



非定常水平行星波理论及其气候学特征

近期毕业论文进度汇报

报告人：刘一凡

指导老师：李建平

¹中国海洋大学海洋与大气学院 ²中国海洋大学未来海洋学院

Liu Yifan

¹*College of Oceanic and Atmospheric Sciences, Ocean University of China, Qingdao, China.*

²*Academy of the Future Ocean, Ocean University of China, Qingdao, China.*

1.球面波动水平传播理论

2.纬向对称基流中波动传播

3.水平非均匀基流中波动传播理论

3.1.经向基流对波动传播的影响

3.2.波射线理论

3.3.波动周期特征

4.感悟与总结

1 球面波动水平传播理论

一般采用涡度方程研究Rossby波的水平传播，由于我们研究的问题涉及不同纬度，故需采用球面坐标方程（Hoskins & Karoly, 1981）。由球面正压无辐散涡度方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) (\zeta + f) = 0$$

其中 a 为地球半径， u 和 v 分别为纬向和经向风， λ 、 φ 、 f 分别为经度、纬度、地转参数， ζ 为球坐标下的相对涡度，其表达式为：

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \varphi}{\partial \varphi} \right)$$

引入流函数

$$u = -\frac{\partial \psi}{a \partial \varphi}, v = \frac{\partial \psi}{a \cos \varphi \partial \lambda}$$

则相对涡度 ζ 可写为：

$$\zeta = \frac{1}{a \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\cos \varphi \partial \lambda^2} \right) \psi = \tilde{\nabla}^2 \psi$$

为方便数学处理，引入Mercator投影，即：

$$x = a\lambda \quad y = a \ln \left(\frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right)$$

则有：

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\nabla_M^2}{\cos^2 \varphi}$$

所以Mercator投影下的球面正压无辐散涡度方程为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\nabla_M^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \right) + \frac{2\Omega}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

此方程为非线性方程，可采用小扰动法将其线性化。我们主要讨论纬向对称基流 $(\bar{\psi}(\varphi))$ 和水平非均匀基流 $(\bar{\psi}(\varphi, \lambda))$ 两种情况。

利用小扰动法，令：

$$\psi(\lambda, \varphi, t) = \bar{\psi}(\varphi) + \psi'(\lambda, \varphi, t)$$

此时只考虑纬向基流随纬度变化，而不考虑经向基流：

$$\bar{u} = \bar{u}(\varphi) \quad \bar{v} = 0$$

带入Mercator投影下的球面正压无辐散涡度方程：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\nabla_M^2 \psi}{\cos^2 \varphi} \right) + \frac{2\Omega}{a} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

略去高阶小项：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_M \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla_M^2 \psi' + \beta_M \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0$$

其中，带 $-$ 的量为基本量，带 $'$ 的量为扰动量， $\bar{u}_M = \frac{\bar{u}}{\cos \varphi}$

为Mercator投影下的纬向基流，且：

$$\beta_M = \frac{2\Omega \cos^2 \varphi}{a} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}_M \cos^2 \varphi) \right]$$

为绝对涡度的经向梯度，实际资料计算（略）可以发现 β_M 可近似为恒正，故在只考虑其大于零。

假设大气为缓变介质，利用WKB理论，扰动的形式解可写为：

$$\psi' = A(X, Y, T) e^{ik(x + \gamma y - ct)}$$

其中 A 为振幅， $X = \varepsilon x$ ， $Y = \varepsilon y$ ， $T = \varepsilon t$ ， ε 为小参数， k 为纬向波数， γ 为经向波数与纬向波数之比， c 为相速度。代入，利用WKB近似，取 ε 的零级近似，得到波动的频散关系为：

$$(\bar{u}_M - c)\gamma^2 - \left[\frac{\beta_M}{k^2} - (\bar{u}_M - c) \right] = 0$$

对于定常情况， $c = 0$ ，则有：

$$\gamma^2 = \frac{\beta_M}{\bar{u}_M k^2} - 1$$

所以在这种条件下，定常波只能在 $0 < \bar{u}_M < \frac{\beta_M}{k^2}$ 的纬度传播，否则被截陷或者转向：在东西风临界线即 $\bar{u}_M = 0$ ， $\gamma \rightarrow \infty$ ，波动不能传播（波被截陷），称为**临界纬度**；当 $\bar{u}_M = \frac{\beta_M}{k^2}$ ， $\gamma \rightarrow 0$ ，波动亦不能传播（波转向），称其所在纬度为波动经向传播的**转向纬度**。

纬向对称基流中波动传播 Wave Propagation in Zonal Symmetric Basic Flow

非定常情况下，波动传播需满足：

$$0 < \bar{u}_M - c < \frac{\beta_M}{k^2}$$

令 $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{Tk}$ ，则：

$$0 < \bar{u}_M - \frac{2\pi}{Tk} < \frac{\beta_M}{k^2}$$

取： $\beta_M = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ ，则允许定常波、周期为30 d位相向东和向西波动传播的基本场范围如图1阴影所示：

定常波传播要求纬向基流大于0，即只能在西风区传播，东西风零线为临界纬度。三种波都是波数越大，波长越短，传播范围越小，反之范围越大。热带扰源激发的波动，只有较长波才可以向北传播到较高的纬度，短波则很快转向。

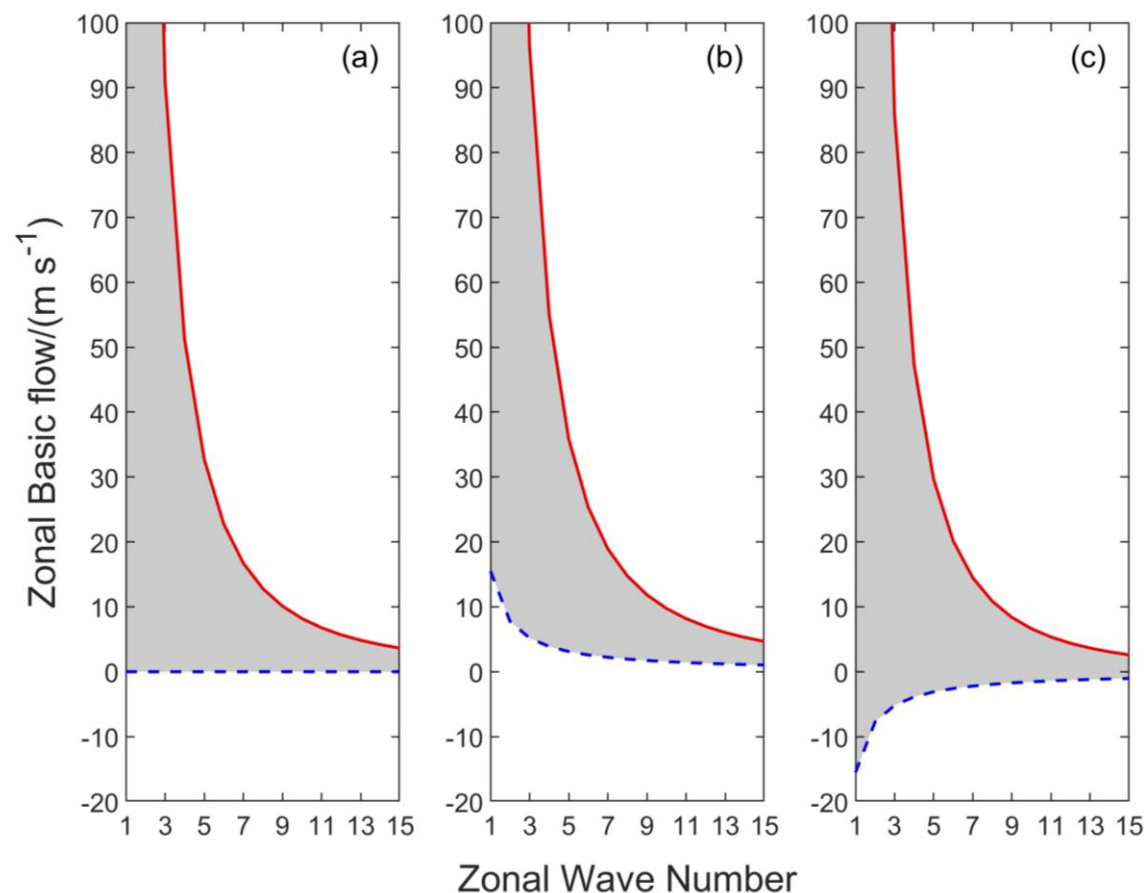


Fig.1 不同纬向波数波动传播的纬向基流范围（阴影）

(a) 定常波；(b) 周期30 d位相东传；(c) 周期30 d位相西传.边界红实线表示反射，蓝虚线表示波动被截陷.

Fig.1 The range of zonal basic flow of wave propagation of different zonal wave numbers is shaded

(a) Stationary wave; (b) Wave with a period of 30 days and eastward phase propagation; (c) Wave with a period of 30 days and westward phase propagation. The red boundary continuous curves denote reflection, and the blue dashed lines denote that waves are trapped.

纬向对称基流中波动传播 Wave Propagation in Zonal Symmetric Basic Flow

对于

$$0 < \bar{u}_M - c < \frac{\beta_M}{k^2}$$

移项可得：

$$\bar{u}_M - \frac{\beta_M}{k^2} < c < \bar{u}_M$$

取： $\bar{u}_M = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ，分别代表基本场为东西风临界线、西风带和东风带，则对应的波动传播的相速度范围如图Fig. 2 阴影所示：

- 可见在定常波被截陷的临界纬度上（ $\bar{u}_M = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ），非定常波可以传播，但要求位相必须是向西传播的
- 位相可以小于西风基流的速度向东传播，也可以向西传播，也可以是定常的（西风带可以形成准静止的阻塞高压）
- 东风气流中只能相速大于基流的位相西传的波动可以传播。所以西风波动移动一般较慢，但东风波移速则较快。

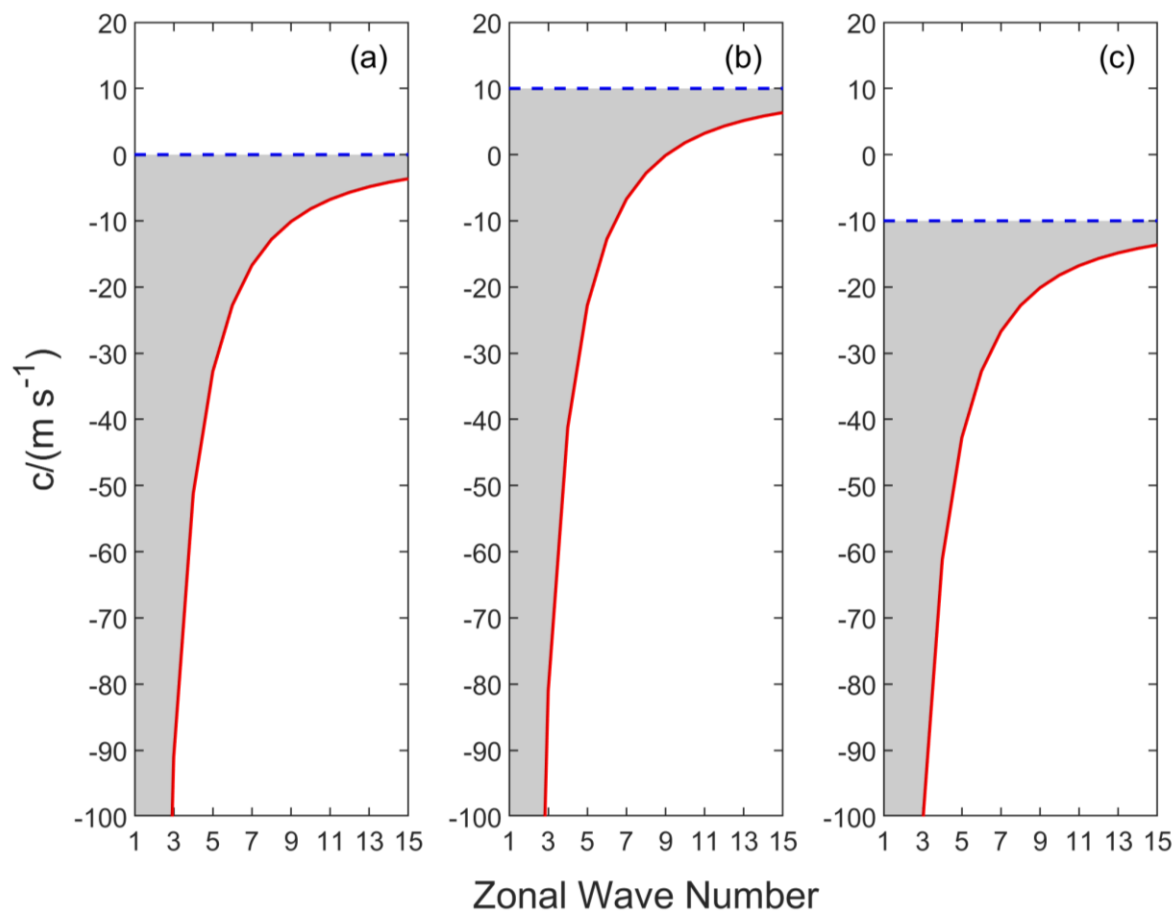


Fig.2 同Fig.1，但是纬向基流为(a) $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ；(b) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ；(c) $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时的相速度。

Fig.2 Same as Fig.1, but for phase speed when zonal basic flow is (a) $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, (b) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ and (c) $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

纬向对称基流中波动传播 Wave Propagation in Zonal Symmetric Basic Flow

对于:

$$\bar{u}_M - \frac{\beta_M}{k^2} < c < \bar{u}_M$$

为了更直观地讨论非定常波的波频特征, 将波传播的相速度的条件转化为波的周期需要满足的条件。令:

$$k_c = \sqrt{\frac{\beta_M}{\bar{u}_M}}$$

其中 $\bar{u}_M > 0$, k_c 表示西风经向波数为0时的定常波全波数。

1. 西风气流中, $\bar{u}_M > 0$

① 若纬向波数较大, 即波长较小 ($k > k_c$), 则 $c > 0$, 即位相向东传播, 其周期满足:

$$T_{e0} = \frac{2\pi}{\bar{u}_M k} < T(k) < \frac{2\pi}{\bar{u}_M k - \frac{\beta_M}{k}} = T_{e1}$$

② 若纬向波数较小, 即波长较大 ($k < k_c$), 则 $c > 0$ 和 $c < 0$ 都可能成立, 即位相可能向东传播也可能向西传播:

a) 位相东传 ($c > 0$) 的波周期

$$T(k) > \frac{2\pi}{\bar{u}_M k} = T_{e0}$$

b) 位相西传 ($c < 0$) 的波周期

$$T(k) > -\frac{2\pi}{\bar{u}_M k - \frac{\beta_M}{k}} = T_{w0}$$

2. 东风气流中, $\bar{u}_M < 0$, $c < 0$ 总是成立, 即位相总是向西传播, 其周期满足

$$-\frac{2\pi}{\bar{u}_M k - \frac{\beta_M}{k}} < T(k) < -\frac{2\pi}{\bar{u}_M k}$$

3. 东西风临界线上, $\bar{u}_M = 0$, 此时:

$$-\frac{\beta_M}{k^2} < c < 0$$

则位相西传周期满足

$$T(k) > -\frac{2\pi}{\bar{u}_M k}$$

可见非零频波可以穿越它, 实现东西风带之间的相互作用。

纬向对称基流中波动传播 Wave Propagation in Zonal Symmetric Base Flow

仍取: $\beta_M = 2 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, \bar{u}_M 分别取 $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 、 $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 以及 $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, , 不同基本场中波动传播的周期范围如图3.3 阴影所示:

- Fig.2a 指出东西风零线上波动位相向西传播, 而 Fig.3a进一步说明这种波动波长长时, 其周期只要大于1 d即可, 而短波的周期要求则更大。
- Fig.3b说明, 位相西传波波数要小于9, 周期范围为 A + B, 位相东传的波周期范围为 A + C, 各区中, A 面积最大, 所以这可以从理论上解释西风波动波长长周期大的显著特征。
- Fig.3b相比于动力气象学 (吕美仲等, 2008) 对大气运动的分类提供了更具体的水平-时间尺度。

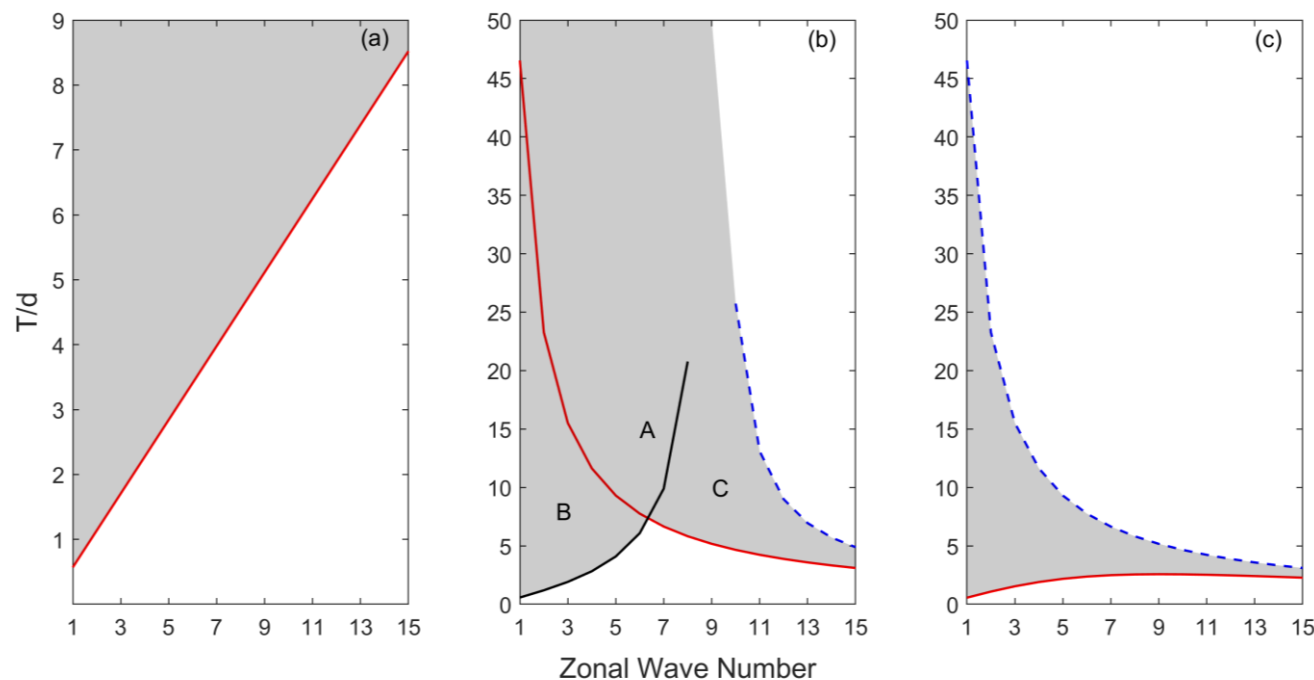


Fig.3 同Fig.1, 但是纬向基流为(a) $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; (b) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; (c) $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时的周期。

(b)中 T_{w0} 、 T_{e0} 、 T_{e1} 分别表示位相西传波动周期下界、位相东传波动周期下界和上界, A为 T_{w0} 、 T_{e0} 、 $ak = 8(T > T_{w0}(8))$ 和 $T = 50 \text{ d}$ 所包围区域; B为 T_{w0} 、 T_{e0} 和 $ak = 1$ 所包围区域; C为 T_{w0} 、 T_{e0} 、 T_{e1} 、 $ak = 8(T > T_{w0}(8))$ 、 $ak = 10(T > T_{e1}(10))$ 和 $T = 50 \text{ d}$ 所包围区域

Fig.3 Same as Fig.1, but for phase speed when zonal basic flow is (a) $0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, (b) $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ and (c) $-10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Curves T_{w0} , T_{e0} and T_{e1} in (b) denote the lower boundary of the period of waves with westward phase propagation, the lower and upper boundary of the period of waves with eastward phase propagation separately. A denotes the area surrounded by T_{w0} , T_{e0} , $ak = 8(T > T_{w0}(8))$ and $T = 50 \text{ d}$, B denotes the area surrounded by T_{w0} , T_{e0} and $ak = 1$, and C denotes the area surrounded by T_{w0} , T_{e0} , T_{e1} , $ak = 8(T > T_{w0}(8))$, $ak = 10(T > T_{e1}(10))$ and $T = 50 \text{ d}$.

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.1 经向基流对波动传播的影响 The Influence of Meridional Basic Flow on Wave Propagation

同样利用小扰动法，令：

$$\psi(\lambda, \varphi, t) = \bar{\psi}(\varphi, \lambda) + \psi'(\lambda, \varphi, t)$$

此时既考虑非均匀的纬向基流，也考虑非均匀的经向基流：

$$\bar{u} = \bar{u}(\lambda, \varphi) \quad \bar{v} = \bar{v}(\lambda, \varphi)$$

带入Mercator投影下的球面正压无辐散涡度方程，并略去小项：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_M \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}_M \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla_M^2 \psi' + \frac{2\bar{v}_M \sin \varphi}{a} \nabla_M^2 \psi' + \bar{q}_y \psi'_x - \bar{q}_x \psi'_y = 0$$

其中， $\bar{v}_M = \frac{\bar{v}}{\cos \varphi}$ 为Mercator投影下的经向基流，且：

$$\bar{q} = \frac{\nabla_M^2 \bar{\psi}}{\cos^2 \varphi} + 2\Omega \sin \varphi$$

为绝对涡度的基本量。同样利用WKB近似，取 ε 的零级近似，得到波动的频散关系为：

$$\tilde{\omega} = \bar{u}_M k + \bar{v}_M l + \frac{\bar{q}_x l - \bar{q}_y k}{k^2 + l^2}$$

其中 $\tilde{\omega} = k \cdot c$ 为角频率， \bar{q}_x 、 \bar{q}_y 分别表示绝对涡度的基本量的纬向、经向梯度。可见考虑非均匀基本气流后，波动特征与纬向对称基流下的情况有很大差别。Karoly于1983年已经得到该式，但未对这种情况进行深入分析，下面由本式出发详细探讨水平非均匀基流中波动的传播特征。

由频散关系与角频率与相速度关系：

$$f(\gamma) = \bar{v}_M \gamma^3 + (\bar{u}_M - c) \gamma^2 + \left(\bar{v}_M + \frac{\bar{q}_x}{k^2} \right) \gamma + (\bar{u}_M - c) - \frac{\bar{q}_y}{k^2} = 0$$

当 $\bar{v}_M = 0$ 时，上式由一元三次方程变为一元二次方程：

$$(\bar{u}_M - c) \gamma^2 + \frac{\bar{q}_x}{k^2} \gamma + (\bar{u}_M - c) - \frac{\bar{q}_y}{k^2} = 0$$

如进一步不考虑纬向气流的纬向变化，则退化为：

$$(\bar{u}_M - c) \gamma^2 - \left[\frac{\beta_M}{k^2} - (\bar{u}_M - c) \right] = 0$$

这里不再讨论。

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.1 经向基流对波动传播的影响 The Influence of Meridional Basic Flow on Wave Propagation

当 $\bar{v}_M \neq 0$ 时，一元三次方程：

$$\bar{v}_M \gamma^3 + (\bar{u}_M - c) \gamma^2 + \left(\bar{v}_M + \frac{\bar{q}_x}{k^2} \right) \gamma + (\bar{u}_M - c) - \frac{\bar{q}_y}{k^2} = 0$$

由于复数根是成对出现的，所以上式要么有一个实根两个共轭复根、要么有三个实数根。李艳杰（2012）利用多项式导数的性质，给出了存在三个传播解的必要条件为：

$$\bar{v}_M \left(\bar{v}_M + \frac{\bar{q}_x}{k^2} \right) < \frac{(\bar{u}_M - c)^2}{3}$$

不考虑绝对涡度纬向变化时（即 $\bar{q}_x = 0$ ），上式可化为：

$$c^2 - 2\bar{u}_M c + \bar{u}_M^2 - 3\bar{v}_M^2 > 0$$

解得：

$$c > c_{\max} \text{ 或 } c < c_{\min}$$

其中：

$$c_{\max/\min} = \max/\min \left[\bar{u}_M + \sqrt{3}\bar{v}_M, \bar{u}_M - \sqrt{3}\bar{v}_M \right]$$

反之（逆否命题），当：

$$c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$$

一元三次方程必然只有一个传播解。

- 当 $c = \bar{u}_M$ ，由存在三个传播解的必要条件的逆否命题，可知一元三次方程必然只有一个传播解。所以在这一纬度上只有一支波动可以传播。
- 当 $c = \bar{u}_M + \bar{v}_M \gamma$ ，带入一元三次方程，其化为：

$$\gamma = \frac{\bar{q}_y}{\bar{q}_x}$$

若不能满足该式，则 $c = \bar{u}_M + \bar{v}_M \gamma$ 所在纬度为波动传播的**临界纬度**。不考虑绝对涡度纬向变化时（即 $\bar{q}_x = 0$ ）， $\gamma \rightarrow \infty$ ，在这种情形下，波被截陷。可见，水平非均匀基流中临界纬度不仅由基本场决定，还与波动自身结构有关，不同特性的波动，临界纬度不同。

- 对于定常波 $c = 0$ ，存在三个传播解的必要条件为：

$$\bar{u}_M^2 > 3\bar{v}_M^2$$

反之，当 $\bar{u}_M^2 \leq 3\bar{v}_M^2$ 时，有一个波可以传播。在东西风临界线上 $\bar{u}_M > 0$ ，因为 $\bar{v}_M^2 \geq 0$ 恒成立，则有一个波可以传播，所以定常波的传播不会在此被截陷。

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.1 经向基流对波动传播的影响 The Influence of Meridional Basic Flow on Wave Propagation

$$\bar{v}_M \gamma^3 + (\bar{u}_M - c) \gamma^2 + \left(\bar{v}_M + \frac{\bar{q}_x}{k^2} \right) \gamma + (\bar{u}_M - c) - \frac{\bar{q}_y}{k^2} = 0$$

之前讨论的是该方程的中性解（实根）的情形，振幅不随位相变化。下面讨论共轭的复数解，其不仅关系到波的传播，还涉及波动振幅在y方向的增减：

由代数学，设方程的实数解为 γ_1 ，共轭解为 γ_2 、 γ_3 ，它们可以写为：

$$\gamma_1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + a_3 + i\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 - a_2)$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + a_3 - i\frac{\sqrt{3}}{2}(a_1 - a_2)$$

其中 a_1 、 a_2 、 a_3 为形式复杂的实数，这里略。可见：

若 a_3 相对 a_1 、 a_2 较小的话，共轭解的传播方向与实数解相反，而共轭解的一个是增长解，一个是衰减解，且增减的幅度是相同的。所以如果中性波向北传播，则另外两支波向南传播，且一支随纬度增强，一支衰减。

小结：

非均匀基本气流下波动传播与纬向对称基本气流下具有很大的不同。具体表现在：

纬向对称理论	水平非均匀基流
东西风零线纬度是定常波被截陷的临界纬度	临界纬度由基本场和波动自身特性两者共同决定
定常波无法穿越东风带	定常波传播不再受东西风零线约束
考虑至实际大气：南北半球、中高纬与低纬的波动被孤立	考虑至实际大气：波动可以在不同风带和南北半球之间传播

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.2波射线理论 Wave Ray Theory

由波动的频散关系：

$$\tilde{\omega} = \bar{u}_M k + \bar{v}_M l + \frac{\bar{q}_x l - \bar{q}_y k}{k^2 + l^2}$$

可得群速度为：

$$u_g = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial k} = \left(1 + \frac{1}{1 + \gamma^2}\right) \bar{u}_M + \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \bar{v}_M - \frac{1}{1 + \gamma^2} \frac{\tilde{\omega}}{k} - \frac{\gamma(\bar{q}_x + \gamma \bar{q}_y)}{k^2(1 + \gamma^2)^2}$$

$$v_g = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial l} = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} \bar{u}_M + \left(1 + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2}\right) \bar{v}_M - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \frac{\tilde{\omega}}{l} - \frac{\bar{q}_x + \gamma \bar{q}_y}{k^2(1 + \gamma^2)^2}$$

其中 u_g 、 v_g 分别为群速度的纬向、经向分量。可见波动能量频散的速度主要取决于**纬向基流**、**经向基流**、**相速度**、**绝对涡度梯度**以及**波动自身特性**。对给定波参数的定常波（ $\tilde{\omega} = 0$ ），能量频散主要取决于**纬向基流**、**经向基流**和**绝对涡度梯度**。

- 定常波在西南和东北气流中能量频散较快
- 经向基流对能量的经向频散具有重要作用

由于气流的非均匀性，纬向波数和经向波数在射线上是变化的，其变化由波的运动学关系确定：

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = -k \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial x} - l \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial x} + \frac{\bar{q}_{yx}k - \bar{q}_{xx}l}{K^2}$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = -k \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial y} - l \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial y} + \frac{\bar{q}_{yy}k - \bar{q}_{xy}l}{K^2}$$

其中： K 为全波数， $K^2 = k^2(1 + \gamma^2)$ ， $\bar{q}_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right)$ （其它符号类似）。这两式为**水平非均匀基本气流下波传播的射线方程组**。为简洁直观地表述经向流对波动传播的影响，侯志明（1991）构造了一种理想基本气流：

$$u(y) = 18 \sin \left[\frac{3\pi}{2} (1 + y) \right] + 14(1 - y^2)$$

$$v(y) = \begin{cases} 3.2 \sin \left(\pi \frac{y - y_0}{y_0 + 0.5} \right) & -0.5 \leq y \leq y_0 \\ 0.8 \sin \left(\pi \frac{y - y_0}{0.5 - y_0} \right) & y_0 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & |y| > 0.5 \end{cases}$$

其中 $y = \sin \varphi$ ， $y_0 = 0.3$

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.2波射线理论 Wave Ray Theory

$$\bar{u}(y) = 18 \sin \left[\frac{3\pi}{2} (1 + y) \right] + 14(1 - y^2)$$

$$\bar{v}(y) = \begin{cases} 3.2 \sin \left(\pi \frac{y - y_0}{y_0 + 0.5} \right) & -0.5 \leq y \leq y_0 \\ 0.8 \sin \left(\pi \frac{y - y_0}{0.5 - y_0} \right) & y_0 \leq y \leq 0.5 \\ 0 & |y| > 0.5 \end{cases}$$

其中 $y = \sin \varphi$, $y_0 = 0.3$

基本气流廓线如Fig.4所示。在这样的基流中，绝对涡度纬向无变化，经向梯度为 β_M ，纬向波数 k 在射线上保持不变 ($\frac{dk}{dt} = 0$)，故定常波的群速度可以简化为：

$$u_g = -\bar{v}_M \gamma + \frac{2\beta_M k^2}{K_S^4}$$

$$u_g = -\bar{v}_M + \frac{2\beta_M kl}{K_S^4}$$

这里， K_S 表示定常波全波数，其表达式为：

$$K_S^2 = k^2 + l^2 = \frac{\beta_M}{\bar{u}_M + \bar{v}_M \gamma}$$

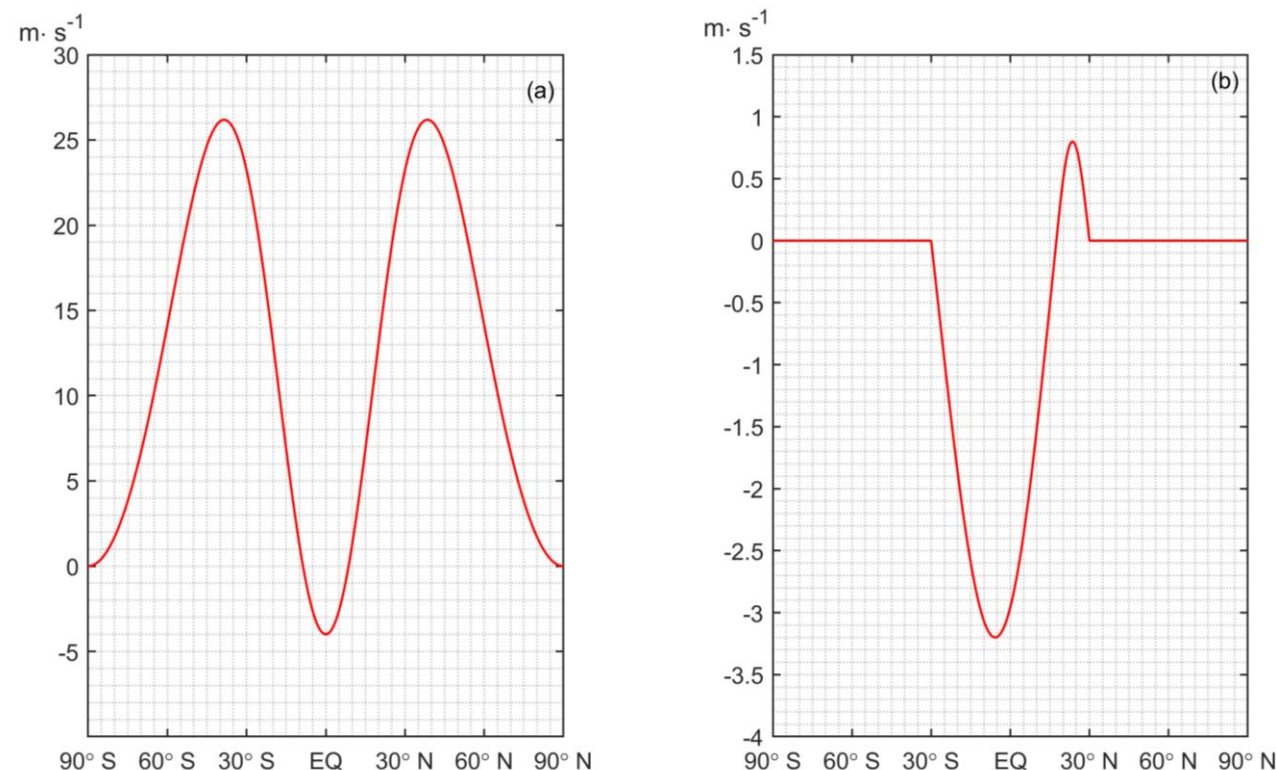


Fig.4 纬向(a)和经向(b)基本气流廓线

Fig.4 Profiles of zonal(a)and meridional(b)basic flow

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.2波射线理论 Wave Ray Theory

利用四阶Runge-Kutta方法求解：

$$u_g = \frac{\left(a \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}\right)}{\cos \varphi} = -\bar{v}_M \gamma + \frac{2\beta_M k^2}{K_S^4}$$

$$v_g = \frac{\left(a \frac{d\varphi}{dt}\right)}{\cos \varphi} = -\bar{v}_M + \frac{2\beta_M k l}{K_S^4}$$

这里有两种方案：

① 手动法：利用一元三次方程求出 γ ，然后利用两方程的四阶Runge-Kutta方法求解上面两式。

缺点： γ 有三个根，选取哪个根有困难，需要手动选择。

② 自动法：联立：

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y} = -k \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial y} - l \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial y} + \frac{\bar{q}_{yy} k - \bar{q}_{xy} l}{K^2}$$

此时退化为

$$\frac{dl}{dt} = -k \frac{\partial \bar{u}_M}{\partial y} - l \frac{\partial \bar{v}_M}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\beta}_M}{\partial y} k$$

利用三方程的四阶Runge-Kutta方法求解上面三式。

为了比较两种方案的优劣性，尝试分别计算Hoskins (1981) 给出的基本气流角速度为常值（超旋转流）的情形：

$$\bar{u}_M = a\bar{\omega} \quad \bar{v}_M = 0$$

其中： $\bar{\omega} = \frac{1}{30.875} \Omega$ ，此时：

$$\beta_M = \frac{2 \cos^2 \varphi}{a} (\Omega + \bar{\omega})$$

静止波数为：

$$K_S = \frac{\cos \varphi}{a\epsilon}$$

其中：

$$\epsilon^2 = \frac{\bar{\omega}}{2(\Omega + \bar{\omega})} = \text{const.}$$

积分得波射线方程为：

$$\tan \varphi = \tan \alpha \sin(\lambda - \lambda_0)$$

其中：

$$\cos \alpha = \epsilon a k$$

表明波射线轨迹为通过 $\varphi = 0, \lambda = \lambda_0$ 的大圆。显然当 $\varphi = \alpha$ 时， $K_S = k$ ，即 $\varphi = \alpha$ 为转向点。

水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.2波射线理论 Wave Ray Theory

① 手动法

此时 $\bar{v}_M = 0$ ，一元三次方程退化为一元二次方程，先设置 $\gamma > 0$ 的解，当波包传播到转向纬度时再手动设置其转向。结果如 Fig.5a 所示：

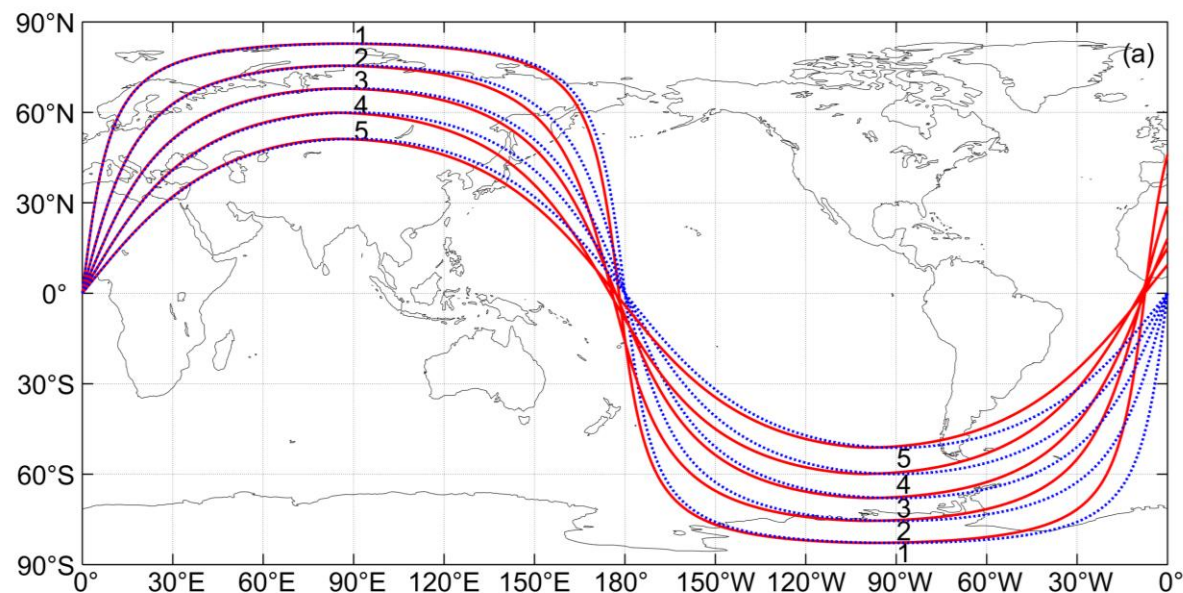


Fig.5 两种计算方法的比较：(a)为方案①；(b)为方案②.红色实线为计算解，蓝色虚线为理论解，(b)中黑点每隔2 d标示一次，图中标示数字为纬向波数.

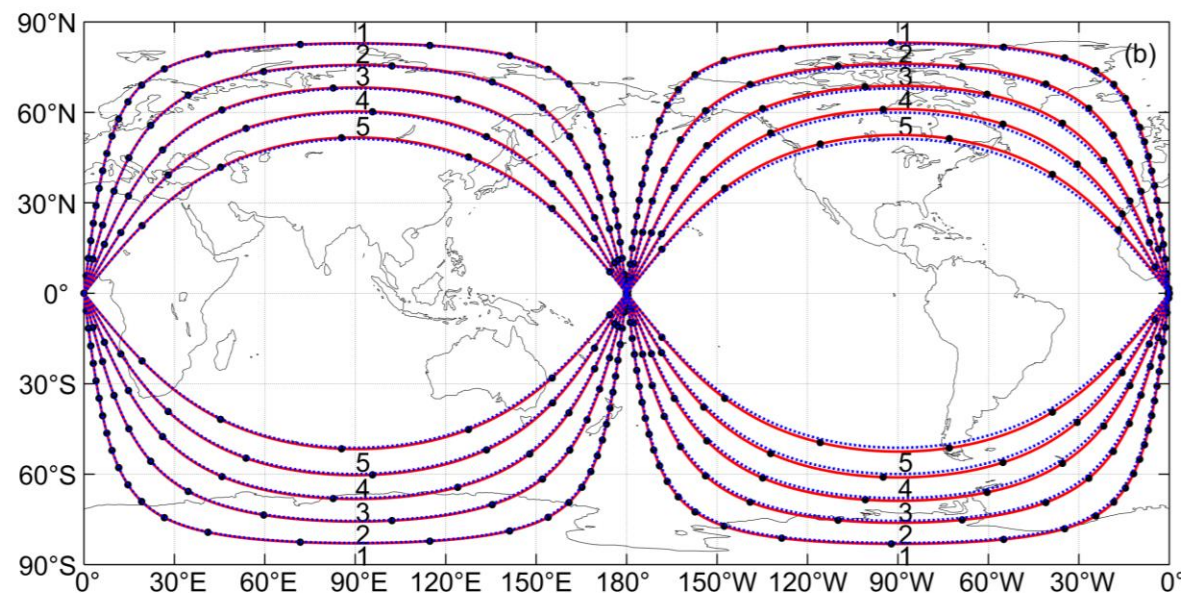
Fig.5 Comparison of two calculation methods:(a)method ①;(b)method ②. The solid red line is the computational solution, and the dashed blue line is the theoretical solution, the dark spot marked every two days. Number indicated in figures denote zonal wave numbers.

② 自动法

直接利用三方方程的四阶Runge-Kutta方法求解。初始条件由

$$(\bar{u}_M - c)\gamma^2 - \left[\frac{\beta_M}{k^2} - (\bar{u}_M - c) \right] = 0$$

给定，分别取 $\gamma > 0$ 和 $\gamma < 0$ 两种情形。结果如 Fig.5b 所示：



水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.2波射线理论 Wave Ray Theory

选择方案②：

1. 只考虑式纬向基流时，得到射线路径如Fig.6a所示，扰源位于 $(30^\circ\text{N}, 0)$ 初始经向波数 l_0 由下式决定：

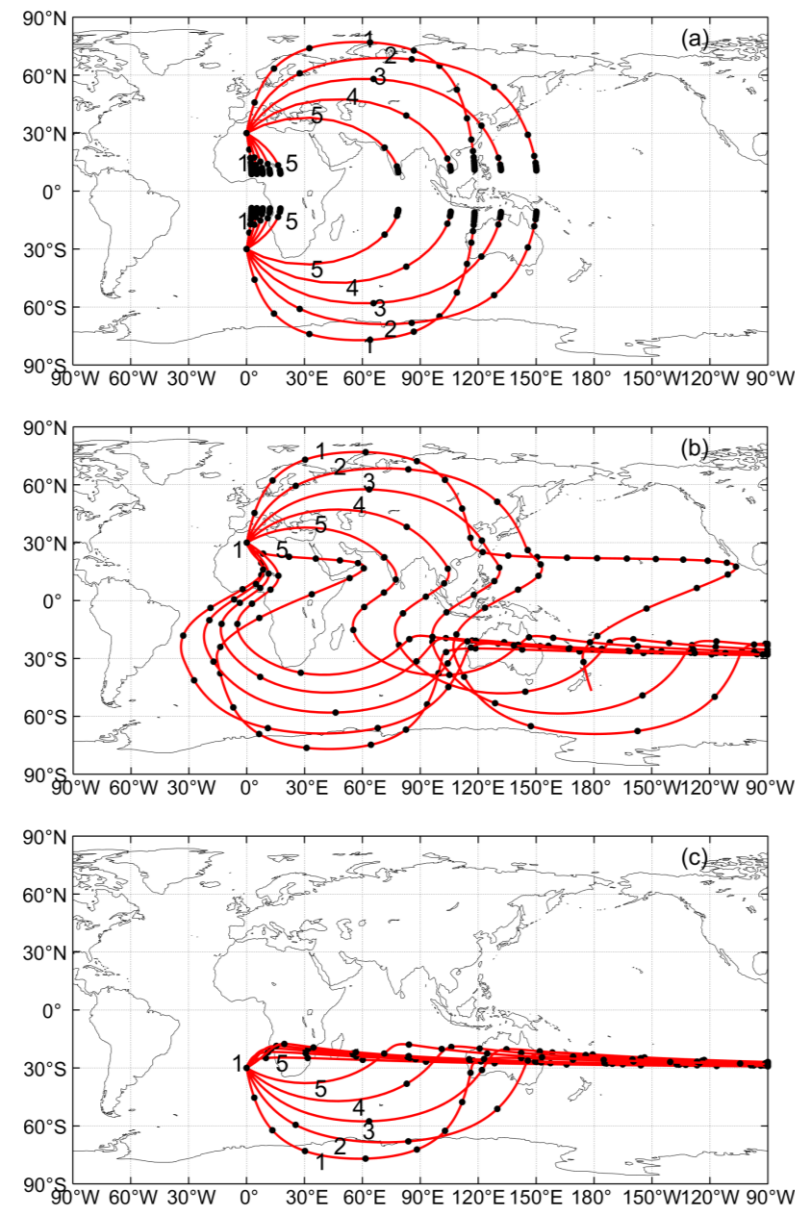
$$\gamma^2 = \frac{l^2}{k^2} = \frac{\beta_M}{\bar{u}_M k^2} - 1$$

取正值时向北传播，取负值时向南传播。

2. 不仅考虑纬向基流还考虑经向基流时，扰源位于 $(30^\circ\text{N}, 0)$ ，由于此处经向基流 $\bar{v}_M = 0$ ，所以 l_0 仍由上式决定。射线路径如Fig.6b所示。
3. 扰源位于 $(30^\circ\text{S}, 0)$ ，射线路径如Fig.6c所示。

Fig.5 纬向对称基流(a)和非均匀基流(b, c)为中定常波射线及传播距离（每隔2 d标示）。图中标注数字为纬向波数，扰源位于(a) $(30^\circ\text{N}, 0)$ 和 $(30^\circ\text{S}, 0)$ ；(b) $(30^\circ\text{N}, 0)$ ；(c) $(30^\circ\text{S}, 0)$ 。

Fig.5 Stationary wave ray paths and propagation distances in zonal symmetric flow(a)and non-uniform basic flow(b, c) (Marked every 2 days). Numbers indicated in figures denote zonal wave numbers. With sources at(a) $(30^\circ\text{N}, 0)$ & $(30^\circ\text{S}, 0)$, (b) $(30^\circ\text{N}, 0)$, and (c) $(30^\circ\text{S}, 0)$.



水平非均匀基流中波动传播理论 Wave Propagation in Non-uniform Basic Flow

3.3 波动周期特征 Periodic characteristics of wave

3.1中提到：不考虑绝对涡度纬向变化时，存在三个传播解的必要条件为：

$$c > c_{\max} \text{ 或 } c < c_{\min}$$

其中：

$$c_{\max/\min} = \max/\min [\bar{u}_M + \sqrt{3}\bar{v}_M, \bar{u}_M - \sqrt{3}\bar{v}_M]$$

只有一个传播解的必要条件为：

$$c_{\min} \leq c \leq c_{\max}$$

下面将关于相速的不等式转换为关于周期的不等式，以水平非均匀基流中波动的周期特征：

1. 当 $c_{\max} > c_{\min} > 0$ 时，如果有三支波，则波动位相向东传播，它们的周期为：

$$T > \frac{2\pi}{c_{\min}k} \text{ 或 } T < \frac{2\pi}{c_{\max}k}$$

反之，当位相东传波周期满足：

$$\frac{2\pi}{c_{\max}k} < T < \frac{2\pi}{c_{\min}k}$$

或者存在位相西传的波动时，则这样的波动只有一支。

2. 当 $c_{\max} > 0, c_{\min} < 0$ 时，相速可为正，可为负，即可以存在位相向东或向西传播的波

① 如果有三支位相东传的波，则它们的周期为：

$$T < \frac{2\pi}{c_{\max}k}$$

反之， $T > \frac{2\pi}{c_{\max}k}$ 时，只有一支位相东传波

② 如果有三支位相西传波，则它们的周期为：

$$T < -\frac{2\pi}{c_{\min}k}$$

反之， $T > -\frac{2\pi}{c_{\min}k}$ 时，只有一支位相西传波

3. 当 $c_{\min} < c_{\max} < 0$ 时，如果有三支波，则波动位相向东传播，它们的周期为：

$$T > -\frac{2\pi}{c_{\max}k} \text{ 或 } T < -\frac{2\pi}{c_{\min}k}$$

反之，位相西传的波动周期满足 $-\frac{2\pi}{c_{\min}k} < T < -\frac{2\pi}{c_{\max}k}$ ，或者存在位相东传的波动时，这样的波动只有一支。

纬向对称基流下波频特征：

- 给定波频特征，定常波只能在西风传播，位相东传波动只能在大于相速的西风气流中传播，而位相西传波动既可在西风传播，也可在强度小于相速的东风气流中传播。三种波动都是只有长波可以传播到较高纬度。
- 给定基本场，西风气流中波动位相或以小于基流的速度东传，或西传，或定常，东风气流中，波动位相以大于基流的速度西传，所以西风波动移动较慢，东风波速较快。
- 位相西传周期大于 $\frac{2\pi}{\beta_M/k}$ 的非定常波可以穿越东西风零线，在东西风带之间传播。



水平非均匀基流的行星波传播：

- 非均匀基流中，定常波传播可以不依赖西风，不再受东西风零线的截陷。临界纬度不仅由基本场决定，还与波动自身特性有关。
- 定常波在西南和东北气流中传播较快，非定常波能量的传播主要由纬向基流和经向基流决定，其次相速度也起了一定作用。稍强的经向流使得这半球间的传播具有单向性。

周期特征：

利用非均匀基流中波动传播的必要条件讨论了波动的周期特征。

感悟：

不能闭门造车，要多思考多交流，在手动法上耽误了很多时间，和李艳杰师姐交流后，改用自动法很快便得到了正确的结果。当然也不能尽信论文的内容，要大胆质疑，提出自己的看法。

下一步的任务：

结合实际资料进一步探讨，非定常波的气候学特征。

THANKS

请老师批评指正

感谢聆听

2023年11月7日