

1. MODELO MATEMÁTICO:

$$\rho(T)c_p(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T)\nabla T(x,y,t)) + g(T) \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$T(L_x, y, t) = T(x, L_y, t) = T_a \quad (3)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (4)$$

$$-k\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} = h(T_\infty - T(x,y,t)) \quad [a,b] \times [c,d] \quad (5)$$

Fazendo k , ρc_p e g constantes:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + g \quad (6)$$

$$\frac{\rho c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{g}{k} \quad (7)$$

Fazendo $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{g}{k} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{g\alpha}{k} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{g\alpha}{k} \quad (10)$$

Usamos uma aproximação de primeira ordem para a derivada temporal:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (11)$$

E uma aproximação de segunda ordem para a derivada espacial:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (12)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \quad (13)$$

Assim, a equação 10 se torna:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) + \frac{g\alpha}{k} \quad (14)$$

Considerando uma malha uniforme constante ($\Delta x = \Delta y$) :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{g\alpha}{k} \quad (15)$$

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} (T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1}) + \frac{g\alpha \Delta t}{k} \quad (16)$$

Fazendo $r = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ e $\lambda = \frac{g\alpha \Delta t}{k}$:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = r (T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1}) + \lambda \quad (17)$$

Isolando no lado esquerdo os termos em $n + 1$:

$$-r (T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) + (1 + 4r)T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^n + \lambda \quad (18)$$

Esta relação de recorrência é válida para os nós internos da malha. Para nós nos contornos externos e internos, as relações devem respeitar as condições de contorno.

2. DISCRETIZAÇÃO PARA OS CONTORNOS EXTERNOS

Consideremos que são necessários N nós para representar o domínio $x = L_x$ e M nós para representar $y = L_y$. Assim, o domínio é uma malha de $N \times M$ nós e, considerando-se $T_{0,0}$ o nó inicial, a temperatura num dado nó é:

$$T_{i,j} \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (19)$$

2.1 Contorno externo superior e externo direito

Em $x = L_x$ ($j = M-1$) e em $y = L_y$ ($i = N-1$), a temperatura é prescrita, condições representadas pelas equações 20 e 21, respectivamente.

$$T_{i,j} = T1 \quad j = M - 1 \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (20)$$

$$T_{i,j} = T1 \quad i = N - 1 \quad j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (21)$$

2.2 Contorno externo esquerdo

Em $x = 0$ ($j = 0$), o fluxo é nulo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{j=0} = 0 \quad (22)$$

Como estamos na aresta esquerda da placa, não há pontos à esquerda e portanto, não podemos utilizar facilmente diferenças centradas para aproximar a derivada que representa a condição de contorno dada. Utilizaremos uma aproximação avançada de segunda ordem, em três pontos. Assim, podemos representar a derivada através de pontos no interior do domínio.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{j=0}^{n+1} = \frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (23)$$

$$\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (24)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = 0 \quad j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (25)$$

Nesta relação, o índice i varia de 0 a $N-1$, apenas, uma vez que em $i = N-1$ (última linha) já temos condições para os nós (ver Eq. 21).

2.3 Contorno externo inferior

De maneira similar, para $y = 0$ ($i = 0$), também não há troca de calor.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i=N} = 0 \quad (26)$$

Utilizaremos derivada avançada novamente, com um aproximação de segunda ordem (compatível com a ordem da aproximação utilizada nos nós internos, conforme Eq. 12 e 13).

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{i=0}^{n+1} = \frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (27)$$

$$\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (28)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = 0 \quad i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M-2 \quad (29)$$

Aqui, o índice j varia de 1 até $M-2$, pois em $j = 0$ a condição de contorno à esquerda (Eq. 25) já satisfaz o nó e em $j = M-1$ a condição à direita (Eq. 20) é aplicada.

3. DISCRETIZAÇÃO PARA OS CONTORNOS INTERNOS

Consideremos uma região quadrada Ω no interior do domínio, de arestas de comprimento d . Seja w o número de nós necessários para representar cada aresta, tal que

$$w = \frac{d}{\Delta x} + 1 \quad (30)$$

Os vértices que delimitam a área Ω são, portanto, $T_{p,q}$ (canto inferior esquerdo), $T_{p,q+w-1}$ (canto inferior direito), $T_{p+w-1,q}$ (canto superior esquerdo), $T_{p+w-1,q+w-1}$ (canto superior direito). A Figura 1 apresenta uma representação da malha utilizada para discretizar a placa.

3.1 Contorno interno inferior

Na aresta inferior ($i = p$) ocorre a troca térmica por convecção no sentido do eixo y , representada pela equação:

$$k \frac{\partial T}{\partial y} = h(T_f - T(x, y, t)) \quad (31)$$

Utilizaremos aqui uma aproximação por diferenças recuadas para representar a derivada:

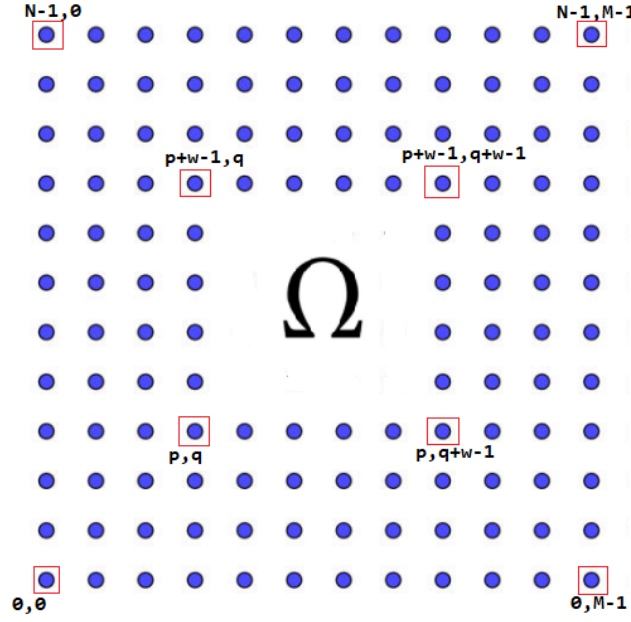


Figura 1: Representação da malha discretizada.

$$k \left(\frac{T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y} \right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \quad (32)$$

$$k (T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}) = 2h\Delta y T_f - 2h\Delta y T_{i,j}^{n+1} \quad (33)$$

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta y}{k} T_f - \frac{2h\Delta y}{k} T_{i,j}^{n+1} \quad (34)$$

Fazendo $\gamma = \frac{2h\Delta y}{k}$:

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \quad (35)$$

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + (3 + \gamma)T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad i = p \quad q \leq j \leq q + w - 1 \quad (36)$$

3.2 Contorno interno superior

De maneira similar, podemos expressar a discretização na aresta superior ($i = p + w - 1$) onde também ocorre troca térmica por convecção no sentido do eixo y . Utilizaremos, desta vez, diferenças avançadas, pois temos acesso a pontos posteriores à esta aresta:

$$k \left(\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta y} \right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \quad (37)$$

$$k (-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}) = 2h\Delta y T_f - 2h\Delta y T_{i,j}^{n+1} \quad (38)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta y}{k} T_f - \frac{2h\Delta y}{k} T_{i,j}^{n+1} \quad (39)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \quad (40)$$

$$(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad i = p + w - 1 \quad q \leq j \leq q + w - 1 \quad (41)$$

3.3 Contorno interno esquerdo

Na aresta esquerda ($j = q$) ocorre a troca térmica por convecção no sentido do eixo x. Utilizaremos uma aproximação recuada de segunda ordem, com pontos no interior do domínio (u seja, à esquerda de j), para representar a derivada primeira presente na condição de contorno do terceiro tipo:

$$k \left(\frac{T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \quad (42)$$

$$k (T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}) = 2h\Delta x T_f - 2h\Delta x T_{i,j}^{n+1} \quad (43)$$

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta x}{k} T_f - \frac{2h\Delta x}{k} T_{i,j}^{n+1} \quad (44)$$

Fazendo $\gamma = \frac{2h\Delta x}{k}$:

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \quad (45)$$

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + (3 + \gamma)T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad j = q \quad p < i < p + w - 1 \quad (46)$$

O índice i aqui varia de $p + 1$ a $p + w$ apenas, pois em $i = p$ e $i = p + w - 1$ prevalecem as Eqs. 36 e 41

3.4 Contorno interno direito

Expressamos também a discretização na aresta direita ($j = q + w - 1$), onde ocorre troca térmica por convecção no sentido do eixo x, por diferenças finitas avançadas:

$$k \left(\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \quad (47)$$

$$k (-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}) = 2h\Delta x T_f - 2h\Delta x T_{i,j}^{n+1} \quad (48)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \frac{2h\Delta x}{k} T_f - \frac{2h\Delta x}{k} T_{i,j}^{n+1} \quad (49)$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \quad (50)$$

$$(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \gamma T_f \quad j = q + w - 1 \quad p < i < p + w - 1 \quad (51)$$

Aqui o índice i varia de $p + 1$ a $p + w$, apenas, pois em $i = p$ e $i = p + w - 1$ já temos condições de contorno prevalecendo (Eqs. 36 e 41).

4. FORMULAÇÃO IMPLÍCITA:

$$\begin{aligned}
T_{i,j} &= T_1 & i = 0 & j = 0, 1, \dots, M-1 \\
T_{i,j} &= T_1 & j = M-1 & i = 0, 1, \dots, N-1 \\
-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} &= 0 & j = 0 & i = 1, 2, \dots, N-1 \\
-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} &= 0 & i = 0 & j = 1, 2, \dots, M-2 \\
T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + (3+\gamma)T_{i,j}^{n+1} &= \gamma T_f & i = p & q \leq j \leq q+w-1 \\
(\gamma-3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} &= \gamma T_f & i = p+w-1 & q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + (3+\gamma)T_{i,j}^{n+1} &= \gamma T_f & j = q & p < i < p+w-1 \\
(\gamma-3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} &= \gamma T_f & j = q+w-1 & p < i < p+w-1 \\
-r(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) + (1+4r)T_{i,j}^{n+1} &= T_{i,j}^n + \lambda & \text{caso contrário}
\end{aligned}$$

Seja $A_{N \times M}$ a matriz de coeficientes (das temperaturas), $T_{N \times M}^{n+1}$ a matriz com as temperaturas no tempo futuro e $T_{N \times M}^n$ a matriz com as temperaturas atuais, temos:

$$A_{N \times M} T_{N \times M}^{n+1} = T_{N \times M}^n \quad (52)$$

A multiplicação de matrizes é possível se $N = M$, ou seja, se fazemos uma malha quadrada com $N \times N$ nós. Caso seja possível, da álgebra linear temos:

$$AT^{n+1} = T^n \quad (53)$$

$$A^{-1}AT^{n+1} = A^{-1}T^n \quad (54)$$

$$IT^{n+1} = A^{-1}T^n \quad (55)$$

$$T^{n+1} = A^{-1}T^n \quad (56)$$

$$(57)$$

Nota: falta descobrir como exatamente montar a matriz de coeficientes.

Não exatamente isso, apenas para ter uma ideia da Formulação explícita, mais fácil de implementar:

$$\begin{aligned}
T_{i,j} &= T1 & j = M-1 & \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\
T_{i,j} &= T1 & i = N-1 & \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{3} (4T_{i+1,j}^n - T_{i+2,j}^n) & j = 0 & \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{3} (4T_{i,j+1}^n - T_{i,j+2}^n) & i = 0 & \quad j = 1, 2, \dots, M-2 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{(3+\gamma)} (4T_{i-1,j}^n - T_{i-2,j}^n + \gamma T_f) & i = p & \quad q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{(3-\gamma)} (4T_{i+1,j}^n - T_{i+2,j}^n - \gamma T_f) & i = p+w-1 & \quad q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{(3+\gamma)} (4T_{i,j-1}^n - T_{i,j-2}^n + \gamma T_f) & j = q & \quad p < i < p+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= \frac{1}{(3-\gamma)} (4T_{i,j+1}^n - T_{i,j+2}^n - \gamma T_f) & j = q+w-1 & \quad p < i < p+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} &= T_{i,j}^n + r(T_{i-1,j}^n + T_{i+1,j}^n + T_{i,j-1}^n + T_{i,j+1}^n) + \lambda & \text{caso contrário} &
\end{aligned}$$