Aposentadoria

Ideia: usar valor esperado com a ideia de grafos (cadeia de Markov)

E_i = Valor esperado se tenho i reais

$$E_R = 0$$

$$E_i = 1 + \frac{1}{R}\sum_{j=1}^{R} E_{f(i+j)}$$

$$f(i+j) = \begin{cases} R, & i+j \geq R \\ \left\lfloor (i+j)\left(1-\frac{a}{b}\right) \right\rfloor, & i+j < R \end{cases}$$

→ Resolver Sistema Linear

$O(R^3)$

Aritmética modular

Primeiro calculamos x e y mod M e depois fazemos a operação. Note que fazer direto em big int é muito lento

$$X = X_0 X_1 \ldots X_n \to X = 10^n \cdot X_0 + 10^{n-1} \cdot X_1 + \ldots + X_n$$

Ex: $1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

Em $O(N)$ achamos $X \bmod M$.

$$(X + y) \bmod M \equiv ((X \% M) + (y \% M)) \% M$$

$$(X - y) \bmod M \equiv ((X \% M) - (y \% M) + M) \% M$$

$(X * y) \bmod M$ é análogo.

$$X^y \equiv (X \% M)^{(y \% (M-1))}$$

. Cuidado com 0!

Ciclos

Suponha que temos os números de 1 a N. Vamos colocar agora o ciclo que inclui o número 1. Colocamos com ele K-1 outros números e renumeramos o que sobrou de 1 a N-K para continuar a recursão. Se K>=T o que sobrou pode ser qualquer coisa.
Basicamente estamos brutando qual o menor valor no ciclo “bom”

$$dp(N) = \sum_{K=1}^{T-1} \binom{n-1}{k-1} \cdot (k-1)!\, dp(n-k)$$

$$+ \sum_{K=T}^{N} \binom{n-1}{k-1} (k-1)!\,(n-k)!$$

$O(N^2)$

Para otimizar, Devemos abrir a Conta.

$$dp(n) = \sum_{K=1}^{T-1} \frac{\boxed{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,(n-k)!} \cancel{(k-1)!}\, dp(n-k)$$

$$+ \sum_{K=T}^{n} \frac{\boxed{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}} \cdot \cancel{(k-1)!}\,\cancel{(n-k)!}$$

$n<T$

$$= (n-1)! \left(\sum \frac{dp(n-k)}{(n-k)!} + \max(0, n-T+1) \right)$$

Ciclos - Otimizando

Seja $dp'(n) = dp(n)/n!$

Note que $$\sum_{k=1}^{t-1} \frac{dp(n-k)}{(n-k)!} = \sum_{k=1}^{t-1} dp'(n-k)$$

$$\sum_{k=1}^{t-1} dp'(n-k) = \sum_{i=\max(0,\, n-(t-1))}^{n-1} dp'(i)$$

Que pode ser computado em $O(1)$

Com prefix-sum.

Complexidade Final: $O(N)$

Doces

A restrição de que ninguém pode ficar sem doce atrapalha. Para circundar, nós tiramos essa restrição e depois usamos inclusão exclusão. K = #doces e N=#pessoas

Sem restrição: $n \cdot n \ldots n = n^k$

$\geq i$ pessoas sem: $\binom{n}{i} \cdot (n-i)^k$

Total: $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (n-i)^k (-1)^i$

INC e EXC

Otimizando

$$\sum (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum (-1)^i \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-i)^k$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^i}{i!}\right] \cdot \left[\frac{(n-i)^k}{(n-i)!}\right]$$

Doces Otimizado

Seja $p_i = \frac{(-1)^i}{i!} \cdot x^i$

$$q_i = \frac{i^k}{i!} \cdot x^i$$

Então queremos: $n! \, [x^n](p \cdot q)$

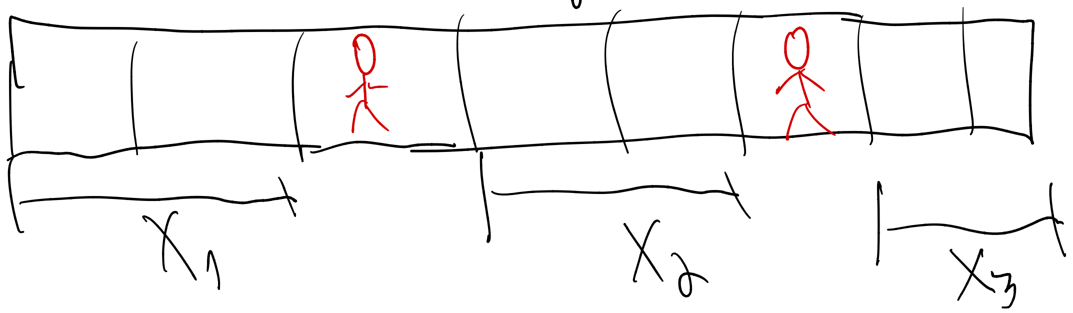
Ou seja, coeficiente de x^n do produto de "p" e "q".

Conseguimos isso em $O(k \log k)$ usando FFT.

Ceia introvertida

Primeiro resolvemos como se não fosse circular. Para lidar com o círculo, brutamos se tem ou não alguém na cadeira 1.

Linha: Seja $K=2$



Como não podem estar do lado, $X_2 \geq 1$

De modo geral, queremos o nº de soluções para:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_{K+1} = (n-K),$$

$$X_1, X_{K+1} \geq 0$$

$$X_i \geq 1, \quad 1 < i < K+1.$$

Ceia

Isso equivale ao stars & bars.

$$\text{stars} = (n-k) - (k-1) = n - 2k + 1$$

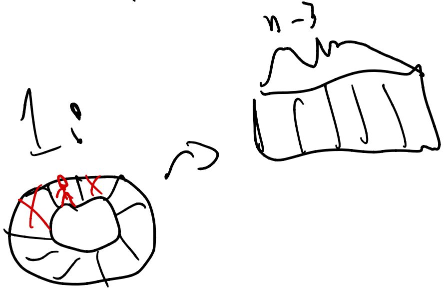
Devido a $x_i \geq 1$, $1 < i < k+1$

$$\text{Bars} = (k+1) - 1 = k$$

No total: $$\binom{(n-2k+1)+k}{k} = \binom{n-k+1}{k}$$

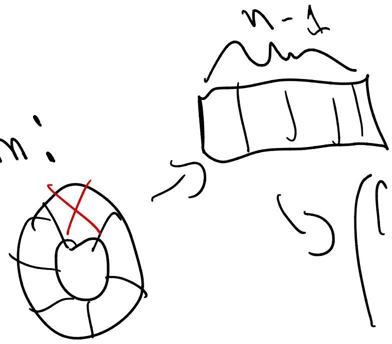
Círculo

Se tem no 1:



$$\binom{(n-3)-(k-1)+1}{k-1} = \binom{n-k-1}{k-1}$$

Se não tem:



$$\binom{(n-1)-k+1}{k} = \binom{n-k}{k}$$

Ceia

Somando os casos de se tem ou não no início chegamos em:

$$\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

OBS: Cuidado com $n-k<k$ e

com "n" pequeno

Amigo secreto

No total temos n! Modos. O problema é que não pode ninguém receber o seu. Isso eh chamado de permutação caótica. Resolvemos com inclusão-exclusão: a ideia é pensar na fórmula se tem >= K caras ruins.

$$\geq k \text{ ruins: } \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{Escolhe ruim}} \cdot \underbrace{(n-k)!}_{\text{Permuta o resto}} = \frac{n! \, \cancel{(n-k)!}}{k! \, \cancel{(n-k)!}}$$

Notação: permutação caótica.

$$\text{No total} \quad !n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\text{Prob: } \frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\boxed{\text{Curiosidade} \quad = \frac{1}{e} \quad n \to \infty}$$

Carros e meia suja

Esse problema é famoso e chamado de “Monty Hall Problem”

A ideia é que sempre escolher aleatório e depois trocar te da uma chance de 2/3, enquanto nunca trocar te dá apenas 1/3 de chance.

Assim, é esperado que você acerte 2/3*N. Para lidar com variância, fizemos uma conta para chegar em 6500. Para os curiosos:

$$E(X) = \frac{2}{3} \cdot N = 6667$$

$$\sigma = \sqrt{N\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)} \cong 50 \rightarrow 6500 = N - 3{,}3\sigma$$

Assim, $P(X \geq 6500) = 99{,}9\%$

Ou seja, em 99,9% das vezes você irá receber AC

Roleta

Podemos usar as fórmulas de P.G. combinadas as que vimos em aula.

$$p_i = \frac{1}{l_i}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p(X \geq i).$$

Na 1ª roleta: $p(X \geq i) = (1-\overset{1/l_1}{p_1})^{i-1}$, $1 \leq i \leq q_1$

Na 2ª roleta, levamos em conta que perdemos q_1 vezes com prob $= (1-p_1)^{q_1}$

$$p(X \geq q_1 + i) = (1-p_1)^{q_1}(1-p_2)^{i-1}, \quad 1 \leq i \leq q_2$$

E assim vai. Seja $b_i = (1-p_i)^{q_i}$,

Roleta

j vezes aqui

Anteriores

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{q_i} (1-p_i)^{j-1}}_{P.G. \to \frac{1-(1-p_i)^{q_i}}{1-(1-p_i)}} \cdot b_1 \cdot b_2 \cdots b_{i-1}$$

Precalculando o prefixo dos produtos $b_1 \cdot b_2 \cdots b_i$ e usando exponenciação rápida, resolvemos em $O(N \log N)$

OBS: Se $q_i \to \infty$ a soma vira $1/p_i$
$(q_i = -1)$

Partição

Note o padrão para N=3

(I) $(1 + 1 + 1) = 3$

(II) $(1)+(1 + 1) = 1+2$

(III) $(1 + 1)+(1) = 2+1$

(IV) $(1)+(1)+(1) = 1+1+1$

Ou seja, podemos substituir cada + por)+(e dá uma nova soma. Como temos n-1 "+" e 2 opções para cada, a resposta é 2^{n-1}

$O(N)$ ou $O(\log N)$ com Expon. rápida.

Mistery & Casino

$$\underset{L}{0},\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \underset{}{\overset{W}{n+1}}$$

$X_0 = 0$ $\qquad$ $X_i :=$ prob. de chegar em $n+1$.

$X_{n+1} = 1$

$$X_i = p_i X_{i+1} + (1-p_i) X_{i-1}$$

$$= p_i (X_{i+1} - X_{i-1}) + X_{i-1}$$

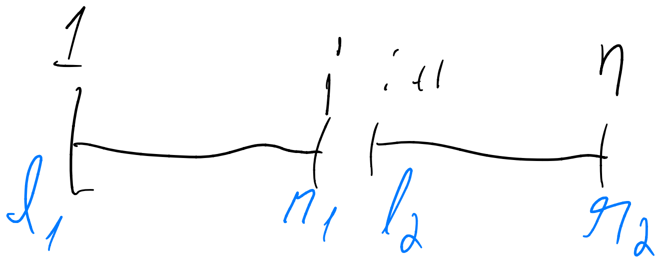
$$(X_i - X_{i-1}) = p_i (X_{i+1} - X_{i-1})$$

$$= p_i (X_{i+1} - X_i) + p_i (X_i - X_{i-1})$$

$$\underbrace{(X_i - X_{i-1})}_{\Delta_i} = \frac{p_i}{1-p_i} \underbrace{(X_{i+1} - X_i)}_{\Delta_{i+1}}$$

Memory and Casino

Ainda teria que continuar a conta… um outro modo de fazer é com uma seg tree.
Calculamos a probabilidade de começando em 1 sair em i e chama isso de L[1,i] e a prob se começa em i de sair de i antes de sair pelo 1 de R[1,i]. Para juntar dois segmentos nos somamos entre quantas vezes passamos de i para i+1 antes de finalmente escapar. Segue a conta



$$L(1,n) = l_1 \cdot l_2 \quad \text{(só 1 vez do } i \text{ pro } i+1\text{)}$$

$$+ \; l_1 \cdot (1-l_2) \cdot r_1 \cdot l_2 \quad \text{(2 vezes)}$$

$$+ \; l_1 \cdot (1-l_2)^2 r_1^2 l_2 \quad (3)$$

$$+ \; \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} l_1 l_2 \left((1-l_2) r_1\right)^k$$

$$= l_1 l_2 \Big/ \left(1 - (1-l_2) r_1\right)$$

Analogamente:

$$R[1,n] = n_2 \quad (0 \text{ vezes})$$

$$+ (1-n_2)\, n_1\, l_2 \quad (1 \text{ vez})$$

$$+ (1-n_2)\, n_1 (1-l_2)\, n_1\, l_2 \quad (2 \text{ vezes})$$

$$+ \cdots$$

$$= n_2 + \sum_{k=0}^{\infty} (1-n_2)\, l_2\, n_1 \left((1-l_2)\, n_1\right)^k$$

$$= n_2 + \frac{n_1\, l_2 (1-n_2)}{1 - n_1 (1-l_2)}$$