[n] = a^{n+1}y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k], \qquad n \geq 0$$

Representação de Sistemas por Equações de Diferenças

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para facilitar o entendimento considere $x[n] = K\delta[n]$ e $y[-1] = c$.

- Assim,

$$y[n] = a^{n+1}c + a^{n}Ku[n], \qquad para\ n \geq 0$$

- Para um sistema ser linear, se a entrada for nula a saída deve ser nula para qualquer n.
  - Considere $K = 0$. Com isso a entrada é nula mas a saída é $y[n] = a^{n+1}c$. Portanto o sistema não é linear.

- Se a entrada for deslocada, isto é, $x_1[n] = K\delta[n - n_0]$ a saída é

$$y[n] = a^{n+1}c + a^{n-n_0}Ku[n - n_0]$$ ⇨ Variante no tempo

Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Outra forma de caracterizar sistemas LIT.

- Obtenção da **função de resposta em frequência.**
  - Caracteriza completamente os sistemas no domínio da frequência.
  - Permite o cálculo da saída do sistema dada qualquer entrada que seja uma combinação linear ponderada de sinais senoidais ou exponenciais complexas.
    - Sinais periódicos ⇒ Série de Fourier.
    - Sinais não periódicos ⇒ Transformada de Fourier.
  - Fornece um entendimento de como o sistema se comporta para sinais de entrada de diferentes frequências.

Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Considere um sistema estável com resposta ao impulso $h[n]$ e uma entrada do tipo

$$x[n] = e^{j\omega n} \quad para \; -\infty < n < \infty$$

- Da convolução

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k} \right)}_{H(e^{j\omega})}$$

- Definindo

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}}$$

Função de resposta em frequência.

tem-se

$$\boxed{y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}}$$

Representação no Domínio da Frequência

- A função da frequência ω, $H(e^{j\omega})$, denomina-se **resposta em frequência** do sistema.

- Descreve uma mudança de amplitude e fase do sinal de entrada:

$$H(e^{j\omega}) = H_{Re}(e^{j\omega}) + jH_{Im}(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \underbrace{\left|H(e^{j\omega})\right|}_{\text{Mudança de amplitude}} e^{\overbrace{j\angle H(e^{j\omega})}_{}}$$

Mudança de fase

Representação no Domínio da Frequência

- Exemplo:
  - Calcule a resposta em frequência do sistema de atraso:

$$y[n] = x[n - n_d] \qquad n_d \in \mathbb{Z}^+$$

- Solução 1:
  - Considere a entrada $x[n] = e^{j\omega n}$:

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega n_d}}_{H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega n}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}}$$

Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Solução 2:
  - Vamos utilizar a definição de resposta em frequência:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

  - Para o sistema de atraso,

$$h[n] = \delta[n - n_d]$$

  - Assim,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - n_d]\, e^{-j\omega k} = e^{-j\omega n_d}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}}$$

Representação no Domínio da Frequência

- Como a resposta em frequência é:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

tem-se que

$$H(e^{j\omega}) = cos(\omega n_d) - jsen(\omega n_d)$$

$$H_{Re}(e^{j\omega}) = cos(\omega n_d) \qquad\qquad H_{Im}(e^{j\omega}) = -sen(\omega n_d)$$

Portanto, a magnitude e a fase da resposta em frequência são:

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \Rightarrow$$ Amplitude constante para qualquer frequência.

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d \quad \Rightarrow$$ Fase depende da frequência ω e do atraso n_d.

Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Caso a entrada seja formada pela combinação de exponenciais complexas, isto é,

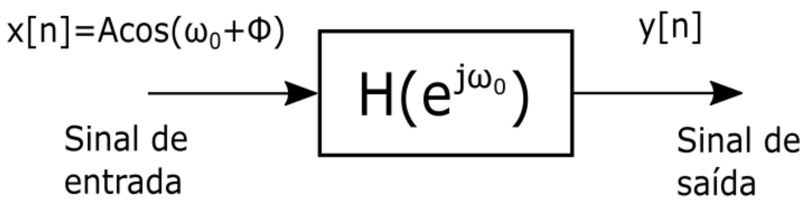
$$x[n] = \sum_{k} \alpha_k e^{j\omega_k n}$$

tem-se, pela superposição, que

$$y[n] = \sum_{k} \alpha_k H\left(e^{j\omega_k}\right) e^{j\omega_k n}$$

Resposta Senoidal para Sistemas LTI

- Considere o sistema:



- A entrada $x[n]$ pode ser expressa, através da fórmula de Euler, como:

$$x[n] = Acos(\omega_0 n + \phi) = A\left[\frac{1}{2}e^{j(\omega_0 n+\phi)} + \frac{1}{2}e^{-j(\omega_0 n+\phi)}\right]$$

$$x[n] = \frac{A}{2}e^{j\omega_0 n}e^{j\phi} + \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 n}e^{-j\phi}$$

$$x[n] = \underbrace{\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}}_{x_1[n]} + \underbrace{\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}}_{x_2[n]}$$

Resposta Senoidal para Sistemas LTI

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Para cada entrada se terá uma saída associada.

$$x_1[n] \Longrightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \Longrightarrow y_2[n]$$

$$x_1[n] = \frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} \Longrightarrow y_1[n] = H\left(e^{j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n}$$

$$x_2[n] = \frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n} \Longrightarrow y_2[n] = H\left(e^{-j\omega_0}\right)\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}$$

- Como $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$, devido a linearidade, a saída do sistema será $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$.

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

Resposta Senoidal para Sistemas LTI

Prof. Dr. Rafael Cardoso

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + H\left(e^{-j\omega_0}\right)e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

- Caso $h[n] \subset \mathbb{R}$, $H\left(e^{-j\omega_0}\right) = H^*\left(e^{j\omega_0}\right)$, logo:

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[\underbrace{H\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta}}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \underbrace{H^*\left(e^{j\omega_0}\right)}_{\left|H^*\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta}}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$\theta = \angle H\left(e^{j\omega_0}\right)$$

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta}e^{j\phi}e^{j\omega_0 n} + \left|H^*\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$y[n] = \frac{A}{2}\left[\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j(\omega_0 n+\phi+\theta)} + \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{-j(\omega_0 n+\phi+\theta)}\right]$$

$$\boxed{y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|cos(\omega_0 n + \phi + \theta)}$$

Resposta Senoidal para Sistemas LTI

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Devido a periodicidade:

$$e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi r)n} \qquad n, r \in \mathbb{Z}$$

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi r)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) \Rightarrow$$

Periódico com Período 2π.

- Devido a periodicidade de $H\left(e^{j\omega}\right)$, é necessário apenas se especificar $H\left(e^{j\omega}\right)$ entre $0 \leq \omega < 2\pi$ ou $-\pi < \omega \leq \pi$.

Representação no Domínio da Frequência

- Exemplo Revisitado:
  - Calcule a resposta do sistema de atraso para uma entrada $x[n] = 10cos\left(\frac{\pi}{12}n\right)$.

$$y[n] = x[n-6]$$

- Solução:
  - Como a resposta em frequência do atraso é:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \Longrightarrow H\left(e^{j\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-j\frac{\pi}{12}6} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

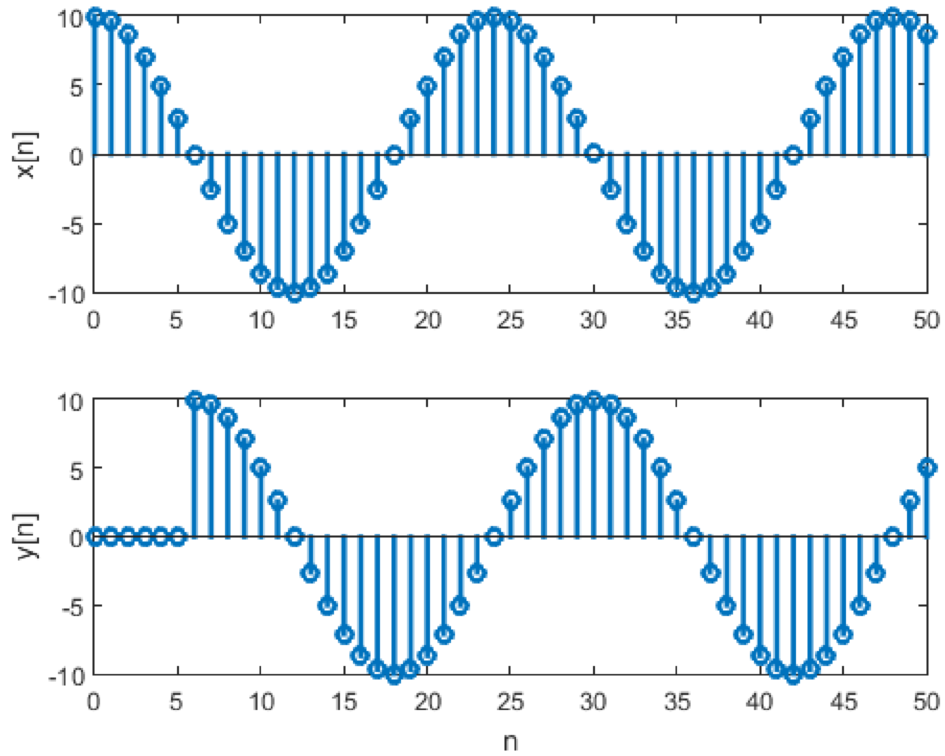
$$\left|H\left(e^{j\frac{\pi}{12}}\right)\right| = \left|e^{-j\frac{\pi}{2}}\right| = 1 \qquad \theta = \angle H\left(e^{j\frac{\pi}{12}}\right) = \angle e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}\ rad$$

$$y[n] = A\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|cos(\omega_0 n + \phi + \theta)$$

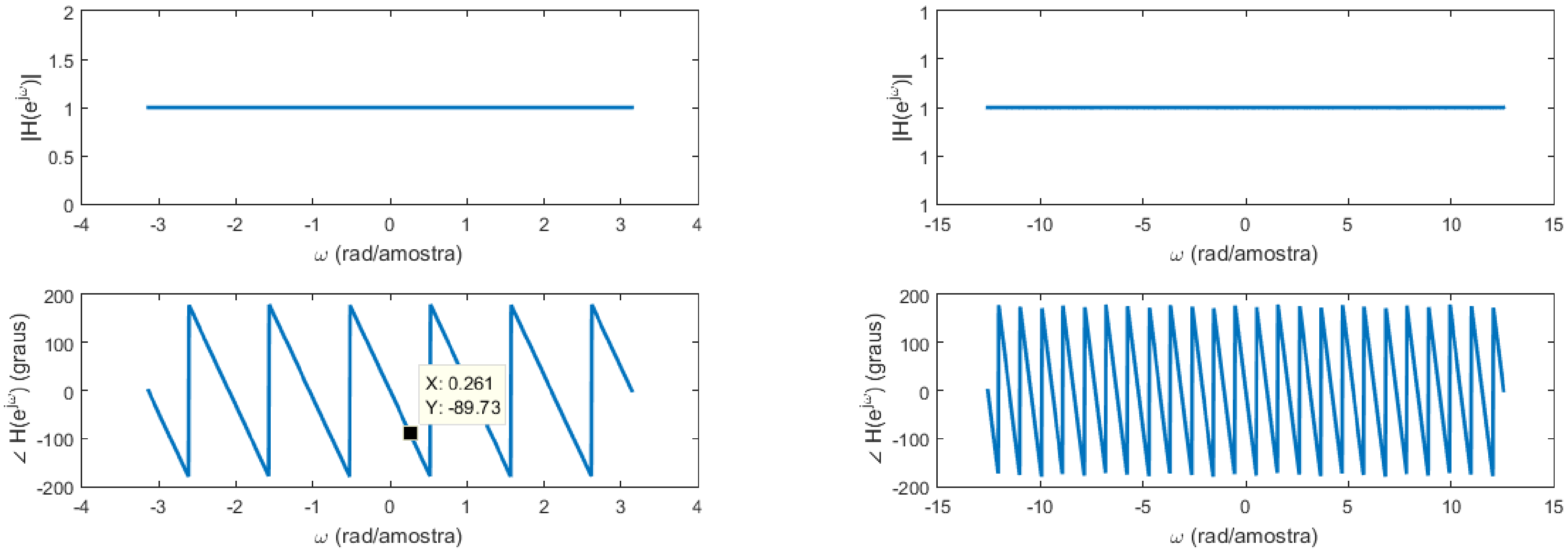
$$y[n] = 10cos\left(\frac{\pi}{12}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso



Representação no Domínio da Frequência



Representação no Domínio da Frequência

Prof. Dr. Rafael Cardoso

- Exemplo:
  - Calcule a resposta em frequência do sistema de média móvel.

- Solução:
  - A resposta ao impulso do sistema de média móvel é:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1}, & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

  - Assim,

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega k}$$

Representação no Domínio da Frequência

- Considerando a fórmula:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a^k = \frac{a^{N_1} - a^{N_2+1}}{1-a}$$

tem-se

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M_1+M_2+1}\frac{e^{j\omega M_1} - e^{-j\omega\left(M_2+1\right)}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M_1+M_2+1}\frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1-e^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega(M_2-M_1+1)/2}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M_1+M_2+1}\frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{1-e^{-j\omega}} \cdot e^{-j\omega(M_2-M_1)/2} \cdot e^{-j\omega/2}$$

Representação no Domínio da Frequência

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{e^{j\omega(M_1+M_2+1)/2} - e^{-j\omega(M_1+M_2+1)/2}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} \cdot e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{\cancel{\frac{1}{2j}} sen\left[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2\right]}{\cancel{\frac{1}{2j}} sen\left[\omega/2\right]} \cdot e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \frac{sen\left[\omega(M_1 + M_2 + 1)/2\right]}{sen\left[\omega/2\right]} \cdot e^{-j\omega(M_2-M_1)/2}}$$

Representação no Domínio da Frequência

- Para $M_1 = 0$ e $M_2 = 4$: