Аннотация

Основной целью этой работы было исследование и анализ дробных раскрасок в однородных гиперграфах, с целью улучшения оценок для величины $c(n,r,s)$, которая является обобщением $m(n,r)$ и $p(n,r)$. Дробные раскраски это обобщение классической вершинной раскраски гиперграфа. В ходе исследования были применены несколько методов случайных дробных перекрасок, что позволило получить следующий результат: $c(n,r,2) = \Omega\left(\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\right)$. На основании проведенного исследования рекомендуется обобщить полученный результат для общего случая, то есть для любых s.

Содержание

1 Введение

В данной работе будут рассматриваться дробные раскраски в гиперграфах и нижняя оценка для величины $c(n, r, s)$. Исследование дробных раскрасок имеет приложение в задачах о планировании, в исследовании операций и в других областях. Дробная раскраска обобщает классическую задачу о раскрасках, позволяя присваивать каждой вершине гиперграфа набор фиксированной длины цветов.

Пара множеств $H = (V, E)$ - называется гиперграфом с конечным множеством вершин V и множеством ребер E, если каждое ребро $e \in E$ состоит из непустого подмножества вершин из V, то есть: $E \subseteq 2^V \setminus \varnothing$. Гиперграф $H(V, E)$ называется n-однородным, если каждое ее ребро состоит ровно из n вершин.

Вершинной раскраской гиперграфа $H(V, E)$ называется некоторое отображение из множества вершин V в множество цветов. Цвет s является общим для ребра гиперграфа, если все вершины этого ребра имеют цвет s. Назовем раскраску правильной, если любое ее ребро не имеет общего цвета.

Определим хроматическое число $\chi(H)$ гиперграфа $H(V, E)$ как наименьшее число k, для которого существует правильная раскраска $H(V, E)$ в k цветов. Гиперграф $H(V, E)$ называется предписано $s-$раскрашиваемым, если для каждого семейства множеств $L = \{L(v) : v \in V\}$ (называемого вершинным предписанием) такого, что $|L(v)| = s$ для всех $v \in V$ ($s-$однородное вершинное предписание), существует правильная раскраска, соответствующая предписанию L, то есть. $\forall v \in V$ мы обязаны использовать цвет из $L(v)$. Предписанным хроматическим числом, $\chi_l(H)$ - называется такое наименьшее s, что H является предписано s-раскрашиваемым.

Обозначим через -

- K_{m*r} – полный r-дольный граф с равными долями размера m.
- $H_{m\times r}$ полный r-дольный r-однородный гиперграф с m вершинами в каждой доле
- $H(m,r,k)$ полный r-дольный k-однородный гиперграф с m вершинами в каждой доле

Для начала определим некоторые величины, которые являются частными случаями для $c(n,r,s)$:

Определение 1. $m(n,r)$ *- это минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе* $H(V,E)$*, который нельзя правильно раскрасить в r-цветов, то есть:* $\chi(H) > r$*.*

Замечание. *Нахождение* $m(n,r)$ *является одной из важных экстремальных задач о раскрасках гиперграфов. Впервые величину* $m(n,r)$ *рассмотрели в своей работе [1] венгерские математики П. Эрдеш и А. Хайнал в 1961г. Эта задача, особенно ее случай с двумя раскрасками (задача о свойстве B), сыграла значительную роль в развитии вероятностных методов в комбинаторике. Последние оптимальные результаты можно посмотреть здесь [2] и [3].*

Раскраска гиперграфа называется полноцветной, если каждое ее ребро содержит вершины всех цветов.

Определение 2. $p(n,r)$ *- это минимальное количество ребер в n-однородном гиперграфе* $H(V,E)$*, для которого не существует полноцветной раскраски в r цветов.*

Замечание. *Проблема существования полноцветной раскраски гиперграфа была поставлена в локальной форме П. Эрдешом и Л. Ловасом в [4]. Наиболее эффективные оценки можно найти здесь [5]*

Основной целью в [6], была оценка на $\chi_l(H(m,r,k))$. Также в [6] приводится связь между $m(n,r) \leftrightarrow \chi_l(H_{m\times r})$ (Утверждение 3) и связь между $p(n,r) \leftrightarrow \chi_l(K_{m*r})$ (Утверждение 2).

В силу того, что гиперграф $H(m,r,k)$ “находится между” $H_{m\times r}$ и K_{m*r}, было бы естественно рассмотреть задачу для раскрасок, которые “находятся между” обычными правильными раскрасками ($m(n,r)$, каждое ребро содержит хотя бы два различных цвета) и полноцветными раскрасками ($p(n,r)$, каждое реб- ро содержит все r цветов). Ввиду этого, вводится новая величина $c(n,r,s)$, которую мы определим далее.

2 Постановка задачи

2.1 Определение величины $c(n, r, s)$

Подмножество вершин $U \subseteq V$ называется независимым в гиперграфе $H = (V, E)$, если U не содержит целиком ни одного ребра из E. Отображение $f : V \to \binom{[r]}{s}$, где $[r] = \{1, ..., r\}$ - называется $s-$ покрытием r множествами. Отображение f называется $s-$ покрытием r независимыми множествами, если $\forall i \in [r] : V_i = \{v \in V : i \in f(v)\}$ - независимое множество.

Определение 3. *Обозначим через $c(n, r, s)$ минимальное число ребер в n-однородном гиперграфе, который не допускает $s-$ покрытия r независимыми множествами.*

Замечание. *Легко убедиться, что:*

$$m(n, r) = c(n, r, 1) \text{ и } p(n, r) = c(n, r, r-1)$$

, или можно посмотреть в [6]

Полученный мною в этой статье результат связан с частным случаем $c(n, r, s)$, а именно я получил нижнюю оценку для $c(n, r, 2)$

2.2 Про дробные раскраски

Определение 4. *Раскраска вершин гиперграфа $H(V, E)$ называется $s-$ кратной раскраской, если каждая из вершин гиперграфа имеет ровно $s-$ различных цветов*

Определение 5. *$s-$кратная раскраска называется дробной $(r : s)$-раскраской, если в совокупности использовалось $\leq r$ цветов.*

Замечание. *Иногда будем убирать приставку 'дробная', и просто будем говорить* $(r:s)$*-раскраска.*

Определение 6. *Ребро гиперграфа* $H(V,E)$ *- называется монохроматическим, если у всех вершин есть хотя бы один общий цвет.*

Определение 7. *В случае* $(r:2)$*-раскраски, для каждой вершины пару ее цветов будем называть соседними.*

Определение 8. $(r:s)$ *- раскраска называется правильной, если ни одно ребро гиперграфа не является монохроматическим.*

Замечание. $(r:s)$*-раскраска эквивалентно* $s-$*покрытие* $r-$*множествами*

Замечание. $(r:s)$*-дробная правильная раскраска эквивалентно* $s-$*покрытию* r *независимыми множествами.*

Определение 9. *Из замечаний выше, можно определить величину* $c(n,r,s)$ *как минимальное количество ребер в* n*-однородном гиперграфе, не допускающая* $(r:s)$*- дробную правильную раскраску.*

2.3 Предыдущие результаты

Лемма 1. *[6, Лемма 2] Для любых* $n \geq 3, r \geq 2, 1 \leq s \leq r-1$ *выполнено:*

$$c(n,r,s) \geq \frac{r^{n-1}}{s^n}$$

В доказательстве леммы используется обычный вероятностный метод для равномерной дробной раскраски без перекрашиваний. Авторам статьи [6], данная нижняя оценка величины $c(n,r,s)$ была достаточной для достижения своего результата.

Основным результатом данной статьи будет улучшение нижней оценки величины $c(n,r,s)$ для частного случая $s=2$, методом случайной перекраски.

3 Основные результаты

3.1 Нижняя оценка величины $c(n, r, 2)$

Теорема 1. *Для любых $n, r > 3$ выполнено следующее:*

$$c(n, r, 2) = \Omega\left(\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Доказательство. Пусть $H(V, E)$ - это n-однородный гиперграф.

Предположим, что $|E| < C\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}$, где $C > 0$ это некоторая константа, которую мы подберем в ходе доказательства. Докажем, что существует $(r : 2)$ - *правильная дробная раскраска.*

Начнем с того, что применим алгоритм случайной перекраски для нашего случая, то есть построим *2-покрытия* r множествами и покажем в каких случаях нужно перекрашивать вершину:

1. Для каждой вершине $v \in V$ гиперграфа - сопоставим ей вес в виде равномерной случайной величины $X_v \sim U[0, 1]$

2. Отсортируем вершины гиперграфа по возрастанию их весов - получим очередь.

3. Равномерно покроем все вершины гиперграфа - 2-мя различными цветами из [r].

4. По очереди будем ходить в вершины гиперграфа, и смотреть на все ребра содержащие эту вершину. Рассмотрим два возможных случая:

   – Вершина не является первой(самой легкой) в ребре или вес вершины ≥ 0.1:

     Тогда не трогаем цвета вершины.

– Вершина является первым в ребре с весом вершины < 0.1:

Если ребро не является *монохроматическим*, то не трогаем цвета нашей вершины. Иначе, случайным образом (т.е. с вероятностью $\frac{1}{r-2}$) перекрасим нашу вершину в другой цвет, отличный от начального и *соседнего цвета*.

5. Будем повторять предыдущий шаг алгоритма пока не закончатся вершины в очереди.

Основываясь на данной случайной перекраске, докажем, что вероятность существования $(r : 2)$ - правильной дробной раскраски гиперграфа положительна. Иначе говоря, что вероятность существования монохроматического ребра в гиперграфе строго меньше 1.

Рассмотрим всевозможные события, которые могли привести нас к получению монохроматического ребра:

1) Посчитаем вероятность того, что условием: "перекрашиваем вершину только если ее вес < 0.1 мы могли ничего не перекрасить, то есть изначально после 3ого шага получили монохроматическое ребро с весами вершин ≥ 0.1:

$$P(\exists \text{ монохром. ребро с весами} \geq 0.1) \leq |E|(1-0.1)^n \cdot \frac{r(r-1)^n}{(\binom{r}{2})^n}$$

$$< C\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \cdot 0.9^n \cdot \frac{2^n}{r^{n-1}} = 2C\sqrt{n} \cdot 0.9^n < \frac{1}{5}$$

2) Посмотрим насколько вероятно получить ребро, у которого есть два общих цвета, то есть во всех ее вершинах лежат одинаковые пары цветов:

$$P(\exists \text{ ребро с двумя общими цветами}) \leq |E|\binom{r}{2}\left(\frac{1}{\binom{r}{2}}\right)^n$$

$$< C\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{2}{r(r-1)}\right)^{n-1} = \frac{C\sqrt{n}}{(r-1)^{n-1}} < \frac{1}{5}$$

Значит, существует раскраска при которой нет ребер с двумя проблемными цветами. То есть, после перекрашивания вершин, мы можем быть уверены, что наше ребро перестало быть монохроматическим.

3) Пусть изначально существовала пара ребер A и B с общей вершиной u, которые были монохроматическими, и вершина u является самой легкой в A и B. Пусть $X_u = x$ и назовем такую пару ребер плохой, тогда:

$$\begin{aligned}P(\exists \text{ плохая пара (A, B)}) &\le |E|^2 r(r-1) \int_0^1 \left(\left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} (1-x)^{n-1} \right)^2 \frac{1}{\binom{r}{2}}\, dx \\ &\le C^2 n \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-2} r(r-1) \left(\frac{2}{r}\right)^{2n-2} \frac{1}{\binom{r}{2}} \frac{1}{2n-2} = \\ &= C^2 \frac{n}{n-1} < \frac{1}{5}\end{aligned}$$

4) Когда мы перекрашивали вершину ребра, то мы по идее избавлялись от монохроматичности, но во время наших перекрасов другое ребро могло стать монохроматическим. Рассмотрим такое событие:

Пусть в какой-то момент у нас было *синее ребро* B и мы перекрасили синий цвет ее легчащий вершины в красный, и тем самым получили красное ребро A. Пусть $u \in A \cap B$ - является той самой перекрашенной вершиной с весом $X_u = x < 0.1$, и возьмем ее самой последней перекрашенной из синего в красный, в ребре A. Всего возможно два случая:

(a) Изначально у ребра A во всех вершинах обязательно был один из двух цветов красный или синий.

Лемма 2. *Верна следующая оценка:*

$$P(\textit{возникновения события (a)}) = O\left(\frac{2^{2n}}{r^{2n-2} n}\right)$$

Доказательство. Пусть $C = (A \cap B) \setminus \{u\}$. Сделаем разбиение множества $A \cup B$ на более мелкие и посчитаем вероятности их возникновения:

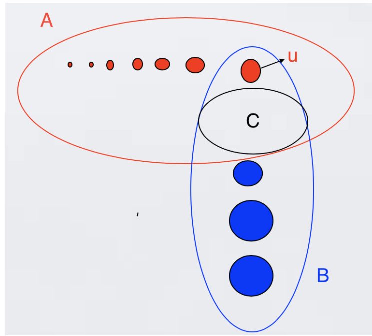

Рисунок 1 - Ребра после перекраски

- $r(r-1)$ - способами мы выбираем наши 2 цвета, в данном случае красный и синий
- Рассмотрим множество вершин $A \setminus (C \cup \{u\})$. Каждая вершина этого множества:
  - либо имела красный цвет - с вероятностью: $\frac{2}{r}$
  - либо имела не последний синий цвет, который перекрасился в красный - с вероятностью: $\frac{r-2}{\binom{r}{2}}x \cdot \frac{0.1}{r-2} = \frac{0.2}{r(r-1)}x$
- Рассмотрим множество вершин $B \setminus (C \cup \{u\})$. Каждая вершина этого множества имела синий цвет и была тяжелее, чем вершина u - с вероятностью: $\frac{2}{r}(1-x)$
- Рассмотрим множество вершин C. Каждая вершина этого множества имела как синий так и красный цвета, и была тяжелее вершины u - с вероятностью: $\frac{1-x}{\binom{r}{2}}$
- Рассмотрим вершину u. Она имела синий цвет и перекрасилась в красный - с вероятностью: $\frac{r-2}{\binom{r}{2}} \cdot \frac{0.1}{r-2} = \frac{0.2}{r(r-1)}$

Теперь посчитаем вероятность возникновения события (a):

$$P(\text{события (a)}) \leq r(r-1)\int_0^{0.1}\left(\frac{2}{r}+\frac{0.2}{r(r-1)}x\right)^{n-|C|-1}\cdot\left(\frac{2}{r}\right)^{n-|C|-1}\cdot(1-x)^{n-1}\cdot \\ \cdot\left(\frac{1}{\binom{r}{2}}\right)^{|C|}\cdot\ \frac{0.2}{r(r-1)}\,dx$$

Для того чтобы не загромождать вычисления, вынесем $\frac{2}{r}$ из первого множителя интеграла и посчитаем константную и интегральную часть отдельно:

$$R_{const} = r(r-1)\left(\frac{2}{r}\right)^{n-|C|-1}\left(\frac{2}{r}\right)^{n-|C|-1}\cdot\left(\frac{1}{\binom{r}{2}}\right)^{|C|}\frac{0.2}{r(r-1)} = \\ = 0.1\cdot\frac{2^{2n-1}}{r^{2n-2}}\left(\frac{r}{2(r-1)}\right)^{|C|}\leq\frac{2^{2n-1}}{r^{2n-2}}$$

Теперь посмотрим на интеграл:

$$R_{integ} = \int_0^{0.1}\left(1+\frac{0.1}{r-1}x\right)^{n-|C|-1}(1-x)^{n-1}\,dx \leq \\ \leq \int_0^{0.1}\left(1+\frac{0.1}{r-1}x\right)^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dx \\ \leq \int_0^{0.1}e^{(n-1)\left(\frac{0.1}{r-1}x-x\right)}\,dx \leq \frac{1}{(n-1)(1-\frac{0.1}{r-1})}\leq\frac{C_1}{n}$$

, для некоторой константы C_1

Перемножив R_{const} и R_{integ} получим, что:

$$P(\text{события (a)}) \leq C_1\frac{2^{2n-1}}{r^{2n-2}n}$$

□

Используя результат леммы посчитаем вероятность существования такой пары ребер, для которых выполняется событие (a) - назовем такие пары *плохими*:

$$P(\exists \text{плохая пара ребер}(A,B)) \leq |E|^2 P(\text{события (а)}) \leq$$
$$\leq C^2 n \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-2} \cdot C_1 \frac{2^{2n-1}}{r^{2n-2} n} = 2C^2 C_1 < \frac{1}{5}$$

(б) Пусть теперь скажем, что у вершин ребра А могут быть ≥ 3 цвета и также существует еще одна вершина w, которая является последней не красной и не синей перекрашенной в красный цвет. Допустим, что вершина w зеленого цвета с весом $X_w = y < x$, и она была перекрашена ввиду зелености какого-то ребра С.

Лемма 3. *Верна следующая оценка:.*

$$P(\textit{возникновения события (б)}) < \frac{2^{3n}}{r^{3n-3}(n-1)^2}$$

Доказательство. Определим множества пересечений: $X = (A \cap B) \setminus \{u\}$; $Y = (A \cap C) \setminus \{w\}$; $Z = (B \cap C)$. Сделаем разбиение множества $A \cup B \cup C$ на более мелкие и посчитаем вероятности их возникновения:

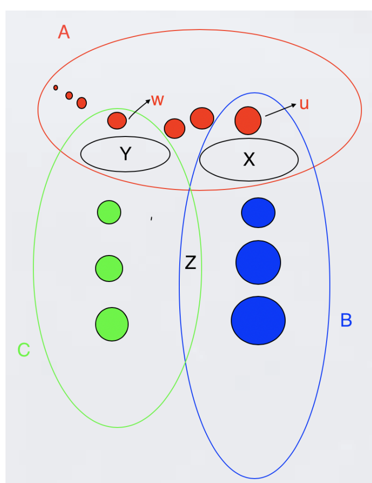

Рисунок 2 - Ребра после перекраски

- $6\binom{r}{3}$ - способами мы выбираем наши 2 цвета, в данном случае красный, синий и зеленый

- Рассмотрим множество вершин $A \setminus (X \cup Y \cup \{u\})$. Каждая вершина этого множества:
  - либо имела красный цвет - с вероятностью: $\frac{2}{r}$
  - либо имела не последний синий цвет, который перекрасился в красный - с вероятностью: $\frac{r-2}{\binom{r}{2}}x \cdot \frac{0.1}{r-2} = \frac{0.2}{r(r-1)}x$
  - либо была не синей и не красной, была легче вершины w и перекрасилась в красный - с вероятностью: $\frac{\binom{r-2}{2}}{\binom{r}{2}} \cdot \frac{0.1y}{r-2} = \frac{0.1(r-3)y}{r(r-1)}$
- Рассмотрим множество вершин $B \setminus (X \cup Z \cup \{u\})$. Каждая вершина этого множества имела синий цвет и была тяжелее, чем вершина u - с вероятностью: $\frac{2}{r}(1-x)$
- Рассмотрим множество вершин $C \setminus (Y \cup Z \cup \{w\})$. Каждая вершина этого множества имела зеленый цвет и была тяжелее, чем вершина w - с вероятностью: $\frac{2}{r}(1-y)$
- Рассмотрим множество вершин X. Каждая вершина этого множества имела как синий так и красный цвета, и была тяжелее вершины u - с вероятностью: $\frac{1-x}{\binom{r}{2}}$
- Рассмотрим множество вершин Z. Каждая вершина этого множества имела как синий так и зеленый цвета, и была тяжелее вершины u - с вероятностью: $\frac{1-x}{\binom{r}{2}}$
- Рассмотрим множество вершин Y. Каждая вершина этого множества
  - либо могла иметь зеленый и красный цвета, и быть тяжелее вершины w - с вероятностью: $\frac{1-y}{\binom{r}{2}}$

– либо могла иметь синий и зеленый цвета, быть тяжелее вершины w, но легче чем u, и должна была перекраситься в красный - с вероятностью: $\frac{0.1(x-y)}{\binom{r}{2}(r-2)}$

- Рассмотрим вершину w. Она имела зеленый цвет, при этом не красный и не синий, и перекрасилась в красный - с вероятностью: $\frac{r-3}{\binom{r}{2}} \cdot \frac{0.1}{r-2} = \frac{0.2(r-3)}{r(r-1)(r-2)}$

- Рассмотрим вершину u. Она имела синий цвет и перекрасилась в красный - с вероятностью: $\frac{r-2}{\binom{r}{2}} \cdot \frac{0.1}{r-2} = \frac{0.2}{r(r-1)}$

Теперь посчитаем вероятность возникновения события (б):

$$P(\text{события (б)}) \leq 6\binom{r}{3} \int_1^{0.1} \int_0^x \left(\frac{2}{r} + \frac{0.2x}{r(r-1)} + \frac{0.1(r-3)y}{r(r-1)}\right)^{n-|X|-|Y|-2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2(1-x)}{r}\right)^{n-|X|-|Z|-1} \left(\frac{2(1-y)}{r}\right)^{n-|Y|-|Z|-1} \left(\frac{1-x}{\binom{2}{r}}\right)^{|X|+|Z|} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1-y+\frac{0.1(x-y)}{r-2}}{\binom{r}{2}}\right)^{|Y|} \frac{0.2(r-3)}{r(r-1)(r-2)} \cdot \frac{0.2}{r(r-1)}\, dy\, dx = R$$

Вынесем все множители у которых в степени есть |Z|:

$$R_{|z|} = \left(\frac{2(1-x)}{r}\right)^{-|Z|} \left(\frac{2(1-y)}{r}\right)^{-|Z|} \left(\frac{1-x}{\binom{2}{r}}\right)^{|Z|} = \left(\frac{r}{2(r-1)(1-y)}\right)^{|Z|} < 1$$

То есть, оптимальный случай это когда: $|Z| = 0$

Вынесем все множители у которых в степени есть |Y|. В этот раз распишем все без степени |Y|, и посчитаем 1 деленное на конечное произведение:

$$\frac{1}{R_{|Y|}^{1/|Y|}} = \left(\frac{2}{r} + \frac{0.2x}{r(r-1)} + \frac{0.1(r-3)y}{r(r-1)}\right) \frac{2(1-y)}{r} \left(\frac{1-y+\frac{0.1(x-y)}{r-2}}{\binom{r}{2}}\right)^{-1} >$$

$$> 2 \cdot \frac{r-1+0.2x+0.1(r-3)y}{r+0.1\cdot\frac{r}{r-2}} > 2 \cdot \frac{r-1}{r+1} \geq 1$$

Значит получим, что: $R_{|Y|} \leq 1$ и оптимальный случай это когда: $|Y|= 0$

Дальше будем оптимизировать R. Для того чтобы не загромождать вычисления, вынесем $\frac{2}{r}$ из первого множителя интеграла и посчитаем константную и интегральную часть отдельно:

$$R_{const} = r(r-1)(r-2)\left(\frac{2}{r}\right)^{3n-|X|-4}\left(\frac{1}{\binom{2}{r}}\right)^{|X|}\frac{0.2(r-3)}{r(r-1)(r-2)}\cdot\frac{0.2}{r(r-1)} =$$

$$= \left(\frac{2}{r}\right)^{3n-4}\cdot\frac{0.04(r-3)}{r(r-1)}\left(\frac{1}{\frac{2}{r}\binom{2}{r}}\right)^{|X|} < \frac{2^{3n-2}}{r^{3n-3}}$$

Теперь посмотрим на интеграл:

$$R_{int} \leq \int_0^{0.1}\int_0^x \left(1+\frac{0.1x}{(r-1)}+\frac{0.1(r-3)y}{2(r-1)}\right)^{n-|X|-2}(1-y)^{n-1}(1-x)^{n-1}\,dy\,dx$$

$$\leq \int_0^{0.1}\int_0^x e^{\left(\frac{0.1x}{(r-1)}+\frac{0.1(r-3)y}{2(r-1)}\right)(n-|X|-2)}\cdot e^{(y(n-1)}e^{-x(n-1)}\,dy\,dx <$$

$$< \int_0^{0.1}\int_0^x e^{(n-1)\left(\frac{0.1(r-3)y}{2(r-1)}-y\right)}e^{(n-1)\left(\frac{0.1x}{(r-1)}-x\right)}\,dy\,dx \leq$$

$$\leq \int_0^{0.1}\int_0^x e^{-\frac{(n-1)}{2}y}e^{-\frac{(n-1)}{2}x}\,dy\,dx \leq \frac{4}{(n-1)^2}$$

Перемножив R_{const} и R_{integ} получим, что:

$$P(\text{возникновения события (б)}) \leq \frac{2^{3n}}{r^{3n-3}(n-1)^2}$$

□

Используя результат леммы посчитаем вероятность существования такой тройки ребер, для которых выполняется событие (б) - назовем такую тройку плохой:

$$\begin{aligned}P(\exists\text{плохая тройка}(A,B,C)) &\leq |E|^3 P(\text{события (б)}) \leq \\ &\leq C^3 n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{2}\right)^{3n-3}\frac{2^{3n}}{r^{3n-3}(n-1)^2} = \\ &= C^3\frac{8n^{\frac{3}{2}}}{(n-1)^2} < \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Всего рассмотрели 5 всевозможных плохих событий, при которых могло возникнуть монохроматическое ребро. Подберем изначальную константу C таким, чтобы каждая вероятность плохого события была $< \frac{1}{5}$. Тогда в сумме получим, что вероятность существование монохроматического ребра < 1. Это означает, что у нашего гиперграфа есть $(r : 2)$ - правильная дробная раскраска:

$$c(n, r, 2) \geq |E| = \Omega\left(\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\right)$$

, что и требовалось доказать

$\square$

4 Заключение

В данной работе исследовались дробные раскраски в однородных гиперграфах. Методом случайных дробных перекрасок, было доказано, что $c(n, r, 2) = \Omega\left(\sqrt{n}\left(\frac{r}{2}\right)^{n-1}\right)$. Результат дипломной работы улучшает нижнюю оценку Леммы 2 из [6] для частного случая $s = 2$. Перспективным вариантом для дальнейшего обобщения работы является рассмотрение оценки для любого s. Полученный результат можно использовать для оценки предписаного хроматического числа полных многодольных гиперграфов, т.к. существует связь между $c(n, r, s)$ и $\chi_l(H(m, r, k))$ ([6] Лемма 1).

5 Список литературы

[1] P. Erdős and A. Hajnal. On a property of families of sets. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, 12:87–123, 1964.

[2] А.М. Райгородский и Д.А. Шабанов. Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы. *Успехи математических наук*, 66(5(401)):109–182, 2011.

[3] D. Cherkashin and J. Kozik. A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs. *Random Structures Algorithms*, 47(3):407–413, 2015.

[4] P. Erdős and L. Lovász. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Infin. Finite Sets*, 10(2):609–627, 1975.

[5] D. Cherkashin. A note on panchromatic colorings. *Discrete Math.*, 341(3):652–657, 2018.

[6] Д.А. Шабанов и Т.М. Шайхеева. О предписанном хроматическом числе полных многодольных гиперграфов и кратных покрытиях независимыми множествами. *Математические заметки*, 107(3):454–465, 2020.