Determinação da saturação da água no escoamento bifásico água-óleo

N. J. S. CARVALHO[1]

Resumo: Uma das técnicas de recuperação de hidrocarbonetos se dá mediante a injeção de um fluido no reservatório, de forma a causar um aumento de pressão que permita o deslocamento de outro fluido (óleo e/ou gás) deseja. Os efeitos desse procedimento podem ser avaliados pela análise da saturação do fluido injetado ao longo do reservatório. A simulação de reservatórios permite a análise dos efeitos de tais técnicas por meio da resolução numérica das equações governantes que modelam o escoamento. Neste trabalho são apresentados os resultados obtidos com a utilização de uma formulação explícita para a determinação da saturação de água, considerando um problema simplificado onde água é injetada em um reservatório contendo óleo.

Palavras-chave: Simulação de reservatórios, determinação da saturação, Formulação explícita.

1. Introdução

Para o estudo de um reservatório faz-se necessário a habilidade de predizer como os fluidos nele contidos escoam em resposta a produção e a injeção de outros fluidos [1]. Esta habilidade é necessária uma vez que uma das formas de recuperação de hidrocarbonetos envolve a injeção de um fluido adicional para aumentar a pressão no reservatório, deslocando óleo e gás que estão contidos no reservatório.

A água é frequentemente utilizada como alternativa de baixo custo para fluido de injeção dado o fato de, na maioria das condições de pressão e temperatura, ser imiscível com o óleo, uma vez que as solubilidades da água no óleo e do óleo na água são baixas [2].

A simulação numérica de reservatórios permite a inferência do comportamento de um reservatório real a partir de um modelo compatível. Dado que os fenômenos que ocorrem em reservatórios de hidrocarbonetos, como processos de transferência de massa e o escoamento de fluidos, podem ser modelados por um conjunto de equações diferenciais e condições de contorno e iniciais, a resolução numérica destas equações governantes pode levar a soluções para variáveis de interesse como pressão no reservatório ou saturação.

No presente trabalho adota-se uma formulação explícita para a obtenção da saturação da água, injetada em um reservatório contendo óleo. São avaliados os efeitos do refinamento da malha, de alterações em propriedades de rocha e também das condições de produção no perfil de saturação obtido.

2. Modelagem Matemática

2.1. Hipóteses

De forma a delimitar o problema aqui estudado e definir o modelo matemático correspondente, consideram-se as seguintes hipóteses.

- meio poroso incompressível;
- fluidos incompressíveis;
- permeabilidade do meio constante no tempo e espaço;
- escoamento bifásico água-óleo e isotérmico;
- viscosidades dos fluidos constantes;
- ausência de pressão capilar;

[1]Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro. E-mail: njscarvalho@iprj.uerj.br

- é válida a Lei de Darcy modificada para o escoamento multifásico;
- não há gás dissolvido no óleo;
- não há influência de efeitos gravitacionais;
- escoamento transiente, unidimensional na direção x (enquanto o domínio é um paralelepípedo de altura L_z, comprimento L_x e largura L_y);
- não há termo fonte ou sorvedouro.

2.2. Equações governantes e condições auxiliares

Considerando o modelo para a saturação da água dada pela Eq. (2.1)

$$\frac{\partial S_w(x,t)}{\partial t} + \frac{q_t}{A\phi}\frac{\partial f_w(S_w)}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

onde S_w é a saturação da água, q_t é a vazão total, A é a área da seção transversal do reservatório de dimensões $L_x \times L_y \times L_z$, tal que $A = L_y \times L_z$ nesta abordagem e f_w é a função fracionária de fluxo.

Introduzindo a constante $C_1 = q_t / A\phi$ e a função auxiliar F, tal que

$$F(S_w) = C_1 f_w(S_w) \tag{2.2}$$

podemos expressar o modelo da forma da Eq. (2.3)

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \tag{2.3}$$

As condições auxiliares para o modelo expressam a distribuição de saturação inicial e as informações nas extremidades do domínio. A condição inicial para este problema é dada a seguir

$$S_w(x,t)|_{t=0} = 0,2 \tag{2.4}$$

No contorno esquerdo há injeção de água com vazão constante conhecida q_t, tal que a saturação é prescrita, conforme expresso a seguir

$$S_w(x,t)|_{x=0} = 1 \tag{2.5}$$

Por outro lado, no contorno direito sabe-se que não há variação da saturação, condição representada por

$$\left.\frac{\partial S_w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=L_x} = 0 \tag{2.6}$$

Como a função fracionária depende da saturação, faz-se necessário um modelo para tratar tal não-linearidade. No presente trabalho, considera-se válida a seguinte formulação:

$$f_w = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_o k_o}{\mu_w k_w}} \tag{2.7}$$

onde k_o e K_w são as permeabilidades do óleo e da água, respectivamente, e μ_o e μ_w suas viscosidades.

As permeabilidades podem ser relacionadas com as permeabilidades relativas por meio da permeabilidade absoluta, k, tal que

$$f_w = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_o}{\mu_w}\dfrac{k \cdot k_{ro}}{k \cdot k_{rw}}} \tag{2.8}$$

na qual k_{ro} é a permeabilidade relativa da fase óleo e k_{rw} é a permeabilidade relativa da fase água.

As permeabilidades relativas são dependentes da saturação e, no presente trabalho, consideram-se válidos os modelos a seguir

$$k_{rw} = {S_w}^2 \tag{2.9}$$

$$k_{r0} = (1 - S_w)^2 \tag{2.10}$$

Fazendo as devidas substituições e simplificações, obtemos

$$f_w = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_o}{\mu_w} \dfrac{(1 - S_w)^2}{{S_w}^2}}$$

Após algumas manipulações algébricas e introduzindo a constante $C_2 = \mu_o / \mu_w$, a forma final da equação é

$$f_w(S_w) = \frac{{S_w}^2}{{S_w}^2 + C_2(1 - {S_w}^2)^2} \tag{2.11}$$

Portanto, o conjunto das Eqs. (2.3), (2.4) (2.5), (2.6) e (2.11) é o modelo para o problema estudado e uma técnica de discretização deve ser adotada para a obtenção de uma solução numérica para a saturação.

3. Discretização e solução numérica

A técnica aqui adotada é o método de Diferenças Finitas, que permite o tratamento de um domínio contínuo na forma de pontos nos quais as variáveis de interesse são tomadas [3], e este processo transforma as equações diferenciais governantes em um conjunto de equações algébricas, com a utilização da expansão em série de Taylor de uma função. No presente trabalho, adotou-se a formulação de malha de blocos centrados [4].

Considerando a Eq. (2.3), podemos discretizar a derivada temporal por uma aproximação avançada de primeira ordem tal que

$$\left.\frac{\partial S_w}{\partial t}\right|_i^n = \frac{{S_w}_i^{n+1} - {S_w}_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \tag{3.1}$$

na qual o índice i representa a posição avaliada, n e $n+1$ são o tempo atual e futuro, respectivamente e $O(\Delta t)$ é a ordem da aproximação.

Para a função F, podemos adotar uma aproximação do tipo *upwind* de primeira ordem que, considerando que o escoamento possui velocidade positiva, fornece

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_i^n \approx \frac{F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n}{\Delta x} \approx \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} \tag{3.2}$$

Fazendo as substituição das Eqs. (3.1) e (3.2) em (2.3), obtêm-se

$$\frac{{S_w}_i^{n+1} - {S_w}_i^n}{\Delta t} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Assim, podemos determinar a saturação no próximo passo de tempo conforme:

$${S_w}_i^{n+1} = {S_w}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta t}\left(F_i^n - F_{i-1}^n\right) \tag{3.3}$$

Como formulação resultante é explícita, o esquema é condicionalmente estável. Para este problema, deve-se garantir a condição CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), dada por

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

na qual u é a velocidade de propagação. Esta condição limita, portanto, o passo de tempo que pode ser utilizado no processo de evolução temporal da solução, de tal forma que a condição CFL é satisfeita se

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u_{max}} \tag{3.4}$$

que implica que para a determinação do passo de tempo precisa-se conhecer o valor máximo da velocidade. No presente problema, a velocidade de propagação é dada por

$$u = \frac{\partial F(S_w)}{\partial S_w}$$

A derivada da função F (Eq. 2.2), considerando a formulação de f_w da Eq. (2.11), pode ser obtida pela regra do quociente e é dada a seguir

$$\frac{\partial F(S_w)}{\partial S_w} = C_1 \frac{-2C_2 {S_w}^2 + 2C_2 S_w}{({S_w}^2 + c_2(1 - S_w)^2)^2} \tag{3.5}$$

Dado que a constante C_1 incorpora parâmetros de problema (vazão, área, porosidade), diferentes condições de produção levam a diferentes valores para u_{max}, que podem ser obtidos pela análise gráfica da função presente na 3.5, conforme ilustrada na Fig. 1.

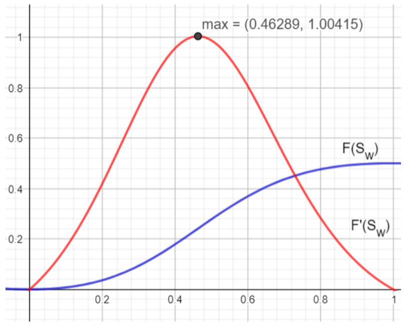

Figura 1: Função F, sua derivada e exemplo de ponto de máximo da derivada.

4. Resultados

A solução numérica do problema foi obtida com uma implementação em linguagem C++, conforme apresentado no Apêndice A. Para a simulação inicial, considera-se como Caso Padrão os seguintes parâmetros: 1095 dias como tempo simulado, 128 volumes na malha espacial e vazão total de 50 m^3/dia. A Tabela 1 apresenta as propriedades de rocha, fluidos e variáveis do domínio adotados.

Tabela 1: Propriedades de fluido e rocha e variáveis do problema.

Símbolo	Nome	Valor	Unidade
k	permeabilidade absoluta	$10{,}0 \times 10^{-15}$	m
ϕ	porosidade do meio	0,25	-
μ_o	viscosidade do óleo	$0{,}8 \times 10^{-3}$	$Pa \cdot s$
μ_w	viscosidade da água	$1{,}0 \times 10^{-3}$	$Pa \cdot s$
$S_{w_{ini}}$	saturação inicial	0,2	-
L_x	dimensão do reservatório em x	5000	m
L_y	dimensão do reservatório em y	40	m
L_z	dimensão do reservatório em z	10	m

Para o passo de tempo, utiliza-se um fator multiplicativo com o resultado obtido pela Eq. (3.4), com a velocidade máxima sendo calculada previamente cada simulação. Nas condições definidas como Caso Padrão essa velocidade tem como magnitude $1,00415\ m/d$. O passo de tempo final utilizado é $0,95\Delta t$.

4.1. Teste A: refinamento da malha espacial

A Fig. 2 apresenta os resultados obtidos para diferentes números de células na malha espacial. Neste teste, busca-se visualizar o efeito do refinamento da malha no perfil de saturação obtido.

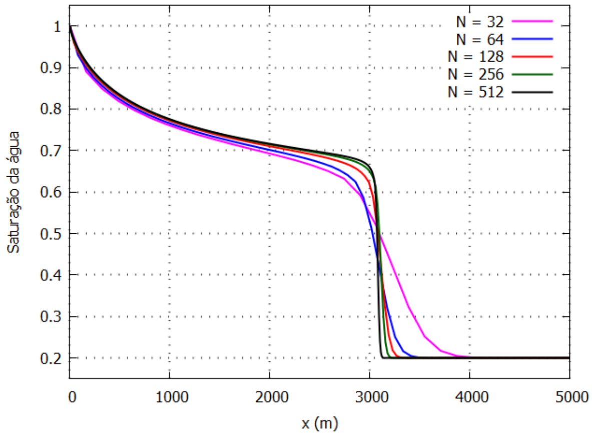

Figura 2: Saturações obtidas para diferentes malhas.

Para as condições simuladas, todas as malhas encontram uma frente de avanço, para o tempo simulado, após a região onde $x = 3000\ m$. No entanto, as curvas demonstram que, conforme o refinamento da malha aumenta, a curva apresentando a saturação retrata mais fielmente o comportamento físico esperado: conforme se injeta água em um reservatório é produzida uma região de queda brusca na saturação entre a área percorrida pela água e a área ainda com óleo não deslocado.

4.2. Teste B: Variação de propriedade de rocha

Neste teste, varia-se a porosidade do meio que forma o reservatório e a Fig. 3 apresenta os perfis de saturação observados com essa alteração. Como a porosidade integra a constante anteriormente definida C_1, sua modificação leva à alterações na função F e sua derivada, e, portanto, no valor máximo da velocidade de propagação. A Tabela 2 apresenta os valores de porosidade utilizados neste teste e as respectivas velocidades máximas.

Tabela 2: Velocidades máximas para cada porosidade.

ϕ	u_{max}
0,20	1,22519
0,25	1,00415
0,30	0,83679
0,35	0,71725

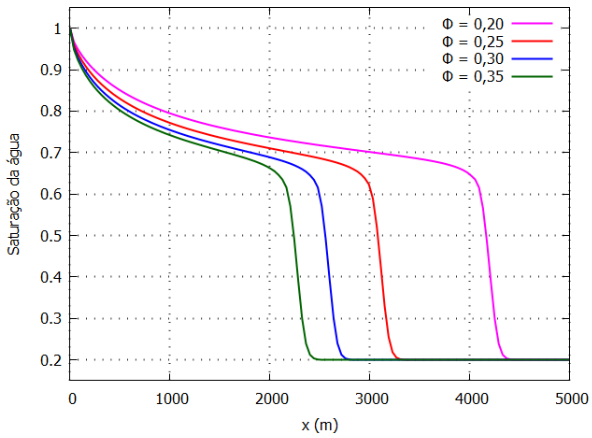

Figura 3: Saturações para diferentes porosidades.

Como a porosidade é uma variável relacionada com o volume efetivo do reservatório, V_{bulk}, pela equação

$$V_{bulk} = \phi \times L_x \times L_y \times L_z$$

um maior valor de ϕ leva a um maior V_{bulk}. Como a vazão total é mantida constante, o comportamento observado na figura ilustra corretamente o efeito esperado, dado que o volume total injetado representará uma menor porcentagem do volume do reservatório para as maiores porosidades. Assim, a frente de avanço fica limitada a uma região menor do reservatório e conforme a porosidade diminui, atinge áreas posteriores.

4.3. Teste C: Variação da taxa de injeção

Mantendo-se o tempo avaliado fixo em 1095 dias, este teste ilustra os efeitos do aumento na vazão total adotada, mas assim como a porosidade, a vazão total q_t, está contida na constante C_1, e sua modificação também altera o valor da velocidade máxima. A Tabela 3 apresenta os valores associados.

Tabela 3: Velocidades máximas para cada vazão.

q_t	u_{max}
25 m^3/d	0,50208
50 m^3/d	1,00415
75 m^3/d	1,50623

A Fig. 4 apresenta as curvas para a saturação da água ao final do tempo simulado para as três vazões consideradas.

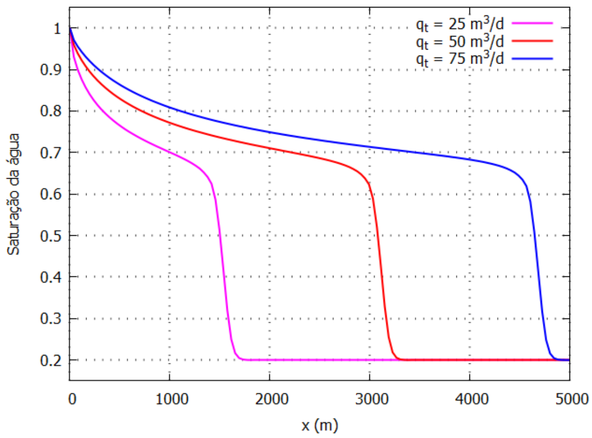

Figura 4: Saturações para diferentes vazões.

As curvas mostram que conforme a taxa de injeção é aumentada, a posição da frente de avanço é deslocada para a direita, atingindo regiões posteriores do reservatório. Esse é um efeito que mostra-se em concordância com aqueles obtidos quando avaliada a variação da porosidade: com o aumento da vazão, o volume de água injetado no reservatório passa a representar uma fração maior do volume total, percorrendo uma extensão maior e como consequência deslocando uma porção do óleo, o que leva às posições observadas para a frente de avanço.

5. Conclusões

No presente trabalho simulou-se um reservatório idealizado, adotando-se uma formulação implícita para a obtenção de uma solução numérica. Testes foram realizados para a análise do efeito de diferentes parâmetros na pressão, incluindo aspectos numéricos, propriedades físicas e parâmetros de operação.

Um dos estudos mostra a possibilidade de maiores passos serem utilizados na evolução temporal serem empregados, o que reflete o fato de a formulação implícita ser incondicionalmente estável. Quando da alteração da vazão como condição de operação, observou-se corretamente seu efeito, ainda que em uma região limitada, no decréscimo da pressão do óleo ao final do período avaliado. Para o aumento do refinamento da malha no entanto, as soluções se aproximam para o maior número de células, levando a valores numéricos distintos daqueles obtidos com a malha menor refinada.

Os resultados para as propriedades físicas avaliadas mostram que o aumento da porosidade leva a menores pressões, dada a relação desta com o volume efetivo e que rochas menos permeáveis influenciam na diminuição da queda de pressão no reservatório.

Referências

[1] M. Islam, S. Mousavizadegan, S. Mustafiz, and J. Abou-Kassem, *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. Wiley-Scrivener, Wiley, 2010.

[2] P. Willhite, *Waterflooding*. SPE textbook series, Society of Petroleum Engineers, 1986.

[3] R. Pletcher, J. Tannehill, and D. Anderson, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition*. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences, Taylor & Francis, 2012.

[4] T. Ertekin, J. Abou-Kassem, and G. King, *Basic Applied Reservoir Simulation*. SPE textbook series, Society of Petroleum Engineers, 2001.

```cpp
/*
    Descrição: Solução para a saturação em um escoamento bifásico
    Autor: Naim J. S. Carvalho (njscarvalho@iprj.uerj.br)
    Data: 01 de Dezembro de 2021
*/

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <cmath>
#include <vector>
#include <string>
#include <fstream>
#include <algorithm>     //std::fill

// Protótipos das funções usadas:
void show_parameters();
void save_saturation_data(const std::vector<double>& X, const std::vector<double>& Y, const std::string& filename);
template <typename T> std::vector<T> linspace(const double xi, const double xf, int Num);
double function_f(const double sw);
void solve_by_upwind(std::vector<double>& Sat, const std::vector<double>& Pos);

// Variáveis do problema:
constexpr double k {10e-15};            // permeabilidade
constexpr double phi {0.25};            // porosidade
constexpr double Sat_ini {0.2};         // saturação inicial
constexpr double Lx {5000.0};           // dimensão em x
constexpr double Ly {40.0};             // dimensão em y
constexpr double Lz {10.0};             // dimensão em y
constexpr double mu_o {1.0e-3};         // viscosidade do óleo
constexpr double mu_w {0.8e-3};         // viscosidade da água
constexpr double A {Ly*Lz};             // área da seção transversal
constexpr double q_t {50.0};            // vazão no lado esquerdo
constexpr auto C1 = q_t/(A*phi);
constexpr auto C2 = mu_o/mu_w;

// Variáveis da simulação:
constexpr int N {128};                            // número de células
constexpr double dx = Lx/N;                       // refinamento da malha
constexpr double t_max {365.0*3};                 // tempo de simulação, em dias
constexpr double max_u_value{1.00415};            // valor máximo da derivada de f_w
constexpr auto dt_max = dx/max_u_value;           // valor máximo permitido para o passo de tempo
constexpr auto dt = 0.95*dt_max;                  // valor do passo de tempo efetivamente usado
constexpr auto nsteps = static_cast<int>(t_max/dt);

int main(int argc, char* argv[]){
    show_parameters();
    std::vector<double> Pos = linspace<double>(0.0, Lx, N); // vetor para plotar Sw por x
    std::vector<double> Sat (N, Sat_ini);                   // vetor com as Saturações

    solve_by_upwind(Sat, Pos);
}

void solve_by_upwind(std::vector<double>& Sat, const std::vector<double>& Pos){

    std:fill(Sat.begin(), Sat.end(), Sat_ini);

    double sw_i {0.0}, sw_iprev {0.0};
    for (int n = 1; n <= nsteps; n++){
        // Primeira célula:
        Sat[0] = 1.0;
        // Iteramos da segunda até a penúltima célula:
        for (int i = 1; i < N; i++){
            sw_i = Sat[i];
            sw_iprev = Sat[i-1];
            Sat[i] = Sat[i] - (dt/dx)*(function_f(sw_i) - function_f(sw_iprev));
        }
```

```cpp
    }
    std::string name_out {"saturation_via_upwind.txt"};
    save_saturation_data(Pos, Sat, name_out);
}

double function_f(const double sw){
    return C1/(1.0 + C2*(1.0*std::pow(1-sw, 2))/(1.0*std::pow(sw, 2)));
}

void save_saturation_data(const std::vector<double>& X, const std::vector<double>& Y, const std::string& filename){
    std::fstream saver{filename, std::ios::out|std::ios::trunc};

    saver << std::setw(10) << "x (m) " << std::setw(10) << "Saturacao" << std::endl;
    const auto N = X.size();
    const auto M = Y.size();
    if ( N != M)
        return;
    for (int i = 0; i < N; i++){
        saver << std::setw(10) << X[i] << " " << std::setw(10) << std::setprecision(10) << Y[i] << std::endl;
    }
}

template <typename T>
std::vector<T> linspace(const double xi, const double xf, int Num){

    if (Num == 0 || Num == 1)
        Num++;

    std::vector<T> V (Num, 0.0);

    auto h = (xf - xi) / (Num-1);
    auto n = static_cast<int>(V.size());
    for (int i = 0; i < n; i++){
        V[i] = xi + i*h;
    }

    return V;
}

void show_parameters(){
    std::cout << "Numero de celulas: " << N << std::endl;
    std::cout << "Refinamento (dx): " << dx << std::endl;
    std::cout << "Tempo total: "  << t_max << " dias" << std::endl;
    std::cout << "Valor maximo da derivada de fw (u_max): " << max_u_value << std::endl;
    std::cout << "Passo de tempo maximo (dx/u_max): " << dt_max << " dia(s)" << std::endl;
    std::cout << "Passo de tempo usado: " << dt << " dia(s)" << std::endl;
    std::cout << "Numero de passos de tempo a calcular: " << nsteps  << std::endl;
}
```