



# Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Helio Pedro Amaral Souto  
Naim Jessé dos Santos Carvalho

Nova Friburgo, 10 de Setembro de 2020

Graduação em Engenharia

# 1 O Modelo de Lorenz

O modelo de Lorenz apresenta uma solução aproximada para o problema do escoamento bidimensional de um fluido incompressível, confinado entre duas superfícies paralelas que encontram-se a temperaturas  $T_1$  (acima) e  $T_2$  (abaixo), conforme esquematizado na Fig. 1. O modelo descreve o movimento convectivo em uma pequena célula de Rayleigh-Bénard. Conforme veremos mais adiante, a solução aproximada deste problema é notável por conter soluções caóticas para determinadas condições iniciais e parâmetros [1].

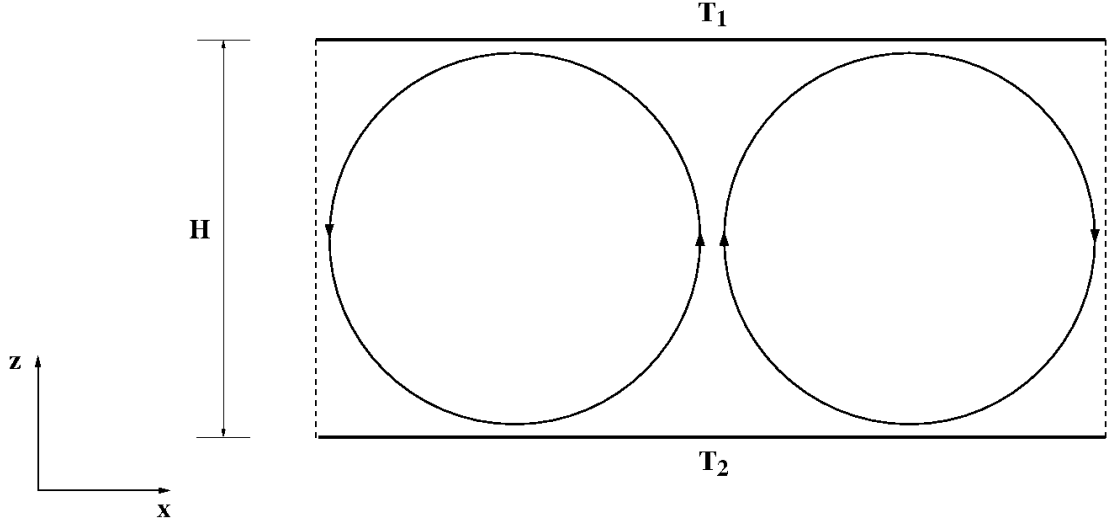


Figura 1: Sistema físico modelado por Lorenz.

As equações que governam este escoamento são as equações da continuidade, do *momentum* e da energia [2]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (3)$$

onde  $\mathbf{v}$  é o vetor velocidade do fluido,  $\rho_0$  a massa específica de referência,  $p$  a pressão,  $\nu = \mu/\rho_0$  a viscosidade cinemática do fluido,  $\rho = \rho(T)$  a massa específica do fluido,  $\mathbf{g}$  o vetor aceleração da gravidade,  $T$  a temperatura do fluido e  $\alpha$  a difusividade térmica do fluido. Na obtenção da solução e na escritura das equações de balanço é considerada a aproximação de Boussinesq para a variação da massa específica [2]

$$\rho(T) = \rho_0 [1 - \beta (T - T_1)] \quad (4)$$

com  $\beta$  sendo o coeficiente de expansão térmica e  $T_1$  a temperatura de referência.

Portanto, considerando o escoamento bidimensional, nas direções  $x$  e  $z$ , podemos reescrever essas equações na forma [2, 3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) g \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

A fim de eliminarmos os termos de pressão, vamos derivar a Eq. (6) com relação a  $z$  e a Eq. (7) com relação a  $x$  e subtraí-las de modo a obtermos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + w \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) = \nu \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

e, como se trata de um escoamento bidimensional, podemos introduzir a função de corrente  $\psi(x, z, t)$  tal que

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (10)$$

e, assim,

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = -\nabla^2 \psi = \xi \quad (11)$$

onde  $\xi$  é a função vorticidade (mede a rotação de um elemento de fluido em torno de um ponto). Portanto, a forma final pode ser escrita como

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + g \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \quad (12)$$

Para o fluido em repouso, sem movimento, a solução do problema térmico seria dada por

$$T(x, z, t) = T_1 + \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \Delta T \quad (13)$$

onde  $H$  é a altura da célula (Fig. 1) e  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Por outro lado, a solução do nosso problema irá se desviar dessa solução linear e será procurada na forma

$$T(x, z, t) = T_1 + \left( 1 - \frac{z}{H} \right) \Delta T + \theta(x, z, t) \quad (14)$$

sendo que  $\theta$  pode ser considerada como uma perturbação não linear do perfil de temperatura.

Finalmente, substituindo as Eqs. (4) e (14) nas Eqs. (8) e Eq. (12) obtemos

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \nu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + g\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{H} \right) = \alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (16)$$

Esse sistema também pode ser escrito na sua forma adimensional, mediante a introdução das seguintes variáveis adimensionais [2]

$$x^* = \frac{x}{H}; \quad z^* = \frac{z}{H}; \quad t^* = \frac{\alpha t}{H^2}; \quad \psi^* = \frac{\psi}{\alpha}; \quad \xi^* = \frac{H^2 \xi}{\alpha}; \quad \theta^* = \frac{g\beta H^3 \theta}{\alpha \nu} \quad (17)$$

de modo que

$$\frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \xi^*}{\partial z^*} = Pr \left( \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \xi^*}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial z^*} - Ra \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial z^{*2}} \quad (19)$$

onde foram introduzidos os números adimensionais de Prandtl ( $Pr$ ) e de Rayleigh ( $Ra$ )

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad \text{e} \quad Ra = \frac{g\beta H^3 \Delta T}{\alpha \nu} \quad (20)$$

O número de Prandtl fornece a razão entre a difusividade de momento (viscosidade cinemática  $\nu$ ) e difusividade térmica ( $\alpha$ ), ou seja, expressa a relação entre a difusão de *momentum* e a difusão da quantidade de energia. Por sua vez, o número de Rayleigh é uma medida do balanço entre as forças que promovem a convecção e as responsáveis pela difusão térmica.

Assumindo que as funções de fluxo e a temperatura possam ser representadas por uma série de Fourier [2], tendo um comprimento de onda fundamental  $L$  na direção  $x$  e  $2H$  na direção  $z$ , podemos expandir  $\psi^*$  e  $\theta^*$  como

$$\psi^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Psi(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{mH}{L} x^* + \frac{n}{2} z^* \right) \right] \quad (21)$$

$$\theta^*(x^*, z^*, t^*) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Theta(m, n, t^*) \exp \left[ 2\pi i \left( \frac{mH}{L} x^* + \frac{n}{2} z^* \right) \right] \quad (22)$$

sendo  $m$  e  $n$  os números de onda nas direções  $x$  e  $z$  respectivamente. Os coeficientes complexos de Fourier são dados por

$$\Psi(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \psi^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{mH}{L} x^* + \frac{n}{2} z^* \right) \right] dx dz \quad (23)$$

$$\Theta(m, n, t^*) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \theta^*(x^*, z^*, t^*) \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{mH}{L} x^* + \frac{n}{2} z^* \right) \right] dx dz \quad (24)$$

Portanto, para que possamos obter as equações para os coeficientes nas séries de Fourier, devemos multiplicar as Eqs. (18) e (19) por

$$\frac{1}{2LH} \exp \left[ -2\pi i \left( \frac{mH}{L} x^* + \frac{n}{2} z^* \right) \right] \quad (25)$$

e integrá-las de 0 a  $L$  em  $x$  e de  $-H$  a  $H$  em  $z$ . Feito isto, chegamos ao seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias [2]

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt^*} = & \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{C(m, n, p, q) \gamma^2(p, q)}{\gamma^2(m, n)} \Psi(p, q) \Psi(m-p, n-q) \\ & - Pr \gamma^2(m, n) \Psi(m, n) - i \frac{Pr(2\pi H/L)m}{\gamma^2(m, n)} \Theta(m, n) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt^*} = & - \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C(m, n, p, q) \Psi(p, q) \Theta(m-p, n-q) \\ & - \gamma^2(m, n) \Theta(m, n) - i Ra \frac{2\pi H}{L} m \Psi(m, n) \end{aligned} \quad (27)$$

onde

$$C(m, n, p, q) = \frac{2\pi^2 H}{L} (mq - np); \quad \text{e} \quad \gamma^2(a, b) = \left( \frac{2\pi H}{L} \right)^2 a^2 + \pi^2 b^2 \quad (28)$$

Escrevendo  $\Psi$  e  $\Theta$  em termos das suas partes real e imaginária

$$\Psi(m, n) = \Psi_1(m, n) - i\Psi_2(m, n) \quad \text{e} \quad \Theta(m, n) = \Theta_1(m, n) - i\Theta_2(m, n) \quad (29)$$

podemos, também, obter um conjunto de equações diferenciais ordinárias em termos de  $\dot{\Psi}_1(m, n)$ ,  $\dot{\Psi}_2(m, n)$ ,  $\dot{\Theta}_1(m, n)$  e  $\dot{\Theta}_2(m, n)$  [2].

Lorenz [1], em 1963, deu sequência ao trabalho de Saltzman [2] e apresentou um sistema que é uma simplificação do obtido por Saltzman em 1962, para o estudo da convecção com amplitudes finitas. Conforme já visto, no caso no qual todo o movimento ocorre paralelo ao plano  $x - z$ , e não existam variações na direção do eixo  $y$ , o problema de convecção é governado pelas equações [2]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) + g\beta \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (31)$$

tendo sido considerado que  $\psi$  e  $\xi$  são ambos nulos nas fronteiras superior e inferior. No trabalho de Lorenz [1] é dito que campos do tipo

$$\psi = \psi_0 \sin\left(\frac{\pi a}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \quad (32)$$

$$\theta = \theta_0 \sin\left(\frac{\pi a}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \quad (33)$$

devem se desenvolver caso o número de Rayleigh exceda a um valor crítico dado por

$$Ra_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2} \quad (34)$$

sendo que o mínimo valor de  $Ra_c$  é obtido para  $a^2 = 1/2$ , ou seja,

$$Ra_c = \frac{27\pi^4}{4} \quad (35)$$

As mesmas soluções obtidas por Saltzman, segundo Lorenz, poderiam ter sido obtidas se as séries de Fourier tivessem sido truncadas de modo a incluir somente um total de três termos. Assim sendo, na obtenção do modelo de Lorenz iremos considerar que

$$\psi(x, z, t) = \left[ \frac{\sqrt{2}(1+a^2)\alpha}{a} \right] \sin\left(\frac{\pi a}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \mathbb{X}(t) \quad (36)$$

$$\theta(x, z, t) = \left( \frac{\sqrt{2}Ra_c\Delta T}{\pi Ra} \right) \cos\left(\frac{\pi a}{H}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{H}z\right) \mathbb{Y}(t) - \left( \frac{Ra_c\Delta T}{\pi Ra} \right) \sin\left(\frac{2\pi}{H}z\right) \mathbb{Z}(t) \quad (37)$$

Quando as expressões (36) e (37) são substituídas nas Eqs. (30) e (31), após alguma manipulação algébrica e mudança de variáveis, obtemos [1]

$$\frac{dX}{d\tau} = Pr(Y - X) \quad (38)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = -XZ + rX - Y \quad (39)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = XY - bZ \quad (40)$$

onde  $\tau = \pi^2 H^{-2}(1+a^2)\nu t$  representa um tempo adimensional,  $Pr$  o número de Prandtl,  $r = Ra/Ra_c$  a razão entre os números de Rayleigh e Rayleigh crítico e  $b = 4(1+a^2)^{-1}$ . Nessas equações  $X$  é proporcional ao módulo da velocidade de convecção,  $Y$  à diferença de temperatura entre as partes superior e inferior do líquido em movimento convectivo, e  $Z$  ao desvio da temperatura com relação ao perfil linear na direção vertical no centro da célula convectiva [3].

Entendemos que é importante destacar alguns aspectos do modelo de Lorenz com relação ao comportamento real do fluido. O fato das expansões em termos dos senos e cossenos terem sido truncadas, significa que o modelo de Lorenz permite somente um modo de variação espacial na direção  $x$  com *comprimento de onda* igual a  $2\pi/a$ . Entretanto, para valores elevados da diferença de temperatura  $\Delta T$ , o movimento do fluido assumirá uma estrutura espacial mais complexa e o modelo de Lorenz não mais será adequado para a descrição do fenômeno.

## 2 Evolução do Sistema

Nesta seção buscamos entender um pouco da dinâmica da evolução do sistema de Lorenz. Queremos determinar os seus pontos de equilíbrio e estudar a evolução das suas soluções. Isto será feito empregando conceitos básicos da dinâmica de sistemas não lineares.

Conforme já visto, as equações de Lorenz descrevem a evolução de um sistema a partir das três funções  $X(\tau)$ ,  $Y(\tau)$  e  $Z(\tau)$ . Um estado do sistema, em qualquer momento ( $\tau$ ) pode ser dado por um único ponto  $(X, Y, Z)$  no espaço de fase. À medida que o tempo evolui, este ponto se move no espaço de fase, formando uma curva que é chamada de órbita ou trajetória. Em alguns casos, em função dos parâmetros utilizados, todas as trajetórias, independentemente das condições iniciais, são atraídas para uma determinada superfície chamada de um atrator.

De fato, as soluções das equações de Lorenz apresentam muitas características importantes, dentre as quais podemos citar:

- A solução mantém-se dentro de uma região limitada e ela será sempre fisicamente admissível.
- A solução resultante depende muito fortemente das condições iniciais dadas. Mesmo uma pequena mudança, em um dos valores iniciais, pode levar a uma solução que seguirá uma trajetória totalmente diferente, para um intervalo de tempo suficientemente longo.
- A solução pode ser irregular ou caótica, o que significa que é impossível, com base nos valores dos parâmetros empregados e nas condições iniciais (que podem conter pequenos erros), prever a solução em qualquer momento no futuro.

### 2.1 A Solução é Limitada

O modo mais simples para verificarmos que a solução do sistema de Lorenz é limitada, no tempo, é a de considerarmos o seu movimento no espaço de fase como sendo análogo ao movimento de uma partícula de fluido, cujas componentes do vetor velocidade seriam dadas por  $\dot{X}$ ,  $\dot{Y}$  e  $\dot{Z}$ . Portanto, da divergência do vetor velocidade obtemos

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \dot{X}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial z} = -(Pr + b + 1) \quad (41)$$

e como  $Pr$  e  $b$  são ambos valores positivos, a divergência será um número negativo e sempre menor do que -1. Consequentemente, cada pequeno elemento de volume irá tender a zero à medida que o tempo  $\tau$  tender a infinito, a uma taxa que é independente dos valores de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ . Caso o divergente fosse nulo teríamos um escoamento incompressível, ou seja, os elementos de volume não sofreriam variações. Portanto, cada trajetória no espaço de fase estará, eventualmente, confinada em uma região de volume zero. Esta região, ou atrator, não precisa ser necessariamente um ponto, podendo ser uma superfície com volume zero. Assim sendo, nenhuma das variáveis físicas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  irá assumir valores ilimitados e podemos esperar que elas permaneçam dentro de limites fisicamente aceitáveis.

## 2.2 Estados Estacionários

Um estado estacionário de um sistema é um ponto do espaço de fase no qual o sistema não irá mais mudar no tempo, uma vez que este estado tenha sido alcançado. Em outras palavras, este ponto é caracterizado pela seguinte condição:

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} = \frac{dZ}{d\tau} = 0 \quad (42)$$

e ele é conhecido como o ponto estacionário do sistema. Aplicando esta condição ao sistema de Lorenz (38)-(40) resulta em

$$0 = -Pr(X - Y) \quad (43)$$

$$0 = (r - Z)X - Y \quad (44)$$

$$0 = XY - bZ \quad (45)$$

que após resolução fornece os três pontos estacionários para o sistema:

$$\mathbf{P}_1 = (0, 0, 0) \quad (46)$$

$$\mathbf{P}_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (47)$$

$$\mathbf{P}_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (48)$$

Como  $r$  possui somente valores reais positivos, existirá somente um ponto estacionário para  $0 \leq r \leq 1$ , a origem, e três pontos para  $r > 1$ .

## 2.3 Linearização em Torno dos Pontos Estacionários

A nossa análise será simplificada caso escrevamos as equações de Lorenz na forma vetorial



$$\frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = \mathbf{A}\mathbf{V} \quad (49)$$

onde os vetores  $\mathbf{V}$  e a matriz  $\mathbf{A}$  são dados por

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (50)$$

e

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ r & -1 & -X \\ Y & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (51)$$

que representa um sistema não linear e não autômato, com os coeficientes da matriz sendo função da variável tempo. Portanto, a principal dificuldade de análise desse sistema resulta da sua não linearidade. Uma alternativa para essa análise consiste na sua aproximação por um problema linear. Entretanto, neste caso, a nossa análise só será válida, como veremos adiante, para valores da solução próximas aos pontos estacionários. O nosso ponto de partida consistirá da introdução de uma pequena perturbação ao ponto estacionário:  $X = X^* + \tilde{X}$ ,  $Y = Y^* + \tilde{Y}$  e  $Z = Z^* + \tilde{Z}$ , onde  $(X^*, Y^*, Z^*)$  representa o ponto estacionário. Desenvolvendo as funções em série de Taylor, em torno do ponto estacionário, e considerando somente os termos até primeira ordem obtemos

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}}{dt} = \mathbf{J}(X^*, Y^*, Z^*)\tilde{\mathbf{V}} \quad (52)$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Pr & Pr & 0 \\ r - Z^* & -1 & -X^* \\ Y^* & X^* & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix} \quad (53)$$

sendo que a matriz agora é a matriz Jacobiana ( $\mathbf{J}$ ). Caso a matriz Jacobiana possua três autovalores  $\lambda$  distintos, a solução desse sistema será dada por

$$\tilde{X}(\tau) = c_1 \exp(\lambda_1 \tau) + c_2 \exp(\lambda_2 \tau) + c_3 \exp(\lambda_3 \tau) \quad (54)$$

e, de forma similar, podemos obter as soluções para  $\tilde{Y}(\tau)$  e  $\tilde{Z}(\tau)$ . As constantes  $c_i$  devem ser determinadas a partir das condições iniciais.

O próximo passo consiste na determinação dos autovalores da matriz Jacobiana para os três pontos estacionários. No primeiro caso, a origem é um ponto estacionário ( $P_1$ ) e os autovalores são determinados através da equação

$$\det \begin{bmatrix} -Pr - \lambda & Pr & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (55)$$

que resulta na equação característica

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (Pr + 1)\lambda + Pr(1 - r)] = 0 \quad (56)$$

e os autovalores são

$$\lambda_1 = -b; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \left[ -Pr - 1 \pm \sqrt{(Pr - 1)^2 + 4rPr} \right] \quad (57)$$

Em se tratando dos outros dois pontos estacionários ( $P_2$  e  $P_3$ ) temos que

$$\det \begin{bmatrix} -Pr - \lambda & Pr & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & \pm\sqrt{b(r-1)} \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (58)$$

donde

$$\lambda^3 + (Pr + b + 1)\lambda^2 + [(r + Pr)b]\lambda + 2bPr(r - 1) = 0 \quad (59)$$

que possui um autovalor real negativo e dois complexos conjugados para  $r > 1$ . As raízes complexas serão puramente imaginárias caso

$$r^* = \frac{Pr(Pr + b + 3)}{Pr - b - 1} \quad (60)$$

e esse é o valor crítico para  $r$  para que tenhamos uma convecção estacionária estável.

A questão da estabilidade do sistema de Lorenz pode ser tratada uma vez que somos capazes de determinar os autovalores da matriz Jacobiana para os pontos estacionários. Como existe a possibilidade de nos depararmos com dois autovalores complexos conjugados  $\lambda = a \pm ib$ , a solução do problema linearizado deve ser reescrita na forma

$$\tilde{X}(\tau) = c_1 \exp(\lambda_1 \tau) + c_2 \exp(a\tau) \cos(b\tau) + c_3 \exp(a\tau) \sin(b\tau) \quad (61)$$

e de modo análogo para  $\tilde{Y}(\tau)$  e  $\tilde{Z}(\tau)$ .

Em termos da estabilidade do problema, precisamos entender o comportamento assintótico das soluções (54) ou (61) para  $\tau \rightarrow \infty$ . A partir desta análise várias conclusões podem ser tiradas:

- Se os autovalores são reais e negativos, então a solução vai a zero quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Neste caso, a solução linearizada é estável.
- Se os autovalores são reais e pelo menos um deles é positivo, então a solução vai “explodir” à medida que  $\tau \rightarrow \infty$ . Portanto, a solução linearizada é instável.
- Se existir um par de autovalores complexos conjugados,  $a \pm ib$ , a solução irá exibir um comportamento oscilatório (com o aparecimento dos termos  $\cos(bt)$  e  $\sin(bt)$ ). Caso a parte real de todos os autovalores for negativa, então as oscilações decairão com o tempo e a solução será estável. Por outro lado, se a parte real for positiva, então as oscilações crescerão e a solução será instável.

- Por último, caso a parte real dos autovalores complexos for nula, as oscilações não decairão e nem crescerão com o tempo e a solução do problema linearizado será periódica. Nesse caso, dizemos que a solução é marginalmente estável.

Bem entendido que essas conclusões (resumidas na Tabela 1) só se aplicam quando o sistema não linear tiver o mesmo comportamento que o sistema linearizado perto dos pontos estacionários. Na prática, isto ocorre na maior parte dos casos.

Tabela 1: Sumário das condições de estabilidade.

Faixa	Ponto	
	$(0, 0, 0)$	$(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$
$0 < r < 1$	estável	—
$1 < r < r^*$	instável	estável
$r > r^*$	instável	instável

### 3 Solução Numérica

Com o objetivo de resolvermos numericamente o problema apresentado na seção anterior, ou seja, o sistema de equações diferenciais ordinárias (38)-(40), o aluno deverá empregar o método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem

$$y_{i+1} = y_i + \left[ \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \right] \Delta x$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_1\Delta x\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta x, y_i + \frac{1}{2}k_2\Delta x\right) \\ k_4 &= f(x_i + \Delta x, y_i + k_3\Delta x) \end{aligned}$$

cujo algoritmo foi escrito considerando o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Naturalmente, ele deve ser adaptado para a sua aplicação na resolução de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Na resolução das equações do modelo de Lorenz vamos empregar, inicialmente, os valores dos parâmetros fornecidos na Tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros a serem empregados nas simulações.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$Pr$	10	$b$	$8/3$
$X_0$	0,0	$\tau_0$	0,0
$Z_0$	0,5	$\tau_{final}$	50,0
$Y_0$	0,5	$\Delta\tau$	0,005

A título de exemplo, vamos mostrar as soluções numéricas obtidas para um valor de  $r = R_a/Ra_c = 0,9$ . Na Fig. 2 encontram-se representadas as “temperaturas”  $Y$  e  $Z$  em função do tempo adimensional  $\tau$ . Podemos notar que para tempos suficientemente longos os seus valores tendem para a solução em regime permanente  $X = Y = Z = 0$ .

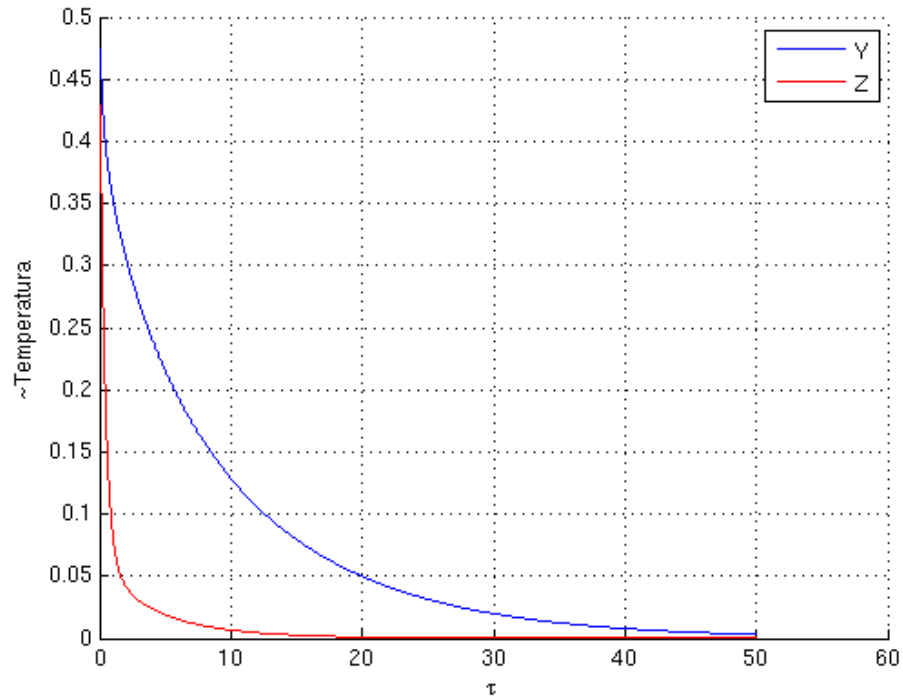


Figura 2: Temperaturas  $Y$  e  $Z$  em função do tempo  $\tau$  para  $r = 0,9$ .

A trajetória do sistema é mostrada na Fig. 3, ou seja, o gráfico tridimensional de todos os valores de  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  do instante inicial até o tempo final. Como o valor de  $r$  é menor do que 1, a origem é um ponto estacionário estável [3].

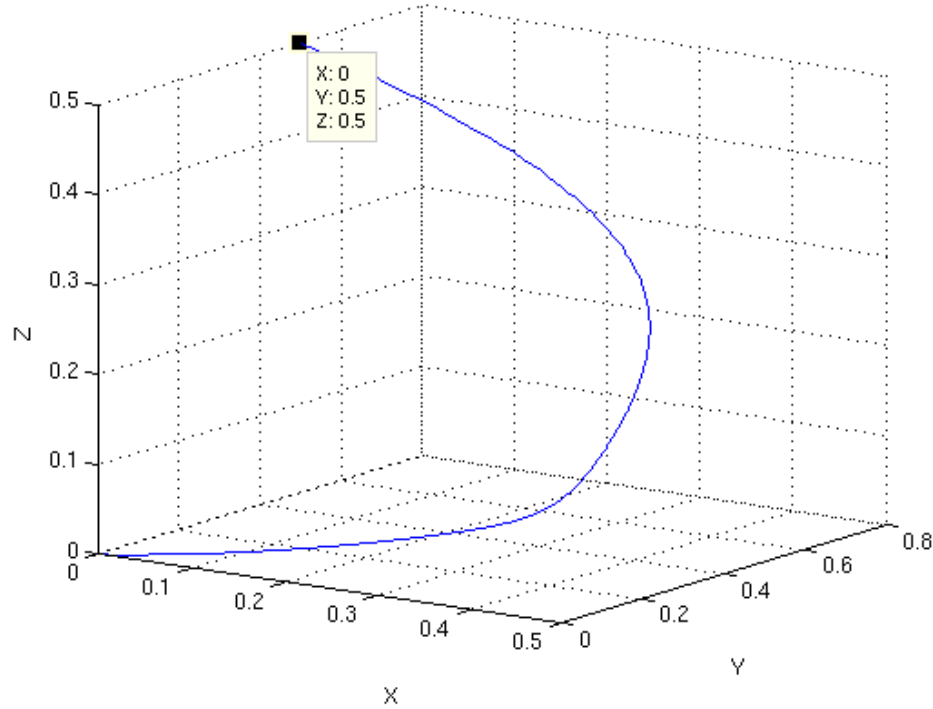


Figura 3: Trajetória do sistema  $(X,Y,Z)$  no espaço de fase para  $r = 0,9$ .

Portanto, devemos obter a solução do sistema de equações para alguns casos específicos, fazendo variar a relação entre os valores de  $r = Ra/Ra_c$  e a condição inicial. No total serão quatro casos de interesse:

1. Inicie com  $r = 2$  e crie os gráficos de  $Y$  e  $Z$  em função do tempo para todo o intervalo considerado. Comente sobre a evolução temporal da solução.
2. Faça  $r = 10, 18$  e, posteriormente,  $r = 24$ . Trace os gráficos dos valores de  $Y$  e  $Z$  em função do tempo, bem como a trajetória no espaço de fase. Como estas soluções diferem uma da outra? Forneça uma explicação.
3. Aumente o valor de  $r$  para 25 e refaça os gráficos de  $Y$  e  $Z$  e da trajetória no espaço de fase. O que aconteceu? Compare as soluções obtidas com  $r$  igual a 24 e 25. Você acha que a solução para  $r = 24$  permanecerá estável para todos os tempos?
4. Empregue  $r = 30$  e mostre como  $Y$  evolui em função do tempo para duas condições iniciais:  $(0, 0; 0, 5; 0, 5)$  e  $(0, 0; 0, 5; 0, 50001)$ . Comente os resultados.

**Observação: O relatório, o código fonte e os gráficos com os resultados devem ser fornecidos impressos!**

## Referências

- [1] Lorenz, Edward Norton. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 20, 130-141, 1963.
- [2] Saltzman, Barry. Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 19, 329-341, 1962.
- [3] Rafael de Araújo Monteiro da Silva. *Caos em Sistemas Hidrodinâmicos*. Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática Aplicada. Universidade de São Paulo (USP), 2007.