Notas de Aula

Comb.

① Aritmética modular (Motivação)

→ Inteiros de 64-bit são limitados. Ex: 2^{10000} não cabe

→ Big-Int é lento:

$O(\log(x) \cdot \log(y))$ para multiplicar $x \cdot y$

→ Float é impreciso

Ex:

```
x = 0, y = 0, N = 10^6
FOR i de 1 a N:
    x += 1.0;
FOR i de N a 1:
    y += 1.0;
```

$\frac{|x-y|}{y} = 0{,}4\%$ de erro relativo

```cpp
const int M = 1e9 + 7;
// cin >> x >> y >> z >> w;
int x = M - 1, y = M - 2, z = M - 3, w = M - 4;
// modo YOLO [NAO RECOMENDADO]
// [Para ser menos YOLO, colocar pelo menos fsanitize...]
int res1 = ((x * (long long) y % M * z % M) + w) % M ;
// modo com funcoes seguras [RECOMENDADO]
auto add = [](int a, int b){
    return (a + b) % M;
};
auto mul = [](int a, int b){
    return (a * (long long) b) % M;
};
int res2 = add(mul(mul(x, y), z), w);
// modo com estruturas (ex. mint do Brunomont)
mint a = x, b = y, c = z, d = w;
mint res3 = a * b * c + d;
```

- Notação

$$a \% M \iff a \bmod M$$

$$a \equiv b \bmod M \longrightarrow a \% M = b \% M$$

(se $a, b \geq 0$!)
Sinal importa em C++!

$$(a - b) \bmod M \to ((a - b) \% M + M) \% M$$

Operações

- Soma:

$$(a+b)\%M$$

- Subtração: $(0 \le a, b < M)$

$$(a-b+M)\%M$$

- Produto

$$(1LL*a*b)\%M$$

- Potências

$$a^K \equiv \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}^{K \text{ Vezes}} \mod M$$

Exponenciação rápida

$k \geq 0$

EXP(X, K):

IF K == 0:

Return 1 (Corner: 0^0!)

assert $X \neq 0$

V_m = EXP(X, K/2)

IF K % 2 == 1:

Return V_m · V_m · K mod M

Return V_m · V_m mod M

$O(\log_2(K))$

Inverso Modular

$$X \cdot X^{-1} \equiv 1 \mod M$$

Fermat's little Theorem

$$X^{\varphi(M)} \equiv 1 \mod M \quad , \; X \neq 0$$

$$\underbrace{X^{\varphi(M)-1}}_{X^{-1}} \cdot X \equiv 1 \mod M$$

Para M primo (10^9+7)

$\varphi(M) = M-1$

$X \neq 0$

$$X^{M-2} \cdot X \equiv 1 \mod M$$

Frações

$$\frac{a}{b} \longrightarrow a \cdot b^{-1} \bmod M$$

- Podemos usar em problemas de Probabilidade!

Análise Combinatoria

- Enumerar modos
  → Para coisas independentes podemos multiplicar

Ex: Existem xícaras de 5 cores, píres de 3 e colheres de 4 cores. Quantos conjuntos existem?

$5 \times 4 \times 3 = 60$

- Quantos nº de 3 algarismos com todos algarismos primos

→ 2, 3, 5, 7

Centena		Dezena		Unidade
4	x	4	x	4

Para Escolhas <u>somamos</u>

Ex.: Quantos caminhos de

$A \to$?

$$A \to C \quad + \quad A \to B \to C$$

$$2 \quad + \quad 2 \times 3 = 8$$

Primitivas

1. Fatorial

Quantas permutações

$$\underline{n} \times \underline{n-1} \times \ldots \times \underline{1} = n!$$

2. Arranjo

Quantos anagramas tem ABACATE

$$\frac{n!}{(\#A)!(\#B)!(\#C)!(\#T)!} = \frac{7!}{3!}$$

Lidar com permutar mesma letra

3. Combinação / Choose

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{\underline{n} \times \underline{(n-1)} \times \ldots \times \underline{(n-k+1)}}{k!}$$ ← Ordem não importa

→ Ordem não importa
→ Itens distintos

Exemplo:
nº mãos poker
$\binom{54}{5}$

Exemplos:

10 pessoas jogam "mafia"

- 2 Assassinos
- 1 anjo
- 1 detetive

Qual nº de jogos: $\underset{\text{As}}{\binom{10}{2}}\underset{\text{Anjo}}{\binom{8}{1}}\underset{\text{Det.}}{\binom{7}{1}}\underset{\text{Resto}}{\binom{6}{6}}$

Exemplo 2: (Paradoxo do Aniversário)

Tem $n = 30$ pessoas em uma sala. Quantas formas ninguém tem aniversário no mesmo dia? Qual probabilidade? (Ignorar bissexto)

$$\frac{\binom{365}{30} \cdot 30!}{365^{30}} = 29,36\%.$$

↳ 70% de Ter!

Caso de Estudo

Quantas sequências $x_1, x_2 \dots x_n$ tal que:

(I) $x_1 + x_2 \dots + x_N = M$

(II) $l_i \leq x_i \leq r_i$

Ex: Distribuir M doces, N crianças

---

1) Existência de solução

$$\sum_{i=1}^{N} l_i \leq M \leq \sum_{i=1}^{N} r_i$$

Ex.: Guloso esq. p/ direita.

2) Solução com DP

$$DP(n,m) = \sum_{i=l_n}^{r_n} DP(n-1, m-i)$$

$$dp(0,m) = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

$$O(NM^2)$$

3) Caso particular:

$$l_i = 0, \quad r_i = M$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

★ | ★★ | ★★★

STARS & BARS

M ★ , N−1 Barras

$$\binom{M+N-1}{M}$$

---

4) Reduzindo p/ $l_i = 0$

$$l_i' \leftarrow 0$$

$$M' \leftarrow M - \sum l_i$$

$$x_i' = x_i - l_i$$

5) Otimizando com Inclusão-exclusão

$$dp(n,m) = dp(n-1,m) \quad \rightarrow x_i \geq 0$$

$$- dp(n-1, m-r_n-1) \quad \rightarrow x_i > r_i$$

$$dp(0,m) = \binom{n-1+m}{m}$$

$\hookrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$

$l_i = 0$

$r_i = m$

$$O(N \cdot M)$$

6) Caso especial: $r_i = R$

$$\binom{M+N-1}{N-1} - \Big[\text{Tem} \geq 1 \text{ ruim} \Big]$$

$$\binom{N}{1}\binom{M-(R+1)+N-1}{N-1} - \Big[\text{Tem} \geq 2 \text{ ruins} \Big]$$

$$\binom{N}{2}\binom{M-2(R+1)+N-1}{N-1} - \Big[\ldots \Big]\Big]\Big]$$

$$= \sum_{K=0}^{N} (-1)^K \binom{N}{K} \binom{M-(R+1)\cdot K+N-1}{N-1}$$

Ex: Uma sorveteria tem K sabores. Quantos modos existem de comprar N sorvetes?

RESP.: $\binom{N+K-1}{K-1}$

Probabilidade

$$P = \frac{\#\,\text{Casos Favoráveis}}{\#\,\text{Total}}$$

Ex: • Aniversário

• Prob K caras em N jogadas de moeda: $\binom{N}{K}/2^N$

Propriedades:

A e B independentes

$$pr(A \cap B) = pr(A) \cdot pr(B)$$

$$pr(A \cup B) = pr(A) + pr(B) - pr(A \cap B)$$

Ex.: Jogando 3 dados, qual a prob. de sair no máximo um 6?

$0 \times 6: \left(\frac{5}{6}\right)^3$

$1 \times 6: \underbrace{\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \binom{3}{1}}_{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}}$

Lembrete: $\frac{a}{b} \to a \cdot b^{-1} \bmod M$

$\equiv a\, b^{M-2} \bmod M$

(M primo)

Valor Esperado / Esperança

$$E(X) = \sum i \cdot p(X = i)$$

Ex: Valor Esperado em 1 dado

Propriedades

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

  Ex: n dados

Se $X \in \mathbb{N}$,

$$= 1 \cdot p(X=1) + 2 \cdot p(X=2) + 3 \cdot p(X=3) \ldots$$

$$= p(X \geq 1) + p(X \geq 2) + p(X \geq 3) \ldots$$

$$= \sum_i p(X \geq i)$$

Caso de Estudo

Dada uma moeda imperfeita com chance "p" de cair cara, ache o valor esperado do número de jogadas da moeda até a primeira cara.

Pela Fórmula:

$$p(X=i) = \underbrace{p}_{1\text{ cara}} \cdot \underbrace{(1-p)^{i-1}}_{(i-1)\text{ coroas}}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,p(1-p)^{i-1} = p\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}$$

1º Forma

Seja

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} \quad \text{P.G.}$$

$$\frac{d}{dp}(S) = \sum -i(1-p)^{i-1} = -\frac{1}{p^2}$$

$$\sum i(1-p)^{i-1} = \frac{1}{p^2}$$

2º modo

$$P(X \geq i) = (1-p)^{i-1}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{i-1} = \frac{1}{p}$$

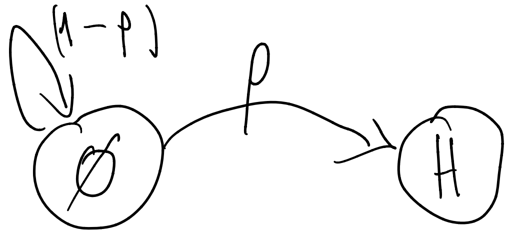
PG

3º modo

Cadeia de Markov

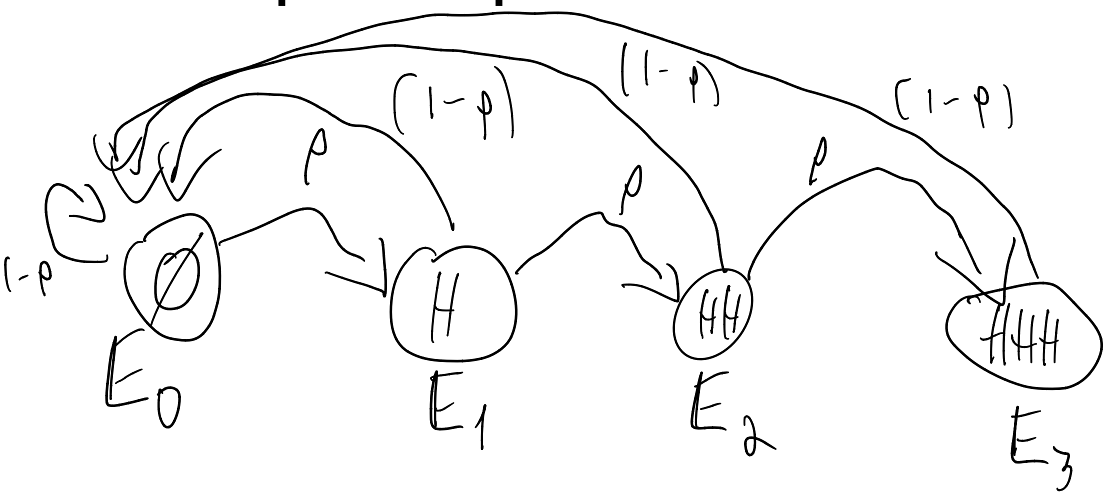
$$E = 1 + p \cdot 0 + (1-p) \cdot E$$

$$E \cdot p = 1 \longrightarrow E(X) = 1/p$$



↳ Heads

Qual o valor esperado até cair HHH pela primeira vez? Qual a probabilidade disso ocorrer após k-etapas?



$$E_3 = 0$$

$$E_2 = 1 + p \cdot E_3 + (1-p) E_0$$

$$E_1 = 1 + p \cdot E_2 + (1-p) E_0$$

$$E_0 = 1 + p \cdot E_1 + (1-p) E_0$$

$\rightarrow$ Sistema Linear!

Para probabilidade

$dp(V, K)$ = prob. de estar aqui

nó: 0, 1, 2, 3

steps

Base

$dp(0, 0) = 1$

$dp(V, 0) = 0, \quad V \neq 0$

Iteração

$$dp(V, K) = \sum_{\substack{\text{aresta} \\ (t_0 \to V,\, p)}} p \cdot dp(t_0, K-1)$$

Para casa: Otimizar com Matrizes.