



PROJET MIR

Équation de McKean-Vlasov avec sauts

Élèves :

Cédric ADAM
Meriem TARQUI
Mariem NAIMI

Enseignant :

Elisabeth MIRONESCU

19 octobre 2023

Table des matières

1	Introduction	2
2	Propagation du chaos	3
3	Introduction des deux modèles : neurologique et financier	4
3.1	Modèle pour les neurones	4
3.2	Modèle de risque systémique contagieux	6
4	Simulation des trajectoires	8
4.1	Modèle de neurones	8
4.2	Modèle de risque systémique	8
4.3	Compléments	10
5	Approche sur les densité	11
5.1	Introduction du concept	11
5.2	Obtention de l'équation	11
5.3	Simulation de la densité des trajectoires dans le système financier	13
6	Conclusion	14
7	Bibliographie	15

1 Introduction

Les équations différentielles stochastiques (EDS) de McKean-Vlasov fournissent un cadre mathématique pour modéliser les comportements collectifs de grands ensembles de particules, où chaque particule influence et est influencée par l'ensemble du système. Ce sont des EDS dont les coefficients de dérive et de diffusion dépendent non seulement de l'état du processus inconnu, mais également de sa loi de probabilité.

Une forme générale de ces équations non-linéaires peut être exprimée comme suit :

$$dX_t = b(X_t, \mu_t)dt + \sigma(X_t, \mu_t)dB_t, \quad (1)$$

où X_t représente une variable d'état caractérisant le système à l'instant t , $b(X_t, \mu_t)$ est le terme de dérive, $\sigma(X_t, \mu_t)$ est le terme de diffusion et B_t est un mouvement brownien standard. Le paramètre μ_t peut représenter un terme moyen ou une mesure empirique caractérisant la distribution de l'ensemble des particules à l'instant t .

Deux exemples typiques nous ont intéressés : le premier est l'équation suivante dite de *mean-field* avec des sauts qui a beaucoup d'application en neurosciences.

$$\forall t \geq 0, X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \alpha E(M_t) + B_t - M_t, \quad X_0 = 0. \quad (2)$$

Les termes de l'équation peuvent être décrits de la manière suivante :

1. X_t et X_0 correspondent à la valeur d'intérêt (le potentiel en neurosciences par exemple) respectivement aux temps t et 0.
2. b est une fonction Lipschitz de croissance au plus linéaire, c'est-à-dire, qu'elle vérifie les deux conditions suivantes :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |b(x) - b(y)| \leq |x - y| \quad (3)$$

$$\exists K > 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad |b(x)| \leq K(1 + |x|) \quad (4)$$

3. α est une constante comprise entre 0 et 1.
4. B_t est un mouvent Brownien standard défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$.
5. le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ compte le nombre de fois où le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ atteint la valeur seuil avant l'instant t . La valeur seuil est prise égale à 1 dans la suite.

La deuxième équation d'intérêt pour nous ici est un exemple dont l'état $X = 0$ est absorbant et où la probabilité d'y être à un rôle important. On détaillera par la suite que ce deuxième exemple a des applications très utiles en finance notamment pour représenter les faillites d'entreprises. Elles peuvent s'interpréter avec la notion de *distance-to-default* de la variable X_t .

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + B_t - \alpha L_t, \quad \alpha > 0, \quad X_0 = x > 0, \\ \tau &= \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq 0\}, \\ L_t &= P(\tau \leq t). \end{aligned} \quad (5)$$

1. De même que pour l'équation précédente, X_t est la valeur d'intérêt au temps t et X_0 est la condition initiale, que l'on prend ici strictement positive car, comme expliqué juste au dessus, correspond à une distance.
2. τ représente la première occurrence où une particule atteint un niveau critique (ici une valeur nulle) et est considérée en défaut.
3. La fonction L_t est la probabilité que cet événement de défaut se produise avant le temps t .

Ces équations sont particulièrement compliquées à résoudre que ce soit numériquement ou analytiquement car comme la loi de probabilité de X_t rentre en jeu dans sa propre évolution. Il y a donc un problème de bouclage qui rend les approches plus compliquées. L'étude de ces équations de McKean-Vlasov est rendu plus simple grâce au phénomène de **propagation du chaos** que nous détaillerons en détail plus loin et dont elles sont un exemple. Cela signifie qu'un processus de McKean-Vlasov peut être obtenu comme la limite d'un système discrets d'équations différentielles stochastiques que nous allons expliciter. Concrètement, ce qu'on peut aussi qualifier de **limite du champ moyen** est une approche qui se base sur l'hypothèse que les trajectoires sont indépendantes à l'instant initial (composantes de X_0), et qu'elles gardent ce comportement pour un très grand nombre de particules N , formalisé par $N \rightarrow \infty$. Pour un tel nombre, les fluctuations individuelles des particules deviennent moins importantes par rapport à la tendance globale du système, et les comportements collectifs deviennent plus prédominants, d'où l'utilité d'étudier le comportement collectif en s'intéressant à la densité, ce qui sera fait en dernière partie. [2]

Dans ce rapport, nous allons tout d'abord aborder la propagation du chaos que nous avons évoqué à l'instant afin de justifier plus rigoureusement les approximations que nous faisons par la suite. Ensuite, nous examinerons en détail les deux modèles proposés par F. Delaruea, J. Inglisb, S. Rubenthalera, E. Tanr dans *"Particle systems with a singular mean-field self-excitation. Application to neuronal networks"* pour l'application en neurones, et l'article de Ben Hambly, Sean Ledger et Andreas Sojmark, intitulé *"A McKean-Vlasov equation with positive feedback and blow-ups"* pour l'application en finance. Ces deux modèles sont ceux que nous avons évoqués au-dessus comme des exemple d'équations de McKean-Vlasov. Nous nous attarderons également sur la simulation des trajectoires dans ces modèles, en présentant une approche par un système fini de particules, avant d'aborder le calcul de la densité par la méthode de Fokker-Planck, avec des illustrations numériques. Pour étayer notre propos, nous nous appuierons également sur d'autres articles de référence tels que *"Limite de champ moyen - Cours de DEA, 2001-2002"* rédigé par Cédric Villani.

2 Propagation du chaos

Comme expliqué dans l'introduction, les processus de McKean-Vlasov est un exemple de propagation du chaos. Cela signifie qu'ils peuvent être obtenus comme limite de systèmes discrets d'équations différentielles stochastiques. Formellement, définissons $(X^i)_{1 \leq i \leq N}$ comme les solutions de l'équation suivante, qui, dans le cas général peut être d -dimensionnelle.

$$\begin{aligned} (X_0^i)_{1 \leq i \leq N} \text{ sont i.i.d de même loi.} \\ dX_t^i = a(X_t^i, \hat{\mu}^N) dB_t^i + b(X_t^i, \hat{\mu}^N) dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Avec $(B^i)_{1 \leq i \leq N}$ des mouvements browniens indépendants, et $\hat{\mu}^N$ la mesure empirique discrète associée à X_t définie par $\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{X_t^i}$, δ étant le symbole de Kronecker. Vu cette mesure de probabilité empirique, il est clair qu'il y a interactions entre les particules, c'est-à-dire que l'évolution de l'une dépend de l'évolution des autres.

La propagation du chaos est la propriété qui garantit que quand le nombre de particules N tend vers $+\infty$, ces interactions mutuelles disparaissent et donc que les particules solutions deviennent indépendantes. De plus, toujours dans le cas où N tend vers $+\infty$, les particules deviennent de même loi. Les particules deviennent alors indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) et sous certaines conditions de régularité, le processus de champ moyen ainsi défini convergera vers le processus de McKean-Vlasov correspondant.

Globalement, l'idée de ce phénomène qui est plus général que le cas des équations de McKean-Vlasov, est le fait qu'une famille de distribution de probabilité $(\mu_1^{(N)}, \dots, \mu_N^{(N)})$ sur \mathbb{R}^d se comporte comme $(\mu^{\otimes N})$ quand N tend vers l'infini. Précisément, Cette propriété se caractérise de la façon suivante.

Pour tout $k > 1$ et toutes fonctions tests ϕ_1, \dots, ϕ_k continues bornées

$$\int \phi_1(x_1) \dots \phi_k(x_k) d\mu^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow \left(\int \phi_1 d\mu \right) \times \dots \times \left(\int \phi_k d\mu \right).$$

Autrement dit, les particules deviennent indépendantes et identiquement distribuées de loi μ quand leur nombre devient grand. On dit alors que la famille de distribution est μ -chaotique. Un des théorème important évoqué par Cédric Villani garantit que le fait d'être μ -chaotique est équivalent au fait que la mesure empirique $\hat{\mu}^N$ associée à $\mu^{(N)}$ converge en loi vers la mesure déterministe μ . Plus précisément,

$$\mu - \text{chaotique} \iff \forall \Phi \text{ continue bornée, } \int \Phi \left(\frac{1}{N} \sum \delta_{x^i} \right) d\mu^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow \Phi(\mu).$$

De nombreuses propriétés, telles que celles citées à l'instant sont évoquées par Cédric Villani afin de conclure plus facilement qu'en utilisant la définition sur le fait qu'un processus vérifie ou non la propriété de propagation du chaos. Le résultat qui nous intéresse et dont nous n'évoquerons pas les détails de preuve est le fait que, comme évoqué dans l'introduction, la famille de particules introduites comme solutions de (6) est bien μ -chaotique, μ étant la mesure de probabilité de la solution X de l'équation stochastique de McKean-Vlasov qui nous intéresse. Cela justifie le fait d'approximer ces équations par un nombre finis de particules.

3 Introduction des deux modèles : neurologique et financier

3.1 Modèle pour les neurones

Pour rappel, l'équation qui nous intéresse ici est un cas particulier des équations de McKean-Vlasov et c'est la suivante.

$$\forall t \geq 0, X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \alpha E(M_t) + B_t - M_t, \quad X_0 = 0. \quad (7)$$

Chacun des termes de l'équation a été expliqué dans l'introduction mais nous rappelons que α est une constante comprise entre 0 et 1, B_t est le mouvement Brownien standard et que le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ compte le nombre de fois où le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ atteint la valeur seuil 1 avant l'instant t .

Nous verrons par la suite que cette équation peut traduire le chargement et le déchargement de particules influencé par le comportement moyen. Cela justifie que celle-ci soit utilisée en neurosciences et notamment pour l'étude du chargement des neurones. Le chargement qui découle du comportement moyen se traduit par le terme d'espérance et le déchargement vient du M_{-t} . Ce premier modèle neurologique nous permet d'imaginer une façon raisonnable d'approcher des solutions de cette équation différentielle stochastique. En effet, le numérique peut nous permettre de réaliser cette simulation avec un nombre fini et raisonnable de particules qui interagissent les unes avec les autres. Dans ce cas, le terme d'espérance devient simplement la moyenne empirique sur des M_t des N particules considérées. L'idée est que quand N devient grand les particules deviennent **indépendantes** et suivent la **même loi** : la solution de l'équation qui nous intéresse. C'est le phénomène de **propagation du chaos** expliqué dans la partie précédente appliqué au cas particulier de l'équation de McKean-Vlasos utilisée pour ce modèle. L'approximation par un nombre fini N est alors le suivant :

$$\forall t \geq 0, \delta X_t^i = b(X_t^i) \delta t + \frac{\alpha}{N} \sum \delta M_t^i + \delta B_t^i - \delta M_t^i. \quad 1 \leq i \leq N, \quad (8)$$

Cette approximation ajoute des difficultés concernant les particules concernées par les sauts car des phénomènes dits de cascade apparaissent. En effet, il est clair qu'entre t^- et t , les particules qui dépassent 1 se déchargent et donc sautent de 1 de façon instantanée. Cependant, cela entraîne une augmentation de 1 des M_t pour les particules qui ont sauté et donc du terme $\frac{\alpha}{N} \sum \delta M_t^i$ aussi de façon instantanée car ce terme correspond, à un terme α près, à la proportion de particules qui a sauté entre t^- et t . On voit donc qu'instantanément, les particules qui étaient au dessus de $1 - \frac{\alpha}{N} \sum \delta M_t^i$ sont aussi concernées par le déchargement. Cela peut évidemment en entraîner d'autres à sauter, d'où le terme de **cascade**.

Comme expliqué à l'instant, ce système fini crée des difficultés mais il est important de noter qu'il correspond à un vrai système physique, car celui-ci n'a jamais un nombre infini de particules.

Pour simplifier les simulations, nous décidons de prendre $b = 0$. La partie la plus délicate est, comme expliquée plus haut, la cascade lorsqu'on arrive à un temps de saut : il faut trouver les particules concernées par les sauts et calculer de combien toutes les particules se chargent. Pour ce faire, on regarde si certaines particules sont au dessus de 1. Si c'est le cas, on sait qu'on est à un temps de saut et donc que toutes les particules vont subir un chargement grâce au terme $\frac{\alpha}{N} \sum \delta M_t^i$ qui lie toutes les particules entre elles. Les particules citées juste au dessus qui vérifient $X_{t-}^i \geq 1$, se déchargent et peuvent lancer une cascade. Pour cela, on note $\Gamma_0 = \{i : X_{t-}^i \geq 1\}$ qui correspond aux numéros des particules qui sautent en premier. Toutes les particules prennent alors $\alpha/N * |\Gamma_0|$ de potentiel donc celles qui appartiennent à $\Gamma_1 = \{i \in \{1..N\} \setminus \Gamma_0 : X_{t-}^i + \frac{\alpha}{N} |\Gamma_0| \geq 1\}$ vont aussi se décharger. De même, tant que $\Gamma_j = \{i \in \{1..N\} \setminus \bigcup_{k=0}^{j-1} \Gamma_k : X_{t-}^i + \frac{\alpha}{N} |\bigcup_{k=0}^{j-1} \Gamma_k| \geq 1\}$ est non vide, les particules qui dont le numéro est dans l'un des Γ_j sautent. Un ordre de saut chronologique intuitif est présenté ici mais il faut bien sur imaginer que toutes ses particules sautent *en même temps*. On note alors $\Gamma = \bigcup_{j=0}^N \Gamma_j$ qui correspond à l'ensemble de ces particules qui saute au temps de saut considéré. Cette union va jusqu'à N car comme il y a N

particules, il y a forcément au plus N particules qui sautent et donc au plus N étapes de cascade. Après avoir introduit l'autre exemple des équations de McKean-Vlasov dans la partie suivante, nous verrons ce que donnent des simulations de ces modèles.

3.2 Modèle de risque systémique contagieux

On considère une deuxième application de ces équations dans le contexte du risque systémique en finance. Le risque systémique fait référence au risque que les défaillances d'une entité entraînent des effets en cascade dans l'ensemble du système financier.

Nous rappelons les équations ci-dessous qui décrivent le premier cadre rigoureux que nous avons exploré dans cette approche.

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + B_t - \alpha L_t, & \alpha > 0 \\ \tau &= \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq 0\}, \\ L_t &= P(\tau \leq t). \end{aligned} \tag{9}$$

Nous rappelons aussi que τ représente la première occurrence où une particule atteint un niveau critique (ici une valeur nulle) et est considérée en défaut et que la fonction L_t est la probabilité que cet événement de défaut se produise avant le temps t .

Dans ce système, le terme αL_t est dit terme de rétroaction. Cette rétroaction exprime la façon dont la dynamique de la particule X_t est influencée par l'occurrence potentielle d'un défaut. Notamment, un α positif indique que la rétroaction est de nature amplificatrice : tout saut de la particule X_t est pénalisé en raison de la probabilité accrue d'un défaut, ce qui augmente les chances de voir d'autres sauts de particules X_t se produire en réponse à cette rétroaction.

Ces équations trouvent des applications dans la modélisation de la contagion au sein de vastes réseaux financiers ou de portefeuilles comprenant un grand nombre d'entités susceptibles de faire défaut. Ainsi, une approche similaire à celle utilisée pour les neurones consiste à considérer un système de N banques. Dans ce système, en utilisant toujours la propriété de propagation du chaos, le terme L_t représentant la probabilité de défaut est approché par une moyenne empirique des événements de défaut des banques avant le temps t . Le système d'équations prend alors la forme suivante pour chaque banque i :

$$\begin{aligned} dX_t^{i,N} &= b(t) dt + \sigma(t) dB_t^i - \alpha dL_t^N, \\ L_t^N &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{t \geq \tau^{j,N}\}}. \end{aligned} \tag{10}$$

où $\tau^{i,N} = \inf\{t > 0 \mid X_t^{i,N} \leq 0\}$ est le temps d'arrêt qui identifie l'instant où la banque i devient à défaut.

Il est essentiel de noter que les mouvements browniens B_t^i sont indépendants les uns des autres.

Dans ce contexte, la notion de contagion prend une signification particulière : elle représente la propagation des défauts d'une banque à une autre dans le système bancaire. Chaque saut dans la trajectoire d'une banque affecte le comportement des autres banques, reflétant ainsi la dynamique de la contagion financière.

Cette approche nous permettra ensuite de simuler les trajectoires individuelles des différentes banques dans le système, nous donnant ainsi un aperçu de l'évolution du système dans son ensemble.

Pour déterminer les banques susceptibles de faire défaut en raison de la contagion, nous cherchons comme dans le modèle précédent à identifier la cascade de défaut au temps t . Cela nous conduit à la modélisation suivante :

$$\Gamma_0 = \{i \in \{1, \dots, N\} : X_{t-}^i \leq 0\},$$

$$\Gamma_{k+1} = \{i \in \{1, \dots, N\} \setminus (\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k) : X_{t-}^i - \alpha \frac{|\Gamma_0 \cup \dots \cup \Gamma_k|}{N} \leq 0\},$$

suivi de :

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{N-1} \Gamma_k,$$

représentant l'ensemble des banques dont la valeur de X_t est passée en dessous de 0 jusqu'à l'instant t . Ensuite, nous définissons :

$$L_t^N = \min \left\{ k \geq 0 \mid X_{t-}^i - \frac{\alpha |\Gamma|}{N} \leq 0 \right\},$$

qui correspond au plus petit indice k tel que la valeur de X_t de la banque i soit inférieure à zéro, ajustée par l'effet de contagion.

Il y a donc une analogie claire entre cet exemple et celui du modèle pour les neurones car les ensembles qui viennent d'être définis peuvent être interprétés comme suit : Γ_0 représente les banques initialement en défaut, Γ_{k+1} identifie les banques qui deviennent en défaut au $k + 1$ -ième stade de la cascade, et Γ est l'ensemble complet des banques en défaut jusqu'à l'instant t . Enfin, L_t^N détermine le stade de la cascade à partir duquel une banque devient en défaut.

Une différence fondamentale avec le cas des neurones réside dans le traitement de la barrière de défaut. Contrairement à la dynamique neuronale où l'on soustrait 1 au potentiel des particules lorsque celles-ci atteignent leur seuil de décharge, dans le contexte financier, lorsqu'un actif atteint sa barrière de défaut, sa valeur sur le marché s'érode et il sort du système financier. Ainsi, plutôt que de soustraire 1 à la valeur du potentiel, dans notre modèle, lorsque le processus X_t atteint le seuil de défaut, il y demeure. Cette distinction est une caractéristique essentielle du modèle adopté dans cette équation, où le terme L_t représente la somme des défauts observés.

4 Simulation des trajectoires

4.1 Modèle de neurones

Les simulations avec 3 particules nous donnent le résultat suivant.

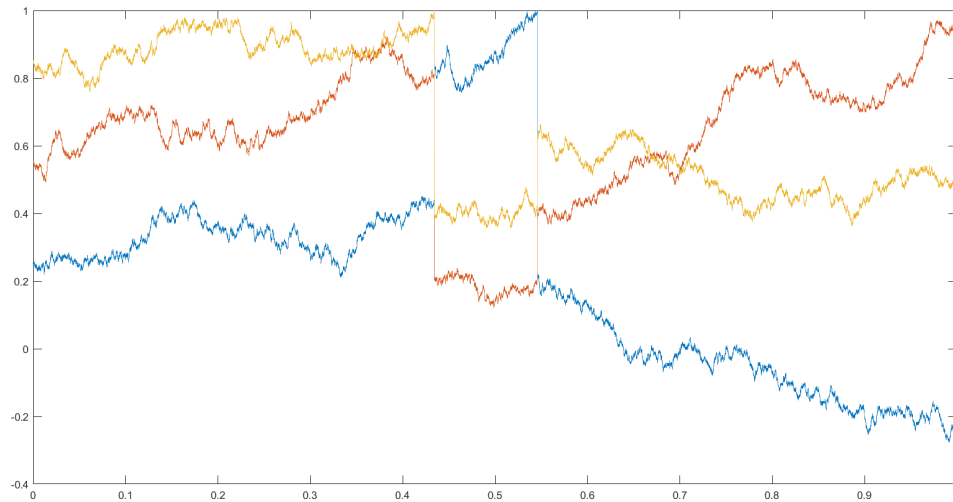


FIGURE 1 – Caption

Ces trajectoires paraissent tout à fait convenables, on voit par exemple un saut de la particule bleu qui fait monter le potentiel des deux autres aux alentours de 0.55. On voit aussi une cascade autour de 0.45 : la jaune atteint 1 donc elle saute mais c'est aussi le cas de la rouge qui même si elle n'a pas atteint 1, a dépassé la valeur seuil de $1 - \frac{\alpha}{N} \times 1$.

4.2 Modèle de risque systémique

De même, nous prenons 3 particules dans le cas du système introduit par l'équation (6), afin de visualiser l'effet de contagion sur le système avec un α de 0.7.

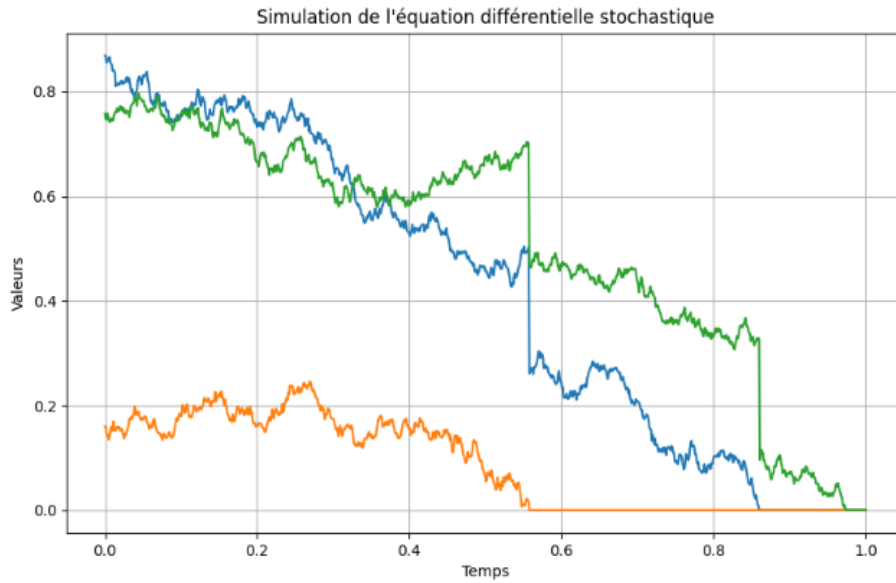


FIGURE 2 – Système à 3 particules $\alpha = 0.7$

Visuellement, les trajectoires correspondent à nos attentes. Par exemple, à l'instant $t \approx 0.55$, la trajectoire orange atteint un état de défaut, entraînant une chute des valeurs des autres courbes d'environ 0.23 correspondant à $\alpha \times k/N = 0.7/3$.

Dans le but de valider ces simulations, nous choisissons de remplacer le mouvement brownien par une fonction déterministe, pour une valeur de α égale à 0.9, avec un système de 5 particules. Le terme déterministe est pris égal à $b(t) = -0.5$. Ceci nous permettra de visualiser la cascade et la validité de la simulation dans un cadre simple.

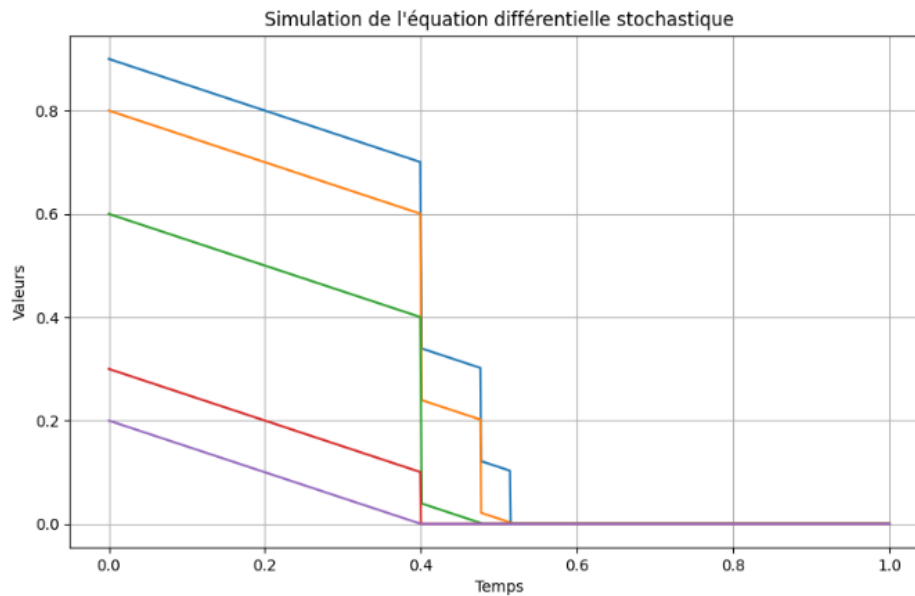


FIGURE 3 – Système à 5 particules $\alpha = 0.9$

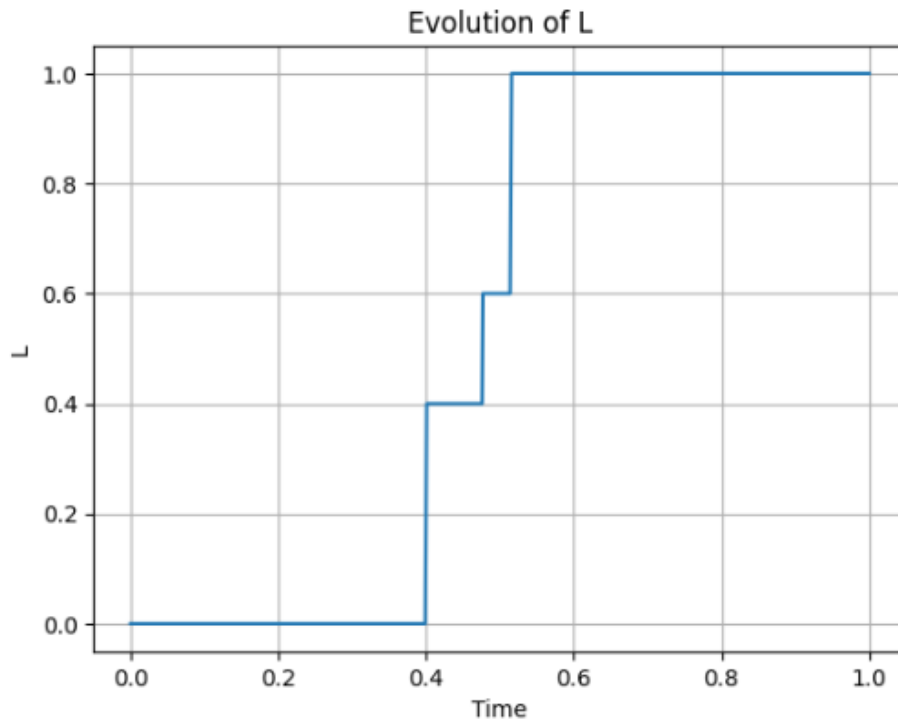


FIGURE 4 – Évolution de L

En effet, à l'instant $t = 0.4$, la courbe violette atteint la barrière de défaut, ce qui implique que Γ_0 n'est pas vide. Ceci entraîne à son tour la faillite de la banque représentée par la trajectoire rouge. Ainsi, Γ_1 est à son tour non vide, et les trois autres banques subissent une chute de $\alpha \times \text{card}(\Gamma)/N = 0.9 \times 2/5 = 0.36$. Cette observation est complétée par l'évolution de la valeur de L donnée par $\text{card}(\Gamma)/N = 0.4$. Comme dans le cas précédent, la faillite des autres banques dans la suite implique une rétroaction de $-\alpha \times \text{card}(\Gamma)/N$ par la suite.

Les trajectoires obtenues pour X_t semblent être en accord avec nos attentes. À l'instant $t = 0.5$, la distance à la défaillance associée à la courbe bleue atteint le seuil 0. Étant donné un paramètre $\alpha = 0.9$ (nous choisissons une valeur élevée de α pour mieux visualiser l'effet de la contagion) et $n = 3$ particules, nous nous attendons à une baisse instantanée des deux autres courbes au même instant, d'une valeur de $\frac{\alpha \times k}{n}$, avec $k = 1$ (un seul saut). La valeur numérique obtenue est de 0.3. En observant les courbes verte et orange, nous pouvons confirmer qu'elles effectuent effectivement des sauts de 0.3 à cet instant. À l'instant $t = 0.5$, la courbe verte passe également à zéro, ce qui entraîne une seconde baisse de la courbe verte.

4.3 Compléments

Dans les deux différents modèles, les simulations ont pu être vérifiées en mettant des équations déterministes pour chacune des particules et en vérifiant que les sauts étaient aux bons moments, les particules concernées étaient prévisibles et que les ΔX_i , c'est-à-dire, les hauteurs des sauts correspondaient aux attentes.

Une autre approche qui concerne directement la densité de la solution de l'équation de McKean-Vlasov est abordé dans la suite.

5 Approche sur les densité

5.1 Introduction du concept

Comme expliqué dans la partie concernant la propagation du chaos, les N particules tendent à être indépendante et identiquement distribuées quand N tend vers $+\infty$. On note ρ leur densité. C'est une fonction du temps et de l'espace. En nous concentrant sur le modèle financier, nous allons voir dans la suite qu'un travail peut-être fait afin d'obtenir une équation au dérivée partielle pour ρ .

5.2 Obtention de l'équation

On s'intéresse au modèle financier que l'on rappelle être le suivant.

$$X_t = X_0 + B_t - \alpha L_t, \quad \tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t \leq 0\}, \quad L_t = P(\tau \leq t).$$

Une théorie sur les groupe dont nous n'évoquerons pas les fondements ici permet de voir l'équation précédente de façon différente. En effet, si X_t^x est la solution qui part du point x de l'équation précédente et que ρ est sa densité, on peut faire en sorte d'obtenir une équation au dérivées partielles pour cette équation. On procède comme suit. Notons

$$P_t \phi(x) = \mathbb{E}(\phi(X_t^x)) = \mathbb{E}(\phi(x + B_t - \alpha L_t)) = \int_0^{+\infty} \phi(u) \rho(t, u) du.$$

Or, si on applique la formule d'Itô, on obtient

$$\phi(x + B_t - \alpha L_t) = \phi(x) + \int_0^t \phi'(x + B_s - \alpha L_s) (dB_s - \alpha dL_s) + \frac{1}{2} \int_0^t \phi''(x + B_s - \alpha L_s) ds.$$

En passant à l'espérance, le terme du mouvement brownien disparaît et on obtient

$$P_t \phi(x) = \phi(x) - \alpha \mathbb{E} \left(\int_0^t \phi'(x + B_s - \alpha L_s) dL_s \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\int_0^t \phi''(x + B_s - \alpha L_s) ds \right).$$

La théorie des semis groupes est à présent utilisée de la façon suivante. On définit un opérateur \mathbb{A} qui vérifie

$$\frac{P_t \phi(x) - P_0 \phi(x)}{t} \longrightarrow \mathbb{A} \phi(x).$$

Or comme $P_0 \phi(x) = \phi(x)$, on a

$$\frac{P_t \phi(x) - P_0 \phi(x)}{t} = -\alpha \mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \phi'(x + B_s - \alpha L_s) dL_s \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\frac{1}{t} \int_0^t \phi''(x + B_s - \alpha L_s) ds \right).$$

On en déduit donc que \mathbb{A} est l'opérateur suivant

$$\mathbb{A} \phi(x) = -\alpha \phi'(x) L'_t + \frac{1}{2} \phi''(x).$$

La clé du raisonnement pour obtenir l'équation est le théorème de **Hille-Yosida** expliqué dans [4] qui nous affirme que

$$\boxed{\frac{\partial P_t \phi(x)}{\partial t} = \mathbb{A} P_t \phi(x)}.$$

Dans notre cas comme $P_t \phi(x) = \int \phi(u) \rho(t, u) du$ et $\mathbb{A} \phi(x) = -\alpha \phi'(x) L'_t + \frac{1}{2} \phi''(x)$, on déduit l'égalité

$$\int \phi(u) \frac{\partial \rho(t, u)}{\partial t} du = -\alpha L'_t \int \phi'(u) \rho(t, u) du + \frac{1}{2} \int \phi''(u) \rho(t, u) du.$$

De cette égalité, l'équation différentielle apparaît naturellement en faisant des intégrations par parties sur le terme de droite puis en regroupant tous les termes et en utilisant pour conclure un argument de densité. On a, en prenant ϕ à support compact dans $[0, +\infty[$, en imposant $\phi(0) = 0$ afin d'avoir de la coercivité et donc unicité de la solution :

$$\begin{aligned} \int \phi(u) \frac{\partial \rho(t, u)}{\partial t} du &= \alpha L'_t \rho(t, 0) \phi(0) + \alpha L'_t \int \phi(u) \frac{\partial \rho(t, u)}{\partial x} du \\ &\quad - \frac{1}{2} \phi'(0) \rho(t, 0) + \frac{1}{2} \phi(0) \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, 0) + \frac{1}{2} \int \phi(u) \frac{\partial^2 \rho(t, u)}{\partial x^2} du. \end{aligned}$$

Qui peut se réécrire

$$\begin{aligned} &\int \phi(u) \left(\frac{\partial \rho(t, u)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(t, u)}{\partial x^2} - \alpha L'_t \frac{\partial \rho(t, u)}{\partial x} \right) du \\ &\quad - \phi(0) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, 0) + \alpha L'_t \rho(t, 0) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi'(0) \rho(t, 0) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ainsi, par des arguments de densité, on peut affirmer :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \alpha L'_t \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \\ \forall t > 0, \rho(t, 0) &= 0. \end{aligned}} \tag{12}$$

De plus, on sait $L_t = 1 - \int_0^{+\infty} \rho(u, t) du$ donc $L'_t = -\int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t}(u, t) du$. En intégrant l'équation sur ρ obtenue précédemment, on obtient

$$-L'_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} \rho(u, t) du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(u, t) du - \alpha L'_t \int_0^{+\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x}(u, t) du. \tag{13}$$

, D'où comme $\frac{\partial \rho}{\partial x}(t, x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, que $\rho(t, x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ et on $\rho(t, 0) = 0$, l'intégration donne alors la condition

$$\boxed{\forall t > 0, L'_t = \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial x}(t, 0)} \tag{14}$$

Une résolution de cette équation par éléments finis a été envisagée puis testée mais celle-ci ne semblait pas adapté, nous allons donc utiliser les simulations expliquées précédemment.

5.3 Simulation de la densité des trajectoires dans le système financier

Dans cette simulation, nous explorons le système à plusieurs trajectoires décrit par l'équation (6). Notre objectif est de représenter la densité avec un très grand nombre de trajectoires, dans l'espoir de retrouver le comportement de l'équation de la chaleur vérifié par la densité, comme décrit précédemment.

Pour la comparaison, nous nous basons sur la littérature, en particulier sur une représentation invoquée dans l'article [3]. Cette simulation de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité ρ a été réalisée avec une densité initiale représentée par la combinaison linéaire de trois indicateurs de trois ensembles dans l'intervalle $[0, 1]$.

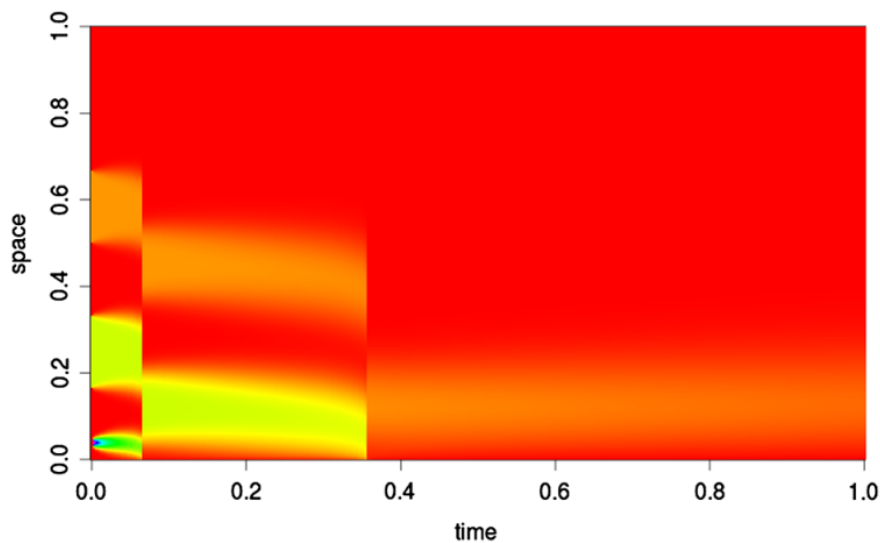


FIGURE 5 – Simulation référence - Condition initiale : combinaison linéaire de fonctions indicatrices de trois ensembles disjoints

Nous imposons une condition initiale similaire à celle de notre système à plusieurs trajectoires avec 1000 particules, et nous observons un comportement qui tend vers la simulation trouvée dans la littérature. Dans notre cas, nous visualisons un seul temps de chute.

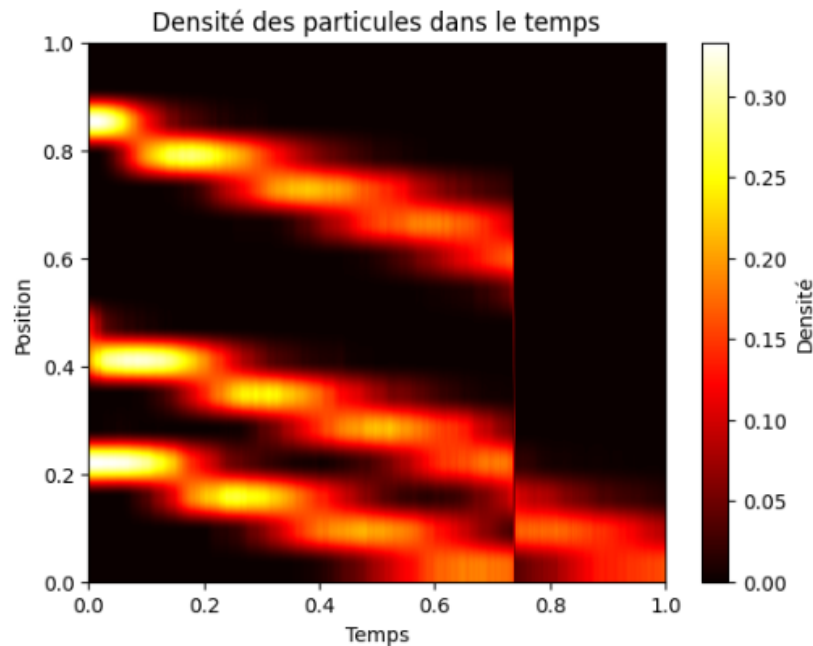


FIGURE 6 – Simulation avec 1000 particules - Condition initiale : combinaison linéaire de fonctions indicatrices de trois ensembles disjoints

Cette comparaison nous permet de vérifier que le système à plusieurs particules représenté par l'équation (6) atteint des comportements cohérents avec les résultats trouvés dans la littérature, renforçant ainsi la validité de notre approche de modélisation.

6 Conclusion

Ce projet nous a permis d'explorer un sujet de recherche stimulant qui est d'actualité. Nous avons pu comprendre les enjeux divers des équations de McKean-Vlasov, que ce soit leur forme générale rigoureuse, leurs applications ou les approximations et méthodes d'étude possibles. Nous avons étudié des équations aux dérivées partielles qui mettent en jeu des semi-groupes, qui est une notion nouvelle pour nous, mais aussi réalisé des simulations qui étaient directement interprétables.

Nous avons pu comparer nos résultats à ceux de la littérature et étudier les phénomènes de cascade ou encore de propagation du chaos. Il reste évidemment des aspects à étudier notamment concernant l'équation aux dérivées partielles liée au modèle neuronal ainsi que des améliorations possibles de ce modèle pour qu'il corresponde plus à la réalité biologique en introduisant une valeur *reset*, par exemple.

7 Bibliographie

Références

- [1] F. Delarue and J. Inglis and S. Rubenthaler and E. Tanré **Particle systems with a singular mean-field self-excitation. Application to neuronal networks**, 09/02/2015.
- [2] Cédric Villani : **Limite de champ moyen, cours de DEA, ENS de Lyon, 2001-2002.**
- [3] B. Hambly, S. Ledger, A. Sojmark, **A McKean–Vlasov equation with positive feedback and blow-ups**, arXiv :1801.07703 [math.PR] (2024)
- [4] Elisabeth Mironescu : **Processus de Markov, cours de M2, Ecole Centrale Lyon, 2022-2023**