1. MODELO MATEMÁTICO:

$$\rho(T)c_p(T)\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = \nabla \cdot (k(T)\nabla T(x,y,t)) + g(T) \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x} = \frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$T(L_x,y,t) = T(x,L_y,t) = T_a \tag{3}$$

$$T(x,y,0) = T_0 \tag{4}$$

$$-k\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} = h(T_\infty - T(x,y,t)) \qquad [a,b]\times[c,d] \tag{5}$$

Fazendo k, ρc_p e g constantes:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + g \tag{6}$$

$$\frac{\rho c_p}{k}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{g}{k} \tag{7}$$

Fazendo $\alpha = \dfrac{k}{\rho c_p}$:

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{g}{k} \tag{8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\nabla^2 T + \frac{g\alpha}{k} \tag{9}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + \frac{g\alpha}{k} \tag{10}$$

Usamos uma aproximação de primeira ordem para a derivada temporal:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial t}\right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} \tag{11}$$

E uma aproximação de segunda ordem para a derivada espacial:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i,j}^{n+1} = \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \tag{13}$$

Assim, a equação 10 se torna:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha\left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}\right) + \frac{g\alpha}{k} \tag{14}$$

Considerando uma malha uniforme constante ($\Delta x = \Delta y$) :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + \frac{g\alpha}{k} \tag{15}$$

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n} = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \left(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1} \right) + \frac{g\alpha \Delta t}{k} \tag{16}$$

Fazendo $r = \dfrac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ e $\lambda = \dfrac{g\alpha \Delta t}{k}$:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n} = r \left(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} - 4T_{i,j}^{n+1} \right) + \lambda \tag{17}$$

Isolando no lado esquerdo os termos em n + 1 :

$$-r \left(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} \right) + (1 + 4r) T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \lambda \tag{18}$$

Esta relação de recorrência é válida para os nós internos da malha. Para nós nos contornos externos e internos, as relações devem respeitar as condições de contorno.

2. DISCRETIZAÇÃO PARA OS CONTORNOS EXTERNOS

Consideremos que são necessários N nós para representar o domínio x = L_x e M nós para representar y = L_y. Assim, o domínio é uma malha de N x M nós e, considerando-se $T_{0,0}$ o nó inicial, a temperatura num dado nó é:

$$T_{ij} \quad i = 0, 1, ..., N-1 \;\; j = 0, 1, ..., M-1 \tag{19}$$

2.1 Contorno externo superior e externo direito

Em x = L_x (j = M-1) e em y = L_y (i = N-1), a temperatura é prescrita, condições representadas pelas equações 20 e 21, respectivamente.

$$T_{i,j} = T1 \quad j = M-1 \quad i = 0, 1, ..., N-1 \tag{20}$$

$$T_{i,j} = T1 \quad i = N-1 \quad j = 0, 1, ..., M-1 \tag{21}$$

2.2 Contorno externo esquerdo

Em x = 0 (j = 0), o fluxo é nulo.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{j=0} = 0 \tag{22}$$

Como estamos na aresta esquerda da placa, não há pontos à esquerda e portanto, não podemos utilizar facilmente diferenças centradas para aproximar a derivada que representa a condição de contorno dada. Utilizaremos uma aproximação avançada de segunda ordem, em três pontos. Assim, podemos representar a derivada através de pontos no interior do domínio.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{j=0}^{n+1} = \frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x} \tag{23}$$

$$\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \tag{24}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = 0 \qquad j = 0 \quad i = 1, 2, ..., N-1 \tag{25}$$

Nesta relação, o índice i varia de 0 a N-1, apenas, uma vez que em i = N-1 (última linha) já temos condições para os nós (ver Eq. 21).

2.3 Contorno externo inferior

De maneira similar, para y = 0 (i = 0), também não há troca de calor.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i=0} = 0 \tag{26}$$

Utilizaremos derivada avançada novamente, com uma aproximação de segunda ordem (compatível com a ordem da aproximação utilizada nos nós internos, conforme Eq. 12 e 13.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{i=0}^{n+1} = \frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta y} \tag{27}$$

$$\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta y} = 0 \tag{28}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = 0 \qquad i = 0 \quad j = 1, 2, ..., M-2 \tag{29}$$

Aqui, o índice j varia de 1 até M-2, pois em j = 0 a condição de contorno à esquerda (Eq. 25) já satisfaz o nó e em j= M-1 a condição à direita (Eq. 20) é aplicada.

3. DISCRETIZAÇÃO PARA OS CONTORNOS INTERNOS

Consideremos uma região quadrada Ω no interior do domínio, de arestas de comprimento d. Seja w o número de nós necessários para representar cada aresta, tal que

$$w = \frac{d}{\Delta x} + 1 \tag{30}$$

Os vértices que delimitam a área Ω são, portanto, $T_{p,q}$ (canto inferior esquerdo), $T_{p,q+w-1}$ (canto inferior direito), $T_{p+w-1,q}$ (canto superior esquerdo), $T_{p+w-1,q+w-1}$ (canto superior direito). A Figura **1** apresenta uma representação da malha utilizada para discretizar a placa.

3.1 Contorno interno inferior

Na aresta inferior (i = p) ocorre a troca térmica por convecção no sentido do eixo y, representada pela equação:

$$k\frac{\partial T}{\partial y} = h(T_f - T(x, y, t)) \tag{31}$$

Utilizaremos aqui uma aproximação por diferenças recuadas para representar a derivada:

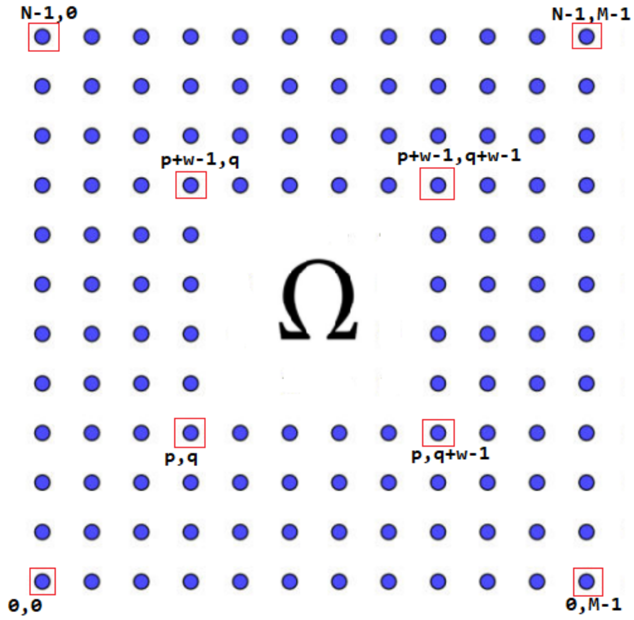

Figura 1: Representação da malha discretizada.

$$k\left(\frac{T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y}\right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \tag{32}$$

$$k\left(T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}\right) = 2h\Delta y T_f - 2h\Delta y T_{i,j}^{n+1} \tag{33}$$

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta y}{k}T_f - \frac{2h\Delta y}{k}T_{i,j}^{n+1} \tag{34}$$

Fazendo $\gamma = \frac{2h\Delta y}{k}$:

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \tag{35}$$

$$T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + (3+\gamma)T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad i = p \quad q \leq j \leq q+w-1 \tag{36}$$

3.2 Contorno interno superior

De maneira similar, podemos expressar a discretização na aresta superior (i = p + w - 1) onde também ocorre troca térmica por convecção no sentido do eixo y. Utilizaremos, desta vez, diferenças avançadas, pois temos acesso a pontos posteriores à esta aresta:

$$k\left(\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}}{2\Delta y}\right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \tag{37}$$

$$k\left(-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1}\right) = 2h\Delta y T_f - 2h\Delta y T_{i,j}^{n+1} \tag{38}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta y}{k}T_f - \frac{2h\Delta y}{k}T_{i,j}^{n+1} \tag{39}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \tag{40}$$

$$(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad i = p + w - 1 \quad q \leq j \leq q + w - 1 \tag{41}$$

3.3 Contorno interno esquerdo

Na aresta esquerda (j = q) ocorre a troca térmica por convecção no sentido do eixo x. Utilizaremos uma aproximação recuada de segunda ordem, com pontos no interior do domínio (u seja, à esquerda de j), para representar a derivada primeira presente na condição de contorno do terceiro tipo:

$$k\left(\frac{T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x}\right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \tag{42}$$

$$k\left(T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1}\right) = 2h\Delta x T_f - 2h\Delta x T_{i,j}^{n+1} \tag{43}$$

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \frac{2h\Delta x}{k}T_f - \frac{2h\Delta x}{k}T_{i,j}^{n+1} \tag{44}$$

Fazendo $\gamma = \dfrac{2h\Delta x}{k}$:

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + 3T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \tag{45}$$

$$T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + (3 + \gamma)T_{i,j}^{n+1} = \gamma T_f \quad j = q \quad p < i < p + w - 1 \tag{46}$$

O índice i aqui varia de $p+1$ a $p+w$ apenas, pois em i = p e i = p+w-1 prevalecem as Eqs. 36 e 41

3.4 Contorno interno direito

Expressamos também a discretização na aresta direita (j = q+w-1), onde ocorre troca térmica por convecção no sentido do eixo x, por diferenças finitas avançadas:

$$k\left(\frac{-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}}{2\Delta x}\right) = h(T_f - T_{i,j}^{n+1}) \tag{47}$$

$$k\left(-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1}\right) = 2h\Delta x T_f - 2h\Delta x T_{i,j}^{n+1} \tag{48}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \frac{2h\Delta y}{k}T_f - \frac{2h\Delta x}{k}T_{i,j}^{n+1} \tag{49}$$

$$-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \gamma T_f - \gamma T_{i,j}^{n+1} \tag{50}$$

$$(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} = \gamma T_f \quad j = q + w - 1 \quad p < i < p + w - 1 \tag{51}$$

Aqui o índice i varia de p+1 a p+w, apenas, pois em i = p e i = p+w-1 já temos condições de contorno prevalecendo (Eqs. 36 e 41).

4. FORMULAÇÃO IMPLÍCITA:

$$\begin{array}{rclll}
T_{i,j} & = & T_1 & i = N-1 & j = 0,1,...,M-1 \\
T_{i,j} & = & T_1 & j = M-1 & i = 0,1,...,N-1 \\
-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} & = & 0 & j = 0 & i = 0,2,...,N-2 \\
-3T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} & = & 0 & i = 0 & j = 1,2,...,M-2 \\
T_{i-2,j}^{n+1} - 4T_{i-1,j}^{n+1} + (3+\gamma)T_{i,j}^{n+1} & = & \gamma T_f & i = p & q \leq j \leq q+w-1 \\
(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i+2,j}^{n+1} & = & \gamma T_f & i = p+w-1 & q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j-2}^{n+1} - 4T_{i,j-1}^{n+1} + (3+\gamma)T_{i,j}^{n+1} & = & \gamma T_f & j = q & p < i < p+w-1 \\
(\gamma - 3)T_{i,j}^{n+1} + 4T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j+2}^{n+1} & = & \gamma T_f & j = q+w-1 & p < i < p+w-1 \\
-r(T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}) + (1+4r)T_{i,j}^{n+1} & = & T_{i,j}^{n} + \lambda & \text{caso contrário} &
\end{array}$$

Seja $A_{N\times M}$ a matriz de coeficientes (das temperaturas), $T_{N\times M}^{n+1}$ a matriz com as temperaturas no tempo futuro e $T_{N\times M}^{n}$ a matriz com as temperaturas atuais, temos:

$$A_{N\times M} T_{N\times M}^{n+1} = T_{N\times M}^{n} \tag{52}$$

A multiplicação de matrizes é possível se N = M, ou seja, se fazemos uma malha quadrada com N x N nós. Caso seja possível, da álgebra linear temos:

$$AT^{n+1} = T^n \tag{53}$$
$$A^{-1}AT^{n+1} = A^{-1}T^n \tag{54}$$
$$IT^{n+1} = A^{-1}T^n \tag{55}$$
$$T^{n+1} = A^{-1}T^n \tag{56}$$
$$\tag{57}$$

Nota: falta descobrir como exatamente montar a matriz de coeficientes.

Não exatamente isso, apenas para ter uma ideia da Formulação explícita, mais fácil de implementar:

$$
\begin{array}{rclll}
T_{i,j} & = & T1 & j = M-1 & i = 0,1,...,N-1 \\
T_{i,j} & = & T1 & i = N-1 & j = 0,1,...,M-1 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(4T_{i,j+1}^{n} - T_{i,j+2}^{n}\right) & j = 0 & i = 0,2,...,N-2 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(4T_{i+1,j}^{n} - T_{i+2,j}^{n}\right) & i = 0 & j = 1,2,...,M-2 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & \frac{1}{(3+\gamma)}\left(4T_{i-1,j}^{n} - T_{i-2,j}^{n} + \gamma T_f\right) & i = p & q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & \frac{1}{(3-\gamma)}\left(4T_{i+1,j}^{n} - T_{i+2,j}^{n} - \gamma T_f\right) & i = p+w-1 & q \leq j \leq q+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & \frac{1}{(3+\gamma)}\left(4T_{i,j-1}^{n} - T_{i,j-2}^{n} + \gamma T_f\right) & j = q & p < i < p+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1}+ & = & \frac{1}{(3-\gamma)}\left(4T_{i,j+1}^{n} - T_{i,j+2}^{n} - \gamma T_f\right) & j = q+w-1 & p < i < p+w-1 \\
T_{i,j}^{n+1} & = & T_{i,j}^{n} + r(T_{i-1,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n} + T_{i,j-1}^{n} + T_{i,j+1}^{n}) + \lambda & \text{caso contrário} &
\end{array}
$$